

MAREES TERRESTRES  
BULLETIN D'INFORMATIONS

125

30 SEPTEMBRE 1996

Association Internationale de Géodésie

Commission des Marées Terrestres

Editeur Dr. Olivier FRANCIS  
Observatoire Royal de Belgique  
Avenue Circulaire 3  
1180 Bruxelles

30 septembre 1996

p.

MELCHIOR P., FRANCIS O., DUCARME B. Tidal Gravity Measurements in Southeast Asia	9493
EKMAN M. The permanent problem of the permanent tide: What to do with it in geodetic reference systems ?	9508
POLZER G., ZURN W., WENZEL H-G. NDFW Analysis of Gravity, Strain and Tilt Data from BFO.	9514
EMTER D., OTTO H., ZURN W., GLOTZL F., WENZEL H-G Direct measurement of tidal stresses in rock.	9546
TCHOURKIN V.A. (Traduction) Théorie phénoménologique de la rotation de la Terre non élastique.	9558
TIMOFEYEV V. You, PANIN S.F., SARITCHEVA You K., ANISSIMOVA L.V., GRIDNIEV D.G., MASSALSKII O.K. (Traduction). Etude des inclinaisons et des déformations de la surface de la Terre dans la zone de Rift du Baikal (Talaia).	9588
BALENKO V., DUBIK B., PAVLYK V. Analysis of air pressure variations in Poltava during 1982 - 1993.	9601

IUGG General Assembly  
Boulder, USA, July 2, 1995

International Association of Geodesy  
Symposium "GEODESY IN SOUTHEAST ASIA"

### TIDAL GRAVITY MEASUREMENTS IN SOUTHEAST ASIA

P. Melchior, O. Francis and B. Ducarme  
Observatoire Royal de Belgique  
Avenue Circulaire 3  
B-1180 Bruxelles, Belgium

#### Abstract

Since 1974, 17 temporary tidal gravity stations have been established in Southeast Asia. Most of them were installed by the Royal Observatory of Belgium in the framework of the Trans World Tidal Gravity Profile. The observations are compared to an Earth's model with liquid core and oceans using the Schwiderski and the Grenoble cotidal maps.

The calibration problems are carefully treated. The results show that the tidal gravity effects for the principal semi-diurnal  $M_2$  tide are modeled with a precision of 2.5 microgal which is not satisfactory. On the contrary the lunar diurnal  $O_1$  tide is modeled almost perfectly with only few exceptions which eliminates the hypothesis of instrumental phase errors. Two reasons can be invoked. Either a deficiency in the  $M_2$  turbulent cotidal map of Java sea and neighbouring seas where not less than 8 or 10 amphidromic points make these maps very complicate, either a regional anomaly in the earth tides deformations as reflected by the presence of the largest geoid bump.

#### 1. Introduction

The new techniques now available in Geodesy and Geodynamics reach such a high precision in positioning and gravity (absolute as well as differential) measurements that it becomes compulsory to introduce corrections for the tidal effects with a precision better than one percent.

Tidal effects are particularly important (Table 1) and difficult to calculate or modelize in Southeast Asia.

During the period 1973-1981 the Royal Observatory of Belgium, assisted by the International Centre for Earth Tides in Brussels, has established not less than 15 temporary tidal gravity stations in this area (Table 2). Two stations were also established in 1957 at Saigon and Baguio by the University of California (Los Angeles) but we have not been able to check or revise the calibration of the two LaCoste Romberg n° 2 and n° 5 instruments used (Melchior 1994).

Another LaCoste Romberg (n° 305) was installed in 1977-78 at Baguio by the International Latitude Observatory in Mizusawa, Japan but we were also unable to check the calibration. Nevertheless the results given in Table 6 for this instrument look reliable.

Among the other stations established by the Brussels team, Manila and Port Moresby stations are not too reliable because of some difficulties encountered in the calibration of the LaCoste Romberg gravimeter n° 3.

From a complete revision of all existing data, Melchior (1994), using 215 stations almost free of obvious anomalies or calibration errors, concluded for the classical amplitude factor  $\delta$  ( $\delta = 1 + h - 3/2k$ ;  $h$ ,  $k$ : elastic Love numbers) and phase  $\alpha$ :

$$\delta (M_2) = 1.1564 \pm 0.0005$$

$$\alpha (M_2) = -0.09^\circ \pm 0.03^\circ \text{ (minus is a lag),}$$

while the calibrations in amplitude of the different instruments, made at the Brussels fundamental station, are estimated to be better than 1%.

This means that, at the equator, a maximum error of 0.8  $\mu\text{gal}$  is possible on the  $M_2$  measured amplitude and less than 0.2  $\mu\text{gal}$  on the  $O_1$  measured amplitude.

## 2. Semi-diurnal tides in Southeast Asia

It is well known that while the tesseral diurnal tidal gravity waves vanish, the sectorial semi-diurnal components are maximum at the equator. According to Table 1 they can reach a peak to peak amplitude of 340 microgals at some epochs when the four main waves are adding their effects.

One has also to add the amplitudes of the attraction and loading due to the oceanic tides acting at the same frequencies which, in principle, can be evaluated on the basis of the Schwiderski corange-cotidal map which had been recommended as a working standard by the IAG Commission on Earth Tides. These effects are given in the Table 4 for all the Southeast Asia stations where tidal gravimeters have been installed. They are not negligible at all, reaching more than 20 microgals peak to peak at some places (notably Kupang, Timor).

However the oceanic tides behaviour is extremely complicate in the Indonesian area, the Schwiderski and Grenoble maps of the main wave  $M_2$  exhibiting respectively not less than eight and ten amphidromic points situated along a line meandering successively between the Malay peninsula and Cambodge, between Java and Borneo (Kalimantan), and between Australia and Timor, Papua (see figure 1 and Table 5).

The usual interpretation procedure consists, for each tidal wave, to consider the result of the harmonic analysis of the observations as a vector  $A (A, \alpha)$  defined by the amplitude  $A$  (in microgal) and its phase difference  $\alpha$  with respect to the local phase deduced from the tidal gravity potential.

For the different tidal vectors related to one tidal wave under consideration (in this paper the semi-diurnal sectorial wave  $M_2$ ), we will use here the same notations as in previous papers (Melchior, 1983) and illustrated by Fig. 2.

$R (R, 0)$  is the earth model computed response to the luni-solar tidal potential; it contains as a factor the combination of Love numbers  $\delta = 1 + h - (3/2)k$  corresponding to the Earth model considered.

$A (A, \alpha)$  is the observed tidal response as obtained by least squares analysis of the observations.

$B (B, \beta) = A - R$  is the first residue vector which contains mainly the oceanic tides contribution to the gravity variations.

$L(L, \lambda)$  is the oceanic contribution calculated by the Farrell (1972) procedure using the Schwiderski cotidal-corange maps (1980) (Francis and Dehant, 1987).

$X(X, \chi) = B - L = A - R - L$  is the final residue vector expected to represent the observations noise (about 0.3  $\mu\text{gal}$  for the  $M_2$  wave). In number of cases, however, it greatly exceeds this noise level.

From the Data Bank of ICET which contains the results of some 350 tidal gravity stations all around the world, Melchior (1995 fig. 3) obtained the following means and standard deviations:

$$X \cos \chi (M_2) = + 0.002 \pm 0.045 \mu\text{gal}$$

$$X \sin \chi (M_2) = - 0.154 \pm 0.028 \mu\text{gal}$$

Obviously the results in Southeast Asia given in Table 6, from Colombo (Sri Lanka) in the West to Port Moresby (Papua) in the East, are by very far greater than these mean values and than the observation noise (0.3  $\mu\text{gal}$  - Melchior, 1994) as well.

This could be interpreted as due to the complicate behaviour of the  $M_2$  oceanic tide around the islands of the Indonesian Archipelago.

But a check with a more recent and more precise corange-cotidal map is needed to endorse such a statement. Such a map, recently produced by the Grenoble team from a purely hydrodynamic model (Le Provost et al., 1995) has been made available to us. This map is constructed on a  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  grid, thus four times more detailed than the Schwiderski map which is based upon a  $1^\circ \times 1^\circ$  grid.

One could expect therefore some improvement in the description of the tides around the many islands of Indonesia, notably inside the Java sea, Banda sea and the Timor and Savu seas. We used it to calculate new  $L$  vectors and, as a result, new  $X$  vectors which are given in the same Table 6 as the Schwiderski  $L$ ,  $X$  vectors for the 17 stations. The situation is, at first sight, not different as at 5 stations only has the  $X$  amplitude significantly decreased (by at least 0.5  $\mu\text{gal}$ ) with respect to the Schwiderski results (Kota Kinabalu, Manila, Bandung, Manado, Jaya Pura).

Taking simple arithmetic means we observe a mean  $B$  amplitude of 2.8  $\mu\text{gal}$  and a mean  $X$  amplitude of 1.7  $\mu\text{gal}$  after correction either with the Schwiderski map or with the Grenoble map.

One should also point out that the observed amplitudes of the  $M_2$  oceanic tide is less than 30 cm in all harbours close to our stations at the exception of Kuala Lumpur, Kupang and Darwin (Table 7), three places where the  $X$  residue is not more than 1  $\mu\text{gal}$ .

In Table 7 we compare the phases measured in harbours which are close to our tidal gravity stations with the phases listed in the Schwiderski tables. The agreement is generally very good as Schwiderski, most probably, used the same data as us (Schwiderski 1979).

The high number of amphidromic points in both maps (Table 5) is evidence of the low amplitudes of the oceanic tides in this area.

When we consider the difference in the loading amplitudes and phases obtained from both maps as given in the last columns of Table 6 we observe that the difference in amplitude is comprised between 0.5 and 1.2 microgal. However there are two groups of stations for what concerns the phases:

- a group of 8 stations situated to North, North East ( $\lambda \leq 107^\circ$  E) of the equator with a mean difference 0.6  $\mu\text{gal}$  and a phase around -  $150^\circ$
- a group of 9 stations situated to the South West ( $\lambda > 114^\circ$  E) with a mean difference 0.8  $\mu\text{gal}$  and a phase around +  $75^\circ$ ,

the two groups being separated by the meandering line connecting the amphidromic points of the Schwiderski and Grenoble maps mentioned before. The corresponding load and attraction difference between these two groups is 1.3  $\mu\text{gal}$  with a  $-122.5^\circ$  phase difference (Schwiderski map - Grenoble map). This difference is obviously related to a shift of the amphidromic points of one map with respect to the other.

Anyway the residual amplitudes X remain quite high as most of them are higher than one microgal which is difficult to explain by errors in the computation of the oceanic tides effects in an area where there are so many amphidromic points (null tidal amplitude).

A special investigation was performed by one of our students (Mouzon, 1981) about the effect of the Malacca Strait tides upon the stations Penang and Kuala Lumpur. She used the British Admiralty Map established for this important navigation Channel.

Her results, applied to the Schwiderski residues X given in Table 6 are :

2550	Kuala Lumpur	X (Schwiderski)	1.10	99°
		Admiralty map	0.61	41°
		difference	0.94	133°
2551	Penang	X (Schwiderski)	1.51	164°
		Admiralty map	1.40	- 173°
		difference	0.58	97°

There is a real improvement for Penang island which is at the Northern exit, 280 km broad, of the Malacca Strait with a local oceanic tidal amplitude of 57 cm (Table 7).

For Kuala Lumpur which is South of Penang, in the narrow part (60 km) of the Strait, there is practically no improvement. One should point out the very large amplitude, 136 cm, of the  $M_2$  oceanic tide at the closest harbour Port Klang (Table 7) which is most probably responsible for a strong local effect. On the opposite side of the Strait, along the Sumatra coast, the amplitude of the  $M_2$  wave increases from 46 cm at the Northern entry to 168 cm in front of Kuala Lumpur and then decreases to 75 cm in front of Johore, Southern exit.

Considering that the "in phase" components ( $X \cos \chi$ ) are all strongly positive for both solutions (Schwiderski and Le Provost) and quite larger than the "out of phase" components ( $X \sin \chi$ ) in all Indonesian stations (at the exception of Jaya Pura - North New Guinea) it could be tempting to raise the problem of effects due to lateral heterogeneities (Melchior 1995) in this Indonesia area which is the contact of two tectonic plates and the place with the world's biggest geoid bump (COSPAR 1994).

Only three stations amongst those installed in Southeast Asia are not coastal stations ( $D > 50$  km): Chiang Mai, Bandung and Darwin but we have found informations about the heat flow only at Bandung and Darwin.

These two stations (neither the other 15 here reported) were not used by

Melchior (1995) in his attempt to confirms a correlation between heat flow and tidal residue  $X \cos \chi$  owing to the complicated behaviour of the oceanic tides.

We can see here that, even if the Grenoble map decreases the amplitudes of the residues at both places, they still remain positive at the level of one microgal which fits with the correlation suggested.

	D (km)	H	X cos $\chi$ Schw.	Gren.
4100 Bandung	70	82	2.21	1.11
4210 Darwin	60	96	1.00	0.76

H : heat flow in milliwat  $m^{-2}$  (mean value 57)

$X \cos \chi$  : microgal.

### 3. The lunar diurnal wave $O_1$ in Southeast Asia

As said before the diurnal waves vanish at the equator. It is therefore not appropriate to consider their amplitude factor  $\delta$  and phase because the observed amplitudes are considerably affected by the attraction and loading of oceanic tides.

We therefore analyse here these oceanic effects by comparing in the Table 8 the B residue vector to the L oceanic vector and their difference  $X = B - L$ .

As shown in this table the oceanic effect has a minimum percentage to the total observed amplitude of 3% at Chiang Mai (highest latitude site:  $18.79^\circ$ ) and maxima of 177% at Jaya Pura (latitude  $-2.5^\circ$ ) and of 115% at Manado (latitude  $1.45^\circ$ ).

Considering the small amplitudes of the B and L vectors - less than 3  $\mu gal$  - the concordance between the phases  $\beta$  and  $\lambda$  is in general impressive, the only exceptions being Manila, Manado and Darwin.

This shows that:

- 1) the instrumental phase lags are well corrected
- 2) the  $O_1$  Schwiderski corange-cotidal map better fits the observations than the  $M_2$  map which may be attributed to the fact that there is less turbulence at the  $O_1$  frequency ( $13.943^\circ/hour$ ) than at the  $M_2$  frequency ( $28.984^\circ/hour$ ); there are indeed only three  $O_1$  amphidromic points in this area instead of eight in the case of  $M_2$  wave.
- 3) that tidal gravity measurements in the equatorial regions contain valuable and useful informations in the diurnal band also.

#### 4. Acknowledgements

The authors wish to thank Prof. Jacob Rais, Director of the Indonesian National Agency for Survey and Mapping, Bakosurtanal for his deep interest and efficient help in the establishment of six successful tidal gravity stations in Indonesia.

Thanks are also expressed to our colleagues who helped us in the installations of the tidal gravity stations listed in Table 2.

#### References

- Chueca, R., Ducarme, B., and Melchior, P., 1984.  
Preliminary investigation about a quality factor of tidal gravity stations.  
Bull. Inf. Marées Terrestres, 94: 6334-6337.
- COSPAR, 1994.  
Géoïde observé par les missions spatiales. Programme Spatial français,  
XXXe Assemblée Hambourg, page 29.
- Francis, O. & Dehant, V., 1987.  
Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimation.  
Bull. Inf. Marées Terrestres, 100 : 6962-6986.
- Le Provost, C., Genco, M.L., Lyard, F., Vincent, P. and Caneill, P., 1995.  
Spectroscopy of the World Ocean Tides from a Finite-Element Hydrodynamic model. J. Geophys. Res., Special TOPEX/POSEIDON ISSVE, in press.
- Melchior, P., 1983.  
The Tides of the Planet Earth.  
Pergamon Press 2nd Edition 641 pages.
- Melchior, P., 1994.  
A new data bank for tidal gravity measurements (DB 92).  
Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol 82 : 125-155.
- Melchior, P., 1995.  
An ongoing discussion about the correlation of tidal gravity anomalies and heat flow densities.  
Physics of the Earth and Planetary Interiors, Accepted for publication, july 1994.
- Melchior, P. and Ducarme, B., 1977.  
Activities of the FAGS International Centre for Earth Tides (ICET) in the region between Thailand and Oceania.  
Proc. Regional Geod. Networks for the Year 2000 Bandung, Indonesia : 172-190.
- Melchior, P. and Ducarme, B., 1980.  
Tidal Gravity Profiles 1973-1980  
Bull. Observ. Marées Terrestres, Obs. Roy. Belgique, vol. IV, fasc. 5: 47-62.

Mouzon, J., 1981.

Etude des effets de surcharge océanique sur la croûte terrestre dans le détroit de Malacca.

Mémoire, Faculté des Sciences, Université Catholique de Louvain-la-Neuve, 180 pages.

Schwiderski, E., 1980.

On charting global ocean tides.

Rev. Geophys. Space Phys., 18: 243-268.

Schwiderski, E.W., 1979.

Global Ocean Tides, Part II: The Semi-diurnal principal Lunar Tide ( $M_2$ ).

Atlas of Tidal Charts and Maps.

Naval Surface Weapons Center TR 79-414, Dahlgren, Virginia 22448.

Schwiderski, E.W., 1981.

Global Ocean Tides, Part V: The diurnal principal Lunar Tide ( $O_1$ ). Atlas of Tidal Charts and Maps.

Naval Surface Weapons Center TR 81-144, Dahlgren, Virginia 22448.

Table 1

Amplitudes of the Four Main Sectorial Semi-diurnal Waves (in  $\mu\text{gal}$ )

at the Equator				
	Wave	Period	Rigid Earth model	Elastic Earth model
M2	Main Lunar	12h 4206	75.07	87.08
S2	Main Solar	12h 0000	46.56	54.01
N2	Elliptic Lunar	12h 6583	14.37	16.67
K2	Luni-Solar declinational	11h 9672	9.51	11.03

Table 2

Tidal Gravity Stations installed in Southeast Asia

Station	Country	Instrument	Installation	Epoch	N	Q
2460 Colombo	Sri Lanka	G 765	Ducarme	1977-78	3744	8.0
2502 Chiang Mai	Thailand	G 084 L 008	Ducarme Poitevin Phiphitkun	1974 1982	4800	5.4
2501 Bangkok	Thailand	G 084	Melchior Ducarme	1973-74	2208	5.3
2551 Penang	Malaysia	G 765	Ducarme	1976	3600	5.8
2550 Kuala Lumpur	Malaysia	G 765	Melchior	1976-77	3744	12.0
2701 Saigon	Vietnam	L 005	Forbes	1957	912	6.0
4100 Bandung	Indonesia/Java	L 336	Ducarme	1976	4704	4.4
4210 Darwin	Australia	L 336	Melchior	1975-76	2688	1.6
4010 Baguio	Philippines	L 305	Nakai Sasaki	1978	2112	3.8
4011 Manila	Philippines	L 003	Melchior Ducarme	1973-74	2064	1.4
2555 Kota Kinabalu	East Malaysia Borneo	G 765	Ducarme	1977	3552	4.6
4105 Banjar Baru	Indonesia Borneo	L 008	Poitevin Matindas Mubroto	1979-80	4320	7.8
4111 Manado	Indonesia Sulawesi	L 336	Matindas	1978	2688	1.4
4120 Jaya Pura	Indonesia New Guinea	L 336	Ducarme Mubroto	1977-78	1968	0.9
4110 Ujung Pandang	Indonesia Sulawesi	L 336	Melchior	1976-77	3072	3.6
4115 Kupang	Indonesia Timor	L 008	Matindas Mubroto	1980-81	5616	6.5
4160 Port Moresby	Papua New Guinea	L 003	Melchior Ducarme	1974-75	3504	3.6

G : Geodynamics Gravimeter

L : LaCoste-Romberg Gravimeter

N : Number of hourly readings

Q : Quality factor (Chueca et al.1984)

Table 3 Wave M2 - Amplitude and Tidal Factors

	Stations	Observed			Corrected for oceanic effects	
		Amp1	$\delta$	$\alpha$	$\delta^*$	$\alpha^*$
2460	Colombo	81.94	1.1085	0.86	1.1261	0.49
2502	Chiang Mai	77.05	1.1459	-0.58	1.1529	0.41
2501	Bangkok	80.98	1.1446	-0.32	1.1534	0.68
2551	Penang	83.86	1.1772	0.34	1.1738	0.27
2550	Kuala Lumpur	86.84	1.1613	0.43	1.1577	0.71
2701	Saigon	83.46	1.1531	-0.92	1.1617	-0.77
4100	Bandung	89.69	1.2132	-1.86	1.1902	-0.67
4210	Darwin	83.93	1.1772	0.34	1.1738	0.27
4010	Baguio	83.00	1.2020	-0.17	1.1664	0.31
4011	Manila	82.72	1.1780	-0.34	1.1437	0.05
2555	Kota Kinabalu	85.29	1.1496	-0.68	1.1420	-0.33
4105	Banjar Baru	88.49	1.1839	-0.14	1.1698	0.37
4111	Manado	92.30	1.2315	-0.40	1.1903	-0.43
4120	Jaya Pura	89.75	1.1989	-1.62	1.1736	-1.18
4110	Ujung Pandang	88.05	1.1856	-1.92	1.1986	-1.12
4115	Kupang	81.91	1.1275	-3.15	1.1751	-0.18
4160	Port Moresby	89.58	1.2271	-0.34	1.2280	0.59

Table 4 Oceanic Loading and Attraction effects according to Schwiderski Maps

Station	Principal Waves					
	M2		N2		S2	
	$\mu\text{gal}$	degrees	$\mu\text{gal}$	degrees	$\mu\text{gal}$	degrees
2460 Colombo	1.44	158	0.18	-165	1.01	115
2502 Chiang Mai	1.44	-110	0.30	-106	0.59	-165
2501 Bangkok	1.57	-113	0.33	-110	0.71	-169
2551 Penang	1.51	-128	0.38	-121	1.01	177
2550 Kuala Lumpur	0.51	-58	0.13	-76	0.37	176
2701 Saigon	0.67	-160	0.18	-117	0.40	163
4100 Bandung	2.51	-49	0.49	-26	0.83	-116
4210 Darwin	0.24	22	0.11	49	0.16	-10
4010 Baguio	2.56	-16	0.44	-3	0.94	-32
4011 Manila	2.47	-13	0.43	1	0.93	-30
2555 Kota Kinabalu	0.78	-48	0.12	-33	0.18	-60
4105 Banjar Baru	1.32	-38	0.20	-26	0.26	-84
4111 Manado	3.08	0	0.54	14	1.78	-24
4120 Jaya Pura	2.02	-22	0.44	5	0.41	-13
4110 Ujung Pandang	1.59	-129	0.28	-121	0.62	170
4115 Kupang	5.67	-130	0.86	-121	3.08	170
4160 Port Moresby	1.49	-93	0.50	-61	1.13	-51

Table 5

Amphidromic Points

Tidal Wave M2

	Schwiderski Map			Area	Grenoble Map		
	latitude	longitude	rotation		latitude	longitude	rotation
	8°	104.0°	CCW	Gulf of Thailand Gulf of Thailand	12.5°	100.5°	?
*	5°	106.5°	CCW	East of Malaysia Southeast of Malaysia	5.5° 1.0° -1.0°	105.5° 106.5° 108.0°	CW CCW CCW
	-5°	111.5°	CW	Java Sea South of Borneo			
*	-6°	115.0°	CCW	Java Sea South of Borneo	-5.5°	114.0°	CW
*	-13°	128.0°	CW	Timor Sea	-13.5°	127.0°	CW
	-10°	139.0°	CCW	Arafura Sea Arafura Sea	-6.5° -10.5°	136.5° 139.0°	CCW CW
*	-15°	140.0°	CCW	Gulf of Carpentaria	-14.5°	137.5°	CCW
				Coral Sea	-10.5°	143.5°	CW
	-10°	153.0°	CCW	Solomon Sea			

Tidal Wave O1

*	8°	103.0°	CW	Gulf of Thailand	8.0°	102.0°	CW
	-6°	110.5°	CW	Northern Coast of Java			
*	-13°	139.0°	CW	Gulf of Carpentaria	-13.0°	138.5°	?

CW : Clockwise

CCW: Counterclockwise

\* : identical position on both maps

Table 6

NUM	STATION	LONG	LAT	D	B	$\beta$	L	$\lambda$	Observed			Schwiderski			Grenoble			Schwiderski map			Grenoble map
									L	$\lambda$	X	$X \cos \lambda$	$X \sin \lambda$	X	$X \cos \lambda$	$X \sin \lambda$	X	$\chi$	amplitude	phase	$\chi_c - \chi_s$
2460	COLOMBO	79.87	6.90	3	4.01	162	1.44	158	1.46	148	-2.48	0.70	2.58	164	-2.58	0.47	2.62	170	0.25	-113	
2502	CHIANG MAI	98.98	18.79	300	1.24	-141	1.44	-110	1.08	-93	-0.48	0.57	0.75	130	-0.90	0.30	0.95	162	0.50	-147	
2501	BANGKOK	100.60	13.79	25	1.19	-158	1.57	-113	1.53	-89	-0.48	0.99	1.10	116	-1.12	1.08	1.56	136	0.64	-188	
2551	PENANG	100.30	5.36	1	2.51	-162	1.51	-128	1.11	-139	-1.46	0.41	1.51	164	-1.55	-0.05	1.55	-178	0.47	-102	
2550	KUALA LUMPUR	101.65	3.12	30	0.66	82	0.51	-58	1.18	19	-0.18	1.09	1.10	99	-1.03	0.27	1.06	165	1.18	-136	
2701	SAIGON	106.70	10.78	60	1.44	-111	0.67	-160	0.05	160	0.11	-1.12	1.12	-84	-0.47	-1.36	1.44	-109	0.63	-157	
4100	BANDUNG	107.63	-6.90	70	4.84	-37	2.51	-49	3.06	-26	2.21	-1.03	2.44	-25	1.11	-1.57	1.92	-55	1.22	-154	
4210	DARWIN	131.13	-12.85	60	1.32	22	0.24	22	0.51	23	1.00	0.41	1.08	22	0.76	0.30	0.82	21	0.26	-155	
																		MEAN	0.60	-147	
4010	BAGUIO	120.58	16.41	25	3.33	-31	2.56	-16	2.10	-33	0.40	-1.01	1.09	-69	1.10	-0.57	1.24	-27	0.83	32	
4011	MANILA OBS	121.07	14.64	20	1.35	-21	2.47	-13	1.84	-39	-1.15	0.09	1.15	176	-0.18	0.66	0.69	105	1.13	31	
2555	KOTA KINABALU	116.07	5.95	2	1.28	-128	0.78	-48	0.85	-95	-1.31	-0.43	1.38	-162	-0.71	-0.16	0.73	-167	0.66	24	
4105	BANJAR BARU	114.78	-3.33	20	1.79	-7	1.32	-38	1.58	-48	0.73	0.58	0.94	38	0.72	0.96	1.20	53	0.38	92	
4111	MANADO	124.83	1.45	4	5.39	-7	3.08	0	4.12	-9	2.27	-0.66	2.36	-16	1.28	-0.04	1.28	-2	1.17	148	
4120	JAYAPURA	140.67	-2.50	5	3.83	-41	2.02	-22	2.87	-40	1.01	-1.77	2.04	-60	0.67	-0.69	0.96	-45	1.14	107	
4110	UJUNG PANDANG	119.63	-5.67	12	3.48	-58	1.59	-129	2.38	-122	2.85	-1.72	3.33	-31	3.10	-0.93	3.24	-17	0.83	72	
4115	KUPANG	123.57	-10.20	1	5.14	-119	5.67	-130	6.76	-127	1.18	-0.17	1.19	-8	1.56	0.91	1.81	30	1.15	71	
4160	PORT MORESBY	147.15	-9.41	5	4.92	-6	1.49	-93	3.13	-94	4.97	0.97	5.06	11	5.10	2.61	5.73	27	1.64	85	
																	MEAN	0.79	76		

D : Distance, in Km, to the sea shore  
 $\beta, L, X$  are given in  $\mu$ gal  
 $\beta, \lambda, X$  are given in degrees

Table 7

## Oceanic Tide M2 at closest Harbour

	Station	Long.	Lat.	Harbour	Long.	Lat.	$\Lambda$ (cm)	$\alpha$	$\alpha-2\lambda$	Schwiderski
2460	Colombo	79.87	6.90	Colombo			17.6	50°	250°	252°
2502	Chiang Mai	98.98	18.79							
2501	Bangkok	100.60	13.79							
2551	Penang	100.30	5.36	Penang			56.8	354°	153°	
2550	Kuala Lumpur	101.65	3.12	Klang	101.23	3.00	136.2	132°	289°	
2701	Saigon	106.70	10.78	Anam Hatien	104.45	10.37	10.0	96°	247°	
4100	Bandung	107.63	-6.90	Jakarta	106.90	-6.10	5.3	350°	137°	
4210	Darwin	131.13	-12.85	Darwin			199.9	144°	242°	220°
4010	Baguio	120.58	16.41	San Fernando	120.30	16.60	7.6	273°	32°	32°
4011	Manila Obs.	121.07	14.64	Manila			20.0	305°	63°	55°
2555	Kota Kinabalu	116.07	5.95	Gaya	116.10	6.10	21.3	312°	80°	100°
4105	Banjar Baru	114.78	-3.33	Sungai Musang	114.50	-3.50	28.8	142°	273°	310°
4111	Manado	124.83	1.45	Gorontalo	123.10	0.50	14.5	115°	229°	280°
4120	Jayapura	140.67	-2.50	Hollandia			25.0	213°	292°	288°
4110	Ujung Pandang	119.63	-5.67	Macassar			8.0	70°	191°	200°
4115	Kupang	123.57	-10.20				45.8	317°	70°	48°
4160	Port Moresby	147.15	-9.41	Finsch Harb	147.80	-6.60	6.8	75°	139°	

Table 8      Lunar Diurnal Tidal Wave O1      Observed Amplitudes and Residues

	Station	Lat.	A	B	$\beta$	L	$\lambda$	X	$\chi$	B/A %
4111	Manado	1.45	1.85	2.12	-124.6	1.77	-59.0	2.13	-173.7	115
4120	Jaya Pura	-2.50	1.23	2.18	-16.9	1.50	-19.1	0.68	-12.1	177
2550	Kuala Lumpur	3.12	4.06	0.97	-88.2	1.08	-89.3	0.11	80.4	24
4105	Banjar Baru	-3.33	4.84	2.23	-93.1	1.98	-83.8	0.43	-141.7	46
2551	Penang	5.36	6.60	1.18	-99.2	1.05	-83.3	0.34	-157.5	18
4110	Ujung Pandang	-5.67	7.71	2.73	-93.0	2.20	-89.5	0.54	-107.2	35
2555	Kota Kinabalu	5.95	8.19	3.26	-88.2	2.40	-78.3	0.99	-113.1	40
4100	Bandung	-6.90	8.57	1.46	-84.7	1.51	-73.9	0.28	-180.5	17
2460	Colombo	6.90	8.66	0.35	77.0	0.28	78.6	0.07	70.7	4
4160	Port Moresby	-9.41	10.65	0.96	4.9	1.60	-1.8	0.66	168.5	9
4115	Kupang	-10.20	14.17	2.79	-120.9	2.35	-94.9	1.23	-177.1	20
2701	Saigon	10.78	13.64	1.72	-79.5	1.96	-79.8	0.23	97.8	13
4210	Darwin	-12.85	16.90	1.46	152.3	1.12	-109.5	1.97	117.9	9
2501	Bangkok	13.79	17.02	0.60	-54.0	0.57	-50.7	0.05	-97.6	4
4011	Manila	14.64	17.41	1.92	-98.4	1.78	-54.8	1.38	-161.0	11
4010	Baguio	16.41	20.42	2.20	-57.4	1.94	-57.0	0.26	-60.3	11
2502	Chiang Mai	18.79	22.23	0.60	-62.4	0.43	-61.2	0.17	-65.5	3

A, B, L, X are given in  $\mu$ gals

$\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ , are given in degrees

Table 9      Oceanic Tide O1 at closest Harbour

	Station	Long.	Lat.	Harbour	Long.	Lat.	A(cm)	$\alpha$	$\alpha - \lambda$	Schwiderski
2460	Colombo	79.87	6.90	Colombo			2.9	62°	-18°	-13°
2502	Chiang Mai	98.98	18.79							
2501	Bangkok	100.60	13.79							
2551	Penang	100.30	5.36	Penang			4.2	274°	174°	178°
2550	Kuala Lumpur	101.65	3.12	Klang	101.23	3.00	3.4	169°	67°	
2701	Saigon	106.70	10.78	Anam Hatien	104.45	10.37	13.0	45°	-62°	165°
4100	Bandung	107.63	-6.90	Jakarta	106.90	-6.10	13.5	120°	12°	
4210	Darwin	131.13	-12.85	Darwin			34.7	313°	182°	187°
4010	Baguio	120.58	16.41	San Fernando	120.30	16.60	20.1	276°	155°	154°
4011	Manila Obs.	121.07	14.64	Manila			28.0	278°	157°	156°
2555	Kota Kinabalu	116.07	5.95	Gaya	116.10	6.10	29.8	267°	151°	153°
4105	Banjar Baru	114.78	-3.33	Sungai Musang	114.50	-3.50	27.3	269°	154°	152°
4111	Manado	124.83	1.45	Gorontalo	123.10	0.50	10.4	227°	102°	109°
4120	Jayapura	140.67	-2.50	Hollandia			13.0	189°	48°	54°
4110	Ujung Pandang	119.63	-5.67	Macassar			17.0	278°	158°	157°
4115	Kupang	123.57	-10.20				10.4	328°	204°	163°
4160	Port Moresby	147.15	-9.41	Finsch Harb	147.80	-6.60	7.0	272°	125°	

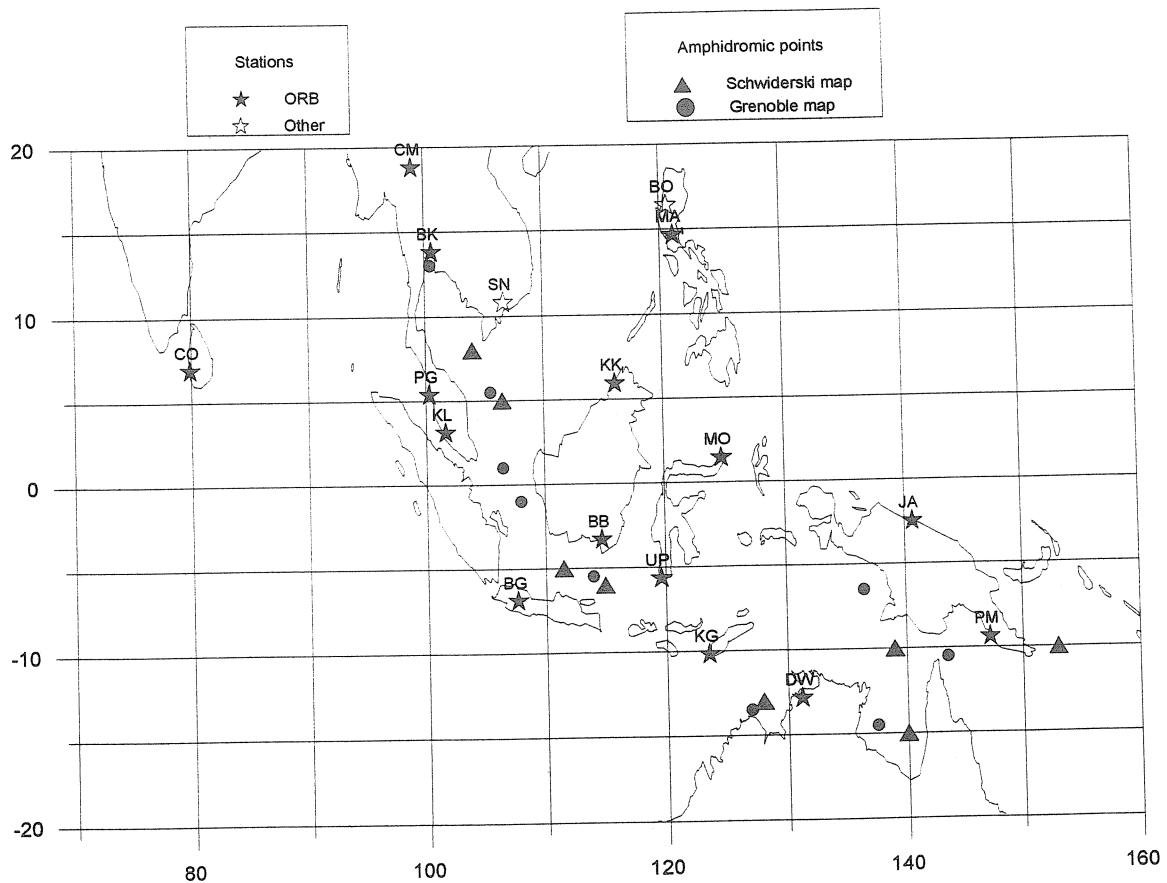


Figure 1 Geographical distribution of the tidal gravity stations and of the wave  $M_2$  amphidromic points in the Schwiderski and in the Grenoble cotidal maps.

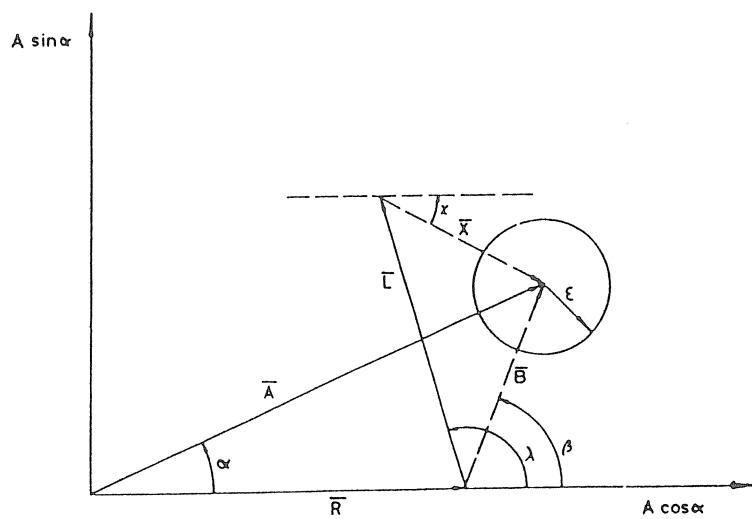


Figure 2 Definitions and notations:  $A (A, \alpha)$ , observed vector;  $R (R, 0)$ , elastic oceanless earth model response (calculated);  $B (B, \beta) = A - R$ ;  $L (L, \lambda)$ , oceanic attraction and loading vector (calculated);  $X (X, \chi) = B - L = A - R - L$  final residue;  $\epsilon$ , noise level approaching  $0.3 \mu\text{gal}$ ;  $X$  greater than  $\epsilon$ ?

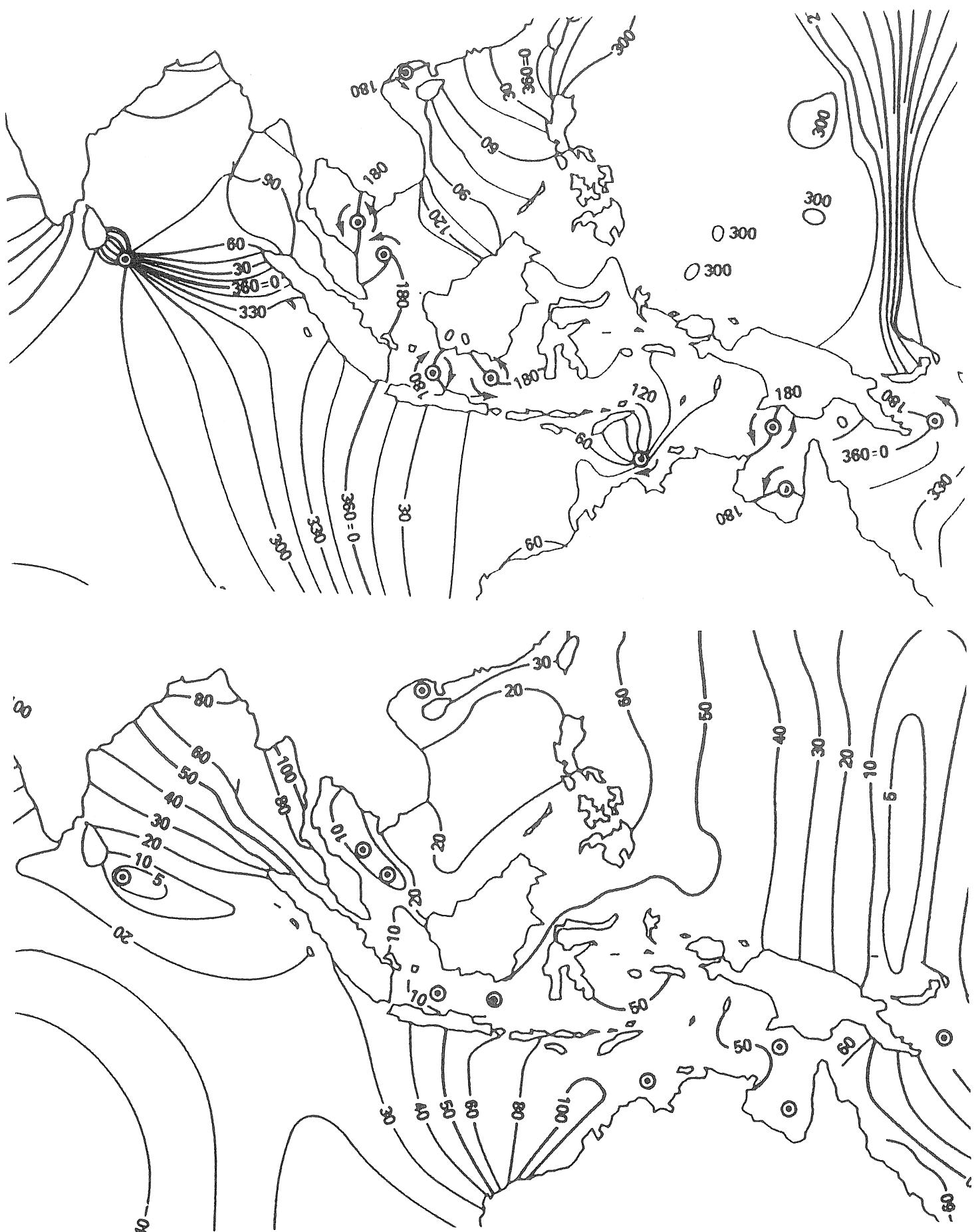


Figure 3  $M_2$  wave cotidal and corange maps according to Schwiderski (1979).

# The permanent problem of the permanent tide: What to do with it in geodetic reference systems?

Martin Ekman

Geodetic Research Division  
National Land Survey  
S - 801 82 Gävle, Sweden

## Abstract

The problem of the permanent earth tide in geodetic reference systems is discussed. Advantages and disadvantages with the mean case, the zero case and the non-tidal case, respectively, are treated in order to try to understand which solution should be preferred.

## Introduction

The permanent earth tide has been a controversial subject in geodetic reference systems for quite a long time now (starting with Jensen (1949) and Honkasalo (1964), and getting more intense with Heikkinen (1979), Ekman (1979) and Grotens (1980)). There are three different cases to choose between: The *non-tidal case (tide-free case)*, in which the permanent tide is eliminated; the *mean case*, in which the permanent tide is retained; the *zero case*, in which the permanent tidal attraction of the Moon and Sun is eliminated, whereas the permanent tidal deformation of the Earth is retained. After the earlier used mean and non-tidal cases were found to suffer from serious drawbacks, the zero case was introduced as a solution (for both gravimetry, levelling and GPS); see Ekman (1989).

During recent years there has been some discussion on handling the permanent tide in such a way that one would be able to revert from the zero quantities to the mean quantities in geodetic systems. The non-tidal quantities, although still in frequent use, do not find much support in the discussion any longer. I would like to comment a little on these matters, partly inspired by the papers of Zeman (1993) and Poutanen, Vermeer and Mäkinen (1996). Definitions of the tide-related geodetic concepts used below may be found in Ekman (1989), which may be consulted as a background for those not acquainted with the subject; see also Rapp (1989) and the mentioned paper by Poutanen et al.

## Mean, zero and non-tidal cases - advantages and disadvantages

The main problem with the mean quantities, so far, has been the invalidity of Stokes' formula caused by the mean gravity field being not harmonic, i.e. not free from masses outside the Earth. To try to overcome this problem without resorting to

the zero quantities, Grafarend & Sansò (1984) proposed the use of an enlarged potential theory with both internal and external masses, a theoretically interesting possibility but unnecessary complicated. Later Yurkina et al (1986) for the same purpose put forward ideas of redefining the normal gravity. This line of thought has been extended to include also the normal potential by Zeman (1987) and Burša & Fialová (1993). Such a principle is now further supported and recommended by Poutanen et al (1996) in a note at the end of their paper: The direct permanent tidal field should no longer be eliminated from the observed gravity field but included in the normal gravity field as well. In this way the disturbing gravity field, entering into Stokes' formula, will be harmonic although the original field is not; cf. also Zeman (1993).

When trying to solve the permanent tidal problem I think one should aim at three important things: conceptual consistency, mathematical consistency and physical consistency.

There are three conceptually consistent ways to go, each of which contains the same kind of geodetic quantities throughout:

1. Mean case: Use mean crust (= zero crust), mean geoid, mean ellipsoid, mean gravity and mean normal gravity.
2. Zero case: Use zero crust (= mean crust), zero geoid, zero ellipsoid, zero gravity and zero normal gravity.
3. Non-tidal case: Use non-tidal crust, non-tidal geoid, non-tidal ellipsoid, non-tidal gravity and non-tidal normal gravity, all of these by applying the fluid Love numbers ("true" non-tidal case).

#### *The non-tidal case*

The non-tidal case, although mathematically consistent, must be rejected for reasons already known (Ekman, 1989): The shape of the Earth will be significantly changed from its real one, causing physical inconsistency with the rotation parameters of the Earth, like the length of the day. Moreover, the size of the permanent deformation, i.e. its Love numbers, can only be based on hypotheses (although the most realistic one is that of hydrostatic equilibrium yielding the fluid Love numbers, cf. Zschau & Wang (1985)). Under these circumstances it is somewhat surprising to learn that the fundamental ITRF coordinates are computed as non-tidal ones (elastic Love numbers); see McCarthy (1992) and Poutanen et al (1996).

When transforming non-tidal quantities into zero or mean ones it is essential to use the same kind of Love numbers that were used when the non-tidal quantities were computed originally; the fluid Love numbers ( $h = 1.93$ ,  $k = 0.93$ , fulfilling the equipotential condition  $\gamma = 1 + k - h = 0$ ) are completely different from the elastic ones ( $h \approx 0.62$ ,  $k \approx 0.30$ ). There is still some confusion regarding this, as may be seen in the IAG Earth parameters given in Burša (1992), where fluid and elastic Love numbers seem to have been mixed; this is, however, not the case in Burša (1995).

### *The zero case*

The zero case could be described as mathematically consistent, but physically slightly inconsistent. Mathematically, all basic geodetic theory is still valid. Physically, the surface of the Earth, i.e. the crust, is the real one (the zero crust = the mean crust), but the zero geoid and the zero ellipsoid will deviate slightly from the corresponding realistic mean concepts. However, the discrepancy between the zero case and the mean case is smaller than the periodical tidal variations and, therefore, in a certain sense insignificant. Nevertheless, in oceanographic studies of the deviation of the mean sea level from the geoid it becomes important to relate this deviation to the mean geoid. The transformation needed from the zero geoid to the mean one is easy to make; see Ekman (1989).

A similar discrepancy between the corresponding ellipsoids should enter into hydrostatic equilibrium investigations but is unimportant for the Earth; on the Moon, however, the situation is different, see below.

### *The mean case*

The mean case may be described as physically consistent but mathematically somewhat inconsistent. Physically, the mean case corresponds to the real mean Earth, not only for the crustal surface as already the zero case does, but also in all other respects, like the geoid and the ellipsoid. In order to work mathematically, the mean case requires a revision of the theory of the equipotential ellipsoid, based on the inclusion of the direct permanent tidal potential in the normal potential (yielding the mean gravity field). Such a revision has been carried out by Zeman (1987) and Burša & Fialová (1993). But this is not enough; there is still a problem left. Zeman (1993) and Poutanen et al (1996) point out that in the mean case the (direct) permanent tidal potential resembles the centrifugal potential in that it is cancelled out in the disturbing potential. However, while the centrifugal potential disappears as soon as you leave the rotating Earth, the (direct) permanent tidal potential does not. Therefore, the mean case does not produce a completely harmonic potential outside the Earth, which is a basic condition for satellite orbit analysis. In principle this might be solved by developing a potential theory with both internal and external masses (cf. Grafarend & Sansò, 1984), but in practise this would be very complicated to handle. In order to avoid this we have to shift from the mean gravity field to the harmonic zero gravity field outside the Earth, in which satellite orbit analysis will yield the zero geoid and the zero ellipsoid; these can then be easily transformed into the mean ones. Thus we have been forced to partly return to the zero case.

It should be mentioned here that Burša & Fialová (1993) - see also Zeman (1993) - in their revision of the theory of the equipotential ellipsoid seem to have started from a harmonic series of the non-tidal gravity potential and, therefore, have had to add the "total" permanent tidal potential (the direct permanent tidal potential of the Moon and Sun + the gravitational potential due to the permanent tidal deformation of the Earth) to the original potential. The reasonable thing to do in the future is - cf. above - to start from the harmonic coefficients of the zero gravity

potential and then add only the direct permanent tidal potential, thereby avoiding the meaningless Love number problem. This means leaving out the Love number  $k$  in the formulae of Burša & Fialová.

#### *Zero and mean cases on the Moon*

Finally one might also wish a consistency within the Earth-Moon system, so the same methods as for the Earth can be applied for the Moon. This was used as a further argument against the non-tidal case by Ekman (1981), and is now also used against the zero case by Poutanen et al (1996). This is partly justified, since the discrepancy between the mean case and the zero case on the Moon is much larger than on the Earth (at the same time as the periodical tidal variations there are very small due to the bound rotation). The discrepancy becomes essential in hydrostatic equilibrium studies. Whereas the Earth is a body very close to hydrostatic equilibrium (Lambeck, 1980) the Moon is a body far from this state (Caputo, 1967), and the determination of the Moon's deviation from hydrostatic equilibrium must be related to a mean ellipsoid. On the other hand, the main disadvantage with the zero case on the Earth appeared in oceanographic studies of the mean sea level, a kind of problem not very relevant on the Moon! Furthermore, in the same way as above the geodetic theory for satellite determination of the lunar geoid and ellipsoid requires a harmonic potential, i.e. a zero gravity field, outside the Moon.

#### **Conclusions**

A strict choice between the mean case and the zero case does not seem to be possible to make; both cases are partly needed. I would prefer the zero case as the main one, since this will work in most situations and only rarely have to be transformed to the mean one; the mean case will more often have to be transformed to the zero one (and back again). Alternatively one may adopt both cases, the mean case on the Earth (Moon), and the zero case outside the Earth (Moon), but this seems to me a less desirable solution. Anyway, one will always have to understand what one is doing and use concepts relevant to the situation. The non-tidal case is not relevant in any situation and should be done away with where still used!

#### *Acknowledgements*

I would like to thank Jaakko Mäkinen, Martin Vermeer and Richard Rapp for helpful discussions on various aspects of the problem.

### References

- Burša, M (1992): Parameters of common relevance of astronomy, geodesy, and geodynamics. *Bulletin Géodésique*, 66 (The Geodesist's Handbook 1992), 193-197.
- Burša, M (1995): Primary and derived parameters of common relevance of astronomy, geodesy, and geodynamics. *Earth, Moon and Planets*, 69, 51-63.
- Burša, M, & Fialová, V (1993): Parameters of the Earth's tri-axial level ellipsoid. *Studia geophysica et geodaetica*, 37, 1-13.
- Caputo, M (1967): The gravity field of the Earth from classical and modern methods. Academic Press, 202 pp.
- Ekman, M (1979): The stationary effect of Moon and Sun upon the gravity of the Earth, and some aspects of the definition of gravity. Reports of the Geodetic Institute at Uppsala University, 5, 13 pp.
- Ekman, M (1981): On the definition of gravity. *Bulletin Géodésique*, 55, 167-168.
- Ekman, M (1989): Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. *Bulletin Géodésique*, 63, 281-296. (More comprehensive version in Nordic Geodetic Commission, 2nd Research School, 59 pp.)
- Graffarend, E, & Sansò, F (1984): The multibody space-time geodetic boundary value problem and the Honkasalo term. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 78, 255-275.
- Groten, E (1980): A remark on M Heikkinen's paper "On the Honkasalo term in tidal corrections to gravimetric observations". *Bulletin Géodésique*, 54, 221-223.
- Jensen, H (1949): Formulas for the astronomical correction to the precise levelling. *Reports of the Danish Geodetic Institute*, 23, 15 pp.
- Heikkinen, M (1979): On the Honkasalo term in tidal corrections to gravimetric observations. *Bulletin Géodésique*, 53, 239-245.
- Honkasalo, T (1964): On the tidal gravity correction. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 21, 34-36.
- Lambeck, K (1980): The Earth's variable rotation: Geophysical causes and consequences. Cambridge University Press, 449 pp.
- McCarthy, D D (1992): IERS standards (1992). *IERS Technical Note*, 13, 150 pp.
- Poutanen, M, Vermeer, M, Mäkinen, J (1996): The permanent tide in GPS positioning. *Journal of Geodesy*, 70 (in press).

- Rapp, R H (1989): The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography. *Manuscripta Geodaetica*, 14, 368-372.
- Yurkina, M I, Šimon, Z, Zeman, A (1986): Constant part of the Earth tides in the Earth figure theory. *Bulletin Géodésique*, 60, 339-343.
- Zeman, A (1987): Definition of the normal gravity field including the constant part of tides. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 31, 113-120.
- Zeman, A (1993): Influence of permanent tides on the shape and gravity field of the Earth: Comparison of different approaches. *Marées Terrestres - Bulletin d'Informations*, 115, 8429-8434.
- Zschau, J, & Wang, R (1985): Imperfect elasticity in the Earth's mantle: Implications for earth tides and long period deformations. *Earth Tides, 10th International Symposium*, 379-384.

# NDFW Analysis of Gravity, Strain and Tilt Data from BFO

G. Polzer

Geophysical Institute, Karlsruhe University, Hertzstraße 16, 76187 Karlsruhe, Germany  
e-mail: gudrun@gpina.physik.uni-karlsruhe.de

W. Zürn

Black Forest Observatory, Heubach 206, 77709 Wolfach, Germany  
e-mail: wzuern@gpiwap1.physik.uni-karlsruhe.de

H.-G. Wenzel

Geodetic Institute, Karlsruhe University, Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe, Germany  
e-mail: wenzel@gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de

## Abstract

An analysis for the Nearly Diurnal Free Wobble parameters is performed with digital gravity, strain and tilt measurements at BFO. The gravity and strain data are of very high quality. We apply ocean load corrections based on the new altimeter data from the TOPEX/POSEIDON mission. For the data set with the best quality, namely gravity, we obtain a Free Core Nutation period of  $T_{FCN} = 406.2 \pm 5.4$  sid.d. A stack of gravity and strain signals results in  $T_{FCN} = 412.8 \pm 5.7$  sid.d. Salient in this work is the assessment of the parameter uncertainties. We particularly investigate the error propagation from the measurements to the uncertainties in the parameters. Special efforts are undertaken to study the air pressure–gravity admittance. In our NDFW inversion the air pressure influence does not appear to be as crucial as generally expected, so the largest uncertainties are contributed by the tidal admittances.

## 1 Introduction

High quality records of earth tides can be analyzed for parameters of the Nearly Diurnal Free Wobble (NDFW) or the Free Core Nutation (FCN), which are two different aspects of the same free mode of the rotating Earth with elliptical core–mantle boundary. The wobble is felt in an earth–fixed system, whereas the nutation can be observed in the inertial system of space. In *Neuberg* [1987] and *Neuberg et al.* [1987] a record from the LaCoste–Romberg Gravimeter ET–19 at the Black Forest Observatory (BFO), Germany was included in a stack of six gravimeter records from Central Europe to retrieve the parameters of this mode. In another paper by *Neuberg and Zürn* [1986] gravity, strain and tilt data from BFO were stacked for the same purpose with less success in terms of precision. Tilt and strain tides are known to be heavily corrupted by local elastic effects [*Zürn et al.*, 1988]. The hypothesis in using those data also for NDFW parameter estimation is that cavity effects are eliminated by using  $O_1$  as a reference tide. However, in the mentioned papers the raw

tidal data from BFO were analog recordings from 1980–1983. The investigation of the residuals (see section 3) after the tidal analysis for analog and digital records obtained at BFO shows that the digital data are much less noisy and therefore much better suited for an analysis for NDFW parameters. Therefore a new determination of NDFW parameters using digitally recorded data appeared appropriate. A second aim of this work was to try again a stack of gravity, strain and tilt tides, with the improved signal-to-noise ratio (SNR) in mind, with the hope that systematic errors would be reduced in the results of the stack. A third reason to repeat the analysis is the availability of new ocean tide models after the first years of the TOPEX/POSEIDON mission, promising improved estimates of ocean effects on earth tide recordings. And last but not least we feel that so far the uncertainties in the tidal admittances have not properly been accounted for. So we try to assess resulting errors in the NDFW parameters by systematic and random modifications of the input data to the NDFW analyses.

## 2 Data processing

The data sets under investigation consist of recordings from the LaCoste-Romberg Gravimeter ET-19 with electrostatic feedback [*Richter et al.*, 1995], the EW-component of Askania borehole pendulum BLP10 and the Cambridge-Invar-Strainmeter St3 with an azimuth of N300°E. Data from this strainmeter and the Askania pendulum provided some of the best results on torsional free oscillations after the Macquarie Rise-quake of 1989 [*Widmer et al.*, 1992; *Widmer*, 1991]. Diurnal tidal tilts in NS-direction at the latitude of BFO have very small amplitudes due to a theoretical node at 45°N, therefore this component was not included in our analysis. The data were digitally recorded with 16 bit resolution at BFO (48.33°N, 8.33°E, 587 m elevation) with a sampling interval of 5 s after low-pass filtering with an 8-pole/25 s Butterworth filter. The clock of the digitizing computer was kept synchronized to the millisecond with the DCF 77 time signal. The lengths of the records amount to approximately 13 months for gravity and tilt and 20 months for strain after the common start on November 23, 1988. Air pressure data from a barometer in the mine in front of the air-lock were recorded and processed in the same manner as the tidal data. The analysis of tidal measurements for NDFW parameters requires tidal parameters of highest accuracy. Therefore we very carefully inspected the raw 5 s data for spikes and steps and removed them interactively, before we low-passed and resampled the data at 1-minute intervals. These data were then further processed with the preprocessing software PRETERNA [*Wenzel*, 1994a], filling gaps in the residuals with the help of a theoretical tidal model and the simultaneously recorded barometric pressure. Applying PRETERNA results in a time series resampled at the full hours.

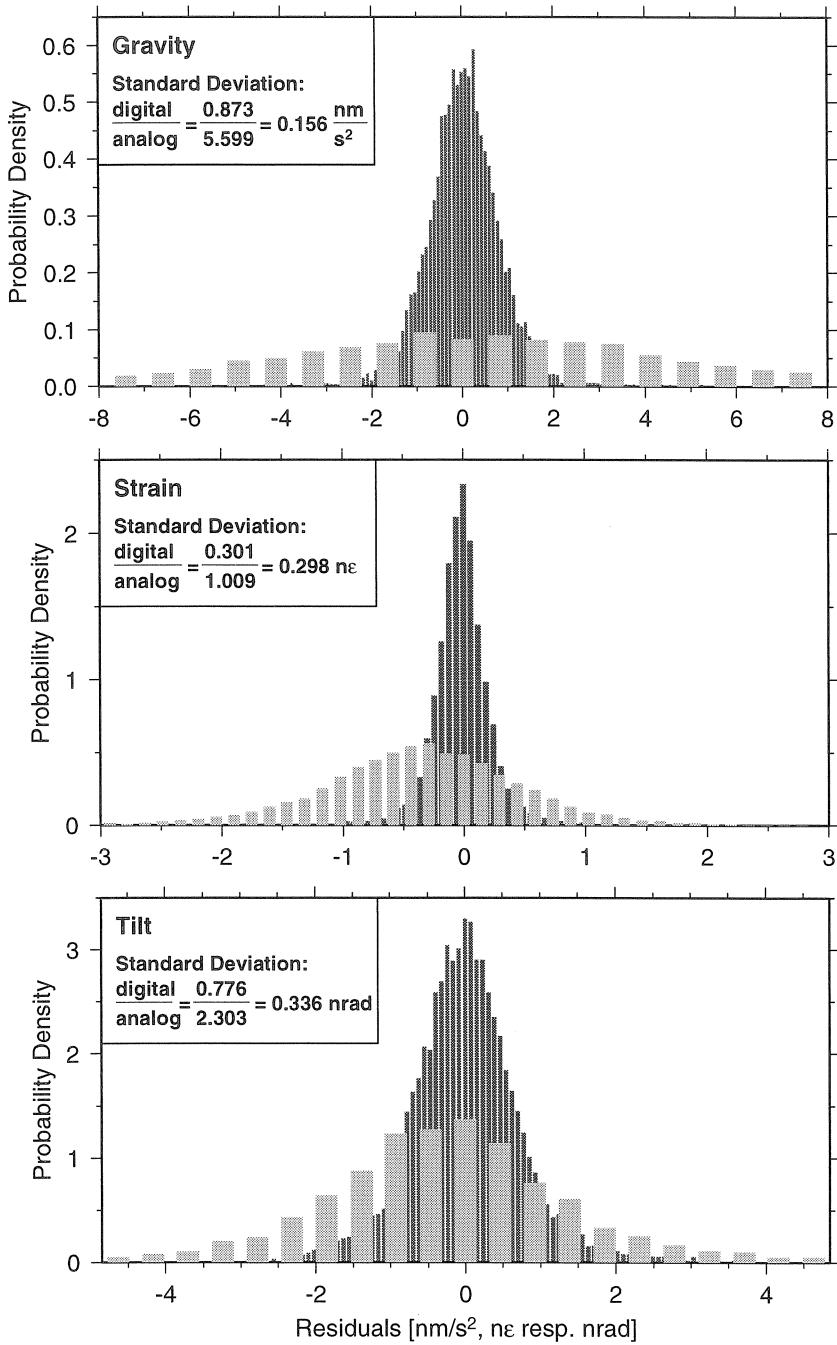
## 3 Tidal analysis

We performed tidal analyses with the earth tide analysis program ETERNA, versions 3.0 and 3.2 [*Wenzel*, 1994b; *Wenzel*, 1994c]. This program allows the simultaneous least

**Table 1:**  $\delta$ -factors and tilt diminishing factors (relative to the theoretical amplitude on a rigid earth), amplitude factors for strain (relative to the Wahr–Dehant Model [Wahr, 1981; Dehant, 1987]), phase leads  $\kappa$  with respect to the theoretical signal and the uncertainties  $\sigma_\delta$  (estimation from SNR) of the ETERNA tidal analysis of BFO digital data are listed. Additionally the standard deviation (Stdv) of the residuals and the air pressure admittance factor determined by ETERNA are given.

	Wave	$\delta$ -factor	$\kappa$ [°]	$\sigma_\delta$
Gravity	O <sub>1</sub>	1.14631	0.0564	0.00019
	P <sub>1</sub>	1.14756	0.2274	0.00041
	S <sub>1</sub>	1.26349	8.3113	0.01747
	K <sub>1</sub>	1.13442	0.2461	0.00013
	$\psi_1$	1.30456	-2.1076	0.01747
	$\phi_1$	1.15273	0.2334	0.00959
	M <sub>2</sub>	1.18404	2.0090	0.00009
Stdv: 0.807 nm/s <sup>2</sup> Air press. admitt.: -3.209 nm/s <sup>2</sup> /hPa				
	Wave	Amp-factor	$\kappa$ [°]	$\sigma_\delta$
Strain	O <sub>1</sub>	0.97757	-4.1936	0.00319
	P <sub>1</sub>	0.93963	-4.9979	0.00686
	S <sub>1</sub>	1.82452	-50.5376	0.29037
	K <sub>1</sub>	0.80731	-7.1694	0.00227
	$\psi_1$	2.40561	14.7206	0.29038
	$\phi_1$	1.33377	-0.1074	0.15956
	M <sub>2</sub>	1.25410	7.8668	0.00139
Stdv: 0.301 n $\varepsilon$ Air press. admitt.: -0.813 n $\varepsilon$ /hPa				
	Wave	Tilt-D-factor	$\kappa$ [°]	$\sigma_\delta$
Tilt	O <sub>1</sub>	0.76334	-21.5181	0.00219
	P <sub>1</sub>	0.79741	-22.0880	0.00472
	S <sub>1</sub>	1.80443	-104.4383	0.19939
	K <sub>1</sub>	0.82591	-19.0252	0.00156
	$\psi_1$	0.90829	-57.4103	0.19940
	$\phi_1$	0.82225	-31.3693	0.10956
	M <sub>2</sub>	0.79473	-15.6455	0.00044
Stdv: 0.776 nrad Air press. admitt.: -1.732 nrad/hPa				

squares fit of a theoretical tidal model and additional input channels (with a single regression coefficient for each of them) to the observed data. Before the fit the ETERNA high-pass filter No. 6 is applied to the data. As tidal potential we choose the Tamura [1987] model with 1200 waves. Table 1 shows the results of the tidal analyses.



**Figure 1:** Residual histograms for gravity, strain and tilt. The light shaded bars belong to the analog data and the dark shaded bars to the digital data.

To show the improvement of the data quality we compared residuals of old analog [e.g. Neuberg, 1987] and our new digital data after the tidal analysis with air pressure as an additional input channel. In Fig. 1 histograms of these residuals are depicted. The histogram-bin width depends on the amplitude of the largest residual. In the underlying ETERNA analyses the same filters and wave group partitioning were used. The gravity residuals show the most impressive improvement with a variance reduction of 97.5%. In comparison

the well known, excellent data set from the Bad Homburg superconducting gravimeter [Zürn *et al.*, 1986] had a slightly larger standard deviation, namely  $0.956 \text{ nm/s}^2$ . The variance reduction for the strain data is 91.1%. For the tilt data which show the smallest improvement, we obtain a variance reduction of 88.7%. In spite of the fact that the SNR ( $O_1$ ) of strain and tilt is only 1/20 respectively 1/8 of that of the gravity it makes sense to analyze the former signals too. The reason is that the response of the Earth to the forcing tidal potential contributes only 16% for gravity, but 30% for tilt and 100% for strain to the total tidal signal. These percentages describe the geophysical significance of the data. If we determine the product of this geophysical significance and the SNR ( $O_1$ ), we obtain for strain 33%, and for tilt only 10% of the gravity value. Therefore we a-priori expect higher uncertainties for the NDFW results of the tilt data.

#### 4 Air pressure and ocean correction

Tidal forces not only act on the solid Earth, but also on the world oceans and the surrounding atmosphere. In turn these two parts of the Earth affect the measurements of the solid earth tides. The standard method to correct for their influences and to reduce the measurements to the body tide is, to fit the locally observed barometric pressure simultaneously with the theoretical tides in the tidal analysis. Afterwards the tidal admittances for individual tides are corrected with the help of ocean load computations.

The frequency dependent ocean effects on a gravimeter consist of the direct Newtonian attraction of the sensor mass and the effects of deformation of the Earth (free air effect and potential change) due to loading by the periodically shifting water masses. Strainmeters and tiltmeters only register the deformations of the surface due to the loading. To correct for the small but important influences of the world oceans we applied the newest ocean load calculations from Agnew [pers. comm., 1995]. As input data for his model [Agnew, 1995] he used a combination of the new altimetric model CSR 3.0 [Eanes and Bettadpur, 1995] from the TOPEX/POSEIDON project in the range of  $66^\circ\text{N} - 66^\circ\text{S}$  and the purely hydrodynamical model of the ocean tides from Le Provost *et al.* [1994]. The latter model was obtained by finite-element modeling and includes many of the shelf areas. In contrast to the Schwiderski [1980] ocean tide model determined for a grid distance of  $1^\circ \times 1^\circ$ , the CSR 3.0 model has a global grid distance of  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ , and the grid density even increases at distances less than  $5^\circ$  to the station. Table 2 presents the ocean signals  $\tilde{L}(\omega_j)$  according to both models for the location of BFO.

The gravitational reactions of the atmosphere to the tidal forces are rather small, but there are large tides in the atmosphere for solar constituents due to the radiational energy input from the sun. The gravity, strain and tilt records are also contaminated by broad-band noise of meteorological origin due to density variations of air masses. Contributions to this noise are the direct attraction of the gravimeter mass by the changing air masses and the loading of the surface owing to atmospheric pressure changes. In the tidal analysis by ETERNA and all other least squares methods there is no difference being made between the broad-band noise and the solar harmonics. However, as Warburton and Goodkind

**Table 2:** Ocean signals (relative to local potential; lead positive) of relevant constituents calculated by *Agnew* [pers. comm., 1995] based on the Schwiderski and the CSR 3.0 ocean tide model for the location of BFO. Amplitudes are given in nm/s<sup>2</sup> (gravity), nε (strain) and nrad (tilt), phases in degrees. The values in brackets are not provided by the models, but derived from the K<sub>1</sub> ocean signals.

Wave		Schwiderski		CSR 3.0	
		Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
Gravity	O <sub>1</sub>	1.40	171.0	1.517	179.65
	P <sub>1</sub>	0.60	87.4	0.787	93.34
	K <sub>1</sub>	1.50	68.4	2.287	86.28
	ψ <sub>1</sub>	(0.01)	(68.4)	(0.017)	(86.28)
	ϕ <sub>1</sub>	(0.02)	(68.4)	(0.032)	(86.28)
Strain	O <sub>1</sub>	0.1002	50.40	0.1448	41.23
	P <sub>1</sub>	0.0841	24.09	0.0883	16.39
	K <sub>1</sub>	0.2524	23.28	0.2779	12.25
	ψ <sub>1</sub>	(0.0019)	(23.28)	(0.0021)	(12.25)
	ϕ <sub>1</sub>	(0.0036)	(23.28)	(0.0039)	(12.25)
Tilt	O <sub>1</sub>	0.350	-146.9	0.3107	-146.69
	P <sub>1</sub>	0.370	56.0	0.4515	51.57
	K <sub>1</sub>	1.240	48.4	1.4431	44.44
	ψ <sub>1</sub>	(0.049)	(48.4)	(0.0112)	(44.44)
	ϕ <sub>1</sub>	(0.035)	(48.4)	(0.0205)	(44.44)

[1977] have pointed out, the admittances of gravity with respect to atmospheric pressure are significantly different for the broad-band background on one hand and distinct solar harmonics on the other hand. One reason is the fact, that the solar harmonics in the atmosphere belong to global wave phenomena [e.g. *Volland*, 1988], while the background effects are more regionalized. Recently other authors have reconfirmed this admittance difference.

Several alternative methods have been developed to treat the barometric effects on gravity recordings. *Crossley et al.* [1995] determine the admittance function between gravity and local air pressure in the frequency and time domain. They demonstrate again that the admittance for the solar harmonics is considerably different from the one for the broad-band meteorologic signal: for Cantley, Canada they found admittance factors of about -1.7 nm/s<sup>2</sup>/hPa and -2.3 nm/s<sup>2</sup>/hPa for the solar harmonics S<sub>1</sub> and S<sub>3</sub>, respectively, while their broad-band admittance is slowly rising with frequency and is about -3.5 nm/s<sup>2</sup>/hPa in the vicinity of the tidal band. *Merriam* [1994] pointed out the importance of the seasonal modulations of the solar tides. Annual and semi-annual modulations of the thermal tide S<sub>1</sub> disturb the waves of P<sub>1</sub>, K<sub>1</sub> and π<sub>1</sub>, ψ<sub>1</sub>, respectively. The salient

point is, that all the tides used in the NDFW estimation except  $O_1$  and partially  $K_1$  are solar tides.

*Mukai et al.* [1995] evaluated near station pressure effects on gravity by numerically integrating air masses. At the same time they took into account regional and global effects by spherical harmonic expansions of meteorological observations. All these efforts demonstrate how serious this problem is. Further below we describe several experiments we have performed to study this problem.

## 5 Estimation of the NDFW parameters

In the following the complex tidal admittances as provided by ETERNA are defined as  $\tilde{D}_{\text{Data}}(\omega_j)$  for the tide  $j$ , the ocean load corrected tidal admittances are defined as  $\tilde{C}_{\text{Data}}(\omega_j)$ . For the NDFW fit we use the tides  $O_1, P_1, K_1, \psi_1$  and  $\phi_1$ . The last four waves are strongly influenced by the resonance. In order to isolate the contribution  $\tilde{R}_{\text{Data}}$  of the resonance we use the tide  $O_1$  as a reference tide: we subtract the complex tidal admittance  $\tilde{C}_{\text{Data}}$  of  $O_1$  from the complex tidal admittances  $\tilde{C}_{\text{Data}}$  of the other tides. Proceeding in this way we eliminate at the same time all frequency independent effects and reduce the influence of systematic calibration errors and cavity effects on strain and tilt. In the vicinity of the resonance frequency there is also the purely solar tide  $S_1$ . We do not include this tide in our analysis because its SNR is very low and this tide is heavily corrupted by meteorological effects. The functional model for the resonance is the same as used by *Neuberg et al.* [1987] and several other authors: a harmonic oscillator with eigenfrequency  $\omega_{\text{NDFW}}$ , damping factor  $\gamma$  and complex resonance strength  $\tilde{A} = A + iB$ . The fact that the relation between these four real unknowns and the reduced complex tidal admittance  $\tilde{R}$  at the frequency  $\omega_j$ :

$$\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega_j) = \frac{\tilde{A}}{\omega_{\text{NDFW}}^2 - \omega_j^2 + i\gamma\omega_j} - \frac{\tilde{A}}{\omega_{\text{NDFW}}^2 - \omega_{O_1}^2 + i\gamma\omega_{O_1}} \quad (1)$$

(with  $i = \sqrt{-1}$ ) is highly non-linear, motivates us to try different non-linear optimization strategies. The cost function to be minimized in multiple dimensions is the misfit  $\chi^2$  between model and data:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega_j) - \tilde{R}_{\text{Data}}(\omega_j)}{\sigma_j} \right)^2, \quad (2)$$

$\sigma_j$  being the standard deviation of the  $j$ th tidal constituents.

On one hand we perform an iterated linearized least squares inversion scheme as others, but with singular value decomposition. On the other hand we apply a downhill simplex method, which performs the minimization without partial derivatives. The name of the used routine AMOEBA [*Press*, 1988] is characteristic for its proceeding: a geometric figure, the *simplex*, limited by its vertices ‘flows’ in the  $N$ -dimensional vector space to the functional minimum assimilating to the topography of the surroundings. In this second

**Table 3:** Resonance parameters and their standard deviations. G, S and T are abbreviations for gravity, strain and tilt, respectively. The \* symbolizes that a positivity constraint has been applied with the help of routine AMOEBA.

	T <sub>FCN</sub> [sid.d]	$\gamma \cdot 10^{-3}$ [d <sup>-1</sup> ]	Q	A·10 <sup>-3</sup>	B·10 <sup>-3</sup>
G	405.5 ± 25.7	-1.17 ± 0.02	-5360 ± 100	-0.58 ± 0.52	-0.03 ± 0.02
G*	413.4	0.00041	15570000	-0.58	-0.05
S	410.6 ± 14.1	1.24 ± 0.12	5070 ± 480	-6.13 ± 0.26	0.85 ± 0.11
T	420.2 ± 108.0	0.89 ± 0.28	7100 ± 2200	1.01 ± 1.92	1.85 ± 0.28
Stacks					
G	412.3 ± 21.3	-0.61 ± 0.22	-10293 ± 3762	-0.57 ± 0.39	-0.04 ± 0.02
S				-6.14 ± 0.22	-0.50 ± 0.22
G*	403.4	0.24	25980	-0.41	0.13
S				-6.25	-0.67
G	412.7 ± 19.5	-0.53 ± 0.21	-11900 ± 4600	-0.57 ± 0.36	-0.04 ± 0.21
S				-6.13 ± 0.21	-0.51 ± 0.21
T				1.10 ± 0.12	1.73 ± 0.12
G*	407.6	0.44	14200	-0.42	-0.14
S				-6.74	-0.05
T				1.03	1.77

method we incorporate a positivity constraint for the quality factor  $Q = \omega/\gamma$  by putting a penalty on negative values during the iteration. For both methods we need a starting model. We choose the results of a previous study [Neuberg, 1987] for this purpose. Additionally we are able to perform a joint inversion of gravity, strain and tilt data. In that case we invert all the admittances together for a common resonance frequency and damping factor but individual resonance strengths pertaining to the different tidal signals.

The results for the NDFW parameters from the inversions of individual data and stacks and their formal errors from the least squares estimation are listed in Table 3. The resonance periods T<sub>FCN</sub> determined in this work are all considerably smaller than theoretical predictions and results from most other data sets. The gravimeter data which have the highest quality lead to the smallest resonance period, smaller even than the value found by Levine *et al.* [1986]. But within several error bars our results are consistent with the majority of the other published results. Further, without positivity constraint we obtain for the gravity data a very small negative damping factor equivalent to a very high negative Q. Since there is no self-amplification of the oscillation, it is physically impossible to have a negative Q. However, we do not discard this solution, because the damping factor is in the vicinity of zero. As will be seen below in our more realistic error assessment, our

**Table 4:** Published NDFW results. The first three rows of the table belong to theoretical calculations. The other parameters stem from observations. (Legend to Fig. 7.)

Abbr.	T <sub>FCN</sub> [sid.d]	Q	Publications
W	466.9		Wahr [1981)
WB	473.8	78100	Wahr and Bergen [1986]
J	449.8	$\infty$	Jiang [1993]
NHZ	431.0 (425.0 – 437.0)	2758 (2222 – 3249)	Neuberg et al. [1987]
RZ	431.2 (427.6 – 433.8)	3120 (2797 – 3443)	Richter and Zürn [1988]
GH	433.2 (431.2 – 435.2)	16129 (12195 – 23809)	Gwinn et al. [1986]
S	432.9 (421.9 – 444.4)	5200 (2700 – 7700)	Sato [1991)
CW	437.0 (422.7 – 452.2)	5722 (3035 – 49869)	Cummins and Wahr [1993]
ST	436.7 (422.2 – 452.3)	6000 (3240 – $\infty$ )	Sato et al. [1994]
M	430.0 (427.0 – 434.0)	7000 (5500 – 10000)	Merriam [1994]
F	430.7 (429.7 – 431.7)	2080 (1640 – 2520)	Florsch et al. [1994]
DDH	433.9 (433.2 – 434.6)	33000 (27000 – 43000)	Defraigne et al. [1995]
JS	431.0 (425.5 – 436.0)	2000 (1900 – 2100)	Jiang and Smylie [1995]

data cannot really discriminate between positive and negative quality factors, as long as its magnitude is very high. Nevertheless we impose positivity on Q in one of our inversion experiments and the solution differs by 8 sidereal days in T<sub>FCN</sub>, the now positive Q is also very big and the difference in the resonance strengths is negligible. Independent of the sign of the quality factor the real and imaginary part of the resonance strength are negative and the imaginary part is about one order of magnitude smaller than the real part.

Other authors [e.g. *Neuberg et al.*, 1987; *Cummins and Wahr*, 1993; *Merriam*, 1994] found also a real part of the resonance strength about  $6 \cdot 10^{-4}$  and an imaginary part of  $10^{-5}$  or less. The strain resonance strength of  $(-0.00723 + i 0.82) \cdot 10^{-3}$  from *Neuberg et al.* [1987] is similar to ours. *Sato's* [1991] real part of the resonance strength is a factor 20 smaller than ours and the imaginary part even more. Our quality factors range between  $\pm 5000$  and  $\pm \infty$ . The resonance period for the stack of the three data sets with unconstrained Q happens to be simply the arithmetic mean of the three individual periods. Nevertheless for this case the influence of the tilt data seems to be negligible, since the NDFW parameter results are similar to the stack of solely gravity and strain. With Q positively constrained the stack of gravity and strain leads to the smallest resonance period in our experiments, namely 403.4 sid.d. Table 4 lists the published results of other authors.

## 6 Confidence intervals for the NDFW parameters

Formally the uncertainties of the estimated parameters can be calculated as the elements of the inverse curvature matrix of the least squares problem in the final iteration. These values are given in Table 3. However, in the case of an individual data set inversion we have 8 data and 4 unknowns ( $\omega_{\text{NDFW}}$ ,  $\gamma$ , A, B), while in the stack the situation is a little improved with 24 data and 8 unknowns ( $\omega_{\text{NDFW}}$ ,  $\gamma$ ,  $A_j$  and  $B_j$ , with  $j=1, \dots, 3$ ). This is not exuberant for statistical conclusions.

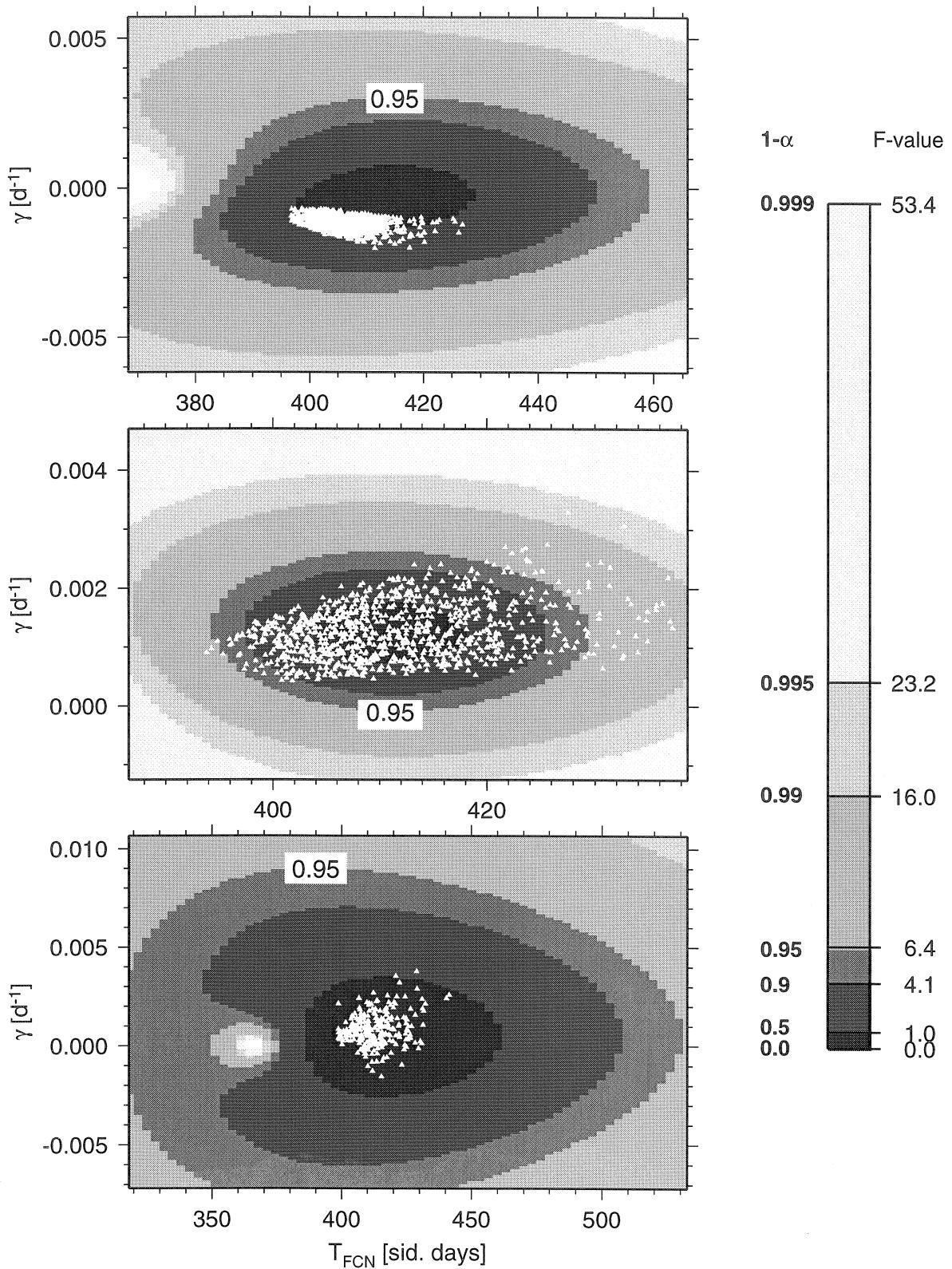
The non-linear functional dependence between the tidal admittances and the resonance parameters makes it furthermore difficult to propagate the exact form of the noise distribution in the measurements (or here standard errors of tidal estimates) into confidence intervals for the resonance parameters. While the standard error of the tidal measurements may be normally distributed (Fig. 1) the uncertainties of the estimates of the resonance parameters do not necessarily have to show this property as well. We cannot determine confidence regions, but only *approximate* confidence regions. With the methods described in the following we try to assess more realistic confidence intervals.

### 6.1 Variances from F-statistics

There is a simple method to find the resonance parameters and improved uncertainties without any linearization. A limited volume of the 4-dimensional parameter space can be scanned for every parameter combination  $\vec{\theta}$  which represents a resonance model. From the misfit  $\chi^2(\vec{\theta})$  according to (2) an F-statistic can be computed, although F-tests are not strictly valid in the non-linear situation:

$$F(\vec{\theta}) \approx \frac{n-p}{p} \cdot \frac{\chi^2(\vec{\theta}) - \chi^2(\vec{\theta}_{\min})}{\chi^2(\vec{\theta}_{\min})}, \quad (3)$$

with  $n$  being the number of data,  $p$  the number of parameters and  $\vec{\theta}_{\min}$  the parameter vector pertaining to the least squares minimum. From the statistical F-distribution we can determine  $F(p, n-p, 1-\alpha)$  for an error probability  $\alpha$ , respectively an  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  approximate confidence region. Comparing F-values as functions of  $\alpha$  with the empirical ones for different parameter combinations, the confidence regions for  $F(\theta) = \text{const.}$  in the parameter space are obtained. The corresponding contour lines can be plotted in 2D-subspaces, for example in the  $\gamma$ -T<sub>FCN</sub>-plane [Zürn and Rydelek, 1991]. Fig. 2 shows these contours for selected F-values for the three data sets of gravity, strain and tilt. The 95% confidence bounds found in these planes for T<sub>FCN</sub> and  $\gamma$  are listed in Table 5. In contrast to linear models with their error ellipses, the confidence level contours in the non-linear case may be very complicated: e.g. the gravity confidence regions for small error probabilities become kidney-shaped (Fig. 2a). Consistent with the standard errors of the last section, we find the smallest bounds for strain (Fig. 2b), namely  $\Delta_{T_{\text{FCN}}} = \pm 17$  d and  $\Delta_{\gamma} = \pm 1.4 \cdot 10^{-3}$  d<sup>-1</sup>. The largest uncertainties are found again for the tilt parameters (Fig. 2c). Their 90% confidence contour is deformed due to a misfit maximum at  $T_{\text{FCN}} = 365$  d.



**Figure 2:** Approximate F-values resp. confidence regions in the resonance period vs. damping factor plane for gravity (upper panel), strain (middle panel) and tilt (lower panel). The 95% confidence contours are labeled. The triangles are solutions of the Monte Carlo simulations (section 6.3).

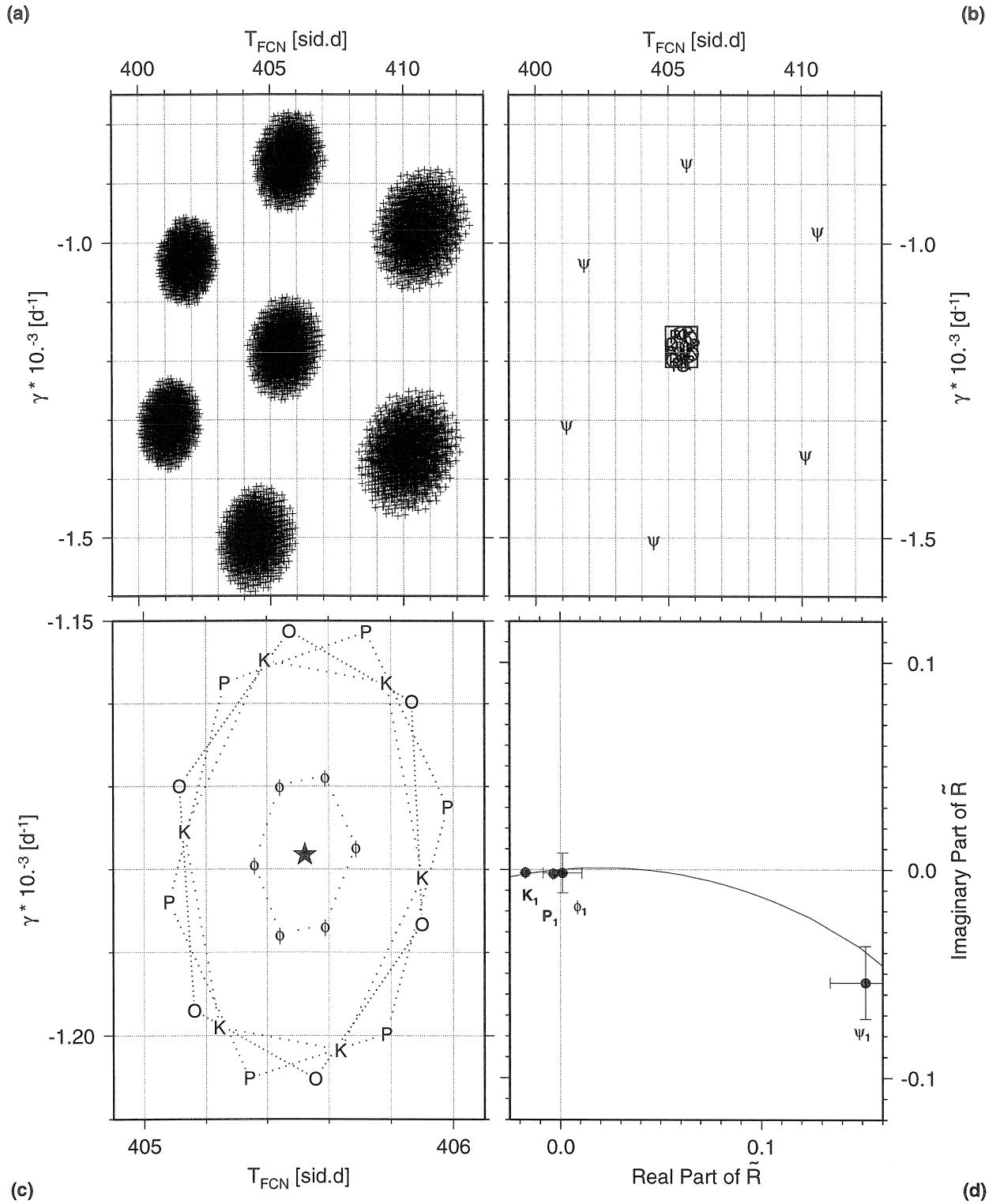
**Table 5:** 95% approximate confidence intervals determined with F-statistics

	$\Delta_{T_{FCN}}$ [sid.d.]	$\Delta_\gamma \cdot 10^{-3}$ [d <sup>-1</sup> ]
Gravity	$\pm 40.$	$\pm 3.2$
Strain	$\pm 17.$	$\pm 1.4$
Tilt	$\pm 107.$	$\pm 8.5$

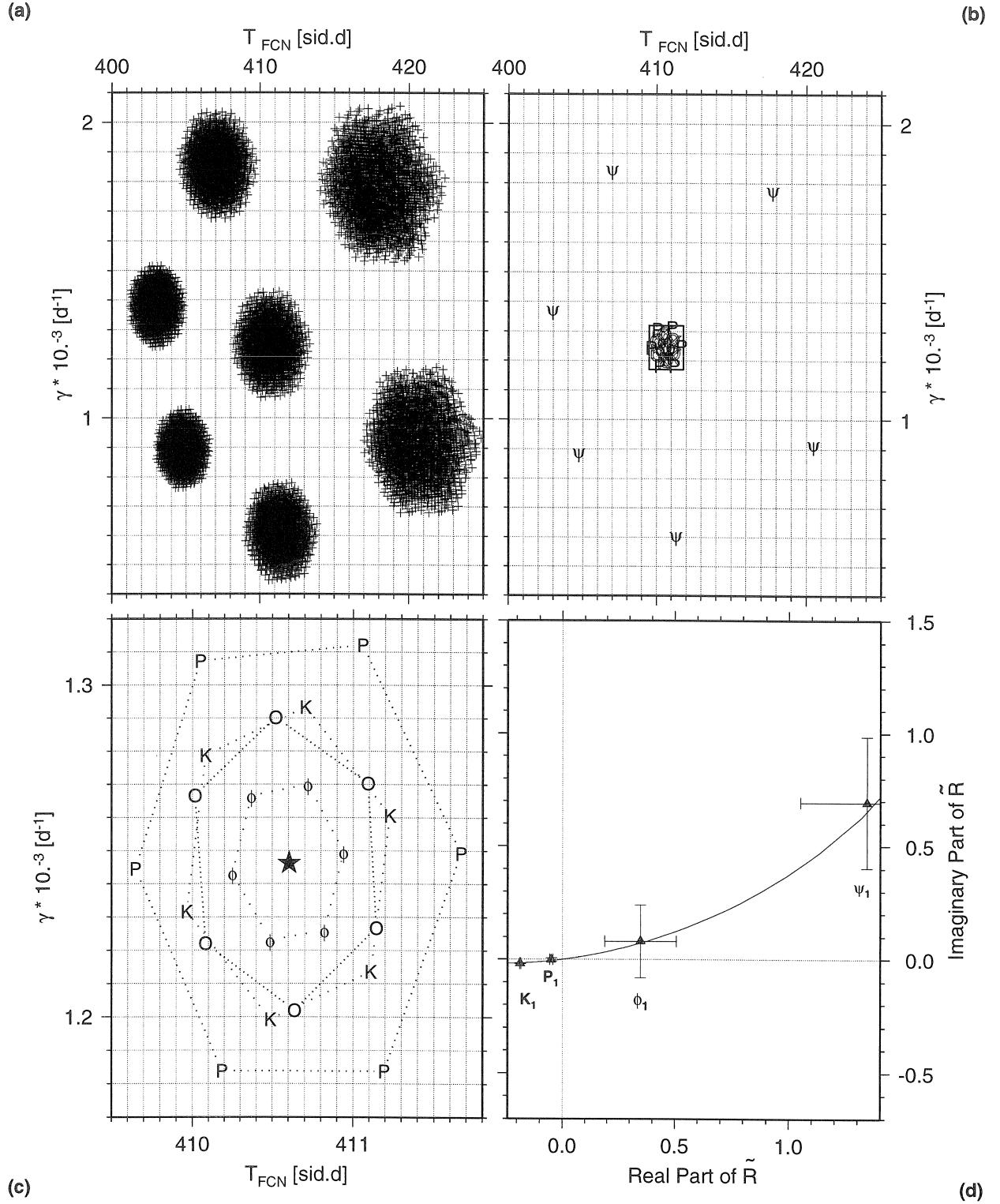
## 6.2 Influence of systematic errors

In the work of most other authors uncertainties in the resonance parameters are determined from the curvature matrix of the final iteration in the linearized least squares NDFW analysis. These uncertainties are very strongly dependent on the final misfit. The only way, by which the formal uncertainties (a measure of SNR) of the tidal parameters enter such an analysis is by the weights used in the inversions for NDFW parameters [e.g. *Neuberg*, 1987]. If, say some data with low SNR happen to have a very small misfit in the NDFW solutions, this low SNR would not be reflected in the uncertainties of the NDFW parameters, while data with high SNR could have a larger misfit and therefore would look inferior in the NDFW estimation. *Neuberg et al.* [1987] used a Monte Carlo method to assess the error propagation from the poorly known errors in ocean load corrections into the NDFW parameters. In the following we study the propagation of errors in the tidal analysis into the NDFW solutions in similar ways. Our approach will be to add an error term to the complex tidal admittances  $\tilde{D}_{\text{Data}}$  and investigate the changes in the NDFW results. In this section we do this in a systematic manner and in the next section we apply a statistical Monte Carlo method.

Here we add a deterministic complex error to the complex tidal admittance  $\tilde{D}_{\text{Data}}(\omega_j)$  of each tide. The length is always one standard deviation  $\sigma$  of the admittance determined by ETERNA, but the phase is varied in 60° steps (0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°). We use the unperturbed value as well. The disturbed admittances line out hexagons for each tide in the complex plane. All combinations for the five tides make up  $7^5$  experiments. With this method we hope to be able to define a volume in the NDFW-parameter space which results from the propagation of 1- $\sigma$  errors in the tidal estimates. Another goal is to identify, which tidal constituent of each physical observable causes the largest deviations from the unperturbed solutions. Figs. 3–5 show the results of these computations in the  $T_{FCN}-\gamma$  plane for gravity, strain and tilt. Each symbol in Figs. 3a, 4a and 5a identifies the solution found for a certain combination of perturbations. For all three data sets the results split into 7 distinct groups (the 7th group in the case of tilt lies outside the range of the diagram). The pattern in each group is very dense with a fairly sharp elliptical to slightly hexagonal boundary. In order to better understand these patterns we also ran the 30 cases, where only one tide was perturbed at a time. Figs. 3b, 4b, 5b and 3c, 4c and 5c show the results of these computations at different resolutions. The perturbed tide is



**Figure 3:** (a) – (c) NDFW-solutions in the  $T_{\text{FCN}}-\gamma$  parameter plane with systematic error perturbations on the gravimetric factor. Each plus sign, each letter and the asterisk symbolize an individual solution. (d) shows the observed reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Data}}$  at the frequencies of  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  and  $\phi_1$  and reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega)$  for continuous frequency  $\omega$  pertaining to the parameters of the unconstrained least squares solution in Table 3.



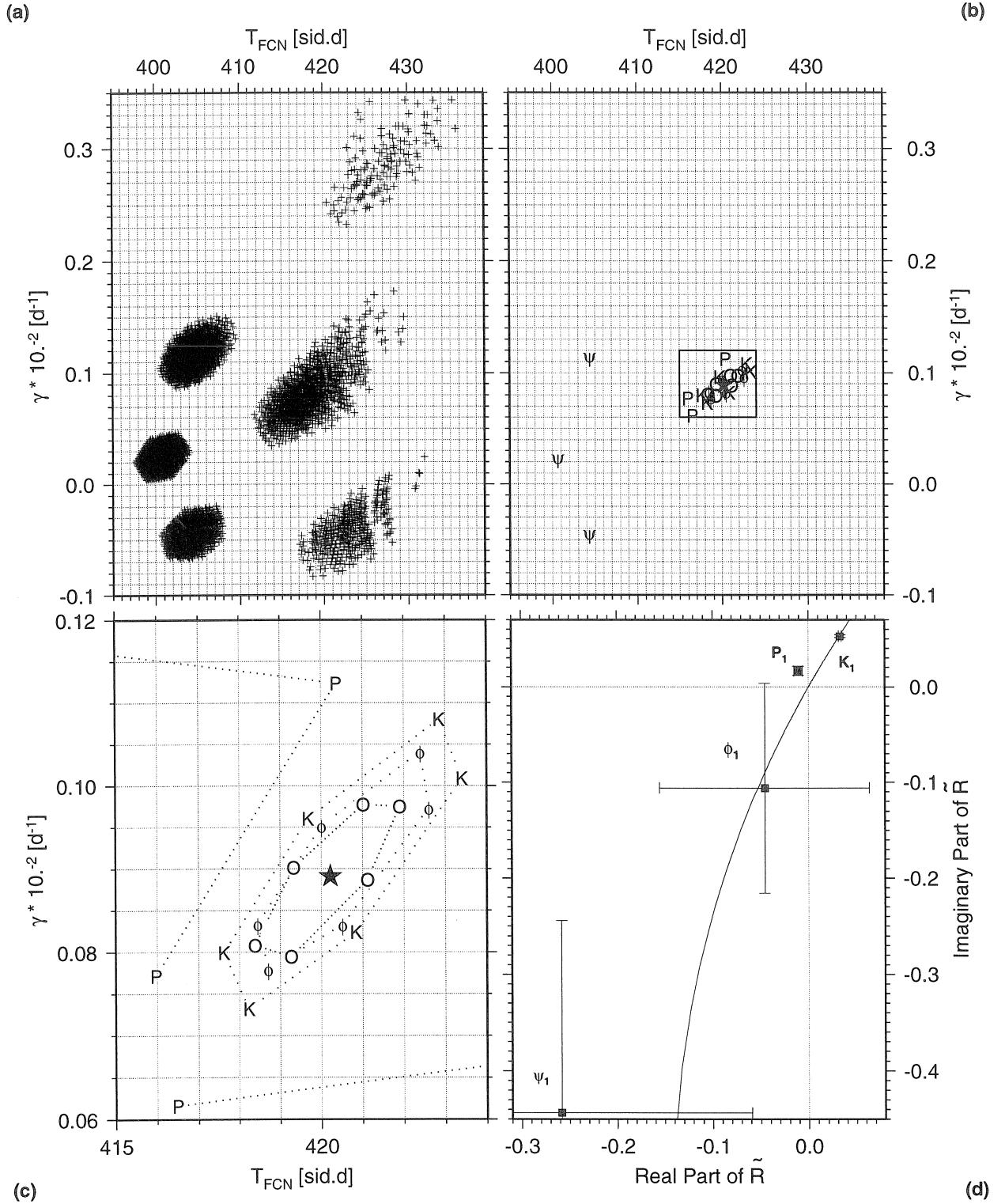
**Figure 4:** (a) – (c) NDFW-solutions in the  $T_{\text{FCN}}-\gamma$  parameter plane with systematic error perturbations on the strain amplitude factor. Each plus sign, each letter and the asterisk symbolize an individual solution. (d) shows the observed reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Data}}$  at the frequencies of  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  and  $\phi_1$  and the reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega)$  for continuous frequency  $\omega$  pertaining to the parameters of the least squares solution in Table 3.

identified in each case by its symbol ( $O$ ,  $P$ ,  $K$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ ). The asterisk marks the solution for the unperturbed case. The parameter range of Figs. 3c, 4c and 5c is identified by a rectangle in Figs. 3b, 4b and 5b. Figs. 3d, 4d and 5d show the reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Data}}(\omega_j)$  with the standard errors from the ETERNA analysis.

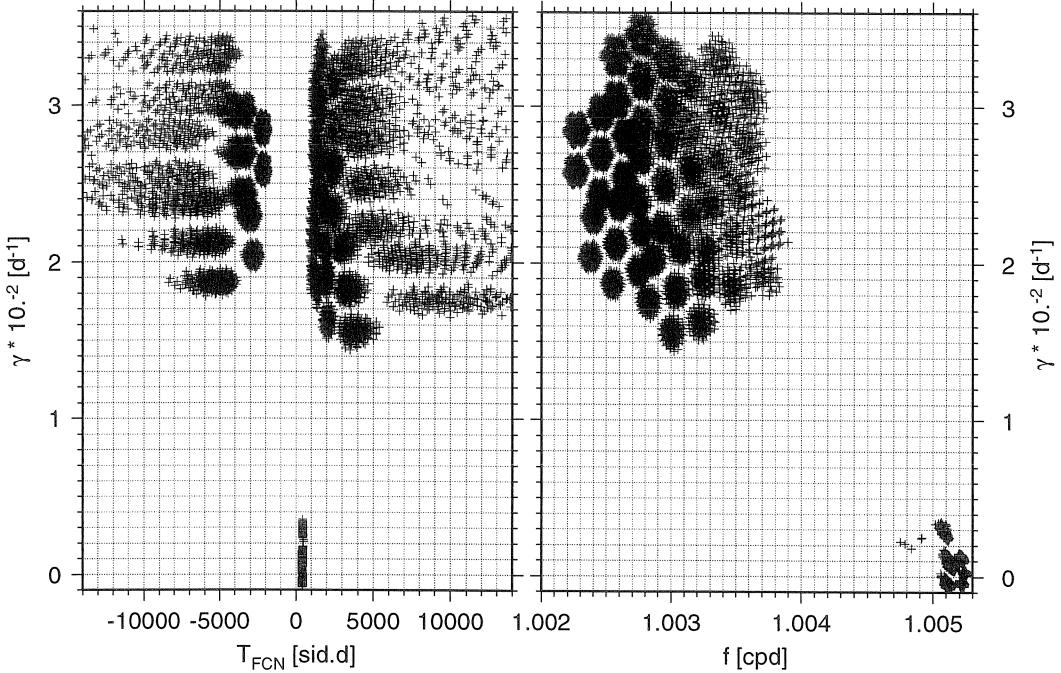
First we discuss the gravity and strain data (Figs. 3a–4d). Obviously the separation into distinct groups is caused by the perturbation of  $\psi_1$ .  $\psi_1$  is also responsible for the asymmetry in the locations and the different sizes of the clouds. This is not surprising regarding  $\tilde{R}_{\text{Data}}$  in the complex plane (Figs. 3d and 4d). The resonance model  $\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega)$  in this presentation appears as a circle through the origin [Goodkind, 1983].  $\psi_1$  has the largest standard deviation and if the admittance is displaced in the complex plane by a phasor of length one  $\sigma$  this has a significant influence even though its weight is small. In connection with the sign of the damping factor for gravity we would like to mention here the following: if the  $\psi_1$ -admittance is shifted three standard deviations it can reach the first quadrant. Hence it is understandable that the resonance fit then leads to a larger resonance circle which is reflected at the real axis. This in turn corresponds to a smaller, positive damping factor.

Although  $\phi_1$  is closer to the resonance frequency than  $P_1$  and has the second largest uncertainty, it apparently has a minor influence on the spread in the solution space. The tide  $P_1$  has the second largest influence in the case of gravity. The influence of a tide appears to be determined by proximity to the resonance frequency and its uncertainty or weight. As the differences between gravity and strain results here show, the distributions of the reduced tidal admittances in the complex plane have a strong influence on the sensitivity and stability of the results for the NDFW parameters. The maximum uncertainties resulting from these perturbations are summarized in Table 6. In contrast to our previous estimates, here the gravity data have the smallest error bounds. The explanation is, that although the gravity fit is worse than the strain fit, the spread in the solution space is less, since the standard deviations of the  $\delta$ -factors are smaller than for the strain admittances.

From Fig. 5 it is obvious that the situation is strikingly different for the tilt data. It was expected that these data despite their good quality will be less useful for the NDFW analysis because of their lower (compared to gravity and strain data) geophysical significance. This has been clearly verified here. The tilt data incorporate a rather large cavity effect [Neuberg, 1987] as can be seen from the reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega_j)$  in Fig. 5d. However, this should not have any influence on the NDFW parameters  $T_{\text{FCN}}$  and  $\gamma$ , since only the resonance strength should be affected [Neuberg and Zürn, 1986; Zürn *et al.*, 1988], unless the ocean corrections are erroneous. We discuss this data set also in our analysis here to demonstrate the consequences for slightly inferior data. Fig. 6a shows an extended range of the parameter space compared to Fig. 5. Fig. 6b represents Fig. 6a transferred into the frequency domain. In the  $f_{\text{NDFW}}-\gamma$  plane there are two distinct groups each containing close to one half of the total  $7^5$  solutions. The unperturbed case lies in the group with small spread (also, but not fully shown in Fig. 5a), which is close



**Figure 5:** (a) – (c) NDFW-solutions in the  $T_{\text{FCN}}-\gamma$  parameter plane with systematic error perturbations on the tilt diminishing factor. Each plus sign, each letter and the asterisk symbolize an individual solution. (d) shows the observed reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Data}}$  at the frequencies of  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  and  $\phi_1$  and the reduced complex tidal admittances  $\tilde{R}_{\text{Model}}(\omega)$  for continuous frequency  $\omega$  pertaining to the parameters of the least squares solution in Table 3.



**Figure 6:** NDFW-solutions with systematic error perturbations on the tilt diminishing factor: (a) sector of  $T_{FCN}$ - $\gamma$  plane and (b) total range of  $f_{NDFW}$ - $\gamma$  plane. Each plus sign symbolizes an individual solution.

to the solutions from our other data sets. The other group shows extremely large spread and is very far away from the expected values for  $T_{FCN}$  and  $\gamma$ . It consists of a number of hexagonal patterns with different sizes superimposed on each other. This second group splits into two in the  $T_{FCN}$ - $\gamma$  plane, due to the relation between  $f_{NDFW}$  and  $T_{FCN}$ :

$$T_{FCN} = \frac{1}{f_{NDFW} - \Omega}$$

with  $\Omega$  being the Earth's rotation rate in cycles per siderial day. The solutions spread out enormously in the FCN period, while  $T_{FCN}=0$  is obviously not reached. The separation into two groups is here caused by disturbing  $\psi_1$  and  $P_1$ , as is suggested by Figs. 5b and 5c and which was verified by additional checks. The location of the unperturbed  $P_1$  in the complex plane (Fig. 5d) is so unfavourable that in adding perturbations two different classes of solutions of about the same size are created. The resonance circles of one class have a resonance frequency near 1.0029 cpd (cycles per solar day) and a small radius that corresponds to a large damping factor. These circles do not approach  $\psi_1$ . The other class contains circles which have resonance frequencies near 1.005 cpd, large radii, or respectively small damping factors and lie in the vicinity of the admittance of  $\psi_1$ . In Table 6 only the solutions of the latter class are mentioned, since those of the first class are not meaningful at all.

**Table 6:** Resonance parameters and uncertainties from the estimation with systematic errors (tilt: only one half of the solutions is considered).

	$\bar{T}_{\text{FCN}}$ [sid.d]	$\Delta T_{\text{FCN}}$ [sid.d]	$\bar{\gamma} \cdot 10^{-3}$ [d $^{-1}$ ]	$\Delta \gamma \cdot 10^{-3}$ [d $^{-1}$ ]
Gravity	405.6	-5.5, + 7.0	-1.17	$\pm 0.4$
Strain	410.7	-10.0, +14.0	1.24	$\pm 0.8$
Tilt	406.7	-9.0, +29.0	0.45	-1.2, +2.8

### 6.3 The Monte Carlo simulation

We suppose that the noise on the tidal estimates and load corrections can be described as independent complex random variables  $\epsilon_{\text{Tide}}$  and  $\epsilon_{\text{Load}}$  with known probability distribution. The general procedure of a Monte Carlo simulation can be divided into three steps. Transferred to our problem this means:

1. Construct a distribution function for the error terms  $\epsilon_{\text{Tide}}$  and  $\epsilon_{\text{Load}}$  as follows:  
Let  $\tilde{\varepsilon}_{\text{Tide}, j}$  be a realization of  $\epsilon_{\text{Tide}}$  with normally distributed amplitudes, zero mean, the known variance  $\sigma_j^2$  from the tidal analysis and uniformly distributed phase. This is equal to a 2-dimensional normal distribution and can be assumed when SNR is high. Since the accuracy of the ocean load correction is not known, we choose the random variable  $\epsilon_{\text{Load}}$  with its realizations  $\tilde{\varepsilon}_{\text{Load}, j}$  to be uniformly distributed with a maximum of 10%, 20% and 40% of the load corrections (Table 7). (*Neuberg et al.* [1987] used only the pessimistic value of 40%).
2. Add to the complex admittance  $\tilde{D}_{\text{Data}}(\omega_j)$  of each tidal wave a complex error term with the probability distribution mentioned in (1) :

$$\tilde{D}_{\text{MC}}(\omega_j) = \tilde{D}_{\text{Data}}(\omega_j) + \tilde{\varepsilon}_{\text{Tide}, j}, \quad (4)$$

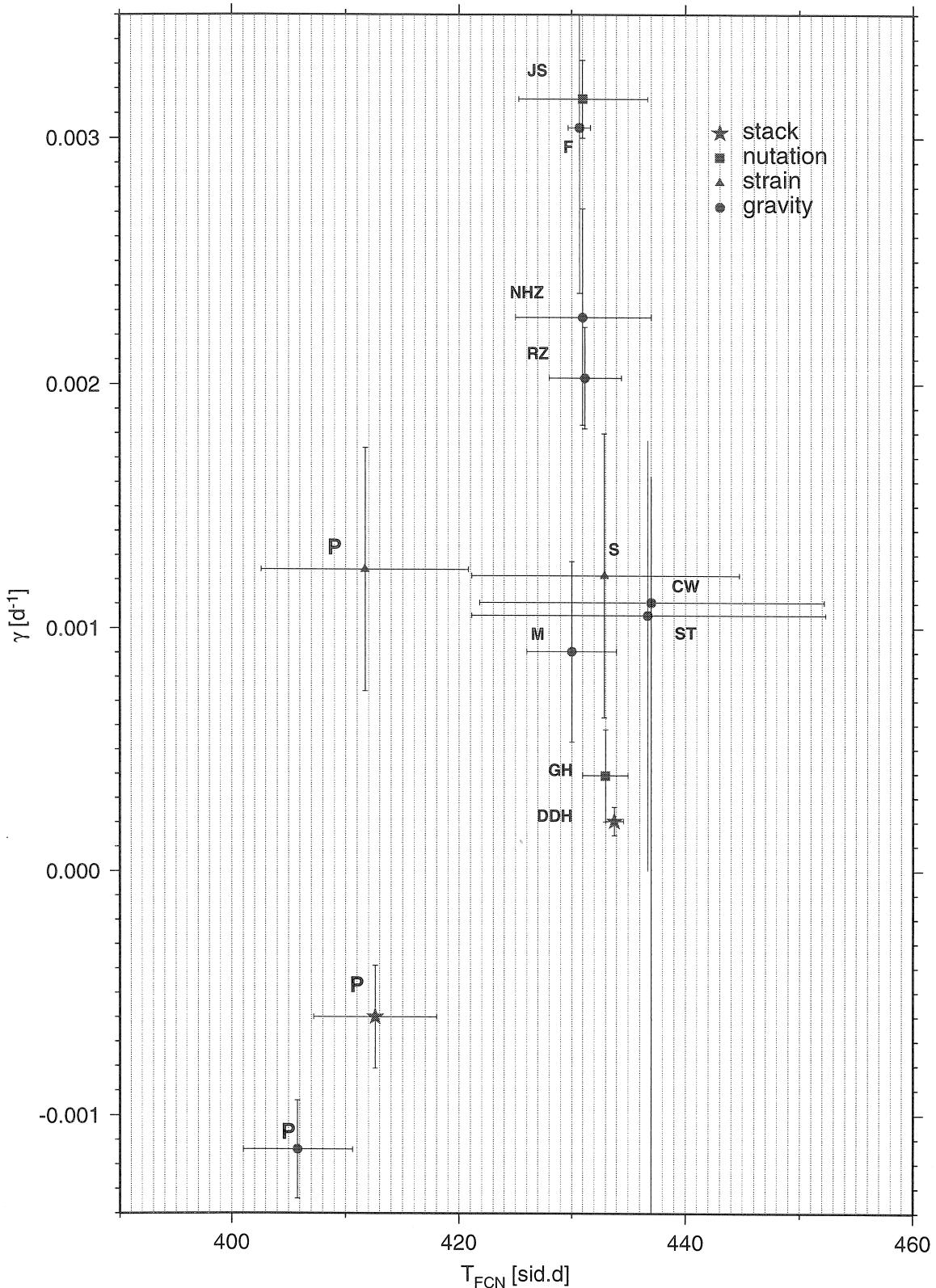
respectively add to each complex ocean load correction  $\tilde{L}(\omega_j)$  the corresponding error term:

$$\tilde{L}_{\text{MC}}(\omega_j) = \tilde{L}(\omega_j) + \tilde{\varepsilon}_{\text{Load}, j} \quad (5)$$

with  $j = 1, \dots, 5$ .

3. Repeat the second step a 1000 times and subsequently determine the NDFW parameters (equations (1) and (2)) and compute from this random sample the Monte Carlo means  $\bar{T}_{\text{FCN}}$  and  $\bar{\gamma}$  and variances  $\beta_T$  and  $\beta_\gamma$ .

Since we want to investigate the influences of uncertainties of the tidal admittances and ocean load corrections, it seems efficient to perform three separate simulations. These are: adding an error term to the tidal constituents, adding an error term to the load corrections and a combination of both perturbations. This means we ran each individual



**Figure 7:** Resonance parameters  $T_{FCN}$  and  $\gamma$  determined in this work (labeled with **P**) and from other authors. Our results are obtained by the Monte Carlo simulation (section 6.3, only ETERNA error). Our stack consists of gravity and strain data. In Table 4 the other used abbreviations are assigned to the underlying publications.

**Table 7:**  $T_{FCN}$ , damping factor and their uncertainties from Monte Carlo perturbations on tidal admittances and ocean load corrections.

Type of signal	Kind of perturbation	Load factor perturb.	$\bar{T}_{FCN}$ [sid.d]	$\beta_T$ [sid.d]	$\bar{\gamma} \cdot 10^{-3}$ [ $d^{-1}$ ]	$\beta_\gamma \cdot 10^{-3}$ [ $d^{-1}$ ]
Gravity	load	0.1	405.5	0.6	-1.1	0.1
		0.2	405.5	1.3	-1.1	0.1
		0.4	405.5	2.6	-1.1	0.3
	ETERNA		405.8	4.8	-1.1	0.2
		0.1	405.8	4.8	-1.1	0.2
		0.2	405.8	5.0	-1.1	0.3
	& ETERNA	0.4	406.2	5.4	-1.2	0.9
		0.1	410.6	0.6	1.2	0.0
		0.2	410.6	1.2	1.2	0.0
Strain	load	0.4	410.6	2.3	1.2	0.1
		0.1	411.8	9.2	1.2	0.5
		0.2	411.7	9.1	1.2	0.5
	& ETERNA	0.2	411.7	9.2	1.2	0.5
		0.4	411.7	9.6	1.2	0.5
		0.1	484.	190.	3.	8.
Tilt	load	0.2	620.	456.	8.	12.
		0.4	812.	944.	10.	12.
		0.1	1320.	1900.	18.	11.
	& ETERNA	0.2	1330.	2000.	18.	12.
		0.4	1360.	2165.	18.	13.
		0.1	1460.	2950.	18.	15.
Gravity & Strain	load	0.1	412.3	0.4	-0.6	0.1
		0.2	412.3	0.9	-0.6	0.1
		0.4	412.4	1.7	-0.6	0.2
	& ETERNA		412.6	5.4	-0.6	0.2
		0.1	412.6	5.4	-0.6	0.2
		0.2	412.7	5.5	-0.6	0.2
	ETERNA	0.4	412.8	5.7	-0.6	0.3

data set through 7 different Monte Carlo simulations. Additionally we apply this method for a stack of gravity and strain data. The triangles in Fig. 2 are the solutions for the Monte Carlo simulation using only ETERNA errors. We note here in passing, that a part of the perturbations added in this method exceed the ones added in the last section.

From the results listed in Table 7 we found that the uncertainties which are due to the load corrections are small compared to the influences of the error estimation for the tidal parameters (which are based on SNR of tidal measurements). This is an important new result, because these errors have so far not been considered correctly by the ‘tidal community’ analyzing for NDFW parameters. A similar analysis on nutation results would therefore be extremely interesting. We can reconfirm the results of the previous section: There exists an asymmetry in the distribution of the obtained resonance parameters which leads to a shift in the mean values of the resonance period with reference to the un-perturbed solution. This shift is rather small for gravity, significant for strain, but disastrous for tilt data, since it corresponds to the size of the uncertainties of the admittances. The Monte Carlo results for gravity have their damping factor mean shifted to more negative values relative to the least squares solution. For strain they are in good agreement. For tilt the Monte Carlo error region seems to be comparably small, but there is a second group of solutions outside the range of Fig. 2 (lower panel), similar to the results in the previous section. If we take the Monte Carlo uncertainties of the Q-factors and compare them to the negative unconstrained Q-factors found, we see that in all cases the factors themselves cannot be distinguished from infinity within two standard deviations. Results of this section together with the results of other authors are depicted in Fig. 7 in the  $T_{FCN}-\gamma$  plane.

For reasons of comparison and in order to show the significance of the Monte Carlo simulations we have also performed a Monte Carlo analysis with the Bad Homburg gravity data [Zürn *et al.*, 1986]. With a period of the FCN of  $437.0 \pm 7.4$  sid.d and a Q-factor of  $6300 \pm 2200$  the uncertainties are approximately 3/2 respectively 18 times of the BFO ones. This implies that the BFO data fit better to a NDFW model than the Bad Homburg data. It must be mentioned here that in the limited diurnal band the noise in our gravity data is higher than in this Bad Homburg record, while the overall standard deviation of the BFO gravity residuals is smaller than the one of the Bad Homburg data. Furthermore the Monte Carlo uncertainty of the Bad Homburg resonance period is more than twice as large as the uncertainty from the least squares fit.

#### 6.4 Investigations of air pressure and possible modulations of $S_1$

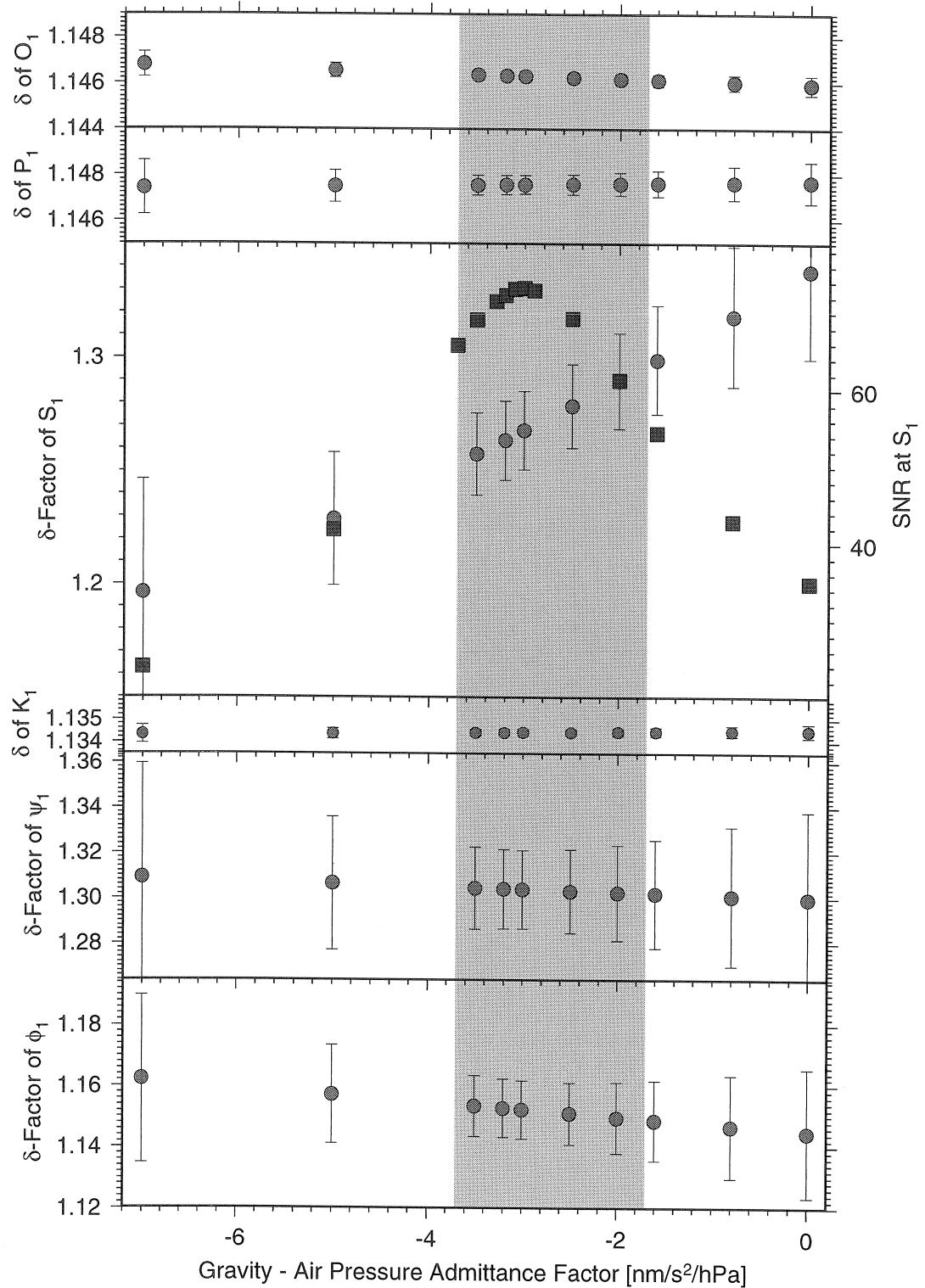
We restrict ourselves in the following to gravity data. The standard procedure, at least with gravity data, to take meteorologic effects into account is to simultaneously fit in the time domain the tidal model and the local air pressure to the data. This leads to a constant real regression coefficient for the entire frequency range. The gravity data contain two contributions at the  $S_1$ -frequency and its neighbourhood: the  $S_1$  gravity tide, which is rather small and the effect of air pressure at  $S_1$  which, with high probability, is seasonally modulated. In addition other daily influences could be present. The minimum measure to avoid contamination of the tides  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  and  $\phi_1$  by unmodeled effects in  $S_1$  is to assign to  $S_1$  a separate group in ETERNA. We fit to this mixture the harmonic theoretical tide

$S_1$  and the overall air pressure. If, firstly the modulation of the  $S_1$  in air pressure and its effect on gravity would be identical and if secondly the broad-band regression coefficient would be equal to the one for  $S_1$ , no problem would arise. However, if one or both of these conditions are violated, leakage to the neighbouring lines relevant for NDFW analyses will occur. From previous work [e.g. *Crossley et al.*, 1995] it is clear that the second condition is violated, while we do not know much about the modulations.

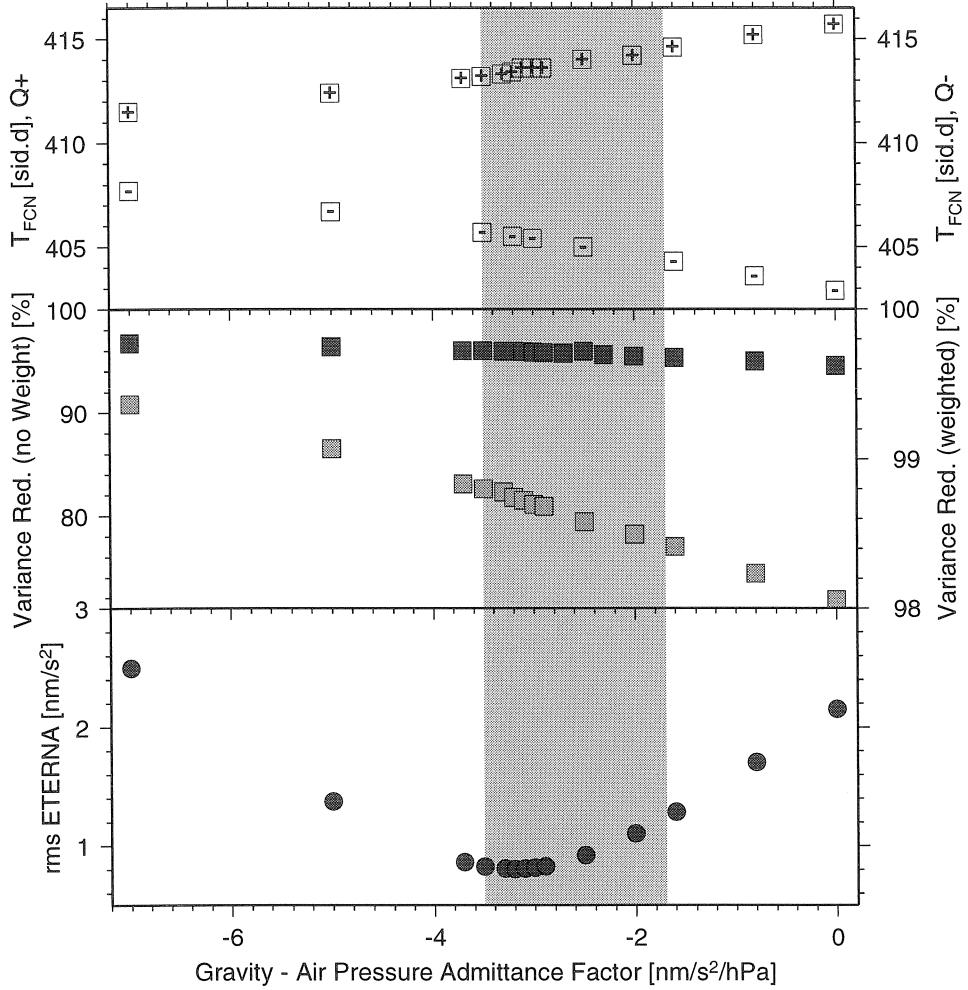
Below we investigate the behaviour of  $S_1$  in air pressure, but first we study if a varying admittance between gravity and air pressure changes the resonance parameters perceptibly. Therefore we have subtracted the local air pressure record multiplied by a-priori admittance factors and submitted the resulting series to the tidal analysis without air pressure as additional input. Afterwards we have applied ocean corrections and have performed the NDFW analysis in each case.

Fig. 8 shows the variation of the resulting  $\delta$ -factors as functions of these a-priori admittances in the interval between  $-7.$  and  $0 \text{ nm/s}^2/\text{hPa}$ . We chose the interval that large, in order to reveal even faint features. All relevant  $\delta$ -factors show nearly linear trends with the admittances. The maximum variations are:  $0.08\%$  for  $O_1$ ,  $0.02\%$  for  $P_1$ ,  $11.85\%$  for  $S_1$ ,  $0.02\%$  for  $K_1$ ,  $0.73\%$  for  $\psi_1$  and  $1.55\%$  for  $\phi_1$ . According to *Merriam* [1994] these tidal constituents could all be strongly influenced by the barometric pressure due to seasonal modulations in the  $S_1$  air pressure variations and because of that their  $\delta$ -factors could be influenced by the simplified barometric pressure corrections. These effects are not as dramatic as expected, except for  $S_1$ . However, surprisingly enough  $O_1$  is influenced by almost  $0.1\%$ . The upper panel of Fig. 9 shows for the same range of air pressure-gravity admittances the FCN period obtained with both constrained and unconstrained  $Q$ . If we apply a positivity constraint for the quality factor (+ symbols) the period of the FCN varies with the admittance by about  $4.2 \text{ sid.d}$  (Fig. 9 upper panel). Without constraint (- symbols) the range of the period variation is similar. But whereas with decreasing magnitude of the admittance factor the period of the FCN becomes longer for positive  $Q$ , for negative  $Q$  the behaviour of the FCN period is in the opposite way. When we limit the admittance to the interval  $[-3.5, -1.7] \text{ nm/s}^2/\text{hPa}$  (shaded area), which is indicated by *Crossley et al.* [1995], the difference in period amounts only to  $1.5 \text{ sid.d}$  in both cases. All tidal constituents used in the NDFW analysis have their minimal errors demonstrated by the SNR at about  $-3.0 \text{ nm/s}^2/\text{hPa}$ . As a proxy for all waves, the SNR is shown for  $S_1$  (Fig. 8, second panel). The minimum of the root mean square (rms) of the postfit residuals by ETERNA is located at a regression coefficient of  $-3.2 \pm 0.01 \text{ nm/s}^2/\text{hPa}$  (Fig. 9 lower panel). This is a mean value in the frequency range from  $0.5$  to  $12 \text{ cpd}$  and therefore does not necessarily have to be the minimum of the diurnal band. But in the case here the two values coincide.

In the middle panel of Fig. 9 the variance reduction achieved by the NDFW fit is shown.



**Figure 8:** Influence of a-priori air pressure-gravity admittance factors on the  $\delta$ -factors of  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $S_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  and  $\phi_1$  (before ocean load correction). In the second panel additionally the SNR of  $S_1$  are depicted (squares).



**Figure 9:** Upper panel: Influence of a-priori air pressure-gravity admittance factors on the period of the FCN, middle panel: ‘weighted’ (dark shaded  $\square$ ) and ‘unweighted’ (light shaded  $\square$ ) variance reduction by the NDFW analysis and lower panel: root mean square value of the tidal residuals from ETERNA.

It is calculated in terms of the resonant part of the  $\delta$ -factors  $\tilde{R}$  in the following way :

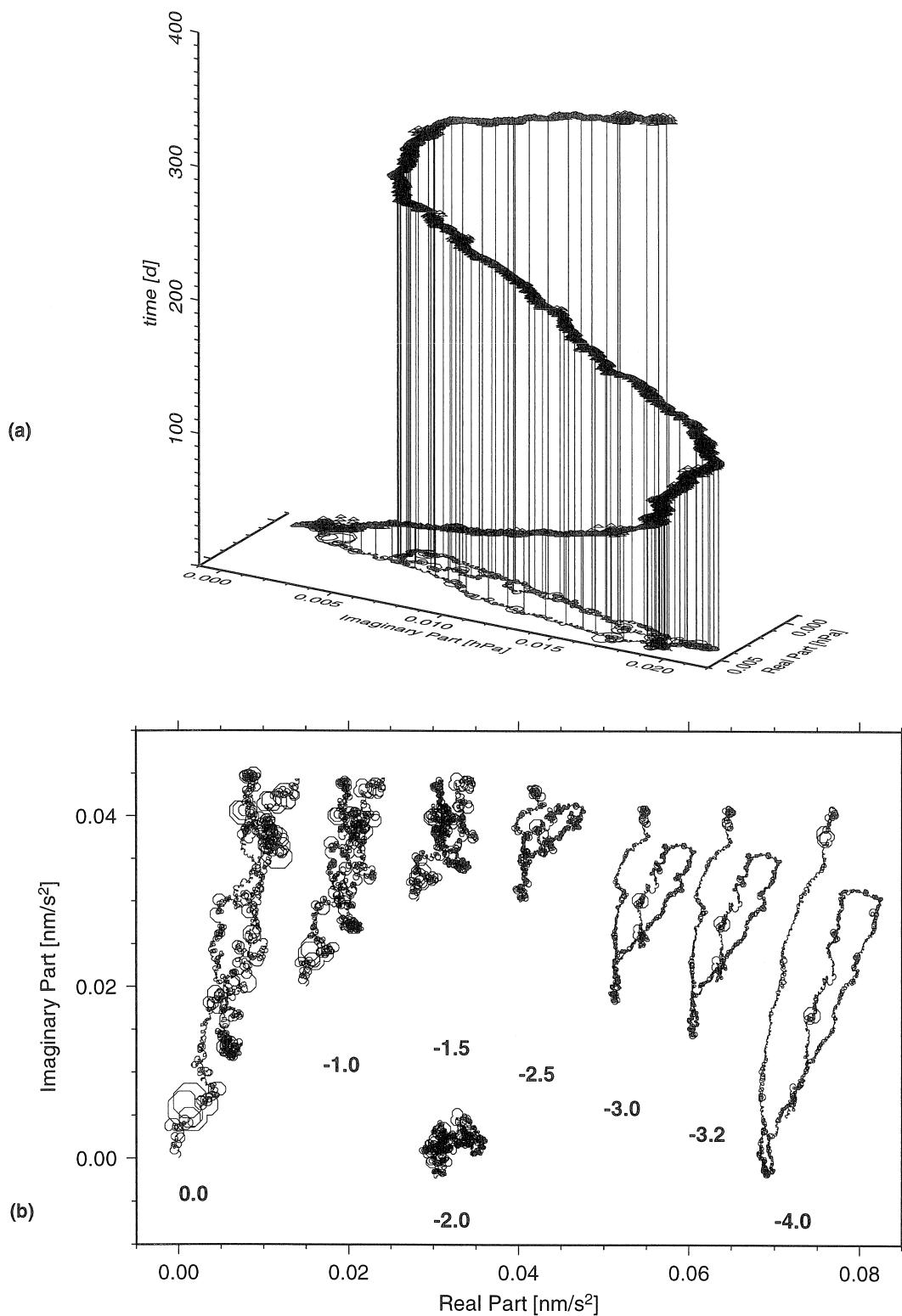
$$\left( 1 - \frac{\text{residual sum of squares (with reference to NDFW solution)}}{\text{total sum of squares}} \right) \cdot 100\%.$$

We distinguish between the ‘weighted’ and the ‘unweighted’ variance reduction. ‘Weighted’ means that each residual is weighted with the inverse of one standard deviation of the respective tidal constituent (from tidal analysis). The trend in the  $\delta$ -factors leads to higher ‘unweighted’ variance reductions (light shaded  $\square$  in Fig. 9 middle panel) for increasing magnitude of the air pressure-gravity admittances. But unfortunately the larger the difference to the rms-admittance, the smaller is the SNR. The ‘weighted’ variance reductions (dark shaded  $\square$ ) vary only negligibly (notice the different scaling). The signal to noise ratio of the tidal analysis seems to be the only criterion to judge the different admittances. Of course, we cannot be certain, that the true admittance is included in the range

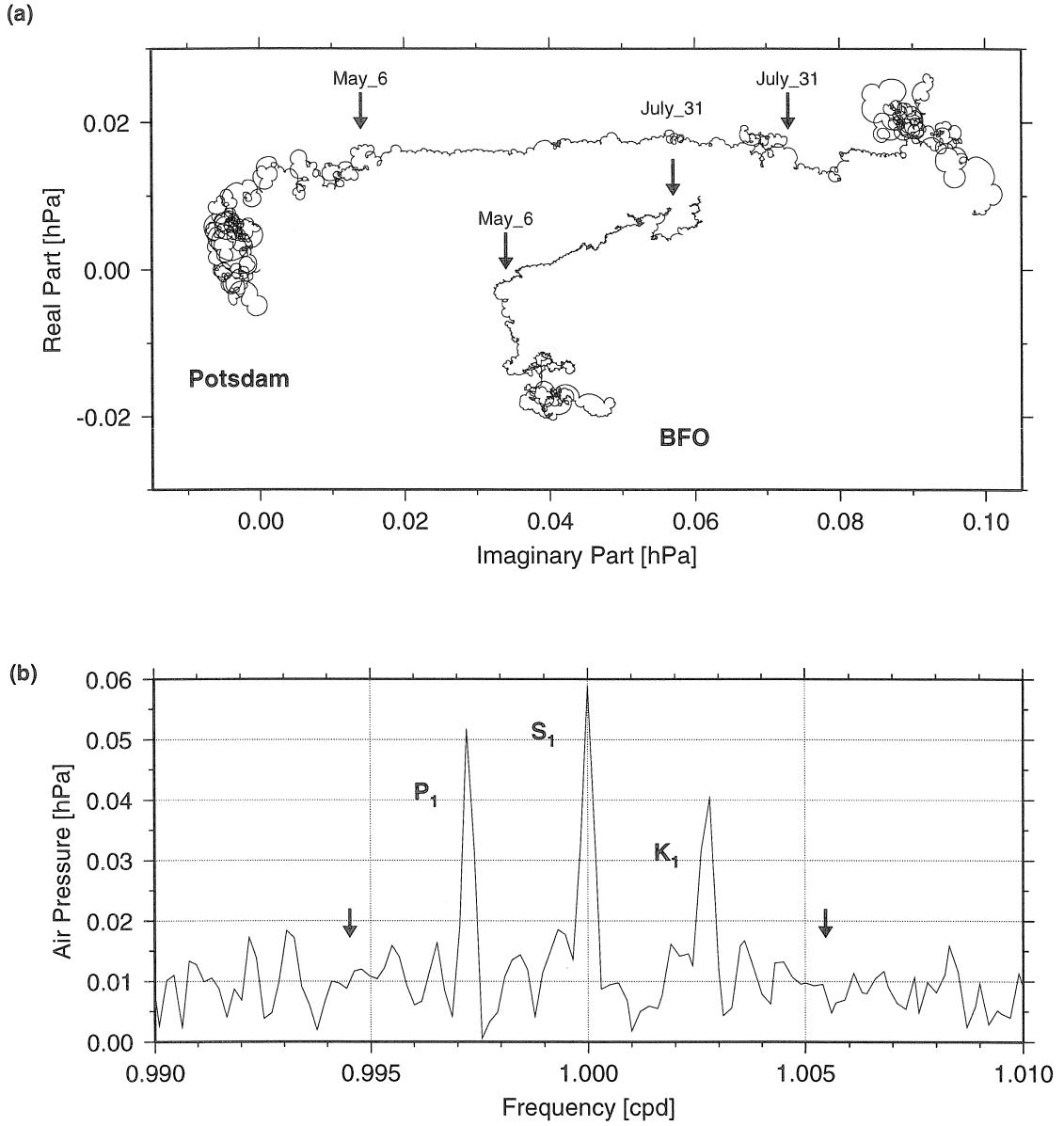
of these models. But on the other hand we unexpectedly found that the influence of the air pressure–gravity admittance is less than the influence of perturbations of the tidal constituents (section 6.2 and 6.3).

In the same context we have also investigated the behaviour of  $S_3$ . Since the nearest tidal gravity wave  $M_3$  is sufficiently far away, we are able to study how a harmonic pressure signal is transferred to gravity without having to take into consideration disturbing interactions. To reveal the properties of a harmonic signal we use the graphical representation of the discrete Fourier transform for a specific test–frequency in the complex plane, also known as ‘phasor walkout’ [Zürn *et al.*, 1995; Zürn and Rydelek, 1994]: Each individual contribution to the transform can be understood as a vector in the complex plane. The graphical summation of these individual vectors uncovers the temporal evolution of their contribution to the Fourier transform at the test–frequency. A continuing propagation of the vectors into a certain direction indicates a phase–coherent harmonic signal.

We have performed phasor walkouts with the frequency of  $S_3$  for our air pressure data (Fig. 10a) and gravity residuals for different air pressure–gravity admittance factors (Fig. 10b). To obtain the residuals we have, as earlier in this section for the diurnal tides, subtracted the local air pressure record multiplied by a–priori admittance factors and performed a tidal analysis without air pressure as additional input. Prominent are the phase reversals in April 1989 and about half a year later in the air pressure and some of the gravity residual walkouts. Already Chapman and Lindzen [1970] found a decreasing amplitude of  $S_3$  in air pressure at the equinoxes with connected phase reversals. These phase reversals of  $S_3$  in air pressure could also be traced to gravity. In Fig. 10b the walkouts in gravity residuals with the corresponding air pressure–gravity admittance are depicted. The starting points are moved for reasons of presentation. The best estimate for the admittance is reached when no coherent signal is left in the residuals. Then the walkout degenerates to ‘random walk’. This is the case for an admittance factor of  $2 \pm 0.25\text{nm/s}^2/\text{hPa}$ . For higher negative factors the barometric effect is over–corrected and the air pressure signal dominates the gravity residuals. We do not know, if there is a physical justification to transfer this admittance to the diurnal band and especially to  $S_1$ . If so, a  $S_1$  corrected for meteorologic effects could be used as another input tide in the resonance fit. The admittance factor of 2 is not in conflict with the Crossley values and would result in a FCN period of 414.2 sid.d. We find below, that the modulation of  $S_1$  in air pressure differs strongly from the modulation of  $S_3$  and we cannot easily trace its modulation in the gravity data. To study the behaviour of  $S_1$  we also perform phasor walkouts for its frequency. In Fig. 11 the walkouts for  $S_1$  for air pressure records at BFO and Potsdam ( $52.381^\circ\text{N}$ ,  $13.068^\circ\text{E}$ , 81 m elevation) are compared. Both walkouts clearly demonstrate that the  $S_1$  oscillation is not excited all the time or that its phase varies frequently with time. There is only a 86 days period from May 6, 1989 to July 31, 1989 when  $S_1$  is dominant and has relatively constant phase. Siebert [1961] found a latitude dependent amplitude of the global solar tide  $S_1$  in air pressure measured on the ground.



**Figure 10:** Phasor walkouts for a test-frequency of 3 cpd for (a) air pressure records (vertical axis: time elapsed after start) and (b) ETERNA gravity residuals with a-priori air pressure-gravity admittance factors as indicated.



**Figure 11:** (a) Phasor walkout for  $S_1$  in air pressure records from BFO and Potsdam for a 398 days period. The origin for BFO was moved to  $(0.04, -0.02)$  hPa for better presentation. The small arrows on both phasors mark the coherent period which begins on May 6, 1989 and lasts for 86 days. (b) Amplitude spectrum of an air pressure time series from Potsdam with 16 years length, beginning on September 1, 1974. The small arrows mark the frequencies of  $\pi_1$  and  $\psi_1$ .

According to his results the amplitude of  $S_1$  at Potsdam should be 79% of the one at BFO. But we find a  $S_1$  amplitude for the 398 days series at Potsdam (0.1635 hPa) which is 2.65 times the one at BFO (0.0617 hPa). This can also be seen in the phasor walkouts. The magnitude of the Fourier transform in this presentation is the vector from the origin of the walkout to the end point. But when we compare meteorological quantities from two stations we have also to take into account the different latitude, altitude and environment. BFO is located in a mountain range of South-West-Germany, whereas the station Potsdam

is situated in the northern German plains.

For better resolution of the diurnal tidal band we Fourier transformed also air pressure readings of 16 years length from Potsdam, which comprises the 398 days period (Fig. 11b). In the 16 years series we find a  $S_1$  amplitude of 0.059 hPa which is close to the BFO value. The phasor walkout for  $S_1$  reveals that in the short time period  $S_1$  is more dominant than in the long series on average. The annual modulations of  $S_1$  at the frequencies of  $P_1$  and  $K_1$  attain 5/6 respectively 2/3 of the amplitude of the diurnal carrier frequency, whereas semi-annual modulations at the frequencies of  $\pi_1$  und  $\psi_1$  do not emerge from the background noise.

Putting it all together we have a strongly non-harmonic  $S_1$  in air pressure, which could be additionally annually modulated like the  $S_1$  at Potsdam. But the behaviour of the  $S_1$  signal in gravity does not have to be equal to the signal in air pressure. Nevertheless it appears that the influence of air pressure on the FCN period is less than the influences resulting from the uncertainties of the tidal parameters.

## 7 Discussion and conclusions

Two of the data sets analyzed here, gravity and strain, are of very high quality and are therefore well suited for retrieval of NDFW properties from them. The tilt data do not belong into this class. Probably the noise level is simply too high for the small geophysically relevant signal, while in the case of strain the higher noise is compensated by the higher geophysical significance. Digital data acquisition with high rate, high timing precision, careful calibrations and extreme care in data processing all add quality to the final result on top of the quiet station and instrumentation. [Richter *et al.*, 1995; Widmer *et al.*, 1992]. We also employed the most recent ocean load corrections. The results for the NDFW parameters from these two data sets are reasonable resonance strengths and very high Q factors essentially not distinguishable from infinity. However, the FCN periods fall in the range 405 to 413 sid.d, well below the results of other authors from tidal and nutational data sets. At the level of  $1\sigma$  our FCN periods are significantly lower than the other published results. Levine *et al.* [1986] also obtained such a small value for  $T_{FCN}$ , namely 412 sid.d. but with large error bars of 61.8 sid.d. According to Neuberg *et al.* [1990] the most likely explanation of such low values would be increased ellipticity of the core-mantle boundary with reference to the hydrostatic value. Since we have about twice the frequency shift of the NDFW, we would need about twice the amount of ellipticity increase they obtained, namely 500 to 700 m for elastic and anelastic mantle, respectively.

We especially tried to assess the error propagation from the noise in the tidal admittances to the NDFW parameters more realistically than this has been done so far. For this we applied the Monte Carlo method and also systematic perturbations on the tidal admittances. It turns out that the uncertainties in the tidal admittances are the most serious error source in our data sets, and also in the well known excellent Bad Homburg gravity data. Therefore we can safely conclude, that this is the case for all tidal data sets.

We feel that such a Monte Carlo analysis is the most straightforward and realistic error estimation. Considering the small standard deviation of 2 sid.d for the nutation results for T<sub>FCN</sub> by *Gwinn et al.* [1986] it appears, that the tidal measurements cannot compete with nutation measurements by Very Long Baseline Interferometry (VLBI) for the estimation of NDFW parameters. However, we really cannot judge the quality of this low error estimate. *Schastok* [1995] remarked that past estimates of the ocean's effects on nutations could conceivably have overlooked non-negligible contributions from higher order ocean-tide harmonics. If such contributions would turn out to be important, there would be presumably implications for the nutation results, since a crucial point in all NDFW studies are the ocean corrections to the observed amplitudes and phases.

We are still very concerned about correction for air pressure effects in the diurnal band. But yet there is no perfect method to deal with this. Modulation of S<sub>1</sub> in barometric pressure is clearly present and it is, for a given data set of a few years at most, not necessarily a clear seasonal modulation in the latitudes of BFO and Potsdam. Studies of S<sub>3</sub> do not help for S<sub>1</sub> either. The modulation leads to systematic effects in the tidal admittances for sure due to leakage from an imperfectly modeled S<sub>1</sub> to the neighbouring tides. However, from our results it appears that these effects probably are drowned in the uncertainties due to the noise in the raw tidal data.

**Acknowledgments** H. Otto and W. Großmann, D. Emter and W. Kaminski deserve much of the credit for the data quality. We thank D. Agnew for calculating the ocean load signals for BFO and H. Wilhelm for careful reading of the manuscript. We want to thank especially R. Widmer for fruitful discussions and providing software. Support from Deutsche Forschungsgemeinschaft under grant We 1653/1 made this work possible and is gratefully acknowledged.

## References

- Agnew, D. C., 1995: Ocean-load tides at the South Pole: A validation of recent ocean-tide models, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 22, No. 22, 3063-3066
- Chapman, S. and Lindzen, R. S., 1970: Atmospheric tides, *Reidel, Dordrecht*
- Crossley, D. J., Jensen, O. G. and Hinderer, J. 1995: Effective barometric admittance and gravity residuals, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 90, 183-195
- Cummins, P. and Wahr, J., 1993: A study of the Earth's free core nutation using International Deployment of Accelerometers gravity Data, *J. Geophys. Res.*, 98, 2091-2104
- Defraigne, P., Dehant, V. and Hinderer, J., 1995: Correction to 'Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble', *J. Geophys. Res.*, 100, 2041-2042
- Dehant, V., 1987: Tidal parameters for an Inelastic Earth, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 49, 97-116
- Eanes, R. and Bettadpur, S., 1995: The CSR3.0 global ocean tide model, *Center for Space*

- Research, Technical Memorandum, CSR-TM-95-06*
- Florsch, N., Chambat, F., Hinderer, J. and Legros, H., 1994: A simple method to retrieve the complex eigenfrequency of the earth's nearly diurnal free wobble; application to the Strasbourg superconducting gravimeter data, *Geophys. J. Int.*, **116**, 53–63
- Goodkind, J. M., 1983: Q of the nearly diurnal free wobble, *Proc. 9th Int. Symp. Earth Tides*, New York, 1981, (Ed. Kuo, J.T.), Schweizerbart, Stuttgart, 569–575
- Gwinn, C. R., Herring, T. A. and Shapiro, I. I., 1986: Geodesy by radio interferometry: Studies of the forced nutations of the Earth. 2nd Interpretation, *J. Geophys. Res.*, **91**, 4755–4765
- Jiang, X., 1993: Wobble-nutation modes of the Earth, *Ph.D. Thesis*, Department of Physics, Univ. York, North York, Ont.
- Jiang, X. and Smylie, D. E., 1995: A search for free core nutation modes in VLBI nutation observations, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **90**, 91–100
- Le Provost, C., Genco, M. L., Lyard, F., Vincent, P. and Cancéil, P., 1994: Spectroscopy of the world ocean tides from a finite element hydrodynamic model, *J. Geophys. Res.*, **99**, 24777–24797
- Levine, J., Harrison, J. C. and Dewhurst, W., 1986: Gravity tide measurements with a feedback gravity meter, *J. Geophys. Res.*, **91**, 12835–12841
- Merriam, J. B., 1994: The Nearly Diurnal Free Wobble Resonance in Gravity measured at Cantley, Quebec, *Geophys. J. Int.*, **119**, 369–380
- Mukai, A., Higashi, T., Takemoto, S., Nakagawa, I. and Naito, I., 1995: Accurate estimation of atmospheric effects on gravity observations made by a superconducting gravity meter at Kyoto, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 149–159
- Neuberg, J., 1987: Erdkernresonanz im ganztägigen Gezeitenband, *Diss. Univ. Karlsruhe*, 137 pp
- Neuberg, J., Hinderer, J. and Zürn, W., 1987: Stacking gravity tide observations in Central Europe for the retrieval of the complex eigenfrequency of the Nearly Diurnal Free Wobble, *Geophys. J. R. astron. Soc.*, **91**, 853–868
- Neuberg, J., Hinderer, J. and Zürn, W., 1990: On the complex eigenfrequency of the 'Nearly Diurnal Free Wobble' and its geophysical interpretation, *Geophysical Monograph 59: Variations in Earth Rotation*, (McCarthy, D. D., Carter, W. E., Eds.), IUGG volume 9, AGU and IUGG, Washington D.C., 11–16
- Neuberg, J. and Zürn, W., 1986: Investigation of the Nearly Diurnal Resonance using Gravity, Tilt and Strain data simultaneously, *Proc. 10th Int. Symp. Earth Tides*, Madrid, 1985 (Ed. R. Vieira), Cons. Sup. Invest. Cient., 305–311,
- Press, W. H., 1988: Numerical recipes in C, *Cambridge University Press*, Cambridge, 818 pp
- Richter, B., Wenzel, H.-G., Zürn and W., Klopping, F., 1995: From Chandler wobble to free oscillations: comparison of cryogenic gravimeters and other instruments in a wide period range, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 131–148
- Richter, B. and Zürn, W., 1988: Chandler Effect and Nearly Diurnal Free Wobble as de-

- terminated from Observations with a superconducting Gravimeter, *Proc. IAU Symp. 128, The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics*, Coolfont, Virginia 1986, (Babcock, A. K., Wilkins, G. A., Eds.), 309–315
- Sato, T., 1991: Fluid Core Resonance Measured by Quartz Tube Extensometers at the Esashi Earth Tides Station, *Proc. 11th Int. Symp. Earth Tides*, Helsinki, 1989, (Ed. Kakkuri J.), E. Schweizerbart, Stuttgart, 573–582
- Sato, T., Tamura, Y., Higashi, T., Takemoto, S., Nakagawa, I., Morimoto, N., Fukuda, Y., Segawa, J. and Seama, N., 1994: Resonance Parameters of the Free Core Nutation Measured from Three Superconducting Gravimeters in Japan, *J. Geomag. Geoelectr.*, 46, 571–586
- Siebert, M., 1961: Atmospheric tides, *Advances in Geophysics*, 7, 105–182
- Schastok, J., 1995: Nutations of an Anelastic Earth with Oceans, *Abstracts, IUGG, XXI General Assembly*, Boulder, Colorado, B, p. 22
- Schwiderski, E. W., 1980: On charting global ocean tides, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 18, 243–268
- Tamura, Y., 1987: A Harmonic Development of the Tide-Generating Potential, *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 99, 6813–6855
- Volland, H., 1988: Atmospheric Tidal and Planetary Waves, *Kluwer, Dordrecht*, 348 pp.
- Wahr, J. M., 1981: Body Tides on an Elliptical, Rotating, Elastic and Oceanless Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 677–703
- Wahr, J. and Bergen, Z., 1986: The effects of mantle anelasticity on nutations, earth tides, and tidal variations in rotation rate, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 87, 633–668
- Warburton, R. J. and Goodkind, J. M., 1977: The Influence of Barometric-Pressure Variations on Gravity, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 48, 281–292
- Wenzel, H.-G., 1994a: PRETERNA – a preprocessor for digitally recorded tidal data, *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 118, 8722–8734
- Wenzel, H.-G., 1994b: Earth tide analysis Package ETERNA 3.0, *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 118, 8719–8721
- Wenzel, H.-G., 1994c: Earth tide data processing package ETERNA 3.20, *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 120, 9019–9022
- Widmer, R., 1991: The large-scale structure of the deep Earth as constrained by free oscillation observations, *PhD thesis*, Univ. California, San Diego, 150 pp
- Widmer, R., Zürn, W. and Masters, G., 1992: Observation of low-order toroidal modes from the 1989 Macquarie Rise event, *Geophys. J. Int.*, 111, 226–236
- Zürn, W., Neuberg, J. and Emter, D., 1988: Search for the ‘Nearly Diurnal Free Wobble’– Resonance in strain-induced local tidal tilts, *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 102, 7107–7117
- Zürn, W. and Rydelek, P. A., 1991: Investigation of the ‘Nearly Diurnal Free Wobble’– Resonance in individual Tidal records, *Proc. 11th Int. Symp. Earth Tides*, Helsinki, 1989, (Ed. Kakkuri, J.), E. Schweizerbart, Stuttgart, 521–530
- Zürn, W. and Rydelek, P. A., 1994: Revisiting the Phasor-walkout method for detailed investigation of harmonic signals in time series. *Surveys in Geophysics*, 15, Kluwer

- Academic Publishers, Netherlands, 409–431
- Zürn, W., Rydelek, P. A., Polzer, G. and Weinbrecht, J., 1995: Identification of Persistent Harmonic Signals Using the Phasor-Walkout Method, *Proc. 12th Int. Symp. Earth Tides*, Beijing, 1993, (Ed. Hsu, H. T.), Science Press, 279–287
- Zürn, W., Rydelek P. A. and Richter B., 1986: The Core–resonance Effect in the Record from the Superconducting Gravimeter at Bad Homburg, *Proc. 10th Int. Symp. Earth Tides*, Madrid 1986 (Ed. R. Vieira), Cons. Sup. Invest. Cient., 141–147

# Direct measurement of tidal stresses in rock

D. Emter, H.Otto, W.Zürn, F.Glötzl<sup>1</sup>, H.-G.Wenzel  
Black Forest Observatory  
Heubach 206  
D-77709 Wolfach

## Abstract

Tidal stresses in crustal rock have been resolved directly in a borehole in the BFO. The measurements were performed with a pneumatic pressure compensation technique which can be better calibrated than all the methods based on strain measurements. To increase the limited dynamic range of the pneumatic method the measurements were supported by piezoresistive pressure transducers.

## 1 Introduction

The measurement of mechanical stresses in rock near the surface or underground has a long tradition especially in mining engineering (e.g. JAEGER & COOK, 1979). The methods developed for these purposes are more and more applied in geosciences especially to determine absolute values of rock stresses in situ and relate them to local and regional tectonic structures (e.g. ZOBACK, 1992). Attempts have also been undertaken to study the variation of stresses with time in earthquake-prone areas by sensitive borehole strainmeters (SACKS et al., 1971; SAKATO & SATO, 1986; LINDE et al., 1988; GLADWIN et al., 1991; WYATT et al., 1994). These instruments have proven their sensitivity and perfect coupling to the rock by the resolution of tidal strains. But there remains the problem of calibration i.e. the difficulty to convert the strain variations measured within the borehole into variations of stresses in the vicinity of the borehole (GLADWIN & HART, 1985). This is because the borehole, refilled with an instrument and cement, remains an inhomogeneity in the surrounding rock unless the elastic moduli of the borehole package (instrument + cement) can be made equal to that of the rock. This is difficult to achieve as for strainmeters there exists a tradeoff between stiffness and sensitivity in order to get measurable displacements. Often the problem is turned around and the tidal strains are used to calibrate these instruments in situ (e.g. RYDELEK et al., 1991).

These difficulties are overcome by using flat pressure cells developed by the Glötzl-company for stress measurements in rock constructions like dams and mines (SAUER & SHARMA, 1977). They can be made stiffer than any kind of rock and form a "hard inclusion" in the surrounding rock including the coupling grout. These Glötzl-cells were for the first time used for purely scientific application in boreholes in the earthquake area of the Swabian Jura in order to measure small variations of stresses in the rock (BAUMANN, 1984). The method has a theoretical resolution of better than 1 hPa, nevertheless the records did not show any tidal stresses, which have theoretical amplitudes of some ten hPa. The only reason could be that the sensors were not coupled adequately to the rock although expanding cement had been used during the installation. This was proven to be

---

<sup>1</sup>Gesellschaft für Baumeßtechnik mbH, D-76287 Rheinstetten

the case by EMTER et al. (1989). The aim of our investigations was to see whether tidal stresses can be resolved with this method if coupling of the pressure cells to the rock is achieved. The clear appearance of tidal stresses can be taken as a check for good coupling to the rock in installations of the same kind. SWOLFS & WALSH (1990) mention that they have resolved tidal stresses in the order of 20 hPa during continuous measurements with a similar method. But unfortunately they did not present any record nor result of any kind of analysis.

## 2 Method of stress measurement

Any measurement of stress in a continuum requires an interference with the medium itself. In the case of crustal rocks, stress measurements are in most cases performed in boreholes. Those boreholes form inhomogeneities in the continuum and distort the original strain and stress field in a way that it becomes difficult to compute stresses outside the borehole from strain measured in the vicinity of or inside the borehole. These differences are strongest for an open borehole, this corresponds to the well-known "cavity-effect" (e.g. KING & BILHAM, 1973). Even if a cylindrical strainmeter is cemented inside the borehole it is rather difficult to calculate the strain (or stress) enhancement due to the contrast of the elastic moduli between the instrument and the surrounding rock (GLADWIN & HART, 1985). As already mentioned these difficulties are avoided or at least strongly reduced if stiff and flat pressure sensors like the Glötzl-cells are used. If a borehole is refilled with a cylindrical "hard inclusion" i.e. an inclusion with moduli larger than those of any possible kind of rock, stress inside the inclusion (which might be a stressmeter) is amplified. For very large ratios of the moduli the factor of amplification approaches a value of 1.5 and becomes independent of the type of surrounding rock (JAEGER & COOK p.251). For a flat "hard inclusion" like a Glötzl-cell, which is coupled directly to the surrounding medium, the stress amplification factor differs only by a few percent from unity for the stress parallel to the smallest axis (PEATTIE & SPARROW, 1954). If such a flat sensor is installed in a cylindrical borehole it has to be coupled to the rock by grout. The additional error remains small if the modulus of the grout is close to that of the rock. Concrete fulfills this condition for most rock types. In practice three of those sensors are placed one above the other in one borehole to measure three independent normal stresses in order to get the complete free surface stress tensor.

Glötzl-cells are cushions (250x130x7mm) made of thin (2mm) steel filled with mercury. Their overall Young's modulus is 170 GPa, about 3 to 5 times larger than that of granite, thus the "hard inclusion" condition is satisfied. Rock stress normal to the flat cell is determined directly by compensation without any measurement of strain inside the borehole. In fact there exists no measurement of stress or pressure without deformation which in this case takes place in the pressure sensor outside the borehole. In the case of good contact the pressure inside the mercury fill equals the rock stress and acts on one side of a membrane which is pressed onto a plate with holes. During the measuring process air pressure increasing with time is applied to the other side of the membrane through a pressure tube from outside the borehole. When air pressure is slightly larger than mercury pressure, the membrane lifts off from the plate and the air pressure can no longer increase as the air escapes now through the air return pipe. This value of air pressure now read at the manometer corresponds to the rock stress at this moment. Such

a pneumatic measurement takes some minutes and can be repeated automatically. In the laboratory the method has proven to have a resolution of 0.1 hPa. For design reasons the pneumatic method has an upper limit of 1.6 MPa which is sufficient for most technical applications. In the case of the BFO measurements the possibility of large prestresses due to the expanding grout and by lithostatic load could not be excluded. Therefore a second sensing system has been added with a range of up to 5 MPa. A piezoresistive transducer was implanted in the Glötzl-cell to measure the mercury pressure directly and continuously. Up to 1.6 MPa both methods were used in parallel.

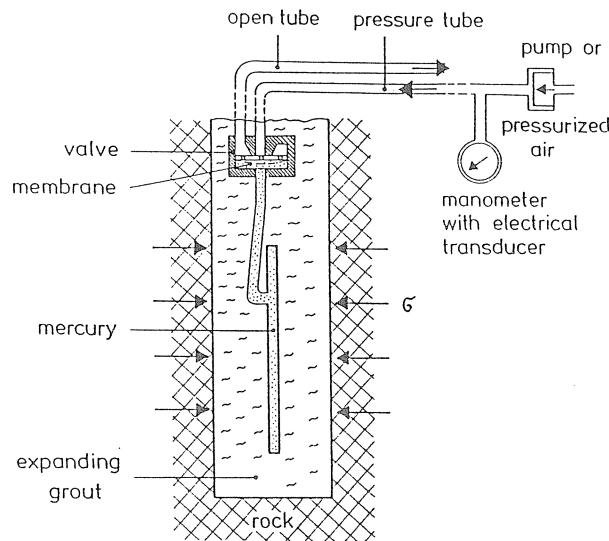


Fig.1: Principle of operation of a Glötzl-cell in a borehole.

### 3 Measurements in the BFO

#### 3.1 Site and installation

For the investigations a site was chosen within the mine of the BFO (see Fig.2) where tidal strains have already been recorded by a strainmeter, with an amplitude reduced by 16 % with respect to the expected tides of the solid earth plus oceans by topographic effects (BEAVAN et al., 1979). Three vertical boreholes were drilled into the granite of the tunnel floor with a small drilling rig normally used to drill holes through concrete walls or floors in buildings. The boreholes have a diameter of 18 cm and are between 1.85 and 2.20 m deep. Their distances from each other are 2.5 and 8.5 m respectively.

As we have about 140 m of overburden above the site considerable lithostatic stresses in horizontal direction, as measured by the Glötzl-cells, have to be expected. Horizontal lithostatic stresses were estimated for a halfspace (JAEGER & COOK, p.356). The influence of topography was calculated by finite element models (EMTER et al., 1992) and the effect of the tunnel estimated analytically (JAEGER & COOK, p.238). All these estimates resulted in values of 1.3 to 1.7 MPa for the constant horizontal stresses at the site of the boreholes. As these values are just around the limit of our pneumatic device the piezoresistive sensors were added during the experiments.

The problem to find a better expanding additive to the grout than that used in the

Swabian Jura experiment was discussed with concrete experts of Karlsruhe University. By their recommendation we finally selected an additive named EA-3 from Halliburton Company, Celle. The effect of this additive is based on a recrystallisation process instead of the formation of gas bubbles. It is used by Halliburton for the tight closing of industrial boreholes with concrete. Normally 15 % of additive in the concrete is used to get the desired strong coupling to the walls of the boreholes.

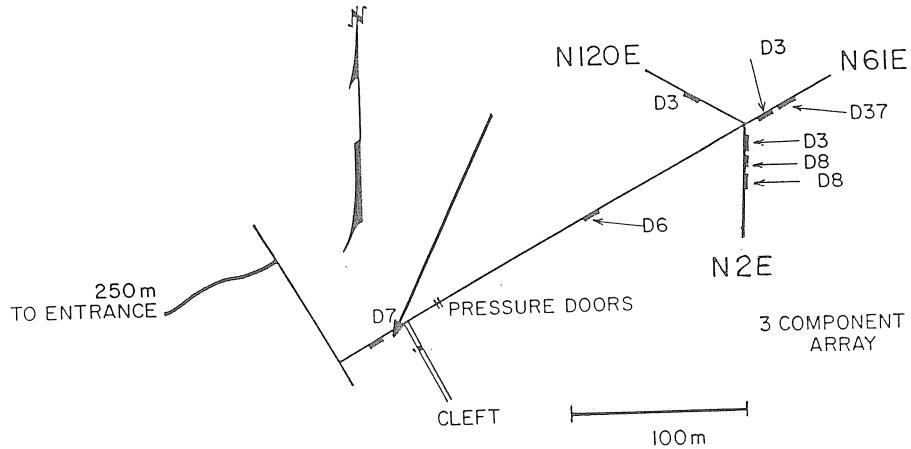


Fig.2: Plan view of the BFO ( $\varphi = 48.33^\circ N$ ,  $\lambda = 8.33^\circ E$ ) showing the positions of previous tidal strain measurements (D3-D37, see BEAVAN et al., 1979) and the site for the present stress measurements (arrow).

### 3.2 Time series

The first experiment started as early as 1990 with the cementation of two Glötzl-cells one above the other in two perpendicular directions in the first borehole with the 15 % of additive normally used by Halliburton. High-resolution pneumatic measurements were not possible as the stresses in the borehole increased in about 2 months time up to 7.0 MPa, far beyond the limit of that device and remained as high as 4.0 to 5.0 MPa since. A piezoresistive sensor had not yet been foreseen in this experiment and therefore not enough resolution was available to see tidal variations of a few tens of hPa on top of these large stresses. As the observed stresses were far beyond all estimates for lithostatic stresses they were attributed to the expanding additive which was reduced therefore to 6 % in the second experiment in 1993. Only one Glötzl-cell now equipped with a piezoresistive sensor was cemented into the lower part of the second borehole . The effect of the additive was still too strong, the stress again increased within some days beyond the 1.6 MPa level and stabilized at more than 3 MPa. Unfortunately the piezo sensor was damaged inside the borehole by lightning; high-resolution measurements were again impossible.

In the third experiment starting April 26, 1995, only 5 % of additive was used. Laboratory

experiments had shown that cement samples with concentrations of 4 % of EA-3 and less did not show any measurable volume increase during hardening. A Glötzl-cell was cemented in the upper part of the second borehole in an orientation to measure stress normal to the direction of the tunnel. To be on the safe side two piezo sensors were installed this time. Stress increased again following the installation but at a smaller rate than during the previous experiments, the 1.6 MPa level was reached after 112 days. During this time span pneumatic measurements were performed every 4 hours. The 4 hour interval is still sufficient to resolve tides and is a compromise for the consumption of pressurized air (a commercial container lasts for about two weeks). The digitized output of the manometer was recorded on a printer with a resolution corresponding to 1.6 hPa. The data had to be transferred manually to a PC for further analysis. Simultaneously the output of one of the piezo sensors was recorded on the routine data acquisition system of the BFO with a sampling interval of 5 s and a least count of 1  $\mu$ V. The resolution of this system is limited by the rms noise of the complete chain consisting of piezoresistive bridge, amplifier and anti-aliasing filter. This noise level corresponds to about 0.2 hPa rms. The pneumatic measuring procedure produced a spike every 4 hours in the piezo records which had to be removed before the analysis. From the termination of the pneumatic measurements after about 3.5 months until present the piezo data have been recorded undisturbed and continuously.

## 4 Tidal results

### 4.1 Calculation of tidal stresses

Before we analyze the records with respect to tides we have to calculate time series of theoretical tidal stresses which are at present not included in standard programs for tidal analysis like ETERNA (WENZEL, 1996). Tidal normal stress in the azimuth  $\psi$  depends on all components of the tidal strain tensor:

$$\sigma_\psi = 2\mu\epsilon_\psi + \lambda(\epsilon_{NN} + \epsilon_{EE} + \epsilon_{ZZ}) \quad (1)$$

with  $\mu$  and  $\lambda$  the Lamé's constants and  $\epsilon_\psi$  the tidal strain in direction  $\psi$ . For sites near the free surface with  $\sigma_{ZZ} = 0$  and a Poisson's ratio  $\nu = 0.25$  (i.e.  $\lambda = \mu$ ) we get:

$$\sigma_\psi = 2\mu \left\{ \epsilon_\psi + \frac{1}{3}(\epsilon_{NN} + \epsilon_{EE}) \right\} \quad (2)$$

The expression in brackets can be combined from every tide generating program that contains strain, the shear modulus  $\mu$  can be calculated by:

$$\mu = \frac{v_p^2}{3}\rho \quad (3)$$

from the density  $\rho$  and the velocity  $v_p$  of compressional waves. For the granite of the BFO mine a density of  $2.6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  and a P-wave velocity of 4.2 km/s result in a shear modulus of 15 GPa which was used for the following calculations and analyses.

### 4.2 Direct evidence for tidal stresses

About 10 days after the cementation the time rate of the stress increase slowed down to about 60 hPa/day and periodic signals were clearly visible in the time series of the

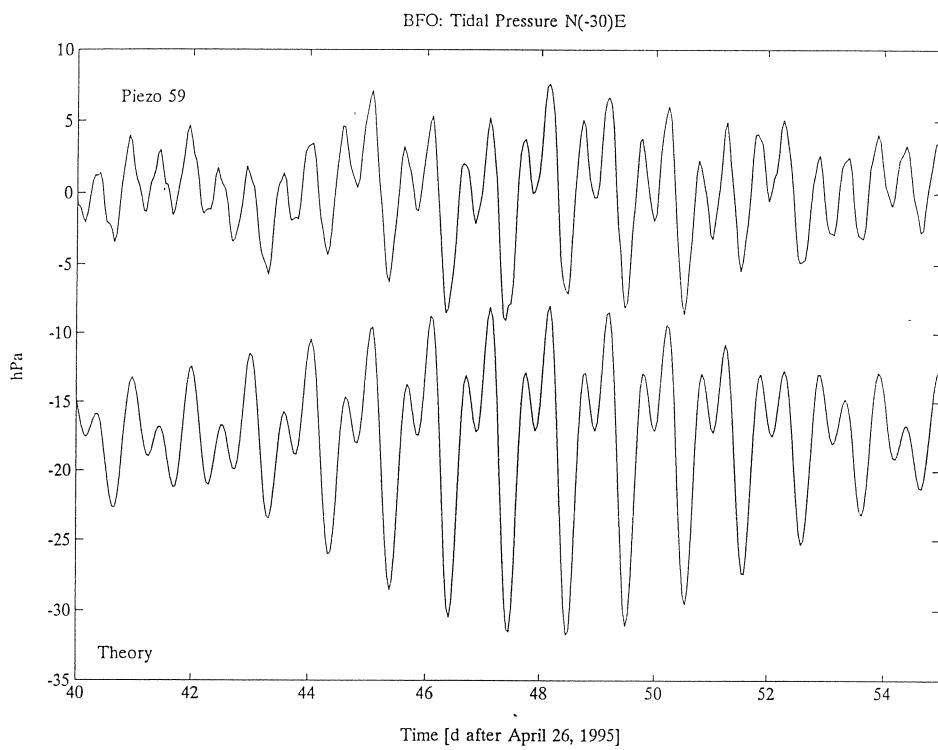


Fig.3: Example of rock stress measured with the piezoresistive sensor in the Glötzl-cell compared to theoretical tidal stress.

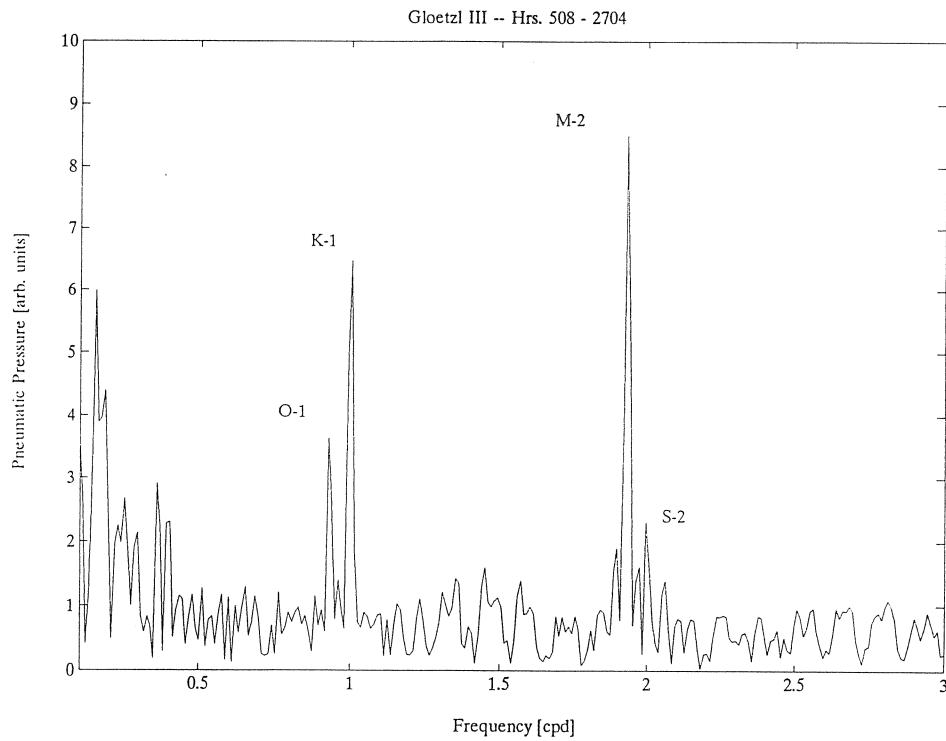


Fig.4: Amplitude spectrum of about 3 months of pneumatic data.

pneumatic measurements as well as on the piezo records. In Fig.3 an example of the detrended and despiked record of the piezoresistive sensor is shown and compared to the theoretical stress normal to the Glötzl-cell calculated for the azimuth  $N30^{\circ}W$  using eq. (2). This comparison shows already very clearly that tidal stresses have been resolved and recorded. The reasons for the difference in the amplitude will be discussed later. The evidence for the resolution of tidal stresses becomes still more convincing by the spectrum of a time series of 91.5 days of the pneumatic measurements (Fig.4). Major tidal lines are clearly separated with a good signal-to-noise ratio. Especially the spectral lines for the lunar tides  $M_2$  and  $O_1$  give clear evidence that tidal stresses have been resolved. Temperature influences on the instrumentation and thermoelastic stresses due to solar irradiation on the surface would produce solar harmonics only.

### 4.3 Tidal analysis

Although the aim of the investigations is already reached with the qualitative evidence of tidal stresses, a quantitative tidal analysis could be of some interest. As the pneumatic data cannot be used for an analysis with ETERNA because of the 4 hour interval, a time series of the piezo data from April 26, 1995 to August 13, 1995 was analyzed. The data sampled with 5 s interval were reduced to hourly means and the spikes due to the pneumatic measurements removed by a special algorithm. However, there were residual disturbances left in the data, therefore spectral lines appeared at 6.0 cpd ( $T = 4$  hr) and harmonics thereof. Although the program package ETERNA 3 has the possibility for the analysis of strain an analysis for tidal stress according to equation (2) is not possible without further modifications. It is certainly not worthwhile to modify the program for

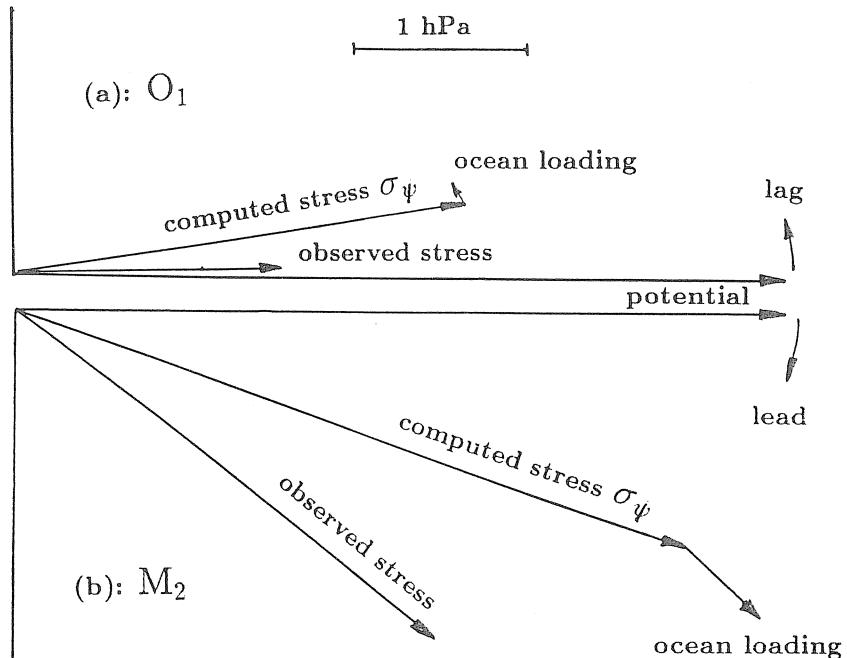


Fig.5: Scaled phasor plots for observed stress, computed stress  $\sigma_\psi$  and ocean loading effects for  $M_2$  (b) and  $O_1$  (a) at BFO.

this special investigation only. Therefore, the analysis was performed in an indirect way. First the data were analyzed with ETERNA with  $2\mu \cdot \varepsilon_\psi$  as the functional model. It is evident from equation (2) that the results of this analysis differ in amplitude and phase from an analysis against  $\sigma_\psi$ . The phasor plots in Fig.5 show the amplitudes and phases of the different signals (including local tidal potential). In a second step a synthetic time series for  $\sigma_\psi$  was calculated according to equation (2) with an elderly tide generating program (LONGMAN, 1959) for the time interval of the data. The astronomical accuracy of this program is sufficient for our purpose here. This time series was also analyzed with ETERNA against  $2\mu \cdot \varepsilon_\psi$ . We get a sufficiently good approximation for the analysis of the data against  $\sigma_\psi$  simply in dividing the admittances and subtracting the phases of these two ETERNA analyses. The results for the most important tides  $M_2$  and  $O_1$  are summarized in table 1. For all the analyses a shear modulus  $\mu$  of 15 Gpa was used which

Table 1: Results of the different steps of indirect analysis for tidal stress with ETERNA

Analyses	$M_2$		$O_1$	
	ampl.fac.	phase(deg)	ampl.fac.	phase(deg)
observed stress data	$1.0506 \pm 0.0149$	$+11.2 \pm 0.8$	$0.9304 \pm 0.0391$	$+15.7 \pm 2.4$
computed stress $\sigma_\psi$	$1.3934 \pm 0.0003$	$-7.3 \pm 0.01$	$1.7250 \pm 0.0010$	$+7.3 \pm 0.03$
data- $\sigma_\psi$	$0.7539 \pm 0.0149$	$+18.5 \pm 0.8$	$0.5393 \pm 0.0391$	$+8.4 \pm 2.4$

corresponds to a P-wave velocity of 4.2 km/s for the granite. This average velocity was determined by seismic experiments within the mine. Laboratory measurements with core samples from the Glötzl boreholes gave smaller values of about 3.5 km/s but the samples were much drier than in situ because several months had passed between extraction and measurements. The assumption of Poisson's ratio 0.25 made for equation (2) is justified especially for granite (CHRISTENSEN, 1996). As the amplitude factors are significantly smaller than unity one should think that the shear modulus in fact is smaller than 15 GPa. This might be the case but it does not solve the problem completely as the amplitude factors of  $M_2$  and  $O_1$  differ significantly by about 30 %. If we take the ocean load effect into account by calculating the corresponding  $\sigma_\psi$  with equation (2) from ocean load strain components (AGNEW, pers.communication), the difference in the amplitude factors is still about 20 % (see Fig.5). From this difference and from the considerable phases we have to invoke a strong local elastic effect. Those effects might be due to topography, geology and cavities or to the coupling of the sensor to the rock and are of different magnitude for semidiurnal and diurnal tides as is well known from tilt and strain measurements (EMTER & ZÜRN, 1985). It cannot be expected therefore that tidal stresses measured in surface rock can be analyzed quantitatively against theoretical tidal stresses calculated for a laterally homogeneous earth model. This failed for tidal tilt and strain already and stress involves even more local unknowns.

## 5 Seismic waves

Surface waves from large distant earthquakes are recorded by the BFO-strainmeters with amplitudes comparable to tidal strain amplitudes. The corresponding rock stresses should therefore be within the range of the piezoresistive transducers which measure the mercury pressure inside the Glötzl-cells. The output of one of these transducers is recorded on the routine data aquisition system of the BFO with a sampling rate of 5 s after having been filtered with a 25 s anti-aliasing filter. Fig.6 shows records of one of the strongest earthquakes that happened since the last, successful installation of the Glötzl-cells.

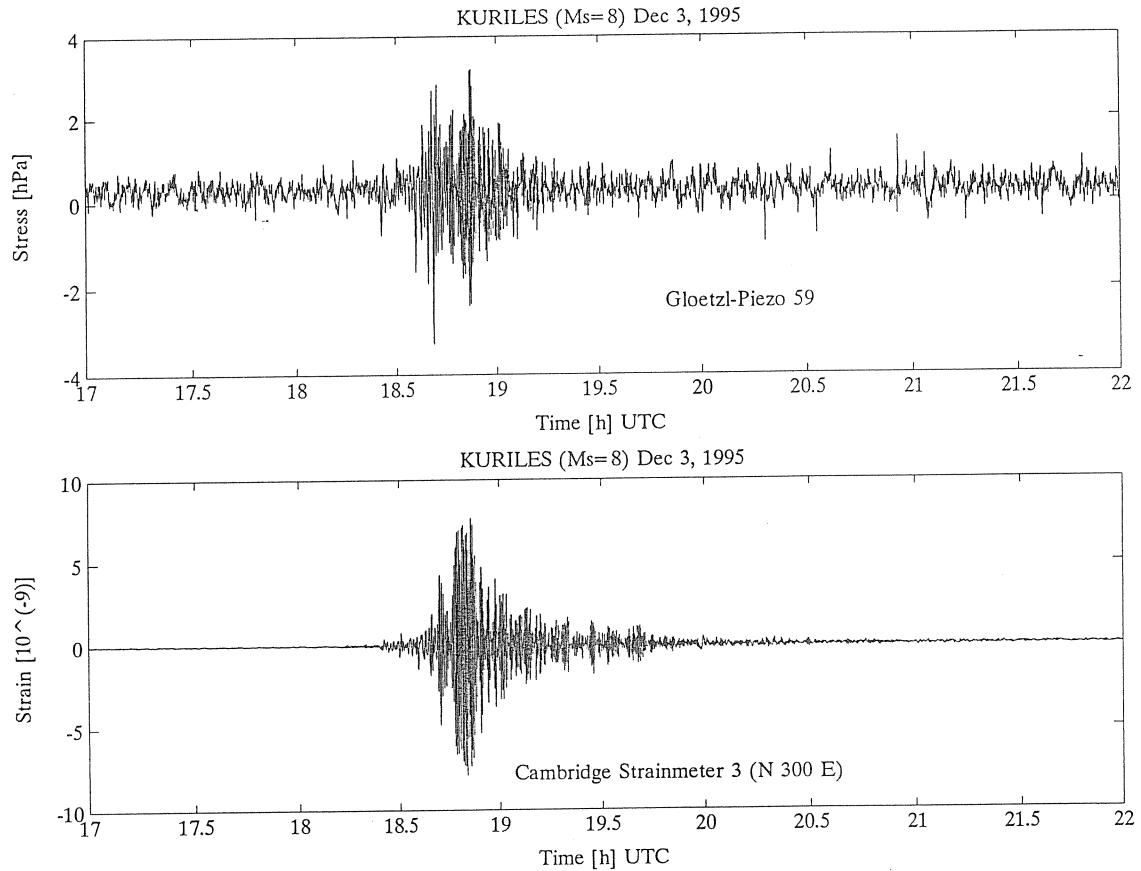


Fig.6: Record of the Kuriles earthquake of Dec. 3, 1995 with the Glötzl-piezo and with one of the BFO strainmeters.

Both records, that of the Glötzl-piezo in the upper panel and that of the strainmeter 3 (Azimuth  $N300^\circ E$  or  $N120^\circ E$ , see Fig.2) in the lower panel were high-passed with a 500 s filter to suppress tides. The surface waves of the quake show up very well in the piezo output with amplitudes of about 6 hPa peak-peak which is somewhat less than the maximum tidal stress amplitude (see Fig.3). The surface waves are recorded by the strainmeter with amplitudes of about  $15 \cdot 10^{-9}$  peak-peak which corresponds to about half the tidal strain amplitude in this azimuth. Thus the ratio of rock stresses to strain is of the same order of magnitude for tides and for seismic surface waves, the latter having their strongest amplitudes around periods of 20 s. This can be taken as a further qualitative proof for the perfect coupling of the Glötzl-cells to the rock, even at higher frequencies,

i.e. higher rates of stress changes. A direct quantitative comparison is not possible here as the piezo measures normal stress in the azimuth  $N30^{\circ}W$  and the strainmeter the strain in the azimuth  $N60^{\circ}W$ . This could be the reason for the differences in waveforms in Fig.6. Even if the azimuths were the same a direct comparison of the records is not possible because of the complicated relations between stress and strain documented by equations (1) and (2).

## 6 Conclusions

It has been demonstrated without any doubt by evidence in the time domain, by spectral analysis and by tidal analysis that tidal stresses could be measured with a reasonable signal-to-noise ratio (e.g. 50:1 for  $M_2$ , see Table 1) in a borehole in the BFO. These stresses with amplitudes of about 15 hPa peak-peak can be resolved with a direct pneumatic compensation technique originally developed for engineering applications. The main problem was not the sensitivity of the sensors but their coupling to the rock which was finally solved by trial and error. An exact quantitative interpretation of the stress amplitudes in terms of an earth model is impossible because of local elastic effects and uncertainties in the local moduli. But there is no need for such an interpretation as the aim was only to see whether very small variations of rock stress in the order of 15 hPa within 6 hours can be measured directly. This was confirmed by the resolution of even smaller stress changes at higher frequencies caused by the surface waves of a very strong earthquake. Clear qualitative evidence of tidal (and seismic) stresses can be taken as a proof for good coupling of the Glötzl-cells to the walls of a borehole in similar installations.

Nevertheless, it will be very difficult if not impossible to measure very slow stress variations with similar amplitudes. The additive we used for compensating the shrinking of the grout appears to have a long-term effect. Nearly one year after the installation the piezoresistive sensors in the Glötzl-cell still indicate increasing stress with a rate of about 160 hPa/month. This is less than a tenth of the rate during the first 4 months but still too high for a resolution of tectonic effects. Although not much is known about the long-term stability of the sensors at least part of this long-term stress increase could be due to the additive. Other additives might be found which settle faster but this is beyond the scope of our investigations.

## Acknowledgements

Mr Dehnel from Halliburton Company Germany provided the expansive additive EA-3 without any costs for us. Walter Grossmann built the electronics to connect the piezoresistive sensor to our data aquisition. Duncan Agnew provided the ocean load strain components for BFO. This work is a follow-up of partial projects A7 and D4 funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft under SFB 108 "Stress and Stress Release in the Lithosphere". All this is gratefully acknowledged.

## References

- BAUMANN, H., 1984: Aufbau und Meßtechnik zweier Stationen zur Registrierung von Spannungsänderungen im Bereich des Hohenzollerngrabens - Erste Resultate. *Oberrhein. geol. Abh.*, **33**, 1-14.
- BEAVAN, J.; BILHAM, R.; EMTER, D.; KING, G.C.P., 1979: Observation of strain enhancement across a fissure. *Deutsche Geod.Komm.*, **B 231**, 47-58.
- CHRISTENSEN, N.J., 1996: Poisson's ratio and crustal seismology. *J. Geophys. Res.*, **102**, 3139-3156.
- EMTER, D.; ZÜRN, W., 1985: Observation of local elastic effects on earth tide tilts and strains. In: *Earth Tides* (Ed. J.C.Harrison), pp.309- 327, Van Nostrand Reinhold, New York.
- EMTER, D.; ZÜRN, W.; GERSTENECKER, C.; BRIED, M.; BECK, U.; FLINSBACH, M., 1989: Zur Ankopplung der Sonden für Spannungsmessungen im Bereich des Hohenzollerngrabens. Berichtsband 1987-1989, Sonderforschungsbereich 108, A, pp. 189-200, Universität Karlsruhe.
- EMTER, D.; ZÜRN, W.; NOELL, U.; GERTSTENECKER, C., 1992: Abschliessende Versuche zur Messung kleinstter Spannungsänderungen mit Glötzl-Sonden. Berichtsband 1990-1992, Sonderforschungsbereich 108, B, pp.815-822, Universität Karlsruhe.
- GLADWIN, M.T.; HART, R..1985: Design parameters for borehole strain instrumentation. *Pure a. Appl. Geophys.*, **123**, 59-80.
- GLADWIN, M.T.; GWYTHER, R.L.; HIGBIE, J.W.; HART, R.G., 1991: A medium term precursor to the Loma Prieta earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 1377-1380.
- JAEGER, J.C. & COOK, N.G.W., 1979: Fundamentals of rock mechanics. - Chapman and Hall, London, 593 p.
- KING, G.C.P.; BILHAM, R.G., 1973: Tilt measurements in Europe. *Nature*, **243**, 74-75.
- LINDE, A.T.; SUYEHIRO, K.; MIURA, S.; SACKS, I.S.; TAKAGI, A., 1988: Episodic aseismic earthquake precursors. *Nature*, **334**, 513-515.
- LONGMAN, I.M., 1959: Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun. *J. Geophys. Res.*, **64**, 2351-2355.
- PEATTIE, K.R.; SPARROW, R.W., 1954: The fundamental action of earth pressure cells. *Journ. of Mechanics and Physics of Solids*, **2**, 141-155.
- RYDELEK, P.A.; ZÜRN, W.; SACKS, I.S.; LINDE, A.T., 1991: Tidal measurements with a Sacks-Evertson borehole dilatometer at Mammoth Lakes, California. In: *Proc. 11th Int.Symp. on Earth Tides* (Ed. I.Kakkuri), pp. 103-112, Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart
- SACKS, I.S.; SUYEHIRO, S.; EVERTSON, D.W.; YAMAGISHI, Y., 1971: Sacks-Evertson strainmeters, its installation in Japan and some preliminary results concerning strain. *Papers in Meteor. a. Geophys.*, **22**, 195-208.
- SAKATA, S.; SATO, H., 1986: Borehole-type tiltmeter and three component strainmeter for earthquake prediction. *Journ. Phys. Earth*, **34**, 129-140.

- SAUER, G.; SHARMA, B., 1977: A system for stress measurement in constructions in rock. In: *Proc. Int. Symp. on Field Measurements in Rock Mechanics, Zürich* (Ed. K.KOVÁRI), Vol.1, pp.317-330, A.A.Balkema, Rotterdam.
- SWOLFS, H.S.; WALSH, J.B., 1990: The theory and prototype development of a stress-monitoring system. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 80, 197-208.
- WENZEL, H-G., 1996: The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, 124, 9425-9439.
- WYATT, F.K.; AGNEW, D.C.; GLADWIN, M., 1994: Continuous measurements of crustal deformation for the 1992 Landers earthquake sequence. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 84, 768-779.
- ZOBACK; M.L., 1992: First- and second-order patterns of stress in the lithosphere: The world stress map project. *J. Geophys. Res.*, 97, 11703-11728.

*Traduction*

Théorie phénoménologique de la rotation  
de la Terre non élastique.

V.A. Tchourkin

Institut d'astronomie théorique de l'Académie des Sciences de Russie.

Introduction

Nous examinerons dans notre travail la rotation propre d'un corps céleste déformé. Nous considérerons que, bien que ce corps soit rigide dans un degré suffisant, il possède toutefois des propriétés non élastiques faiblement marquées; usant de termes imagés, d'après ses propriétés rhéologiques, le corps examiné dans notre théorie rappelle plus la Terre que Jupiter. Dans la suite, pour la simplicité, nous appellerons ce corps céleste non élastique: "Terre" (à l'exclusion de cas particulièrement stipulés) et nous attribuerons respectivement à celui-ci la plupart des estimations numériques des effets étudiés. Nous introduirons les notations :

M - masse de la Terre  
R - rayon moyen de la Terre

A, A, C (où C > A) - moments d'inertie principaux non perturbés de la Terre\* .

Équations du mouvement

A la base de la théorie de la rotation propre de la Terre nous poserons les équations très bien connues d'Euler - Liouville (voir exemple, Munk et Mac Donald, 1964). Ces équations sont correctes pour les rotations s'écartant de la rotation axiale non perturbée de quantités petites du premier ordre (dans le sens du rapport des vitesses angulaires correspondantes). La limitation donnée est tout à fait acceptable pour notre but puisque dans le système solaire les planètes du groupe de la Terre et des astéroïdes nous intéressent avant tout. Du point de vue analytique même cette circonstance est aisée par le fait qu'elle nous permet de nous limiter aussi dans les problèmes rhéologiques aux quantités du premier ordre utilisées\*\*.

Ainsi, nous écrirons les équations d'Euler - Liouville pour le cas d'une Terre à symétrie axiale\*\*\*.

---

\* Pour l'estimation de l'influence des effets fondamentaux de la non élasticité sur la rotation de la Terre la limitation à un modèle axialement symétrique du corps n'est pas importante.

\*\* En effet pour les planètes géantes ou dans les problèmes cosmogoniques cette limitation n'est pas utile.

\*\*\* Le point au-dessus du symbole désigne, comme habituellement la différenciation par rapport au temps t.

$$\dot{\xi}_1 + \sigma_E \xi_2 = \frac{1}{A\Omega} [N_1 - (\dot{c}_{13}\Omega + \dot{h}_1) + (c_{23}\Omega + h_2)\Omega],$$

$$\dot{\xi}_2 - \sigma_E \xi_1 = \frac{1}{A\Omega} [N_2 - (\dot{c}_{23}\Omega + \dot{h}_2) - (c_{13}\Omega + h_1)\Omega], \quad (1)$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{1}{C\Omega} [N_3 - (\dot{c}_{33}\Omega + \dot{h}_3)],$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de la rotation axiale non perturbée de la Terre,  $\omega = (\xi_1, \xi_2, 1 + \xi_3)^T$ ,  $\Omega^*$  est la vitesse angulaire de la rotation perturbée de la Terre (nous supposons  $\xi_1 \ll 1, \xi_2 \ll 1, \xi_3 \ll 1$ ),

$$\sigma_E = (C - A)/A. \Omega$$
 est la fréquence d'Euler

$N = (N_1, N_2, N_3)^T$  est le moment des forces extérieures agissant sur le corps  
 $h = (h_1, h_2, h_3)^T$  est le moment résultant de l'impulsion du corps dans le système de coordonnées lié à la rotation non perturbée du corps,  
 $c_{13}, c_{23}, c_{33}$  sont les composantes non perturbées du tenseur d'inertie de la Terre (les axes de coordonnées 1, 2, 3 correspondant aux moments d'inertie A, A, C).

Nous admettrons maintenant que la perturbation des composantes du tenseur d'inertie ne se fait que par la rotation de la Terre, alors comme on le sait (voir pour exemple Munk et Mac Donald, 1964; ou Jeffreys 1960) le tenseur d'inertie de la Terre (de composantes  $I_{ik}$  où  $i, k = 1, 2, 3$ ) est lié au vecteur vitesse angulaire de la Terre de la façon suivante :

$$I_{ik} = \frac{1}{3} I \delta_{ik} + \frac{kR^5}{3G} (\omega_i \omega_k - \frac{1}{3} \omega^2 \delta_{ik}), \quad (2)$$

où

G est la constante de gravitation  
k est le nombre de Love  
I est la trace du tenseur d'inertie,  $I = \text{Sp } [I_{ik}]^{**}$   
 $\delta_{ik}$  est le tenseur de Kronecker.

La formule (2) est obtenue par assimilation de la partie quadratique complète du potentiel centrifuge et du potentiel gravitationnel (dans l'approximation quadratique complète) par la rotation déformée de la Terre et c'est pourquoi elle ne peut être employée que pour le calcul des composantes perturbées du tenseur d'inertie de la Terre.

(\*) l'indice supérieur T désigne la matrice transportée.

(\*\*) La trace du tenseur d'inertie, comme il est facile de s'en rendre compte ne dépend pas de la perturbation et est toujours égale à  $A + A + C$

En représentant la valeur  $k$  dans l'équation (2) par un nombre réel nous adoptons l'hypothèse que la Terre est un corps idéalement élastique. En effet, n'importe quelle variation de la vitesse angulaire de la Terre, comme on l'a vu par (2), change instantanément son tenseur d'inertie. Par conséquent, pour examiner la rotation propre d'une Terre non élastique nous ne pouvons pas considérer la valeur  $k$  comme un nombre réel; il faut alors tenir compte de l'effet de la partie imaginaire, autrement dit de l'effet du retard de phase de la réaction de la Terre sur la perturbation de la rotation. Le plus simple est de remplacer l'expression (2) par la forme intégrale :

$$I_{ik}(t) = \frac{1}{3} I \delta_{ik} + \frac{R^5}{3G} \int_0^t L(\tau) \left[ \omega_i(t-\tau) \omega_k(t-\tau) - \frac{1}{3} \omega^2(t-\tau) \delta_{ik} \right] d\tau, \quad (3)$$

où  $L(\tau)$  est le noyau de l'opérateur intégrale assorti de quelques considérations heuristiques afin de satisfaire aux données observées. La forme (3) choisie ici est linéaire et par conséquent permet d'examiner suivant la nécessité des combinaisons linéaires des différents noyaux. En d'autres termes, par superposition de différents modèles par rapport aux modèles rhéologiques simples la forme (3) décrit un modèle complexe. Cette propriété de la linéarité de la forme (3) non utilisé dans le travail peut être extrêmement utile dans les annexes.

Il est naturel de considérer ensuite que

$$L(T \rightarrow \infty) \rightarrow 0;$$

la constitution rhéologique de la Terre est ainsi d'autant plus proche de la constitution rhéologique d'un corps idéalement élastique que plus le noyau  $L(\tau)$  s'amortit rapidement avec la croissance du temps  $\tau$  "intérieur". Ainsi, en supposant dans l'expression (3)

$$L(T) = k \delta(\tau),$$

où  $\delta(\tau)$  est la fonction delta de Dirac, nous retournerons vers l'expression (2). En effet, du point de vue de la constitution rhéologique non élastique ce noyau représente un cas dégénéré de la réaction instantanée du corps; dans le cas rhéologique usuel la réaction du corps à une perturbation extérieure est étendue dans le temps et par conséquent, l'opérateur intégrale ne peut être transformé en expression algébrique.

La forme (3) est l'hypothèse dans le cadre de laquelle nous ne pouvons caractériser la constitution rhéologique de la Terre dans les termes standards de viscosité, de viscoélasticité, de plasticité, etc; la constitution rhéologique dans notre théorie ne se caractérise que par une seule propriété qui est l'effet du retard de phase. Il convient de noter cependant que cette propriété rhéologique importante a un caractère très général, soit qu'elle est l'attribut inmanquable de l'élasticité sous n'importe quel aspect. Dans ce contexte la théorie de la rotation de la Terre construite sur la forme (3), est, en sa détermination, une théorie phénoménologique.

Etant donné que l'expression pour la vitesse angulaire de la rotation de la Terre a la forme

$$\omega = (0, 0, 1)^T \Omega + (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \Omega,$$

où  $\xi_1 \ll 1$ ,  $\xi_2 \ll 1$ ,  $\xi_3 \ll 1$ , il résulte que l'on peut linéariser la formule (3) en ne laissant que les termes de degrés zéro et premier  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ . Nous obtenons comme résultat

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{3}I + \frac{R^5\Omega^2}{3G} \int_0^t L(\tau) \left( 0 - \frac{1}{3}(1 + 2\xi_3(t - \tau)) \right) d\tau = \\ &= \left( \frac{1}{3}I - \frac{R^5\Omega^2}{9G} \int_0^t L(\tau) d\tau \right) - \left( \frac{2R^5\Omega^2}{9G} \int_0^t L(\tau)\xi_3(t - \tau) d\tau \right) \equiv \\ &\equiv A' + c_{11}, \end{aligned}$$

$$I_{22} = I_{11},$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= \left( \frac{1}{3}I + \frac{2R^5\Omega^2}{9G} \int_0^t L(\tau) d\tau \right) + \left( \frac{4R^5\Omega^2}{9G} \int_0^t L(\tau)\xi_3(t - \tau) d\tau \right) \equiv \\ &\equiv C' + c_{33}, \end{aligned}$$

$$I_{12} = I_{21} = 0 \equiv c_{12},$$

$$I_{13} = I_{31} = \frac{R^5\Omega^2}{3G} \int_0^t L(\tau)\xi_1(t - \tau) d\tau \equiv c_{13},$$

$$I_{23} = I_{32} = \frac{R^5\Omega^2}{3G} \int_0^t L(\tau)\xi_2(t - \tau) d\tau \equiv c_{23}.$$

Si la perturbation de la rotation est zéro

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (0, 0, 0)^T,$$

alors la Terre en rotation avec la vitesse angulaire  $\Omega$  est décrite par le tenseur d'inertie

$$I_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix},$$

où

$$A' = \frac{1}{3}I - \frac{R^5\Omega^2}{9G} \cdot k_s(t), \quad C' = \frac{1}{3}I + \frac{2R^5\Omega^2}{9G} \cdot k_s(t),$$

la fonction  $k_s(t)$  représentant l'intégrale

$$k_s(t) \equiv \int_0^t L(\tau) d\tau.$$

Le tenseur d'inertie  $I_{ik}^{(0)}$  ne dépend pas, comme nous le verrons, des composantes perturbées de la vitesse angulaire  $\omega$ . Si, ensuite, le noyau  $L(T)$  va rapidement en s'amortissant on peut, pour des intervalles de temps assez grands  $\Delta t = t - 0$ , considérer la fonction  $k_s(t)$  comme une constante et même ainsi en posant  $k_s(t) = \text{const.} *$

Dans n'importe quel cas, cependant, les valeurs  $A'$ ,  $C'$  ne dépendant pas des perturbations rotationnelles (mais dépendantes de la vitesse angulaire  $\Omega$ !) peuvent être prises comme les moments principaux initiaux  $A$ ,  $C$  - toute la différence ici se détermine par le potentiel centrifuge puisque la Terre tourne. Nous ne savons pas à quoi équivaudraient les moments principaux d'inertie pour la Terre sans rotation. Par conséquent on observe tout d'abord les moments principaux d'inertie  $A'$ ,  $C'$ , pour la simplicité nous pouvons alors ôter les primes et introduire les nouvelles notations :  $A' \rightarrow A$ ,  $C' \rightarrow C$ .

En tenant compte de ce qui a été dit le tenseur d'inertie  $I_{ik}$  se décompose de façon naturelle en deux parties, la non perturbée et la perturbée

$$I_{ik} \equiv I_{ik}^{(0)} + c_{ik} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Nous trouverons maintenant les produits  $\dot{c}_{13}$ ,  $\dot{c}_{23}$ ,  $\dot{c}_{33}$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{13} &= \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \left[ L(t)\xi_1(0) + \int_0^t L(\tau) \frac{d\xi_1(t-\tau)}{dt} d\tau \right] = \\ &= \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \left[ L(t)\xi_1(0) - \int_0^t L(\tau) \frac{d\xi_1(t-\tau)}{d\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \left[ L(t)\xi_1(0) - L(\tau)\xi_1(t-\tau)|_0^t + \int_0^t \frac{dL(\tau)}{d\tau} \xi_1(t-\tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \left[ L(0)\xi_1(t) + \int_0^t \frac{dL(\tau)}{d\tau} \xi_1(t-\tau) d\tau \right], \end{aligned}$$

---

(\*) La dépendance temporelle  $k_s(t)$  donne dans les équations du mouvement des termes petits du second ordre.

$$\dot{c}_{23} = \frac{R^5 \Omega^2}{3G} \left[ L(0) \xi_2(t) + \int_0^t \frac{dL(\tau)}{d\tau} \xi_2(t-\tau) d\tau \right],$$

$$\dot{c}_{33} = \frac{4R^5 \Omega^2}{9G} \left[ L(0) \xi_3(t) + \int_0^t \frac{dL(\tau)}{d\tau} \xi_3(t-\tau) d\tau \right].$$

Le système d'équations (1) ainsi que les expressions pour  $c_{13}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{33}$  et leurs produits  $\dot{c}_{13}$ ,  $\dot{c}_{23}$ ,  $\dot{c}_{33}$  obtenus sur base de l'hypothèse (2) constituent le système recherché des équations pour la rotation de la Terre non élastique.

Ce système d'équations intégro-différentielles généralise le système des équations différentielles d'Euler - Liouville au cas de la Terre non élastique en rotation.

Nous avons ainsi obtenu le système des équations intégro-différentielles. Les intégrales représentent dans leurs seconds membres les expressions contractées. Cela signifie que pour sa solution nous pouvons utiliser le procédé de transformées de Laplace (transformation L) afin de le résoudre par rapport aux images de Laplace. (L sont les images)  $\bar{\xi}_1$ ,  $\bar{\xi}_2$ ,  $\bar{\xi}_3$ . On peut faire cette opération sous une forme générale en ne concrétisant pas l'aspect du noyau L(T) de l'opérateur intégral de départ.

En opérant la transformation L (avec le paramètre p) et après avoir abaissé pour la simplicité le paramètre p dans les arguments des images L  $\bar{\xi}_1(p)$ ,  $\bar{\xi}_2(p)$ ,  $\bar{\xi}_3(p)$  et  $\bar{L}(p)$  nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
 & (1 + \frac{R^5 \Omega^2}{3AG} \bar{L}) p \bar{\xi}_1 + (\sigma_E - \frac{R^5 \Omega^3}{3AG} \bar{L}) \bar{\xi}_2 = \\
 & = \xi_1(0) + \frac{1}{A\Omega} (\bar{N}_1 - p \bar{h}_1 + h_1(0) + \bar{h}_2 \Omega), \\
 & - (\sigma_E - \frac{R^5 \Omega^3}{3AG} \bar{L}) \bar{\xi}_1 + (1 + \frac{R^5 \Omega^2}{3AG} \bar{L}) p \bar{\xi}_2 = \\
 & = \xi_2(0) + \frac{1}{A\Omega} (\bar{N}_2 - p \bar{h}_2 + h_2(0) - \bar{h}_1 \Omega), \\
 & (1 + \frac{4R^5 \Omega^2}{9CG} \bar{L}) p \bar{\xi}_3 = \\
 & = \xi_3(0) + \frac{1}{C\Omega} (\bar{N}_3 - p \bar{h}_3 + h_3(0)),
 \end{aligned} \tag{4}$$

où

$\xi_1(0), \dots$  sont les perturbations initiales de la Terre  
 $h_1(0), \dots$  sont les valeurs initiales du moment restant de l'impulsion de la Terre.

La troisième équation du système (4) n'est pas liée aux deux premières. Par conséquent, la rotation axiale de la Terre s'accomplit indépendamment des variations du pôle.

Pour la simplification ultérieure des formules nous introduirons quelques notations abrégées. A savoir,

$$\frac{R^5\Omega^2}{3AG} = \frac{MR^2}{3A} \cdot \frac{R^2}{GM} \cdot R\Omega^2 = \frac{MR^2}{3A} \cdot \frac{R\Omega^2}{g} = \frac{MR^2}{3A}\epsilon \equiv \kappa,$$

où

$g = GM/R^2$  l'accélération gravitationnelle à la "surface" de la Terre,

$\epsilon = R\Omega^2/g$  l'aplatissement dynamique de la Terre

De façon analogue nous écrirons

$$\frac{4R^5\Omega^2}{9CG} = \frac{4MR^2}{9C}\epsilon = \frac{4A}{3C}\kappa \equiv \eta.$$

Nous noterons que pour la Terre réelle, vu son faible aplatissement, les deux paramètres,  $\kappa$  et  $\eta$  diffèrent peu l'un de l'autre,

$$\kappa \approx \eta \approx 1/300$$

Nous nous tournerons maintenant vers les deux premières équations du système (4) décrivant le mouvement du pôle. Nous multiplierons la seconde de ces équations par  $i = \sqrt{-1}$  et nous l'additionnerons à la première. A la suite de quoi nous obtiendrons une équation qui se résout par rapport à la valeur complexe  $\xi_1 + i\xi_2$  sous la forme simple suivante,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{p(1 + \kappa\bar{L}) - i(\sigma_E - \kappa\Omega\bar{L})} \left\{ \xi(0) + \frac{1}{A\Omega} (\bar{N} - (p + i\Omega)\bar{h} + h(0)) \right\}, \quad (5)$$

où sont introduites les notations

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \bar{\xi}_1 + i\bar{\xi}_2 & \bar{h} &= \bar{h}_1 + i\bar{h}_2 & \bar{N} &= \bar{N}_1 + i\bar{N}_2. \\ \xi(0) &= \xi_1(0) + i\xi_2(0) & h(0) &= h_1(0) + ih_2(0)\end{aligned}$$

La troisième équation du système (4) décrivant la perturbation de la rotation axiale de la Terre se résout également facilement par rapport à la valeur  $\bar{\xi}_3$ ,

$$\bar{\xi}_3 = \frac{1}{p(1+\eta\bar{L})} \left\{ \xi_3(0) + \frac{1}{C\Omega} (\bar{N}_3 - p\bar{h}_3 + h_3(0)) \right\}. \quad (6)$$

Nous écrirons les équations (5) et (6) un peu différemment, sous la forme symbolique :

$$\bar{\xi} = \bar{P}_I \cdot [\bar{f} + u(0)], \quad (5a)$$

$$\bar{\xi}_3 = \bar{P}_{II} \cdot [\bar{f}_3 + u_3(0)], \quad (6a)$$

où

$$\bar{P}_I = \frac{1}{p(1+\kappa\bar{L}) - i(\sigma_E - \kappa\Omega\bar{L})}, \quad \bar{P}_{II} = \frac{1}{p(1+\eta\bar{L})},$$

soit les fonctions ainsi appelées de transfert incluant une information sur le caractère de la réaction de la Terre sur l'écart à la rotation axiale initiale; les termes

$$\bar{f} = \frac{1}{A\Omega} (\bar{N} - (p + i\Omega)\bar{h}), \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{C\Omega} (\bar{N}_3 - p\bar{h}_3),$$

représentent L qui sont les représentations des effets extérieurs sur la Terre; et finalement, les termes

$$u(0) = \xi(0) + \frac{h(0)}{A\Omega}, \quad u_3(0) = \xi_3(0) + \frac{h_3(0)}{C\Omega}.$$

décrivent les conditions initiales pour la Terre en rotation.

La solution générale des équations (5a) et (6a) peut être écrite sous une forme rappelant l'intégrale de Duhamel \*

$$\xi = P_I(t)u(0) + \int_0^t P_I(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad (7)$$

$$\xi_3 = P_{II}(t)u_3(0) + \int_0^t P_{II}(\tau)f_3(t-\tau)d\tau. \quad (8)$$

---

(\*) En renonçant un peu à la rigueur nous appellerons cette forme "intégrale de Duhamel" dans la suite.

Nous noterons que les termes  $\bar{P}_I u(0)$  et  $\bar{P}_{II} u_3(0)$  peuvent être également interprétés comme des perturbations instantanées ( $\delta$  - imaginaires) alors que les solutions pour  $\xi$  et  $\xi_3$  se rapportent au cas des intégrales de Duhamel avec des conditions initiales nulles. Nous utiliserons plus bas les deux interprétations pour  $u(0)$  et  $u_3(0)$  (conditions initiales ou perturbations instantanées) sur les mêmes bases et sans clauses particulières. Lors du choix de la forme analytique du noyau  $L(\tau)$  de l'opérateur intégral les points singuliers des fonctions de transfert  $P_I$  et  $P_{II}$  (c'est-à-dire les racines de leurs dénominateurs) déterminent les fréquences (dans le cas général complexe) de la réaction de la Terre aux facteurs perturbateurs. Les parties imaginaires des fréquences correspondront aux oscillations, et les parties réelles, positives ou négatives décriront la croissance séculaire ou l'absence du mouvement perturbé du pôle de la Terre ou les perturbations de sa rotation axiale.

Ainsi par l'expression pour la fonction de transfert  $P_{II}$  on constate que la fréquence nulle interviendra toujours lors de n'importe quelle perturbation de la rotation axiale de la Terre pour  $\xi_3(t)$ .

#### Rotation libre de la Terre non élastique

Nous examinerons maintenant deux modèles rhéologiques pour le cas de la Terre en rotation libre :  $N = 0$ ,  $h = 0$

##### I. Terre idéalement élastique

Pour celle-ci le noyau de l'opérateur intégral a la forme (noyau de Dirac)

$$L(\tau) = k\delta(\tau),$$

dans laquelle la présence de la fonction  $\delta$  de Dirac signifie l'absence de tout ce qui pourrait être effets de retards. Le facteur sans dimension  $k$  peut être interprété comme le nombre de Love.  $L$  est l'image du noyau de Dirac tout à fait simple

$$L = k$$

D'où nous trouverons que la fonction de transfert

$$\bar{P}_I = \frac{1}{p(1+k\kappa) - i(\sigma_E - k\kappa\Omega)},$$

alors que

$$\bar{P}_{II} = \frac{1}{p(1+k\eta)}.$$

Par conséquent pour la rotation libre d'une Terre idéalement élastique, nous obtenons le résultat suivant : la fonction de transfert  $P_I$  a une seule racine

$$p_1 = i \frac{\sigma_E - k\kappa\Omega}{1+k\kappa} = i \frac{\sigma_c}{1+k\kappa},$$

où

$\sigma_c = (\sigma_E - k\kappa\Omega)$  est la fréquence de Chandler

Dans le cas  $k\kappa \ll 1$  nous avons

$$p_1 \approx i\sigma_c$$

Pour la fonction  $\bar{P}_{II}$  la racine est également unique

$$p_2 = 0$$

Par conséquent,  $L$  sont les prototypes des fonctions de transfert

$$P_t = \frac{1}{1+k\kappa} e^{i\sigma_c t/(1+k\kappa)} \approx e^{i\sigma_c t}$$

et

$$P_{II} = \frac{1}{1+k\eta} \approx 1.$$

D'où nous trouverons les solutions cherchées

$$\xi = \xi(0) \frac{1}{1+k\kappa} e^{i\sigma_c t/(1+k\kappa)} \approx \xi(0) e^{i\sigma_c t},$$

$$\xi_3 = \xi_3(0) \frac{1}{1+k\eta} \approx \xi_3(0).$$

Ainsi, le pôle perturbé de la Terre idéalement élastique oscille avec la fréquence de Chandler dans le temps où la perturbation de la rotation axiale reste constante et égale à sa valeur initiale. Nous noterons que dans le cas d'une Terre solide, le résultat pouvait être le même avec la substitution naturelle

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_E$$

### II. Terre exponentiellement non élastique

Ce modèle est décrit par le noyau de l'opérateur intégral de type exponentiel (noyau de Kolraich)

$$L(\tau) = \Gamma_e^{-\gamma\tau},$$

où les paramètres  $\Gamma$  et  $\gamma$ , tous deux réels et positifs ont les mêmes dimensions ( $\text{sec}^{-1}$ ). Le noyau de Kolraich est, parmi les noyaux possibles, mathématiquement le plus simple, toutefois, comme nous le verrons un peu plus bas, il possède un contenu dynamique assez riche.

#### Remarque Heuristique

Les deux modèles de Terre exponentiellement non élastique et idéalement élastique sont réciproquement liés dans le sens connu. En effet, le noyau de Kolraich peut être transcrit, sous la forme suivante

$$L(\tau; \gamma) = k\gamma e^{-\gamma\tau}$$

Puisque l'intégration en fonction du temps  $\tau$  "intérieur" se passe dans l'opérateur intégral dans les limites de 0 à  $t$  alors nous pourrions avec la même base utiliser aussi le noyau de la forme  $L(|\tau|; \gamma)$ . Cette substitution nous donnerait cependant la possibilité de principe d'intégrer le noyau  $L(|\tau|; \gamma)$  suivant la variable  $\tau$  dans n'importe quelle limite incluant  $(-\infty, +\infty)$ . Ainsi le noyau  $1/2 L(|\tau|; \gamma)$  redéterminé est une des représentations de la fonction  $\delta$  de Dirac puisque un passage a lieu à la limite

$$\frac{1}{2}L(|\tau|; \infty) = k \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\gamma e^{-\gamma|\tau|} = k\delta(\tau).$$

Par conséquent on peut envisager le modèle de Terre idéalement élastique comme cas limite ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) du modèle exponentiellement non élastique. Dans ce sens le noyau de Kolraich est le noyau "naturel" puisqu'il généralise le modèle idéalement élastique de Terre. Partant de ce qui a été dit on peut émettre assez généralement et probablement un jugement tout à fait vraisemblable heuristique: n'importe quel noyau de l'opérateur intégral constituant la représentation de la fonction  $\delta$  de Dirac, réalise un certain modèle rhéologique non élastique.

$L$  est l'image du noyau de Kolraich et est égal à

$$\bar{L}(p) = \frac{\Gamma}{p + \gamma}.$$

Il est facile de constater que les fonctions de transfert  $\bar{P}_I$  et  $\bar{P}_{II}$  pour le noyau de Kolraich sont obtenues de la façon suivante

$$\bar{P}_I = \frac{p + \gamma}{p^2 + (\gamma + \kappa\Gamma - i\sigma_E)p - i(\gamma\sigma_E - \kappa\Omega\Gamma)},$$

$$\bar{P}_{II} = \frac{p + \gamma}{p(p + \gamma + \eta\Gamma)}.$$

Comme nous le verrons les deux fonctions de transfert dans ce modèle renferment dans le dénominateur des polynômes quadratiques. Nous noterons que ces polynômes ont des coefficients complexes et c'est pourquoi généralement parlant les parties imaginaires de leurs racines ne seront pas associées de façon complexe. Ainsi, pour la fonction  $P_I$  nous trouverons les racines suivantes

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{\gamma + \kappa\Gamma - i\sigma_E}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 4i \frac{\gamma\sigma_E - \kappa\Omega\Gamma}{(\gamma + \kappa\Gamma - i\sigma_E)^2}} \right] = \\ &= \frac{\gamma(1 + k\kappa - i\sigma_E/\gamma)}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 4i \frac{i\sigma_c}{\gamma(1 + k\kappa - i\sigma_E/\gamma)^2}} \right], \end{aligned}$$

où on a déterminé le nombre sans dimension

$$k = \Gamma/\gamma,$$

que nous appellerons nombre de Love et où (de façon analogue aux modèles de Terre idéalement élastique) on a introduit la fréquence de Chandler

$$\sigma_0 = (\sigma_E - k\kappa\Omega)$$

A son tour la fonction de transfert  $P_{II}$  a pour racines

$$p_3 = 0, \quad p_4 = -(\gamma + \eta\Gamma) = -\gamma(1 + k\eta)$$

Pour la Terre, comme il a été noté plus haut, le paramètre  $\kappa \ll 1$ . En outre, nous considérerons le paramètre  $\gamma$  du noyau de Kolraich pour la Terre comme suffisamment grand \*, afin que nous puissions négliger les carrés des rapports  $\sigma_E/\gamma$  et  $\sigma_c/\gamma$ . Nous accepterons également que  $k\kappa \ll 1$  (c'est à dire nous supposerons  $1 + k\kappa \approx 1$ ), puisque le nombre de Love ne peut dépasser l'unité. Il ne faut toutefois pas négliger le facteur  $k\kappa \Omega$  parce que la vitesse angulaire  $\Omega$  n'est pas supposée petite, par conséquent, pour la Terre réelle

$$\sigma_E \neq \sigma_c$$

A la suite de quoi, en développant les expressions pour les racines  $p_1$  et  $p_2$  en série et en négligeant les termes indiqués, nous obtiendrons

$$p_1 \approx i\sigma_c - \frac{\sigma_E \sigma_c}{\gamma},$$

$$p_2 \approx -\gamma + \frac{\sigma_E \sigma_c}{\gamma} + i(\sigma_E - \sigma_c) \approx -\gamma + i\Delta\sigma,$$

où  $\Delta\sigma = \sigma_E - \sigma_c$ . Par conséquent, les expressions suivantes seront des prototypes L des fonctions de transfert  $P_I(t)$  et  $P_{II}(t)$  :

$$P_I(t) = \frac{(p_1 + \gamma)e^{p_1 t} - (p_2 + \gamma)e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \approx$$

$$\approx (1 + i\frac{\Delta\sigma}{\gamma})e^{-(\sigma_E \sigma_c / \gamma)t} e^{i\sigma_c t} - i\frac{\Delta\sigma}{\gamma}e^{-\gamma t} e^{i\Delta\sigma t} \approx$$

$$\approx e^{-(\sigma_E \sigma_c / \gamma)t} e^{i(\sigma_c t + \Delta\sigma / \gamma)} - i\frac{\Delta\sigma}{\gamma}e^{-\gamma t} e^{i\Delta\sigma t},$$

$$P_{II}(t) = \frac{1}{\gamma + k\eta} + \frac{p_4 + \gamma}{p_4} e^{p_4 t} =$$

$$= \frac{1}{\gamma + k\eta} + \frac{k\eta}{1 + k\eta} e^{-\gamma(1 + k\eta)t} \approx$$

$$\approx 1 + k\eta e^{-\gamma t}.$$

D'où nous trouverons les solutions cherchées :

$$\xi(t) \approx \xi(0) \left[ e^{-(\sigma_E \sigma_c / \gamma)t} e^{i(\sigma_c t + \Delta\sigma / \gamma)} - i\frac{\Delta\sigma}{\gamma}e^{-\gamma t} e^{i\Delta\sigma t} \right],$$

$$\xi_3(t) \approx \xi_3(0) [1 + k\eta e^{-\gamma t}].$$

---

\* Ainsi, par exemple la Terre réelle représente un corps tout à fait solide et par conséquent elle doit se décrire par un noyau s'amortissant rapidement.

On constate par ces expressions que les variations de Chandler de la Terre perturbée (à l'époque  $t = 0$ ) et en rotation libre s'amortissent. Il est simple de constater également que le déphasage dans le mouvement chandlierien du pôle est égal à  $\Delta\phi = \Delta\sigma/\gamma$ . A partir de la différence connue des fréquences  $\Delta\sigma$  et de l'angle retard de phase  $\Delta\phi$  (qui en principe doit être déterminé par les observations) on peut évaluer la valeur du paramètre  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Phi}.$$

D'après ces données il est facile de trouver le temps  $\tau_d$  d'amortissement du mouvement de Chandler,

$$\tau_d = \frac{\gamma}{\sigma_E \sigma_C} = \frac{1}{2\pi \Delta\Phi} \left( \frac{2\pi}{\sigma_C} - \frac{2\pi}{\sigma_E} \right)$$

et le temps d'amortissement de la perturbation dans la rotation axiale,

$$\gamma^{-1} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\sigma}.$$

Nous évaluerons maintenant ces valeurs. On sait que pour la Terre les périodes d'Euler et de Chandler sont respectivement

$$2\pi/\sigma_E \approx 10 \text{ mois} \quad 2\pi/\sigma_c \approx 14 \text{ mois}$$

de sorte que

$$\Delta\sigma \approx 0.18 \text{ radian/mois.}$$

Si on admet ensuite que le mécanisme rhéologique provoquant le déphasage du mouvement de Chandler est le même que pour les phénomènes de marées, alors

$$\Delta\phi \approx Q^{-1},$$

où  $Q$  est le facteur de qualité de la Terre \*.

Nous calculerons maintenant les valeurs des paramètres  $\tau_d$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma^{-1}$  pour quelques valeurs du facteur de qualité  $Q$ . Nous noterons préalablement que dans notre théorie, les paramètres caractérisant la non élasticité des noyaux terrestres ( $Q$ ,  $\gamma$ , etc) ont le sens de paramètres globaux. Cependant dans la littérature les valeurs du paramètre  $Q$  sont toujours locales soit dans l'espace (manteau inférieur, asténosphère, lithosphère et autres) soit dans le temps (oscillations séismiques, marées lunaires et autres). En tenant compte de ce qui a été dit on comprend que les nombres donnés ci-dessous ont un caractère très approximatif.

---

\* Lors de l'absence de la force perturbatrice responsable des variations forcées, la valeur  $Q$  caractérise la quantité de cycle qui est accompli par le système en oscillation libre.

Q	:	50	100	200	500	1000	2000	5000
$\gamma$ (mois <sup>-1</sup> )	:	9	18	36	90	180	360	900
$\gamma^{-1}$ (jours)	:	3.33	1.67	0.83	0.33	0.17	0.08	0.03
$\tau_1$ (ans)	:	2.6	5.3	10.6	26.5	53.1	106.2	265.4

De la détermination de la fréquence chandlierenne donnée plus haut il résulte que la différence des fréquences

$$\Delta\sigma = k\kappa\Omega$$

Puisque pour la Terre (en tenant compte que  $\Omega = 2\pi/\text{période} \approx 188.4$  radian/-mois)

$$k = \frac{\Delta\sigma}{\kappa\Omega} \approx \frac{300 \cdot 0.18}{188.4} \approx 0.29,$$

alors il n'est pas difficile de trouver aussi maintenant  $\Gamma = k\gamma$ .

Ainsi, d'après les données d'observations ( $\sigma_E$ ,  $\sigma_c$ ,  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\kappa$ ) on peut déterminer les deux paramètres du modèle donné.

En conclusion nous noterons qu'il est plus commode d'écrire le noyau de Kolraich sous la forme

$$L(\tau) = k\gamma e^{-\gamma\tau},$$

en utilisant, au lieu du paramètre  $\Gamma$ , son équivalent  $k\gamma$ . Par cette expression pour le noyau de Kolraich on constate de suite qu'il renferme deux quantités indépendantes: l'une d'elles ( $k$ ) caractérise la déformabilité de la Terre alors que l'autre ( $\gamma$ ) caractérise la non élasticité des déformations.

#### Rotation forcée de la Terre non élastique

Nous nous tournerons vers le cas de la rotation forcée:  $N \neq 0$ .

Nous admettrons cependant que manquent les mouvements internes des masses de la Terre en rotation caractérisés par le moment restant de l'impulsion  $h$ , :  $h = 0$  \*.

Les équations généralisées d'Euler - Liouville dans la forme transformée de L (5a) et (6a) s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \bar{P}_I \xi(0) + \frac{1}{A\Omega} \bar{P}_I \bar{N}, \\ \bar{\xi}_3 &= \bar{P}_{II} \xi_3(0) + \frac{1}{A\Omega} \bar{P}_{II} \bar{N}_3.\end{aligned}$$

La solution générale de ces équations sous la forme des intégrales de Duhamel (7) et (8) s'écrit :

$$\xi(t) = P_I(t)\xi(0) + \frac{1}{A\Omega} \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau, \quad (9)$$

$$\xi_3(t) = P_{II}(t)\xi_3(0) + \frac{1}{C\Omega} \int_0^t P_{II}(\tau)N_3(t-\tau) d\tau. \quad (10)$$

Le moment des forces agissant sur la Terre non sphérique de la part du corps perturbant (pour la Terre réelle c'est la Lune et le Soleil), résulte de l'hétérogénéité du champ de gravitation.

Pour l'analyse de l'action du moment gravitationnel des forces sur la rotation de la Terre non élastique, (comme chez nous) dans l'approximation linéaire il suffit de considérer le corps perturbant comme un point matériel.

Soit  $m$  la masse du corps perturbant et pour simplifier admettons qu'il se meut suivant une orbite circulaire de rayon  $r$ . Pour le cas du mouvement du corps perturbant sur une orbite de faible excentricité, les corrections tenant compte de l'influence de l'excentricité sur les effets de non élasticité sont tout à fait insignifiantes ce qu'on a déjà observé par le fait que les effets eux-mêmes de la non élasticité sont tout à fait faibles; pour la Terre, par exemple, ils sont de l'ordre de 1% (ou, autrement dit,  $\sim Q^{-1}$ ) des effets de l'élasticité.

Admettons que le rayon vecteur  $r$  du corps perturbant a pour composantes  $(x, y, z)^T$  dans un certain système inertiel de coordonnées  $K_0$  d'axes X, Y, Z ayant son origine au centre de masse de la Terre. Soit, ensuite, dans ce système de coordonnées, le tenseur d'inertie de la Terre  $I_{ik}$  (puisque la Terre tourne, les composantes du tenseur d'inertie seront fonctions du temps). Alors les moments des forces gravitationnelles agissant sur la Terre, seront les suivantes :

$$N_1 = -\frac{3Gm}{r^5} [(I_{22} - I_{33})yz - I_{23}(y^2 - z^2) + (I_{12}z - I_{13}y)x],$$

$$N_2 = -\frac{3Gm}{r^5} [(I_{33} - I_{11})zx - I_{31}(z^2 - x^2) + (I_{23}x - I_{21}z)y],$$

$$N_3 = -\frac{3Gm}{r^5} [(I_{11} - I_{22})xy - I_{12}(x^2 - y^2) + (I_{31}y - I_{32}x)z].$$

Pour le modèle de Terre solide, comme nous le savons, on peut prendre une fois pour toutes le système des coordonnées K fixé dans la Terre afin de réduire le tenseur d'inertie à la forme diagonale (système des axes principaux d'inertie).

En ce qui concerne le modèle déformé de la Terre il devient fonction de temps pour son passage au système des axes principaux d'inertie mais cette circonstance complique les équations du mouvement. Nous avons cependant déjà vu que les composantes non diagonales du tenseur d'inertie (déterminées par la rotation de la Terre) sont très faibles. D'autre part, la réaction de la Terre déformée sur les moments extérieurs de la force nous intéresse et cette réaction se détermine avant tout par les fonctions de transfert  $P_I$  et  $P_{II}$ . C'est pourquoi le calcul de la déformation de la Terre dans les expressions pour les moments de forces à proprement parler propose l'examen des effets petits du second ordre selon les déformations,

déformations → moment des forces → déformations.

\* dans ce système nous numérotions 1, 2, 3 les axes de coordonnées.

Il est évident, cependant, qu'il n'y a pas de sens à calculer les termes du second ordre pour les déformations quand les équations de départ d'Euler - Liouville ne sont formulées que pour les effets de déformations du premier ordre. Partant de ces réflexions nous calculerons les moments des forces dans l'approximation du corps solide.

Il en résulte, en écrivant le tenseur d'inertie dans le système des axes principaux d'inertie \* K de la Terre axialement symétrique (les axes de coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  seront placés dans le plan de l'équateur terrestre, l'axe  $X_3$  sera dirigé selon la ligne de la symétrie axiale de la Terre et en désignant comme plus haut, les composantes diagonales du tenseur  $I_{ik}$  par les symboles A, A, C) nous obtiendrons

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{3Gm}{r^5}(C - A)x_2x_3, \\ N_2 &= -\frac{3Gm}{r^5}(C - A)x_3x_1, \\ N_3 &= 0, \end{aligned}$$

(en vertu de la dernière égalité le moment gravitationnel du corps perturbant n'influence pas la rotation axiale de la Terre). Le corps perturbant dans le système de coordonnées K a maintenant pour coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Soit dans le système  $K_0$  les axes de coordonnées orientés de la façon suivante : l'axe X est dirigé vers l'équinoxe de printemps (de n'importe quelle époque), l'axe Z vers le pôle de l'écliptique et l'axe Y complète les axes X et Z.

Nous admettrons que le corps perturbant se meut dans le plan de l'écliptique \*\*. Alors le rayon vecteur  $r$  du corps perturbateur est déterminé dans le système de coordonnée  $K_0$  par la relation

$$r = (x, y, z)^T = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)^T,$$

où  $\alpha$  est l'angle de position depuis l'axe X. Transformons maintenant le rayon vecteur  $r$  du système  $K_0$  dans le système K. Dans ce but il nous sera facile d'utiliser les angles d'Euler. Introduisons au début les notations suivantes (standard) pour les angles d'Euler :

$\phi$  est l'angle entre l'axe x et la ligne des noeuds (angle de précession)

$\psi$  est l'angle entre la ligne des noeuds et l'axe x (angle de rotation propre)

$\theta$  est l'angle d'inclinaison de l'équateur par rapport au plan de l'écliptique (angle de nutation)

---

\*\* Le Soleil, par exemple détermine ce plan; la plupart des corps perturbant la rotation de la Terre, se meuvent également presque dans ce plan.

Les matrices transformant successivement le rayon vecteur  $r$  du corps perturbateur du système de coordonnées  $K_0$  dans le système de coordonnées  $K$ , ont la forme suivante :

$$\hat{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La transformation complète est déterminée par la matrice

$$\hat{R} = \hat{R}_\psi \cdot \hat{R}_\theta \cdot \hat{R}_\varphi$$

en multipliant celle-ci par le rayon vecteur  $r$  nous obtiendrons

$$(x_1, x_2, x_3)^T = \hat{R} \cdot (x, y, z)^T,$$

ou dans la forme développée

$$\begin{aligned} x_1 &= r[\cos \alpha(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ &\quad + \sin \alpha(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi)], \\ x_2 &= r[-\cos \alpha(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ &\quad + \sin \alpha(-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi)], \\ x_3 &= r[\cos \alpha \sin \theta \sin \varphi - \sin \alpha \sin \theta \cos \varphi] = \\ &= \sin \alpha(\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi). \end{aligned}$$

En utilisant ensuite les identités trigonométriques

$$\begin{aligned} x_1 &= r[\cos \psi \cos(\alpha - \varphi) + \sin \psi \sin(\alpha - \varphi) \cos \theta], \\ x_2 &= r[\cos \psi \sin(\alpha - \varphi) \cos \theta - \sin \psi \cos(\alpha - \varphi)], \\ x_3 &= -r \sin \theta \sin(\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

A la suite de quoi, nous trouverons les moments des forces agissant suivant les axes de coordonnées  $X_1, X_2, X_3$  fixes dans la Terre (système de ses axes principaux d'inertie) et exprimés à l'aide des angles d'Euler

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{3Gm(C-A)}{r^3} \sin \theta \sin(\alpha - \varphi) \times \\ &\quad \times [-\sin \psi \cos(\alpha - \varphi) + \cos \theta \cos \psi \sin(\alpha - \varphi)], \\ N_2 &= \frac{3Gm(C-A)}{r^3} \sin \theta \sin(\alpha - \varphi) \times \\ &\quad \times [\cos \psi \cos(\alpha - \varphi) + \cos \theta \sin \psi \sin(\alpha - \varphi)], \\ N_3 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part, dans les équations (9) et (10) figurent les composantes de la vitesse angulaire de rotation propre de la Terre autour des axes de coordonnées fixes dans la Terre  $X_1, X_2, X_3$ ,

$$(\xi_1, \xi_2, 1 + \xi_3)^T \Omega \equiv (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T.$$

Ces composantes sont liées aux dérivées  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$  des angles d'Euler par les équations cinématiques classiques d'Euler :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Ainsi, tout est maintenant prêt pour écrire les solutions (9) et (10) des équations de départ du mouvement en fonction des angles d'Euler. Préalablement nous ferons cependant une remarque importante. On peut examiner les moments des forces (11) dans l'expression (9) (l'expression (10) en vertu de l'égalité  $N_3 = 0$  par la perturbation de gravitation n'a pas été considérée) comme facteur perturbant la rotation libre de la Terre. Cela signifie que conformément à la théorie des perturbations (méthode des approximations successives) il faut utiliser comme variables  $\phi, \psi$  et  $\theta$  figurant dans les expressions du moment des forces les solutions du problème correspondant à la rotation libre de la Terre solide, puisque lors de la rotation libre, les angles d'Euler (non seulement l'angle de rotation propre  $\psi$  mais aussi les angles de précession et de nutation  $\phi$  et  $\theta$ ), sont généralement parlant des fonctions du temps  $t$ , si l'angle d'inclinaison  $\mu$  du moment propre de l'impulsion  $L$  (inverse) de la Terre vers l'axe de symétrie axiale du corps (dans notre cas - l'axe  $X_3$ ) est différent de zéro. Pour la Terre réelle, cependant, cet angle est très faible c'est pourquoi nous prendrons dans ce travail

$$\mu = 0$$

#### Remarque sur les conditions initiales nulles

En effet, nous examinerons la rotation libre de la toupie à symétrie axiale absolument rigide. Dans le système des coordonnées des axes principaux d'inertie fixés dans le corps de la toupie, les composantes non diagonales des moments d'inertie sont égales à zéro et les composantes diagonales sont  $A, A, C$ . L'énergie de rotation ( $E_{rot}$ ) de la toupie libre est naturellement constante. Le lagrangien ( $L$ ) de cette toupie (correspondant dans le cas donné avec l'intégrale de l'énergie de la rotation) est

$$\mathcal{L} = E_{rot} = \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 = const.$$

Les angles d'Euler  $\phi$  et  $\psi$  sont cycliques. Nous composerons les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad m.e. \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{A} = const.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad m.e. \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathcal{B} = const.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}.$$

En substituant dans ces équations l'expression du lagrangien  $L$  nous trouverons

$$\dot{\phi} = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B} \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

$$\dot{\psi} = \frac{\mathcal{B}}{C} - \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B} \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \cos \theta,$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{B} \cos \theta)(\mathcal{A} \cos \theta - \mathcal{B})}{A^2 \sin^2 \theta}.$$

Nous noterons deux cas particuliers, quand  $\ddot{\theta} = 0$  :

1)  $A = B \cos \theta$  - le moment d'impulsion est dirigé suivant l'axe de symétrie du corps

$$\dot{\phi} = 0, \quad \dot{\psi} = \frac{\mathcal{B}}{C}, \quad \ddot{\theta} = 0.$$

Par les équations  $E_{rot} = const.$  nous éliminerons ensuite les produits  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$  (en utilisant les intégrales du mouvement A et B) et nous trouverons que

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{A} \left( E_{rot} - \frac{\mathcal{B}^2}{2C} \right)}.$$

D'où on constate que dans le cas où

$$E_{rot} = \frac{\mathcal{B}^2}{2C},$$

on obtient les égalités  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ . En d'autres termes pour

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cos \theta \quad E_{rot} = \frac{\mathcal{B}^2}{2C}$$

Il n'y a ni précession ni nutation ( $\phi = const$ ,  $\theta = const$ ) et toute la dynamique de la toupie se ramène à la rotation propre,

$$\psi = \frac{\mathcal{B}}{C} t + \psi_0 \equiv \Omega t + \psi_0,$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de la rotation axiale non perturbée du corps.

2)  $B = A \cos \theta$  - l'axe Z du système inertiel de coordonnées est dirigé le long du moment d'impulsion du corps L,

$$\dot{\phi} = \frac{\mathcal{A}}{A}, \quad \dot{\psi} = \frac{\mathcal{B}}{C} - \frac{\mathcal{B}}{A} = - \frac{C-A}{A} \cdot \frac{\mathcal{B}}{C}, \quad \ddot{\theta} = 0.$$

De façon analogue au cas précédent nous trouverons que

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{A} \left[ E_{rot} - \frac{\mathcal{A}^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{C} + \frac{\sin^2 \theta}{A} \right) \right]}.$$

D'où nous trouverons que dans le cas de l'égalité

$$E_{rot} = \frac{A^2}{2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{C} + \frac{\sin^2 \theta}{A} \right)$$

la nutation également n'existe pas ( $\theta = \theta' = 0$ ) bien que ce n'est pas que l'angle  $\psi$  mais aussi l'angle de précession  $\phi$  qui sont des fonctions linéaires du temps. La dépendance

$$\varphi = \frac{A}{A} t + \varphi_0$$

est appelée dans la littérature (voir par exemple Grammel, 1952) précession régulière de la toupie libre.

Dans les autres cas les trois angles d'Euler dépendent du temps et la rotation de la toupie libre se décrit de façon assez compliquée. Cette complication a un caractère lié aux coordonnées, - en effet nous pouvons toujours orienter l'axe Z du système inertiel de coordonnées le long du spin de la toupie !

Cependant dans le cas qui nous intéresse (la rotation de la Terre, des planètes du groupe de la Terre et des astéroïdes) l'axe Z du système inertiel de coordonnées pour des raisons évidentes est naturellement dirigé vers le pôle de l'écliptique et de ce fait, dans le cas général, les trois angles d'Euler sont fonctions du temps, ce qui complique brusquement le problème de l'intégration de l'expression (9) lorsqu'on y substitue les moments des forces (11). Dans ce sens le cas où le moment propre de l'impulsion du corps est très voisin de son axe de symétrie présente un intérêt. Ainsi, pour la Terre, l'angle  $\mu$  (angle entre l'axe de spin et l'axe de symétrie) a la valeur  $\mu \approx 0''2$  ce qui correspond à un écart linéaire  $\approx 6 \text{ m}$  sur la surface de la Terre (Moritz et Mueller 1992). En effet, à cause de la perturbation de l'égalité précise  $A = B \cos \theta$ , ou pour mieux dire lors de la présence de l'égalité approximative

$$A \approx B \cos \theta$$

les angles d'Euler  $\phi$  et  $\theta$  sont fonctions du temps mais ces fonctions oscillent très rapidement (c'est à dire qu'en moyenne, dans un intervalle suffisamment court de temps ils seront égaux à zéro) et on pourra pour notre but négliger ces fonctions. En effet, supposons que pour un certain angle  $\theta'$  on ait l'égalité précise

$$A = B \cos \theta'$$

Soit, ensuite la valeur instantanée de l'angle de nutation égale à zéro de sorte qu'elle s'écarte de l'angle  $\theta$  d'une valeur  $\Delta\theta = \theta - \theta'$  (pour la Terre, l'amplitude de l'angle  $\Delta\theta = \mu \approx 0''2 \sim 10^{-6} \text{ rad.}$ ) il est alors facile de démontrer que nous obtiendrons les dépendances temporelles suivantes des angles d'Euler dans l'approximation linéaire en  $\Delta\theta$

$$\dot{\varphi} = \frac{B}{A \sin \theta'} \Delta\theta, \quad \dot{\psi} = B \left( \frac{1}{C} - \frac{\cot \theta'}{A} \Delta\theta \right), \quad \ddot{\Delta\theta} = - \left( \frac{B}{A} \right)^2 \Delta\theta.$$

et, puisque

$$\Delta\theta \propto e^{\pm i\sigma t}$$

(où  $\sigma = B/A$ ) nous obtenons pour les angles  $\phi$  et  $\psi$  les compléments périodiques (de fréquence  $\sigma$ ). En moyennant ensuite les valeurs  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\theta$  sur l'intervalle de temps  $2\pi/\sigma$  on obtiendra \*

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{\sigma} = 0, \quad \langle \dot{\psi} \rangle_{\sigma} = \frac{B}{C} \equiv \Omega, \quad \langle \dot{\theta} \rangle_{\sigma} = 0.$$

Par conséquent nous obtiendrons pour les valeurs moyennes des angles d'Euler

$$\langle \varphi \rangle_{\sigma} = \varphi_0, \quad \langle \psi \rangle_{\sigma} = \Omega t + \psi_0, \quad \langle \theta \rangle_{\sigma} = \theta_0.$$

Ainsi dans le cas donné les dépendances temporelles  $\phi$  et  $\theta$  étaient faibles (de l'ordre de  $\Delta\theta$ ) et en moyenne (sur la période  $2\pi/\sigma$  (<  $2\pi/\Omega$ ) égales à zéro. Par conséquent, pour des intervalles de temps assez grands (dépassant, par exemple,  $2\pi/\Omega$ ) nous pouvons introduire dans les expressions (11)

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = \Omega t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0.$$

Pour la forme cela signifie que nous avons pris l'angle  $\mu = 0$  ou en d'autres termes nous avons pris l'hypothèse des conditions initiales nulles

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \xi_3(0) = 0.$$

En répétant ce qui a été dit plus haut \*\* nous remarquerons que pour l'évaluation du rôle dynamique des effets de la non élasticité, cette hypothèse n'est pas critique.

En effet, à cause de la linéarité des équations généralisées d'Euler - Liouville nous pouvons toujours ajouter aux solutions de la rotation perturbée de la Terre avec conditions initiales nulles, la solution de la rotation libre de la Terre avec des conditions initiales non nulles. En outre, par nécessité, dans les seconds membres des équations du mouvement on peut tenir compte des dépendances temporelles indiquées des angles Euler bien connus par la méthode des approximations successives. Dans notre travail nous ne nous occuperons pas cependant de cette sorte de précision.

Après avoir fait cette remarque retournons à la ligne principale du travail.

L'angle  $\alpha$  donnant la position du corps perturbateur sur une orbite circulaire se détermine de façon évidente par la dépendance suivante

$$\alpha = \nu t + \alpha_0,$$

où  $\nu$  est la vitesse angulaire orbitale du corps perturbateur.

---

\* par le symbole  $\langle \dots \rangle_{\sigma}$  nous désignons la moyenne de la valeur (...) sur une période  $2\pi/\sigma$ .

\*\* Nous rappellerons, pour la Terre et les corps analogues avec une faible non élasticité, le facteur  $Q^{-1}$   $\langle \langle 1$ .

Admettons pour la détermination que nous commençons le décompte du temps depuis la position de la Terre pour laquelle l'angle  $\psi_0 = 0$ ; à cet instant ( $t = 0$ ) l'angle  $\alpha_0$  n'est, généralement parlant, pas égal à zéro.

$$\alpha - \phi = \nu t + (\alpha_0 - \phi_0) \equiv \nu t + \phi \quad \psi = \Omega t$$

Transformons maintenant les moments gravitationnels des forces de telle sorte que les sinus et les cosinus dont les arguments dépendent du temps entrent de façon additive dans les expressions (11). Alors en introduisant la notation

$$N \equiv \frac{3GM(C-A)}{r^3},$$

Nous trouverons (en rejetant l'indice pour  $\theta_0$  c'est à dire en écrivant cet angle  $\theta$ )

$$N_1 = -\frac{N}{8} \{ 2 \sin 2\theta \cos \Omega t + (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \cos[(\Omega + 2\nu)t + 2\phi] -$$

$$- (2 \sin \theta + \sin 2\theta) \cos[(\Omega - 2\nu)t - 2\phi] \},$$

$$N_2 = \frac{N}{8} \{ 2 \sin 2\theta \sin \Omega t + (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \sin[(\Omega + 2\nu)t + 2\phi] -$$

$$- (2 \sin \theta + \sin 2\theta) \sin[(\Omega - 2\nu)t - 2\phi] \},$$

$$N_3 = 0.$$

Nous utilisons aussi les expressions des moments des forces pour l'élabo ration de la théorie de la précession et de la nutation avec conditions initiales nulles.

En passant aux variables complexes nous multiplierons  $N_2$  par l'imaginaire  $i$  et nous l'additionnerons à  $N_1$ . A la suite de quoi nous obtiendrons

$$N_1 + iN_2 = -\frac{N}{8} \{ 2 \sin 2\theta e^{-i\Omega t} + \\ + (2 \sin \theta - \sin 2\theta) e^{i[(\Omega + 2\nu)t + 2\phi]} - \\ - (2 \sin \theta + \sin 2\theta) e^{-i[(\Omega - 2\nu)t - 2\phi]} \}. \quad (12)$$

Ensuite, les équations cinématiques d'Euler pour la vitesse angulaire complexe  $\Omega_1 + i\Omega_2$  (décrivant le mouvement du pôle) nous donnent l'expression suivante

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = (\dot{\theta} + i\dot{\phi} \sin \theta) e^{-i\psi} \approx (\dot{\theta} + i\varphi \sin \theta) e^{-i\Omega t}, \quad (*)$$

puisque la vitesse angulaire axiale  $\Omega_3 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \approx \dot{\psi} = \Omega$  à cause de l'inégalité évidente  $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$ , déterminée par la faible inélasticité du corps proposée dans ce travail.

\* Prenons temporairement que  $\xi(0) \neq 0$

D'autre part, la solution générale des équations généralisées d'Euler donne les rotations du pôle sous la forme de l'intégrale de Duhamel (9)\* :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = \xi(t)\Omega = P_I(t)\Omega\xi(0) + \frac{1}{A} \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau. \quad (**)$$

Par comparaison des égalités (\*) et (\*\*) nous trouverons

$$\dot{\theta} = \Re \left\{ [P_I(t)\Omega\xi(0) + \frac{1}{A} \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau] e^{i\Omega t} \right\},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \Im \left\{ [P_I(t)\Omega\xi(0) + \frac{1}{A} \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau] e^{i\Omega t} \right\}.$$

De cette façon, nous verrons comment, pour un corps en rotation de faible élasticité, la nutation et la précession, dans une approximation linéaire, pourront être trouvées dans le cas général comme parties réelles et imaginaire de l'intégrale de Duhamel. Par ces expressions on constate que sur des intervalles limités de temps, la précession et la nutation dépendent, généralement parlant, des conditions de départ  $\xi(0)$ .

Dans ce travail cependant, le cas des conditions nulles ( $\xi(0) = 0$ ) nous intéresse quand, à l'instant initial, le corps a une rotation purement axiale. Sous l'effet du moment des forces extérieures, la nutation et la précession se déterminent par les expressions

$$\dot{\theta} = \frac{1}{A} \Re \left\{ \left[ \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau \right] e^{i\Omega t} \right\}, \quad (13)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{A \sin \theta} \Im \left\{ \left[ \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau \right] e^{i\Omega t} \right\}. \quad (14)$$

Ces formules donnent les expressions cherchées pour la précession et la nutation de la Terre en rotation (avec conditions initiales nulles), dont les propriétés rhéologiques se caractérisent par une faible inélasticité.

Nous examinerons maintenant deux exemples

### 1) Précession et nutation d'une Terre idéalement élastique

Sur la base de ce qui a été proposé plus haut L est le prototype de la fonction de transfert du corps élastique

$$P_I(\tau) = \frac{1}{1+k\kappa} e^{i\sigma_c \tau / (1+k\kappa)} \equiv \frac{1}{1+k\kappa} e^{i\sigma'_c \tau}.$$

Nous noterons ensuite,

$$F = \frac{1}{A} \left[ \int_0^t P_I(\tau)N(t-\tau) d\tau \right] e^{i\Omega t}.$$

Alors en substituant dans cette intégrale L prototype de la fonction de transfert du corps élastique et l'expression (12) pour le moment de gravitation des forces nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{N}{8A(1+k\kappa)} \left[ \int_0^t e^{i\sigma'_c \tau} [2 \sin 2\theta e^{-i\Omega(t-\tau)} + \right. \\
 &\quad + (2 \sin \theta - \sin 2\theta) e^{-i[(\Omega+2\nu)(t-\tau)+2\phi]} - \\
 &\quad \left. - (2 \sin \theta + \sin 2\theta) e^{-i[(\Omega+2\nu)(t-\tau)-2\phi]}] d\tau \right] e^{i\Omega t} = \\
 &= -\frac{N}{8A(1+k\kappa)} \int_0^t [2 \sin 2\theta e^{i(\Omega+\sigma'_c)\tau} + \\
 &\quad + (2 \sin \theta - \sin 2\theta) e^{-2i(\nu t+\phi)} e^{i(\Omega+\sigma'_c+2\nu)\tau} - \\
 &\quad \left. - (2 \sin \theta + \sin 2\theta) e^{2i(\nu t+\phi)} e^{i(\Omega+\sigma'_c-2\nu)\tau} \right] d\tau = \\
 &= -\frac{N}{8A(1+k\kappa)} \left[ \frac{2 \sin 2\theta}{i(\Omega+\sigma'_c)} (e^{i(\Omega+\sigma'_c)t} - 1) + \right. \\
 &\quad + \frac{(2 \sin \theta - \sin 2\theta) e^{-2i(\nu t+\phi)}}{i(\Omega+\sigma'_c+2\nu)} (e^{i(\Omega+\sigma'_c+2\nu)t} - 1) - \\
 &\quad \left. - \frac{(2 \sin \theta + \sin 2\theta) e^{2i(\nu t+\phi)}}{i(\Omega+\sigma'_c-2\nu)} (e^{i(\Omega+\sigma'_c-2\nu)t} - 1) \right].
 \end{aligned}$$

Nous tiendrons compte maintenant de ce que  $\sigma'_c \ll \Omega$  et  $\nu \ll \Omega$  et nous présenterons cette expression comme la somme des deux groupes de termes : lentement oscillant et rapidement oscillant

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{iN}{8A(1+k\kappa)} \left[ -\frac{2 \sin 2\theta}{\Omega + \sigma'_c} - \frac{(2 \sin \theta - \sin 2\theta) e^{-2i(\nu t+\phi)}}{\Omega + \sigma'_c + 2\nu} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2 \sin \theta + \sin 2\theta) e^{2i(\nu t+\phi)}}{\Omega + \sigma'_c - 2\nu} \right] + \text{moyenne } e^{i\Omega t}.
 \end{aligned}$$

Nous ferons ensuite la moyenne,  $F$  pour les oscillations rapides  $\alpha \exp(i\Omega t)$ . Alors, après réduction des termes semblables et l'élimination des exposants imaginaires suivant la formule d'Euler, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_n = & \frac{N}{8A(1+k\kappa)} \cdot \left\{ i \left[ -\frac{2 \sin 2\theta}{\Omega + \sigma'_c} + \right. \right. \\ & + \frac{2 \cos 2(\nu t + \phi)}{[(\Omega + \sigma'_c)^2 - 4\nu^2]} [4\nu \sin \theta + (\Omega + \sigma'_c) \sin 2\theta] \left. \right] - \\ & \left. \left. - \frac{4 \sin 2(\nu t + \phi)}{[(\Omega + \sigma'_c)^2 - 4\nu^2]} [(\Omega + \sigma'_c) \sin \theta + \nu \sin 2\theta] \right\} . \right. \end{aligned}$$

Ainsi, la nutation et la précession d'une Terre idéalement élastique en rotation diurne se déterminent par les expressions

$$\langle \dot{\theta} \rangle_n = -\frac{N}{2A(1+k\kappa)} \cdot \frac{(\Omega + \sigma'_c) + 2\nu \cos \theta}{(\Omega + \sigma'_c)^2 - 4\nu^2} \sin \theta \sin 2(\nu t + \phi),$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_n = \frac{N}{2A(1+k\kappa)} \cdot \left[ -\frac{\cos \theta}{\Omega + \sigma'_c} + \frac{2\nu + (\Omega + \sigma'_c) \cos \theta}{(\Omega + \sigma'_c)^2 - 4\nu^2} \cos 2(\nu t + \phi) \right].$$

Ces expressions représentent la précession et la nutation de la Terre élastique sous l'influence du moment de gravitation extérieur des forces provoqué par la masse précisée en orbite circulaire. Si la masse précisée se meut selon une orbite elliptique alors on ne peut supposer la fréquence  $\nu = \text{const}$ ; dans ce cas il faut avoir recours à la décomposition du mouvement elliptique en série de Fourier. Alors la précession et la nutation sont également des séries représentatives dépendant en particulier de l'excentricité de l'orbite du corps perturbateur. Dans notre travail, cependant, nous limiterons aux exemples illustratifs.

Nous négligeons maintenant la fréquence  $\nu$  partout où elle s'ajoute à la fréquence  $\Omega$  (nous supposons que  $\cos \theta \neq 0$ ) et nous examinerons le cas du corps solide. Pour cela il suffit de poser

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'_c = \sigma_c = \sigma_E.$$

Au total nous trouvons la précession et la nutation de la Terre solide, en tenant compte que

$$\Omega + \sigma_E = \Omega + \frac{C-A}{A}\Omega = \frac{C}{A}\Omega,$$

et en posant l'expression évidente pour  $N$ :

$$\langle \dot{\theta} \rangle_n = -\frac{3GM}{2r^3\Omega} \cdot \frac{C-A}{C} \cdot \sin \theta \sin 2(\nu t + \phi),$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_n = -\frac{3GM}{2r^3\Omega} \cdot \frac{C-A}{C} \cdot \cos \theta [1 - \cos 2(\nu t + \phi)].$$

Ces expressions sont bien connues dans la théorie de la rotation du corps solide à symétrie axiale. Nous noterons, pour éviter des non discernements, qu'ici l'angle  $\xi = vt + \phi$  (coordonnée angulaire du corps perturbateur) est donné par rapport à la ligne des noeuds de l'équateur terrestre alors que dans les expressions classiques pour la nutation et la précession

$$\dot{\theta} = -\frac{3GM}{2r^3\Omega} \cdot \frac{C-A}{C} \cdot \sin \theta \sin 2(\varphi - \zeta),$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{3GM}{2r^3\Omega} \cdot \frac{C-A}{C} \cdot \cos \theta [1 + \cos 2(\varphi - \zeta)],$$

l'angle  $\phi$  (angle azimutal de la projection de l'axe de symétrie de la toupie sur le plan de l'écliptique) et l'angle  $\xi$  n'est rapporté à aucune direction arbitrairement donnée. Cependant, ici, il est évident de se rapporter à la ligne des noeuds alors

$$\varphi - \zeta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \zeta \quad \text{ou} \quad \varphi - \zeta \rightarrow \frac{3\pi}{2} - \zeta$$

et nous obtiendrons

$$\sin 2(\varphi - \zeta) \rightarrow \sin 2\zeta \quad \text{et} \quad \cos 2(\varphi - \zeta) \rightarrow -\cos 2\zeta,$$

ce qui correspond totalement aux expressions pour

$$\langle \dot{\theta} \rangle_n \quad \text{et} \quad \langle \dot{\varphi} \rangle_n.$$

## II. Précession et nutation d'une Terre exponentiellement non élastique

Conformément à notre détermination, l'expression pour le noyau de Koraich du modèle de Terre à rhéologie exponentiellement non élastique a la forme

$$L(\tau) = \Gamma e^{-\gamma\tau},$$

d'où, comme il a été montré, nous trouverons pour la fonction de transfert  $P_I(\tau)$  l'expression :

$$P_I(\tau) = e^{i\Delta\sigma/\gamma} \cdot e^{(i\sigma_E - \sigma_c\sigma_E/\gamma)\tau} - i\frac{\Delta\sigma}{\gamma} e^{(i\Delta\sigma - \gamma)\tau},$$

où  $\Delta\sigma = \sigma_E - \sigma_c$  et où on propose que  $\gamma \gg \sigma_E, \sigma_c, \Delta\sigma$

En introduisant de nouveau la valeur  $F$

$$F = \frac{1}{A} \left[ \int_0^t P_I(\tau) N(t-\tau) d\tau \right] e^{i\Omega t},$$

et en effectuant les intégrations triviales nous trouvons que

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{N}{8A} \left\{ e^{i\Delta\sigma/\gamma} \left[ \frac{2\sin 2\theta}{i(\Omega + \sigma_c) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c) - \sigma_c \sigma_E / \gamma]t} - 1) + \right. \right. \\
 & + \frac{(2\sin \theta - \sin 2\theta)e^{-2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c + 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c + 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma]t} - 1) - \\
 & - \frac{(2\sin \theta + \sin 2\theta)e^{2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c - 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c - 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma]t} - 1) \Big] - \\
 & - i \frac{\Delta\sigma}{\gamma} \left[ \frac{2\sin 2\theta}{i(\Omega + \sigma_c) - \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c) - \gamma]t} - 1) + \right. \\
 & + \frac{(2\sin \theta - \sin 2\theta)e^{-2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c + 2\nu) - \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c + 2\nu) - \gamma]t} - 1) - \\
 & \left. \left. - \frac{(2\sin \theta + \sin 2\theta)e^{2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c - 2\nu) - \gamma} (e^{[i(\Omega + \sigma_c - 2\nu) - \gamma]t} - 1) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Les trois derniers termes (multipliés par  $i\Delta\sigma/\gamma$ ) sont, comme il est simple de le constater, petits du second ordre par rapport aux trois premiers et peuvent être rejetés. Ensuite, dans les premiers termes multipliés entrent les exposants d'amortissement avec un temps caractéristique d'amortissement

$$\tau_d \equiv \frac{\gamma}{\sigma_c \sigma_E}.$$

Si on reporte l'instant initial suffisamment loin dans le passé de sorte que le temps présent  $t \gg \tau_d$  alors dans les autres expressions tous les termes du type

$$e^{-t/\tau_d} \begin{cases} \cos[(\Omega + \sigma_c \pm 2\nu)t] \\ \sin[(\Omega + \sigma_c \pm 2\nu)t] \end{cases}$$

tombent\*. En effet, pour les effets extérieurs variant assez rapidement sur la Terre\*\*, par exemple dans le cas où le corps perturbateur se meut selon une orbite se différenciant fortement de l'orbite circulaire, des simplifications de la même sorte peuvent être impossibles. Cependant dans l'exemple illustratif envisagé ces complications n'ont pas lieu. Il en résulte que la fonction  $F$  prend la forme

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{N}{8A} \left\{ e^{i\Delta\sigma/\gamma} \left[ -\frac{2\sin 2\theta}{i(\Omega + \sigma_c) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} - \right. \right. \\
 & - \frac{(2\sin \theta - \sin 2\theta)e^{-2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c + 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} + \\
 & \left. \left. + \frac{(2\sin \theta + \sin 2\theta)e^{2i(\nu t + \phi)}}{i(\Omega + \sigma_c - 2\nu) - \sigma_c \sigma_E / \gamma} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

---

\* A l'inverse du cas du modèle rhéologique élastique il ne faut pas ici recourir au procédé artificiel de moyenner afin de se débarrasser des oscillations rapides.

\*\* Les temps caractéristiques dont  $t \sim \tau_d$  ou moins

En se limitant, comme plus haut, au premier ordre des rapports  $\sigma_c/\gamma$  et  $\sigma_E/\gamma$  nous décomposerons les exposants imaginaires par la formule d'Euler, ensuite nous combinons les termes semblables et finalement nous obtiendrons (comme précédemment en désignant pour la simplification  $\zeta \equiv \nu t + \phi$ )

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{N}{8A} \left\{ -i \frac{2 \sin 2\theta}{\Omega + \sigma_c} + \right. \\
 & + \frac{4 \sin \theta}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \left[ i \cos(2\zeta)(2\nu + (\Omega + \sigma_c) \cos \theta) - \right. \\
 & \quad \left. - \sin(2\zeta)(2\nu \cos \theta + \Omega + \sigma_c) \right] + \\
 & + \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{2 \sin 2\theta}{\Omega + \sigma_c} \left( \Delta\sigma - \frac{\sigma_c \sigma_E}{\Omega + \sigma_c} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{4 \sin \theta \cos(2\zeta)}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \left[ \sigma_c \sigma_E \cos \theta + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( \Delta\sigma - \frac{2(\Omega + \sigma_c)\sigma_c \sigma_E}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \right) (2\nu + (\Omega + \sigma_c) \cos \theta) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - i \frac{4 \sin \theta \sin(2\zeta)}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \left[ \sigma_c \sigma_E + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( \Delta\sigma - \frac{2(\Omega + \sigma_c)\sigma_c \sigma_E}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \right) (2\nu \cos \theta + \Omega + \sigma_c) \right] \right] \}.
 \end{aligned}$$

Cette expression énorme a une structure simple

$$F_{\text{non élastique}} = F_{\text{élastique}} + 1/\gamma \quad (\dots),$$

alors que pour  $\gamma \rightarrow \infty$ , comme il fallait l'espérer, nous retournons au cas de la Terre idéalement élastique (naturellement dans l'approximation  $\kappa \ll 1$ ).

En posant, ensuite, l'expression trouvée  $F$  dans les formules (13) et (14) et substituant les symboles  $N$  et  $\xi$  par leur définition

$$N \equiv \frac{3Gm(C - A)}{r^3}, \quad \zeta \equiv \nu t + \phi,$$

et en remplaçant la précession et la nutation cherchées de la Terre exponentiellement non élastique :

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} = & \frac{3Gm}{2r^3} \frac{C-A}{A} \left\{ -\frac{\cos \theta}{\Omega + \sigma_c} + \frac{2\nu + (\Omega + \sigma_c) \cos \theta}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \cos 2(\nu t + \phi) - \right. \\
 & - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\sin 2(\nu t + \phi)}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} [\sigma_c \sigma_E + \right. \\
 & \left. \left. + (\Delta\sigma - \frac{2(\Omega + \sigma_c)\sigma_c \sigma_E}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2})(2\nu \cos \theta + \Omega + \sigma_c)] \right] \right\}, \\
 \dot{\theta} = & \frac{3Gm}{2r^3} \frac{C-A}{A} \sin \theta \left\{ -\frac{2\nu \cos \theta + \Omega + \sigma_c}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} \sin 2(\nu t + \phi) + \right. \\
 & + \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\cos \theta}{\Omega + \sigma_c} (\Delta\sigma - \frac{\sigma_c \sigma_E}{\Omega + \sigma_c}) - \right. \\
 & - \frac{\cos 2(\nu t + \phi)}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2} [\sigma_c \sigma_E \cos \theta + \right. \\
 & \left. \left. + (\Delta\sigma - \frac{2(\Omega + \sigma_c)\sigma_c \sigma_E}{(\Omega + \sigma_c)^2 - 4\nu^2})(2\nu + (\Omega + \sigma_c) \cos \theta)] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Ces expressions, nous le rappellerons, sont obtenues dans l'hypothèse où le corps perturbateur se meut sur une orbite circulaire.

Les expressions trouvées pour la précession et la nutation de la Terre exponentiellement non élastique en comparaison avec la Terre idéalement élastique diffèrent comme nous le verrons, dans une série entière de points, bien que le terme séculaire de la précession il est intéressant de noter, n'a pas varié; elle se détermine comme précédemment par l'expression

$$\dot{\varphi}_s = -\frac{3Gm}{2r^3} \cdot \frac{C-A}{A} \cdot \frac{\cos \theta}{\Omega + \sigma_c}.$$

Il faut reporter le terme séculaire de la nutation à la plus importante différence du modèle non élastique de Terre examiné à partir du modèle idéalement élastique,

$$\dot{\theta}_s = \frac{3Gm}{4r^3} \cdot \frac{C-A}{A} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\Omega + \sigma_c} \cdot \frac{1}{\gamma} (\Delta\sigma - \frac{\sigma_c \sigma_E}{\Omega + \sigma_c}). \quad (15)$$

Combien est réelle l'allure séculaire de l'angle de la nutation  $\dot{\theta}_s$ ? N'est-elle pas seulement le premier terme de la décomposition d'une certaine fonction à longue période? Dans le cadre de notre théorie de linéarisation nous ne pouvons pas obtenir de réponse à ce problème et c'est pourquoi nous ne jugerons pas l'alternative donnée. Nous noterons seulement que

$$\dot{\theta}_s \propto \frac{\Delta\sigma}{\gamma} = Q^{-1}$$

l'angle de phase du retard où nous avons négligé le terme\*

$$\frac{\sigma_c \sigma_e}{\gamma(\Omega + \sigma_c)}.$$

Ainsi, le terme séculaire obtenu de la nutation se caractérise par un effet d'hystérésis.

Faisons maintenant l'estimation numérique du terme  $\dot{\theta}_s$  pour la Terre réelle. Pour cela nous retranscrirons la formule (15) sous la forme équivalente suivante,

$$\dot{\theta}_s = \frac{3Gm}{4r^3} \cdot \frac{C-A}{A} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\Omega + \sigma_c} \cdot \frac{\sigma_c \sigma_e}{2\pi\gamma} \left( \frac{2\pi}{\sigma_c} - \frac{2\pi}{\sigma_e} - \frac{2\pi}{\Omega + \sigma_c} \right),$$

ou en utilisant l'expression pour  $\phi_s$  (et en supposant  $\Omega + \sigma_c \approx \Omega$ ) ,

$$\dot{\theta}_s \approx -\dot{\phi}_s \cdot \frac{T_c - T_e - T_\Omega}{2\pi\tau_d} \cdot \sin \theta,$$

où nous avons introduit les périodes de Chandler ( $T_c$ ), d'Euler ( $T_e$ ) et diurne ( $T_\Omega$ ) de la Terre. Nous supposerons maintenant comme l'estimation

$$\phi_s = \sim 50''/\text{an}$$

Alors pour les mêmes valeurs du paramètre de qualité Q que précédemment et en supposant pour la Terre l'angle d'inclinaison  $\theta = 23^\circ$ , nous trouverons

$Q =$	:	50	100	200	500	1000	2000	5000
$\theta_s$ ("/an) :	:	0.4	0.2	0.1	0.04	0.02	0.01	0.004

Comme nous le verrons le modèle examiné dans ce travail amène à la description de la dynamique de la rotation du corps non élastique, n'entrant pas en opposition évidente avec les données des observations. En outre, les effets prévus sont concrets et peuvent être vérifiés selon la nécessité.

Граммель Р., 1952. Гирокоп. Его теория и применение.: И\*Л.

Джеффрис Г., 1960. Земля, ее происхождение, история и строение.: И\*Л.

Манк У. и Макдональд Г., 1964. Вращение Земли.: "Мир".

Мориц Х. и Мюллер И., 1992. Вращение Земли: теория и наблюдения.: "Наукова думка".

---

\* Ce terme déterminé par les processus de relaxation l'effet examiné diminue de façon naturelle, mais on ne le remarque pas.

*Traduction*

ETUDE DES INCLINAISONS ET DES DEFORMATIONS  
DE LA SURFACE DE LA TERRE DANS LA  
ZONE DE RIFT DU BAIKAL (TALAIA).

V. You Timofeyev, S.F. Panin \*, You K. Saritcheva,  
L.V. Anissimova \*, D.G. Gridniev \*\*, O.K. Massalskii.

\* Institut conjoint de géologie, géophysique  
et minéralogie du SORAN.  
630090 Novosibirsk  
avenue de l'Université 3  
Russie.

\*\* Institut de l'écorce terrestre COPAH  
664033 Irkoutsk  
Lermontova 128  
Russie.

Institut de Physique de la Terre  
123810 Moscou  
B. Gruzinskaya 10  
Russie.

Geologia i Geofisica n° 3 pp 119-129, 1994

Enoncé du problème

Les mesures clinométriques et déformographiques peuvent servir à obtenir des caractéristiques quantitatives découlant des processus géodynamiques. Les inclinaisons anormales et les déformations de l'écorce terrestre sont la manifestation de l'action des forces tectoniques et peuvent être signe de l'activité séismique de la région. Les appareils actuels permettent des mesures d'une précision atteignant  $10^{-10}$  dans un large diapason ce qui donne la possibilité d'enregistrer aussi bien des processus de caractère systématique que les effets faibles des phénomènes de marées et d'oscillations propres de la Terre.

A l'inverse des appareils séismiques, des clinomètres et des déformographes fonctionnant en régime continu enregistrent des processus lents. Ils permettent d'étudier la dynamique de la déformation de l'écorce terrestre; ils donnent la carte continue des variations d'inclinaison de la verticale ce qui peut compléter utilement les données des mesures géodésiques des mouvements actuels. De plus les observations de ce genre constituent une base pour le développement de méthodes de prévision des tremblements de terre. Avec le développement du réseau de stations clinométrie-déformographiques il est possible d'étudier le comportement non seulement de blocs séparés de l'écorce terrestre mais aussi de leurs mouvements relatifs, des déplacements selon leur décomposition. L'analyse de la composante de marée et des déformations permet de déterminer les paramètres caractérisant l'élasticité des couches proches de la surface de la Terre.

L'étude des mouvements actuels de l'écorce terrestre, l'étude des phénomènes physiques d'activité séismique de la région et la détermination des signes précurseurs sont les problèmes principaux résolus à l'aide d'un

complexe de mesures continues de clinomètres et de déformographes. Les recherches ont été faites dans une région séismo-active au Sud du rift du Baïkal à la station de Talaïa où nous faisons les observations de régime des inclinaisons et aussi des déformations depuis 1985. Il convient de noter qu'à présent cette station est unique sur le territoire de la Sibérie pour des observations de ce genre.

#### Appareils, Caractéristiques de la région

Le complexe d'appareil consiste en deux clinomètres en quartz, deux déformographes à tiges de quartz et l'un à tige d'invar. La précision atteint  $10^{-10}$ , et pour les inclinaisons 0.001 sec. d'arc. Les travaux incluent un monitoring des mouvements actuels de l'écorce terrestre, l'analyse de la variation temporelle des paramètres physiques et l'identification des caractéristiques corrélées avec la séismicité.

Dans la zone de rift du Baïkal l'intensité des tremblements de terre peut atteindre 10 et plus. Les mesures ont été faites dans la galerie de la station séismique de Talaïa (51, 68° N, 103, 65° E) située à 6 km du lac Baïkal et à 4 km de la voie de chemin de fer entre Koultouk et Slioudianka. La galerie est creusée horizontalement dans la masse de gneiss granit; il y a six galeries latérales d'une longueur de 20 à 25m orientées dans l'azimut 332° N. Le massif rocheux d'après les anciennes données géologiques est de croissance archaïque. Il est monolithique; dans la galerie la plus éloignée on note une zone de fissures le long de son axe. Pour mesurer les inclinaisons selon les composantes N.S et E.W on a utilisé des clinomètres en quartz de D.G. Gridniev [2, 3]. L'enregistrement a été fait à 200m de la galerie dans le bâtiment de la station séismique, sur des enregistreurs photographiques du type CKR avec vitesse de défilement de 9.6mm/heure. De 1985 à 1992, la sensibilité de l'appareil HK1 (N.S) était de 200 à 1700mm/sec d'arc et pour l'appareil HK2 (E.W) de 400 à 2800mm/sec. d'arc. L'erreur type de la détermination de l'échelle de l'enregistrement était pour l'appareil HK1 1 à 5%, pour HK2 0.5 à 3%.

Dans la galerie éloignée les mesures ont été faites depuis 1989 avec des déformographes à tiges de quartz : la longueur de la tige est de 1.5m en composante NS et de 2.0m en composante E.W. Un déformographe à tige d'invar a été installé dans l'azimut de 332° (9m) à la fin de 1989. On a équipé les déformographes d'un émetteur d'induction de déplacements [4]. L'enregistrement étant fait sur des enregistreurs du type H 399, l'échelle d'enregistrement est de 1 à  $3 \cdot 10^{-9}$  par mm; l'erreur de détermination atteint 5%. Le déformographe en invar a été installé à 70m de l'entrée dans la galerie, le long de l'axe de la galerie. L'enregistrement a été fait dans le même bâtiment sur des enregistreurs du type H 399 avec une vitesse de déroulement de 20mm/heure.

#### Estimation des effets indirects

On peut évaluer l'amplitude des inclinaisons et des déformations provoquées par les variations saisonnières et diurnes de la température dans la région, de la pression atmosphérique, du niveau des eaux souterraines et par les variations du niveau du lac Baïkal. On peut prévoir la valeur des inclinaisons thermiques en partant des données sur la variation saisonnière de la température, de la mise en sous-sol des appareils, du relief et des paramètres élastiques du milieu. Conformément aux estimations, les inclinaisons thermiques ne doivent pas dépasser des centièmes de secondes d'arc par an (< 0.05 à Talaïa); la déformation relative est de  $10^{-8}$  [5].

Pour clarifier l'influence des variations annuelles du niveau du Baïkal on a utilisé la méthode standard de calcul de l'influence des marées océaniques [6]. L'effet des masses d'eau se manifeste sous trois aspects :

- a) l'attraction des masses d'eau sur le balancier;
- b) la flexion de l'écorce terrestre sous l'effet de l'effet de charge de la masse d'eau (partie la plus importante de l'effet indirect);
- c) la variation du potentiel à cause de la répartition des masses lors de la déformation de l'écorce (effet qui agit dans la direction opposée aux effets a et b).

L'estimation numérique de ces effets indirects se fait comme suit :

Calcul de l'attraction des masses d'eau. La surface du lac est divisée en petits secteurs  $ds$  avec pour sommet commun le point des observations, de profondeur constante  $h$  (fig. 1). Les secteurs sont limités par les circonférences de rayons  $r$  et  $r + dr$  et par les côtés de l'angle au sommet 0 formé par les azimuts  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Les éléments de volume  $dv = h ds$  correspondant aux secteurs de masse  $\rho dv$  (où  $\rho$  est la densité de l'eau) exercent une attraction déterminée par :

$$dA = \frac{f \cdot dm}{r^2} = f \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{dr}{r} d\Theta,$$

où  $dm = \rho \cdot ds \cdot h$ ,

$f$  est la constante de gravitation.

Pour la projection de  $A$  sur l'axe X, nous obtiendrons l'expression

$$A_x = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h \cdot f \cdot \rho \cdot \frac{dr}{r} \cdot \cos\Theta \cdot d\Theta.$$

Pour la direction Est (axe Y) nous avons après intégration :

$$A_y = \frac{f \cdot \rho \cdot h}{g \cdot \sin 1''} \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) (\cos\Theta_2 - \cos\Theta_1),$$

et pour la direction Sud :

$$A_z = \frac{f \cdot \rho \cdot h}{g \cdot \sin 1''} \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) (\sin\Theta_2 - \sin\Theta_1).$$

Sous l'effet de la charge verticale de la masse d'eau il se produit un déplacement de l'écorce qui (comme l'a montré Boussinesq) est directement proportionnel au potentiel de gravitation  $A$  de la charge et est fonction des constantes élastiques du milieu  $\mu$  et  $\lambda$ . Ainsi, dans notre cas, à l'attraction

$$A = \frac{f \cdot \rho}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{hd\sigma}{r}$$

correspond la flexion, effet donnant dans l'inclinaison

$$F = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi(\lambda + \mu)\mu} \cdot g\rho \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{hd\sigma}{r} = \nu A,$$

où

$$\nu = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi(\lambda + \mu)\mu} \cdot \frac{g^2}{f}.$$

Pour  $\lambda = \infty$ ,  $\mu = 6.17 \cdot 10^{11}$  dyn/cm<sup>2</sup> et  $g = 980$  cm/C<sup>2</sup> nous obtenons  $\nu = 1.875$

#### Variation de potentiel

Cet effet est moindre que les deux premiers et agit comme s'il était provoqué par une masse opposée. On suppose [6] que dans la première approximation cet effet agit proportionnellement à A et nous posons que  $\zeta = -\epsilon A$ . Ainsi, on peut écrire la somme des effets indirects sous la forme

$$I = (1 + \nu - \epsilon) A$$

En prenant 1.3m comme variation annuelle du niveau du lac Baïkal (de 1985 à 1987 la différence maximale du niveau atteignait 1.3m) nous obtenons pour  $\nu = 1.875$ ,  $\epsilon = 0.3$  [6] et  $A = 1.3$  m un effet sur l'inclinaison de  $4 \cdot 10^{-3}$  sec/a dans l'azimut E.W et  $0.05 \cdot 10^{-3}$  sec/a dans l'azimut N.S.

Ne tenant compte que de la variation temporelle de cette charge, on peut supposer que la variation annuelle de l'inclinaison est de  $4 \cdot 10^{-3}$  dans l'azimut EW et de  $0.1 \cdot 10^{-3}$  sec. d'arc dans l'azimut N.S. mais dans les déformations l'effet ne dépasse pas  $10^{-8}$  ce qui est dans les limites de l'amplitude des marées et des déformations.

Les effets de ressac et des seiches apparaîtront dans le Baïkal dans l'azimut E.W. On sait [7] que les seiches dans le Baïkal ont des périodes  $T_1 = 4h38,5$ ;  $T_2 = 2h33,0$ ;  $T_3 = 1h27,7$ ;  $T_4 = 1h00,0$ ;  $T_5 = 0h44,0$  min. et leurs amplitudes par exemple près du point Maritii (Sud du Baïkal) sont respectivement de 14,3,5,2 et 1cm. Par conséquent, les seiches produisent des effets plus petits que  $10^{-3}$  sec. d'arc dans les inclinaisons et de  $10^{-9}$  dans la déformation ce qui est d'un ordre inférieur aux effets des marées terrestres.

Il a été établi précédemment que les clinomètres de D.G. Gridniev ne sont pas sensibles à l'effet direct des variations de la pression atmosphérique. L'influence de cet effet sur l'inclinaison et la déformation peut se produire par une variation du niveau des eaux souterraines dans la zone de la station. Mais le monolithisme du massif rocheux, la perméabilité très faible des roches dans la région (probablement  $10^{-19}$  à  $10^{-20}$  m<sup>2</sup>), l'absence d'influence sur l'inclinaison de la grande crue de courte durée du printemps sur le fleuve Talaïa (quelques jours au début de juin) permettent d'éliminer une influence importante des variations de la pression atmosphérique beaucoup moins que les inclinaisons de marées et des déformations [8].

L'approche de l'opérateur et la calibration de l'appareil par micromètre provoquent une forte perturbation dans l'enregistrement des inclinaisons et des déformations. La perturbation (jusqu'à 0.1 à 0.2 sec. d'arc et  $10^{-8}$ ) persiste pendant une heure après le travail. Cette influence a été éliminée à l'aide de constructions graphiques.

### Résultats des mesures

Le graphique de l'allure temporelle des inclinaisons et de la déformation suivant les deux composantes ainsi que le diagramme vectoriel de l'allure de l'inclinaison construit d'après ces composantes à la première heure de chaque jour constituent les informations (fig. 2).

Par comparaison avec les données des mesures géodésiques on peut évaluer la dimension du bloc rocheux caractérisé par les mouvements actuels reflétés dans les inclinaisons et les déformations [9]. Selon nos estimations les dimensions linéaires du bloc déformé atteignent 40km [1]. Ces résultats permettent de supposer que les valeurs obtenues pour les inclinaisons et les déformations caractérisent la déformation de surface de la partie Est de l'aile Sud de la fracture du Saïanskii Principal.

Comme on l'a montré plus haut les influences saisonnières et instrumentales sur les résultats des mesures des déformations et des inclinaisons sont au minimum d'un ordre plus petit que les valeurs de plusieurs années enregistrées.

En analysant les données d'inclinaison de plusieurs années (figure 2) on peut noter des périodes d'allure systématique, des ralentissements des mouvements et d'une allure dans la direction opposée. L'inclinaison dans l'azimut N.S indique les mouvements en croix de l'ensemble des structures géologiques de la partie Sud-Est de la zone de rift du Baïkal. L'allure des inclinaisons dans les azimuts N.S et E.W est inégale dans le temps et dans l'espace. Ainsi, de mars à juillet 1985 on a noté une inclinaison du bloc vers l'Ouest et le mouvement variable l'été au Nord et au Sud.

De juillet 1985 à mars 1987, l'inclinaison vers le Nord était prédominante; de janvier à mars 1986 vers le Nord et l'inclinaison totale dans l'azimut E.W était d'environ 0 sec. d'arc. Ensuite en 1987 on a noté une inclinaison prédominante vers l'Est : jusqu'à 2.4 sec. d'arc par an. En 1988 on a noté une inclinaison au N.E et en 1989 l'allure générale du vecteur inclinaison a brusquement ralenti; ainsi du 1.03 au 1.11.89 elle n'était que de 0.1 sec. d'arc. En 1989, également avec une faible allure vers l'Est il y a une variation de la direction du mouvement dans l'azimut N.S et en 1990 et 1991 on a noté un faible mouvement vers l'Est avec une forte inclinaison vers le Sud (jusqu'à 3 sec. d'arc par an).

En 7 ans de mesures l'allure de l'inclinaison comprend une partie quasi elliptique, ce qui témoigne apparemment de la cyclicité des inclinaisons du bloc de l'écorce terrestre. Le demi cycle est à peu près de 5 à 6 ans. La valeur absolue du vecteur de l'inclinaison de mars 1985 à avril 1992 est de 6.7 sec. d'arc, la direction de l'allure totale de l'inclinaison vers le N.E.E ( $72^\circ$ ). La plus grande vitesse d'inclinaison dans l'azimut N.S pour toute la période des observations (1985 à 1992) est de 7.4 sec. d'arc, dans l'azimut E.W - 7.6 sec. d'arc.

La vitesse moyenne du vecteur absolu pour toute la période des observations est de 0.9 sec. d'arc par an. Les vitesses moyennes annuelles maximales de l'inclinaison vers le Nord et l'Est sont de 1.1 sec. d'arc par an. D'autre part (fig. 2) le caractère cyclique conduit à des vitesses moyennes annuelles plus basses dans les périodes séparées. Ainsi, l'allure de l'inclinaison au Nord de décembre 1985 à décembre 1990 était en tout de 1.1 sec. d'arc, d'avril 1985 à avril 1992 de 1.8 sec. d'arc et la vitesse annuelle moyenne est de 0.2 sec. d'arc. L'inclinaison dans l'azimut N.S, dans certains intervalles de mesures, peut au total être égale à zéro (par exemple, la période d'avril 1986 à décembre 1990 ou de juin 1987 à juin 1990). Les données décrites plus haut

expliquent certains résultats des mesures géodésiques: les vitesses faibles des mouvements verticaux sur les longs profils rarement en question et des vitesses élevées sur les bases courtes souvent en question.

Les mesures déformographiques dans l'azimut N.S se font en continu depuis le début de 1989.

Pour la période de juillet à novembre 1989 on a enregistré une dilatation de  $5.10^{-7}$ . Les mesures de la déformation en régime continu dans l'azimut E.W pour juillet à novembre 1989 ont donné une contraction de  $1.10^{-6}$ . D'après les données sur les variations à courte période (minutes) de la pression atmosphérique (1 à 3  $\mu$ bar) et les résultats des mesures des inclinaisons ou des déformations (de l'ordre de  $10^{-9} - 10^{-10}$ ) on a déterminé le module de Young des roches du massif ( $2 \div 5.10^{11}$  dyn/cm $^2$ ) [10]. Nous avons exposé en détail les résultats des variations de marées des inclinaisons et des déformations dans les travaux [1, 11]. Depuis février 1990 les mesures des déformations ont été faites de manière continue également dans l'azimut 332°. Si on suppose que trois déformographes sont situés dans le même champ, on peut déterminer les axes principaux, les valeurs des déformations principales et la valeur de la déformation de déplacement maximale. Pour les premiers six mois de mesures (1.02.90 à 1.08.90) la variation représente une déformation nette (dilatation  $\epsilon_1 = -90,8 \cdot 10^{-7}$  dans l'azimut 46,7°N, contraction  $\epsilon_2 = 93,9 \cdot 10^{-7}$  dans l'azimut 136,7°N) de  $\gamma_{\max} = 18,4 \cdot 10^{-6}$ . De sorte que pour cette période il y a eu une accumulation de tension de déplacement  $\tau = G \cdot \gamma_{\max} = 0,36$  MPa ( $G = 20$  GPa). L'accumulation des tensions de déplacement est typique pour les zones proches de fractures profondes [12].

Pour la période du 1.02.90 au 1.08.91 on a une dilatation  $\epsilon_1 = 13,5 \cdot 10^{-7}$  et une contraction  $\epsilon_2 = +67,5 \cdot 10^{-7}$  suivant les axes principaux avec des azimuts 59,7° et 140,7°. La déformation maximale était de  $8,1 \cdot 10^{-6}$ .

L'estimation des variations des accroissements de la déformation suivant les axes principaux par mois et années constitue le résultat principal des recherches. L'orientation spatiale des axes principaux est indiquée sur les figures 2 à 4. Comme on le sait [12] en connaissant les valeurs des déformations principales à la surface et les valeurs des modules élastiques du milieu, on peut obtenir les valeurs des accroissements des tensions pour

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= 0; \quad \epsilon_1 = 1/E(\sigma_1 - \nu\sigma_2), \quad \epsilon_2 = 1/E(\sigma_2 - \nu\sigma_1); \\ \sigma_1 &= [E/(1-\nu^2)](\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), \quad \sigma_2 = [E/(1-\nu^2)](\epsilon_2 + \nu\epsilon_1); \\ \theta &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \quad \gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_2; \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2,\end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est la déformation,  $\sigma$  est la tension (MPa),  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $E$  est le module de Young,  $\theta$  est la dilatation cubique,  $\gamma$  est la déformation de déplacement,  $\tau$  est la tension de déplacement.

Comme on le constate sur la figure 3 D la position des axes principaux ( $\phi$ ) de la déformation se maintient au cours de toute la période d'observations et ils sont répartis à peu près dans les azimuts N.E - S.W et N.W - S.E. Un écart à ces positions ne s'observe qu'en août et septembre ce qui est apparemment en relation avec l'apparition de l'eau au moment des pluies dans les zones de fissuration de la galerie.

D'après les résultats des observations déformographiques on a obtenu les valeurs suivantes des paramètres déterminés :

	$E_1$	$E_2$	$\phi_1$ ,	$\phi_2$ ,	$\theta$	$\gamma_{\max.}$	$\sigma_1$ ,	$\sigma_2$ ,	$\tau$
1990	$6,0 \cdot 10^{-6}$	$-4,9 \cdot 10^{-6}$	$134,9^\circ$	$44,9^\circ$	$0,7 \cdot 10^{-6}$	$10,9 \cdot 10^{-6}$	0,25	-0,18	0,21
1991	$-6,6 \cdot 10^{-6}$	$11,9 \cdot 10^{-6}$	$127,0^\circ$	$37,0^\circ$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$-10,6 \cdot 10^{-6}$	-0,20	0,55	-0,37
<b>Au total</b>									
1990	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$117,0^\circ$	$27,0^\circ$	$4,2 \cdot 10^{-6}$	$-8,6 \cdot 10^{-6}$	-0,04	0,38	-0,17
1991									

Les données totales sont apparemment plus représentatives et typiques pour la région étudiée. Elles sont en accord avec les résultats de la détermination des tensions par les données séismologiques (table 1).

Pour la période des mesures séismologiques, la région de Talaïa se caractérise par un calme relatif. Pour les dix dernières années on n'a pas noté de forts tremblements de terre et c'est pourquoi la détermination des tensions d'après les données séismologiques n'a été faite que pour les régions voisines [13, 14]. Les données des séismologues (figure 4) sont données dans les carrés d'après les deux côtés de Talaïa et dans l'environnement de la station elle-même se trouvent nos données pour deux ans de mesures déformographiques. On constate que la position des axes principaux à Talaïa ne diffère pas des régions voisines et invariablement au cours des deux années (1990-1991). On a noté la même position des axes également d'après les formations séismo-géodésiques dans le travail [15] pour la région voisine de Tounkinskii.

Nous examinerons ensuite le problème sur la relation de l'allure de l'inclinaison et des déformations dans la région étudiée. Sur la figure 2 sont données les accroissements des déformations suivant les axes principaux pour la période du 1.02.90 au 1.08.91. L'azimut de l'allure de l'inclinaison correspondant à cet intervalle de temps est voisin de la position prédominante en valeur de l'axe de contraction. On suppose que l'inclinaison de la surface de la Terre et sa déformation sont causées par la même raison et que les observations clinométriques et déformographiques sont suffisamment représentatives pour la région étudiée. La détermination des dimensions de la zone minimale par rapport à la représentation des données déformographiques a été faite précédemment par les auteurs dans le travail [1]. Dans les limites de la zone de 40 kilomètres établie autour de la station de Talaïa on a étudié ci-après la corrélation du caractère des inclinaisons avec la séismicité.

La table 2 reproduit l'énumération des tremblements de terre ayant lieu dans cette région; on a tenu compte des tremblements de terre en commençant par la 9ème classe.

Lors de l'analyse du diagramme vectoriel de l'inclinaison visant à découvrir les signes précurseurs des tremblements de terre on a noté la variation de la direction de l'inclinaison quelques mois avant les tremblements de terre dans la région contiguë à la station séismique (voir fig. 2). En outre, au niveau de séismicité on corrèle l'allure des vitesses mensuelles dans l'azimut N.S et la vitesse absolue du vecteur inclinaison [1]. Ainsi une période de valeurs basses de la vitesse précède les tremblements de terre notés dans la table ce qui correspond probablement aux périodes de fermeture des fractures et d'accumulation des tensions engendrant les tremblements de terre.

En analysant la corrélation des inclinaisons avec la séismicité de classe plus élevée nous noterons que selon les données séismologiques (S.M. Golinetskii 1989) sur la durée des deux dernières dizaines d'années dans la bande séismiquement active du rift Baïkal et sur les territoires y contigus on n'a pas enregistré de tremblements de terre de magnitude  $M > 5,5$  mais depuis la fin d'avril 1989 est apparue une activation du processus séismique.

Date	Latitude	Longitude	Magnitude (classe)
20.04.89	57,0°	122,0°	$M = 6,5$
29.04.89	57,1°	122,0°	$K = 15,1$
13.05.89	50,2°	105,5°	$M = 5,9$
-	-	-	$M = 4,7$
17.05.89	56,9°	122,0°	$K = 14,6$
04.08.89	50,3°	105,5°	$K = 12,5$
25.10.89	57,5°	118,8°	$K = 14,3$

De l'analyse des observations de plusieurs années d'observations clinométriques il résulte que la vitesse annuelle de l'allure générale de l'inclinaison (fig. 5) est assez constante : 2.10 - 2.65 sec. d'arc pour 1985 à 1988. Sur ce fond se détache sensiblement la vitesse annuelle de l'inclinaison en 1989 - 1,2 sec. d'arc ce qui est deux fois plus bas qu'habituellement. La figure 5 montre également qu'à la valeur minimale de l'allure annuelle de l'inclinaison correspond la plus grande valeur de l'énergie séismique dans l'intervalle étudié. La période "d'acalmie" correspondant à la période de renforcement de la séismicité se détache aussi sur le diagramme vectoriel de l'inclinaison (voir fig. 2) : de 1.03 à 1.11.89. Ici l'allure de l'inclinaison est en tout de 0.1 sec. d'arc pris sur le niveau de ses variations saisonnières. A la suite de la mesure de la déformation linéaire relative dans l'azimut N.S on remarque également une période sans signes de mouvements - de 1.04 à 1.08.89 quand les variations de la valeur de la déformation relative ne dépassent pas  $10^{-8}$  ce qui est au niveau des amplitudes des variations de marées. Ainsi, les données des observations clinométriques et déformographiques témoignent que l'activation du processus de séismicité dans la région du Baïkal s'accompagne d'un ralentissement de plusieurs mois des mouvements dans la région de Talaïa.

Les enregistrements du déformographe pour 1990-1991 se font à l'époque où, dans la zone proche de 40 kilomètres autour de la station de Talaïa, il n'y a pas eu de tremblements de terre de classe  $K > 9$ . Cependant lors du tremblement de terre du 20.05.90 plus éloigné (classe 17.1) (13h.42m.01,9s, 53.07° latitude nord, 108,2° longitude est) on a décelé dans l'enregistrement du déformographe dans l'azimut W.E une anomalie importante (fig. 6). Sur la figure sont donnés : la position de l'épicentre, le mécanisme au foyer et les fragments de l'enregistrement de l'allure de la déformation (décompte à 0h de chaque jour). On constate que le mécanisme au foyer est déplacé et sur l'enregistrement du déformographe, pendant 10 jours jusqu'à l'événement on note une dilatation atteignant  $2.10^{-7}$  au moment du tremblement de terre.

La pratique du monitoring déformographique à la station de Talaïa témoigne que les observations de ce genre donnent une information importante sur le caractère des mouvements actuels dans la région, la valeur et la dépendance temporaire des déformations dans l'écorce terrestre également reflètent dans une certaine mesure les processus de l'activité séismique.

En conclusion les auteurs remercient O.V. Pavlov, K.G. Levi, N.D. Jalkovskii et des collaborateurs de la station séismique de Talaïa pour la consultation et l'aide dans la réalisation du travail.

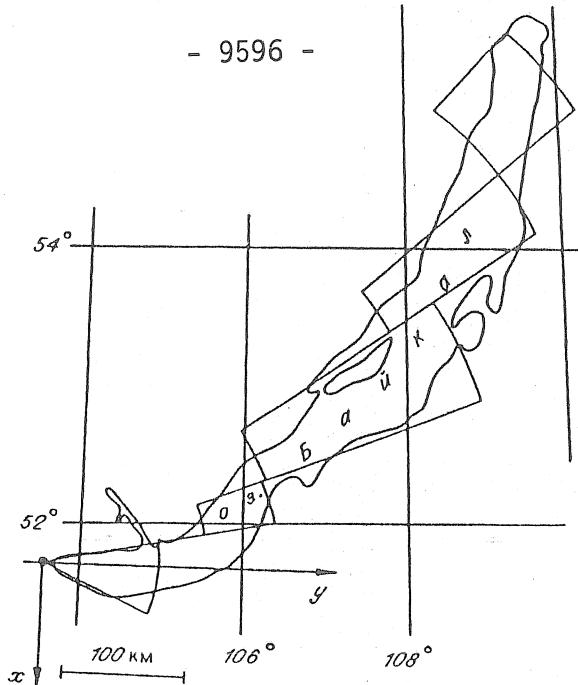


Figure 1 Calcul de l'effet indirect dans les mesures d'inclinaisons et de déformations.

Répartition de la surface du lac Baïkal en petites sections pour le calcul de l'influence de la variation de niveau du lac.

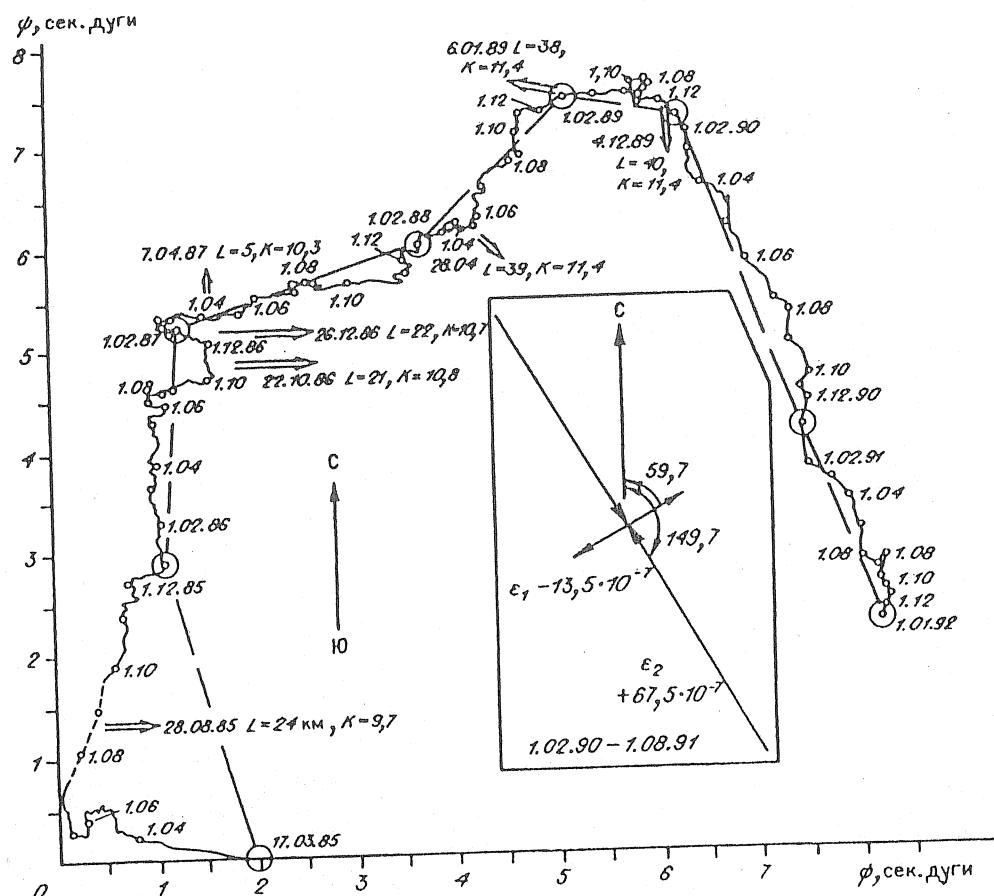


Figure 2

Diagramme vectoriel de l'allure des inclinaisons établi selon les données journalières à 0h du 17.03.85 au 1.01.92.

On a noté par des petits points les premiers chiffres de chaque mois; par des fléchettes on a indiqué la direction des épicentres des tremblements de terre, L est la distance à l'épicentre en km, K est la classe des tremblements de terre. Dans le cadre : l'accroissement de la déformation suivant les axes principaux pour un an et demi.

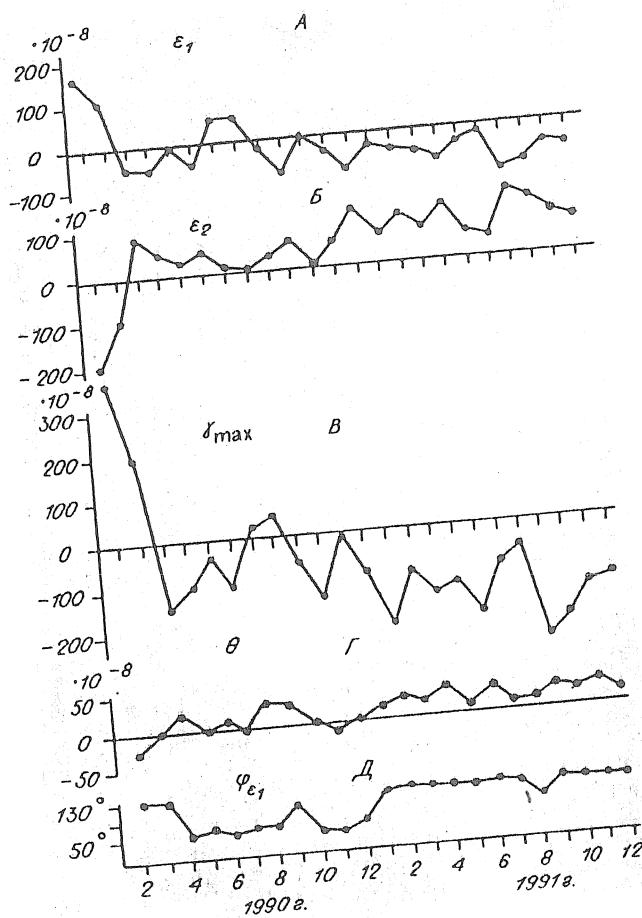


Figure 3

Variation dans le temps (mensuelle) de l'accroissement de la déformation de surface suivant les axes principaux  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  de la déformation de déplacement maximale  $\gamma$  de la dilatation cubique,  $\theta$  et de l'azimut  $\phi$  de l'axe de la déformation principale,  $\epsilon_1$  d'après les données des mesures par les déformographes dans les trois azimuts dans la galerie de Talaïa pour 1990 - 1991.

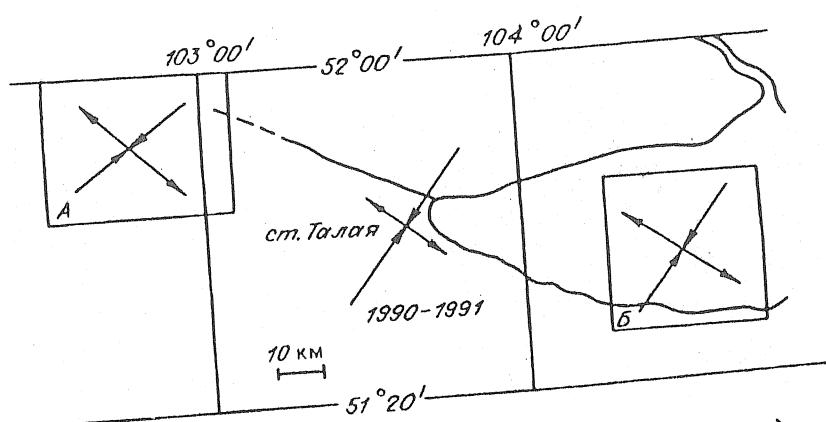


Figure 4

Position des axes des tensions (A. B) d'après [13, 14] et accroissement de la déformation suivant les axes principaux (1990-1991) d'après les observations dans la station de Talaïa

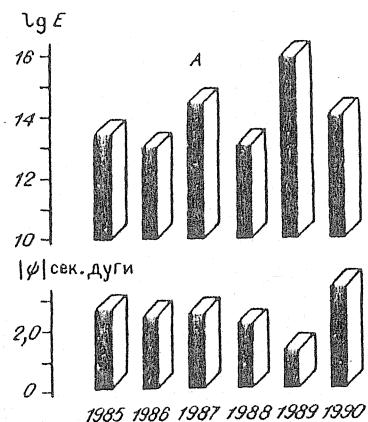


Figure 5 Energie totale E (D) des tremblements de terre en GP3 (A) et accroissement absolu du vecteur inclinaison par années (G).

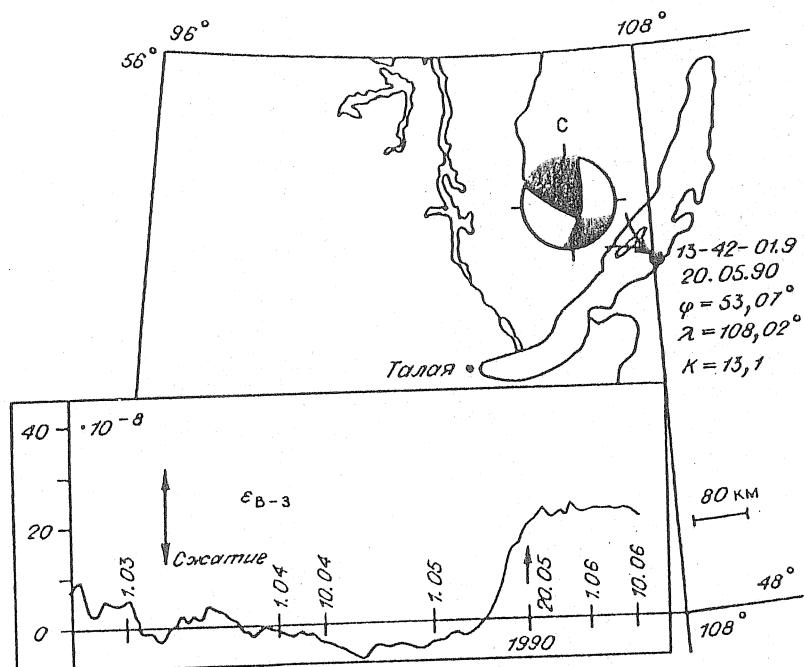


Figure 6. Position de l'épicentre du tremblement de terre du 20.05.90 (13h 42min 01,9s; latitude nord  $53,07^{\circ}$ ; longitude E  $108,02^{\circ}$ ;  $K = 13,1$ ) et enregistrement du déformographe dans mécanisme au foyer et enregistrement du déformographe dans l'azimut E.W avant et après le tremblement de terre (le graphique est fait à 0h de chaque jour).

Table 1 Orientation des axes des tensions principales aux foyers des tremblements de terre de la zone séismique Mongolo-Baïkal associés dans les groupes pour les régions contiguës à la station de Talaïa, selon [13, 14].

Limites de la région des épicentres en latitude et longitude	Nombre de tremblements de terre dans le groupe	Tension					
		Dilatation		Laps de temps		Contraction	
		PL	AZ	PL	AZ	PL	AZ
51,72-52,00°	11	22	134	56	7	25	234
102,51-103,10°							
51,43-51,76°	22	4	125	53	30	37	218
104,29-104,76°							

Remarque : PL est l'angle avec le plan horizontal, AZ est l'azimut de l'axe des tensions.

Table 2 Tremblements de terre dans la zone de 40 kilomètres autour de la station séismique de Talaïa (K > 9) pour la période de mars 1985 à mars 1992.

Date	Heure	Coordonnées de l'épicentre	Classe énergétique
28.08.85	23h 23m 00,1s	51,68°	104,00°
22.10.86	11h 31m 27,5s	51,62°	103,95°
26.12.86	15h 19m 40,9s	51,64°	103,93°
07.04.87	22h 47m 47,7s	51,74°	103,71°
28.04.88	12h 55m 21,6s	51,45°	103,71°
06.01.89	03h 48m 33,5s	51,85°	103,15°
04.12.89	19h 42m 12,2s	51,33°	103,80°

### Bibliographie

1. Гридинев Д. Г., Тимофеев В. Ю., Сарычева Ю. К. и др. Наклоны земной поверхности на юге Байкала (Талая) // Геология и геофизика, 1990, № 5, с. 95—104.
2. Гридинев Д. Г., Сарычева Ю. К., Тимофеев В. Ю., Савиных А. Н. Аномальные наклоны земной поверхности перед некоторыми землетрясениями // Геология и геофизика, 1987, № 12, с. 78—81.
3. Гридинев Д. Г., Тимофеев В. Ю. Кварцевый наклономер с магнитным управлением. М., 1990, 10 с. Деп. в ВИНИТИ 07.06.90, № 3214.
4. Латынина Л. А., Кармалесва Р. М. Деформографические измерения. М., Наука, 1978, 154 с.
5. Гридинев Д. Г., Сарычева Ю. К., Тимофеев В. Ю. Квазисуточные неприлипливые наклоны земной поверхности в районе Новосибирска и Иркутска. М., 1988, 12 с. Деп. в ВИНИТИ 31.08.88, № 6781.
6. Мельхиор П. Земные приливы. М., Мир, 1968, 482 с.
7. Галазий Г. И. Байкал в вопросах и ответах. Иркутск, Вост.-Сиб. кн. изд-во, 1984, 368 с.
8. Иванова М. В., Перцев Б. П. Оценка влияния колебаний атмосферного давления на приливные изменения силы тяжести // Методика измерений земных приливов и медленных деформаций земной поверхности. М., 1970, с. 113—121.
9. Колмогоров В. Г., Колмогорова Н. П., Юдин В. С. Современные движения земной коры в Байкальской рифтовой зоне // Методика и результаты комплексных геофизических исследований земной коры Сибири. Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1976, с. 79—87.
10. Гридинев Д. Г., Тимофеев В. Ю. Способ определения модуля упругости горных пород. А. С. № 1557318, 15.12.1989.
11. Тимофеев В. Ю., Гридинев Д. Г., Сарычева Ю. К. и др. Результаты наклонометро-деформографических измерений (ст. Талая) и сейсмичность Байкальской рифтовой зоны в 1989 году // Исследования по созданию научных основ прогноза землетрясений в Сибири (Оперативная инф., вып. 4). Иркутск, ИЗК СО АН, 1990, с. 43—48.
12. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика: геологические приложения физики сплошных сред. М., Мир, 1985, 643 с.
13. Мишарина Л. А., Солоненко Н. В. Механизм очагов землетрясений юго-западного фланга Байкальской рифтовой зоны // Сейсмические исследования в Восточной Сибири. М., Наука, 1981, с. 3—11.
14. Мишарина Л. А., Солоненко Н. В. Механизм очагов и поле тектонических напряжений // Сейсмогеология и детальное сейсмическое районирование Прибайкалья. Новосибирск, Наука, 1981, с. 110—113.
15. Kesselman S. I., Kotliar P. E., Kuchay O. A. et al. Deformations of the near-surface part of the Earth's crust by seismologic and geodetic data obtained on Baikal geodynamic polygons // Tectonophysics, 1992, v. 202, p. 251—256.

ANALYSIS OF AIR PRESSURE VARIATIONS  
IN POLTAVA DURING 1982 - 1993.

V. Balenko, B. Dubik, V. Pavlyk  
Poltava Gravimetric Observatory  
314029 Mjasoedova Str. 27/29  
Poltava, Ukraine

Hourly observations of air pressure variations were performed in Poltava with an inductive barometer [1] from 20.02.82 to 18.12.93. A preliminary analysis of the first two years of observations was published previously [1, 2].

The results of Fourier spectral and harmonic analyses by Venedikov method for twelve years of observations are presented here and compared with those of Elstner for Potsdam [3].

The spectra of atmospheric pressure for Poltava are presented in fig. 1-29. From these data we obtain the following conclusions.

1. The noise level ranging from 0 degree/hour to 180 degree/hour is similar for Poltava and Potsdam. The long wave part of spectra (from 0.01 degree /hour to 15 degree/hour) don't exhibit annual, semi-annual and other periods. If such harmonics exist in air pressure their amplitudes are less than the amplitudes of the noise in the measurements (fig. 1-6).
2. The structure and amplitudes of the harmonics of the tidal waves  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  and  $S_4$  are very close at Poltava and Potsdam.

In particular :

- a) the diurnal wave  $S_1$  contains three spectral lines. The central line has the highest magnitude (fig. 6 and 7);
- b) the semi-diurnal wave  $S_2$  has only one spectral line (fig. 8 and 9);
- c) the ter-diurnal wave  $S_3$  presents three lines, the central line being smaller (fig. 10 and 11);
- d) the quarter-diurnal wave  $S_4$  shows seven spectral lines (fig. 12 and 13).

The similarities observed for waves  $S_1$  -  $S_4$  show that the atmosphere of our planet presents stable resonances. These resonances are constant in time and one observe the same spectral structure and values even in stations which are situated far from each other (Poltava - Potsdam).

3. The observations at Poltava, Potsdam and other places on the Earth prove the seasonal dependence of the amplitudes of waves  $S_1$  -  $S_4$  (fig. 30-33). The fig. 30-33 are in good agreement with those published by Elstner [3, fig. 4-7]. This circumstance testifies that parameters of the solar waves change equally for both stations during the year.
4. In a previous paper [2], we showed that the amplitude of the wave  $S_2$  is changing during the day. This conclusion is now more precise by using more extensive data. All data of air pressure recording in Poltava

(1982-1993) were separated into three period intervals as in Delcourt-Honorez [4] :

D - months : November-December-January-February (winter);

E - months : March-April-September-October (epochs of equinoxes);

J - months : May-June-July-August (summer).

In each group, hourly mean values of the atmospheric pressure from 0h to 23h were determined. These hourly data were divided into two groups: day - from sunrise to sunset and night - from sunset to sunrise. For each of these six groups the amplitudes and phases of wave  $S_2$  were determined by least squares method. The results are given in table 1. For all groups we did not observe seasonal variations of amplitudes outside the limits of errors, with the exception of group E - night, the night amplitude of wave  $S_2$  being twice as large than for groups D and J (table 1).

5. The air pressure records in Poltava have been analysed using harmonic and spectral methods. The amplitudes of waves  $S_1$  and  $S_2$  are shown in fig. 37 and 38. The continuous lines are the results of harmonic analyses, the broken lines - the results of spectral analyses. For the wave  $S_2$  which has one spectral maximum (fig. 9) both curves coincide. For the wave  $S_1$ , which contains three spectral lines (fig. 7), the curves are not coincident. This is probably due to the harmonic analysis, which gives the superposition of waves  $S_1$  and residues of waves  $K_1$  and  $P_1$  after separation. The curves (fig. 37) have a linear decrease with a period of about 11 years. The maximum sagging of this wave corresponds to minimum square of solar stains. But as the duration of observations is insufficient this coincidence can be accidental.
6. In the table 2, we show the amplitudes and phases of waves  $O_1$ ,  $M_2$ ,  $S_1$  -  $S_4$ , obtained by means of spectral and harmonic analyses (the phases are given at "0" hour UT 20.02.82). The amplitudes of the solar waves for Poltava coincide with the results for Potsdam [3].

#### REFERENCES

- [1] Balenko V., Kutny A., Bulatsen V. et al.  
High precise observations of air pressure in Poltava in 1982 and their analyses. Tides and rotation of Earth. Kiev, Nauk. dumka, 1985, pp 17-28 (in Russ.).
- [2] Pavlyk V., Balenko V., Kutny A. et al.  
Some problems of atmospheric thermal and gravity tides. Study of Earth by methods of geophysics, geodesy and astronomy. Kiev, Nauk. dumka, 1988, pp; 174-176 (in russ.).
- [3] Elstner C.  
Seasonal variations of the planetary solar air pressure waves. Bull. Inf. Marées Terr., 122, 1995, pp; 9202-9211.
- [4] Delcourt-Honorez M.  
Lunar and solar barometric tides in seven stations of the Trans World Tides gravity profile. Bull. Inf. Marées Terr., 97, 1986, pp. 6614-6627.

Tabl.1  
Amplitudes and Phases of Wave S2 for months D,E,J.(Day and Night)

Group	Day		Night	
	Amplitude [mBar]	Phase [°]	Amplitude [mBar]	Phase [°]
D	0.320 ± 0.042	140 ± 8	0.148 ± 0.023	116 ± 10
E	0.399 ± 0.027	131 ± 4	0.239 ± 0.033	114 ± 8
J	0.365 ± 0.080	132 ± 13	0.120 ± 0.058	70 ± 23

Fig. 1  
Air Pressure,Poltava,20.02.82-18.12.93

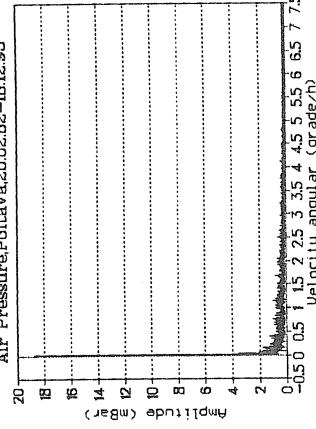


Fig. 2

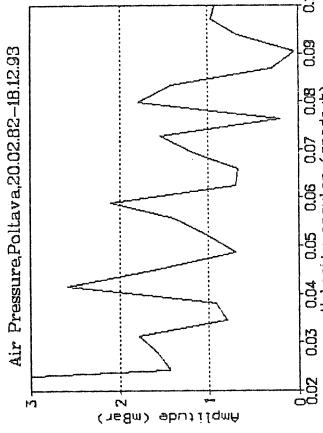


Fig. 3

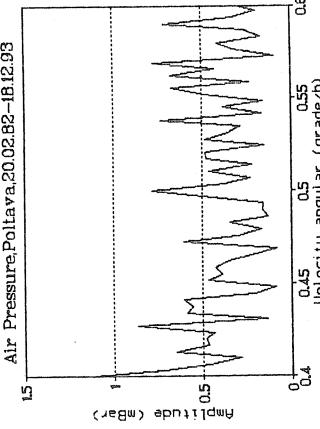


Fig. 4

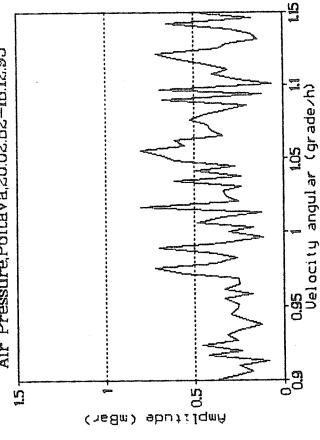
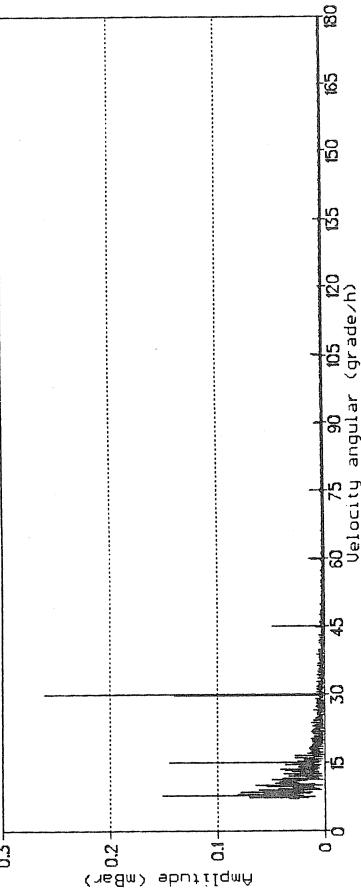


Fig. 5

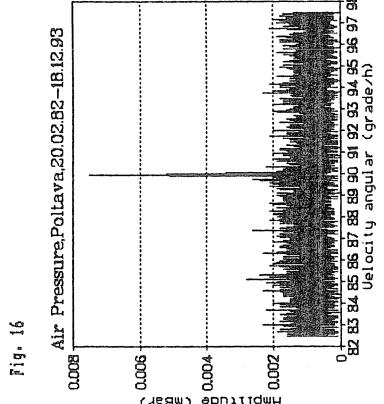
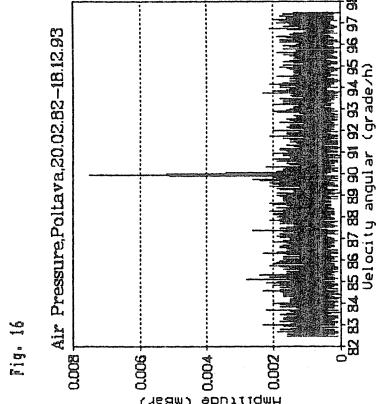
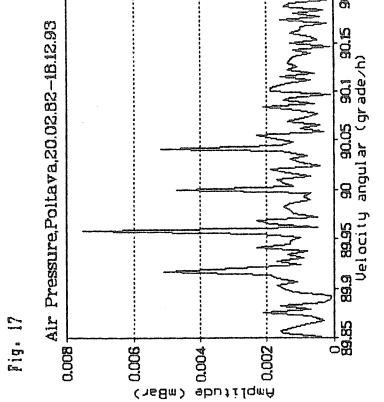
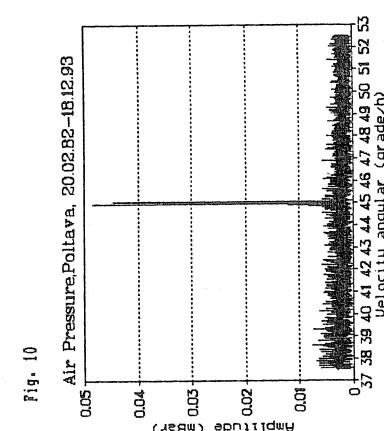
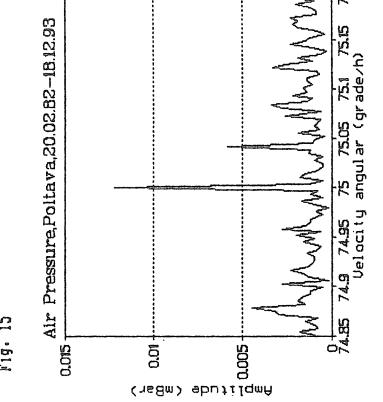
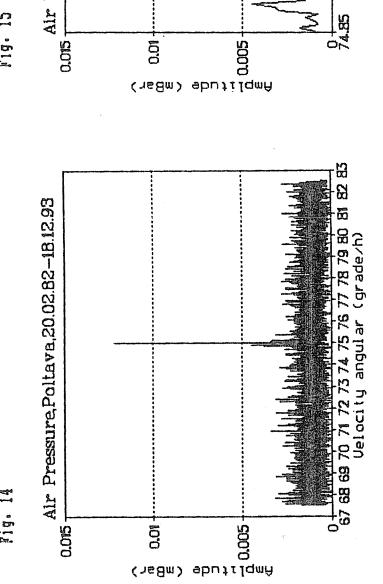
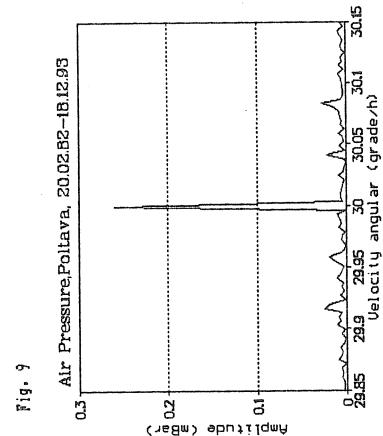
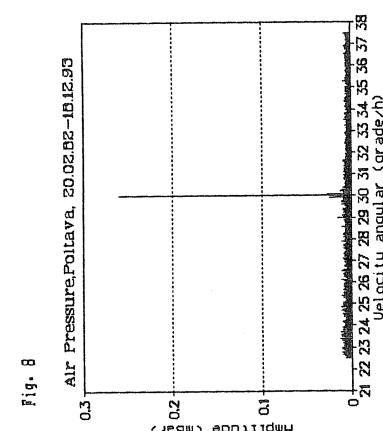
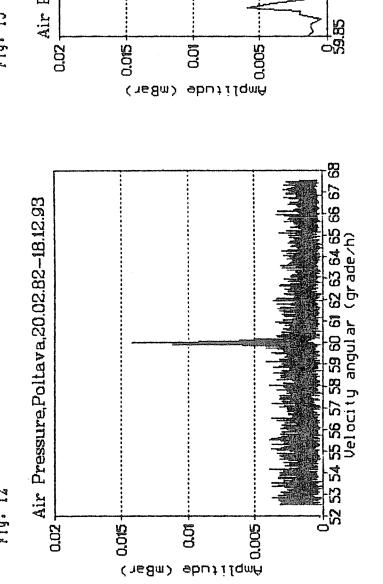
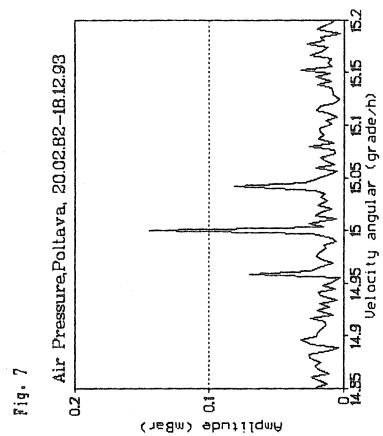
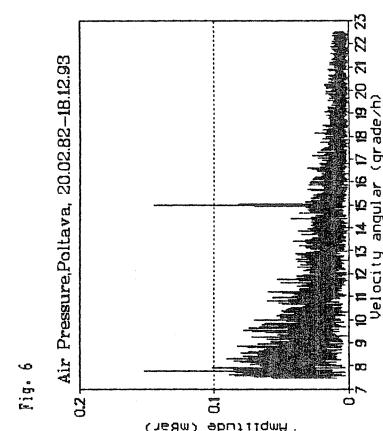


Air Pressure,Poltava,20.02.82-18.12.93

Tabl.2  
Amplitudes and Phases of Waves 01;M2;S1;S2;S3;S4 from  
Fourier spectra and harmonic analysis.

Wave	Fourier Spectra		Harmonic analysis	
	Amplitudes [mBar]	Phase [°]	Amplitudes [mBar]	Phase [°]
01	0.020 ± 0.014	247 ± 39		
M2	0.018 ± 0.004	139 ± 11		
S1	0.144 ± 0.025	288	0.139 ± 0.015	276 ± 6
S2	0.260 ± 0.010	124	0.261 ± 0.003	124 ± 1
S3	0.035 ± 0.004	247		
S4	0.014 ± 0.003	227		

Air Pressure,Poltava,20.02.82-18.12.93



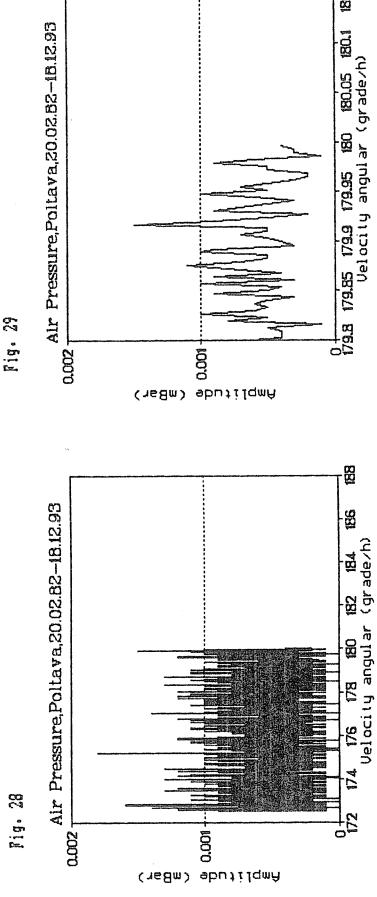
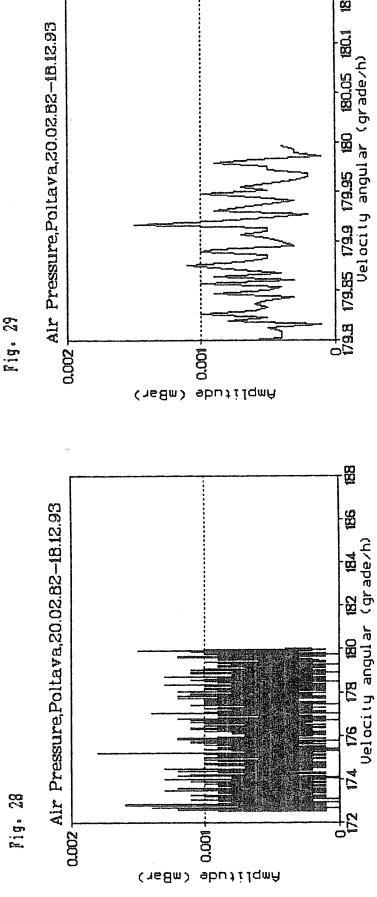
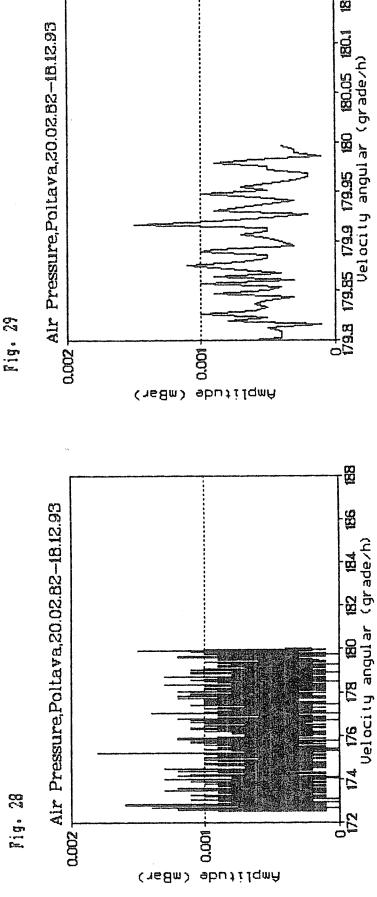
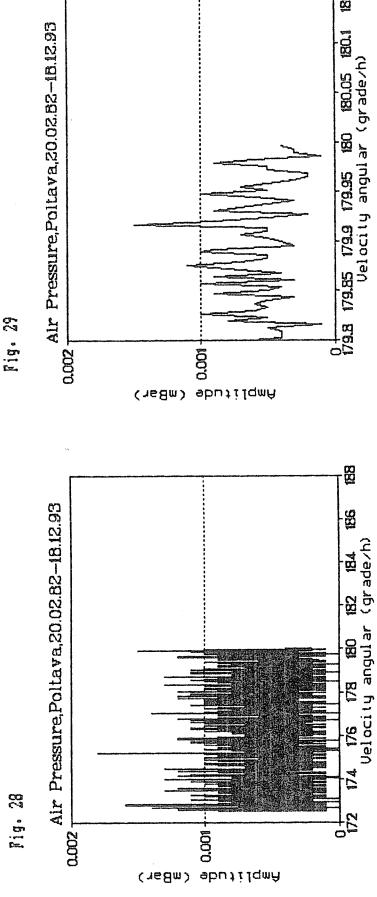
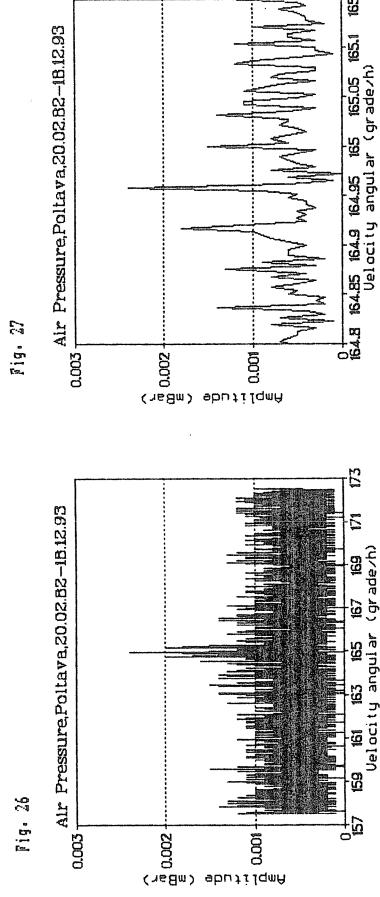
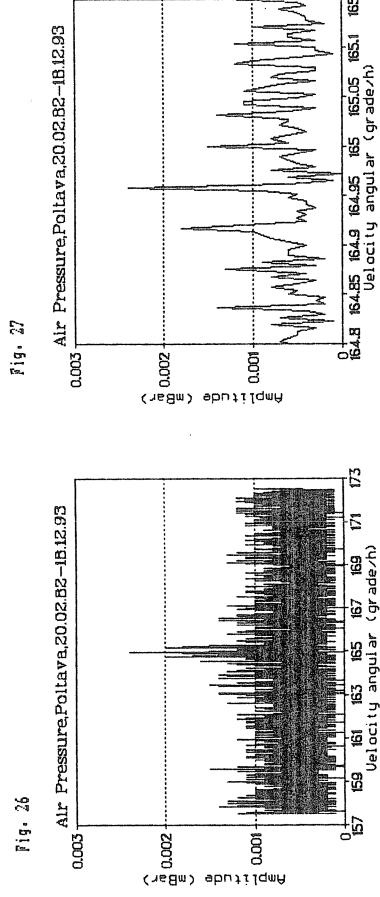
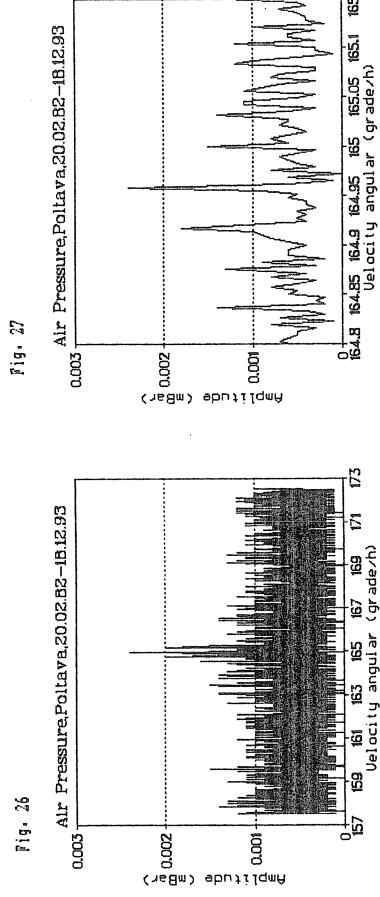
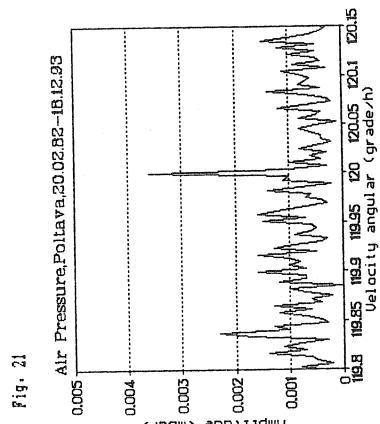
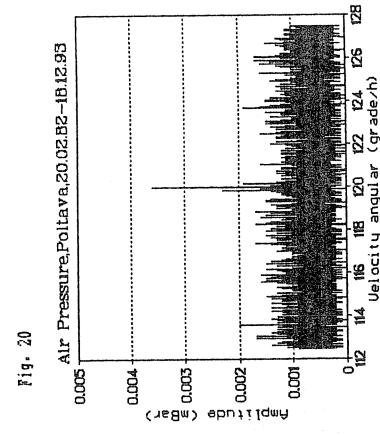
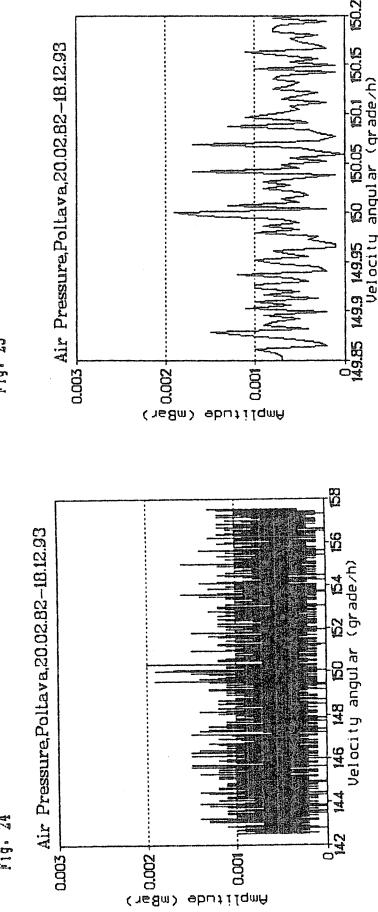
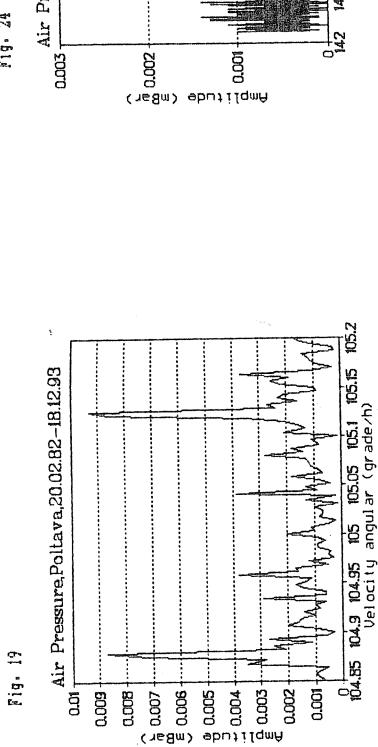
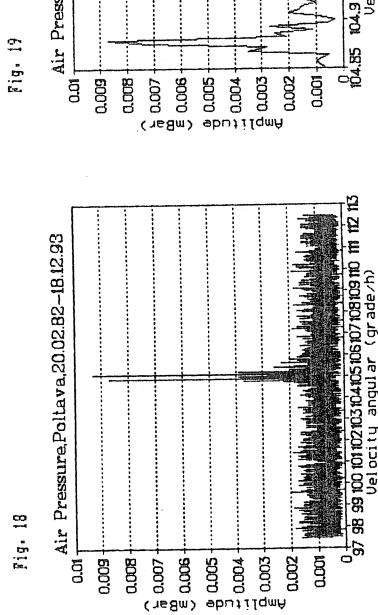


Fig. 30  
Air Pressure,Poltava<sup>20.02.82-18.12.93</sup>  
Wave S<sub>1</sub>

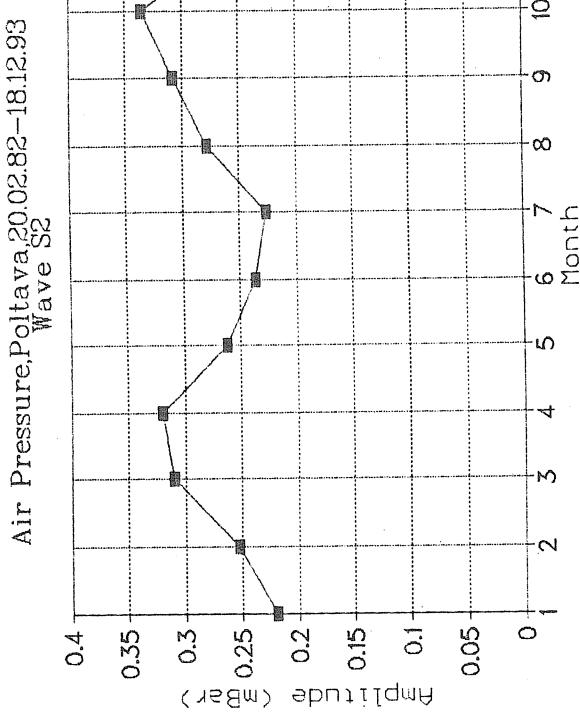
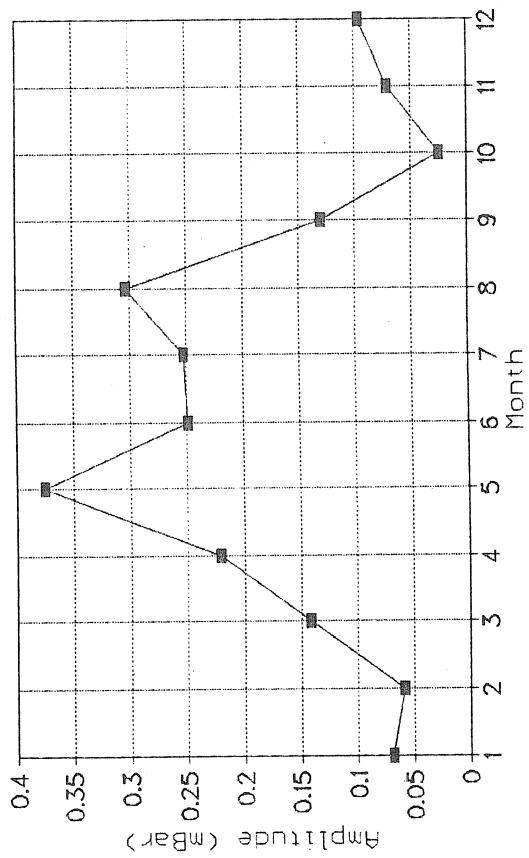


Fig. 32  
Air Pressure,Poltava<sup>20.02.82-18.12.93</sup>  
Wave S<sub>3</sub>

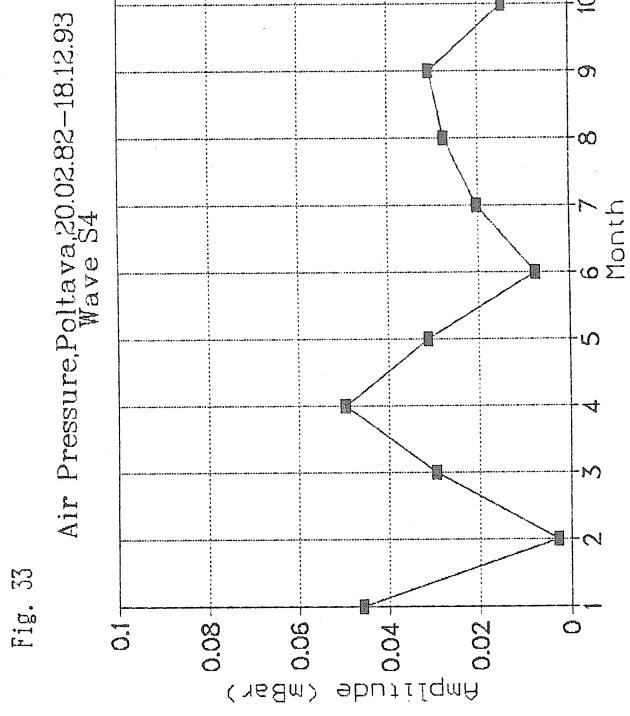
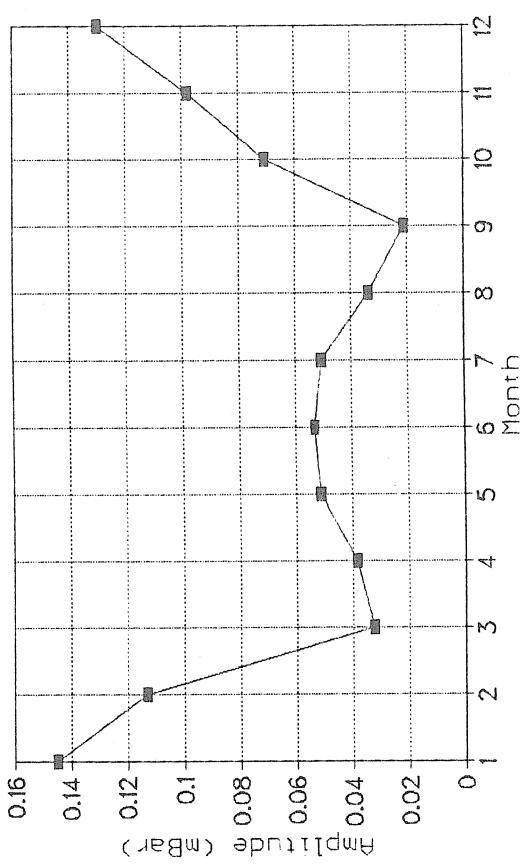


Fig. 33  
Air Pressure,Poltava<sup>20.02.82-18.12.93</sup>  
Wave S<sub>4</sub>

Fig. 37

Air Pressure,Poltava,20.02.82-18.12.93  
Wave S1

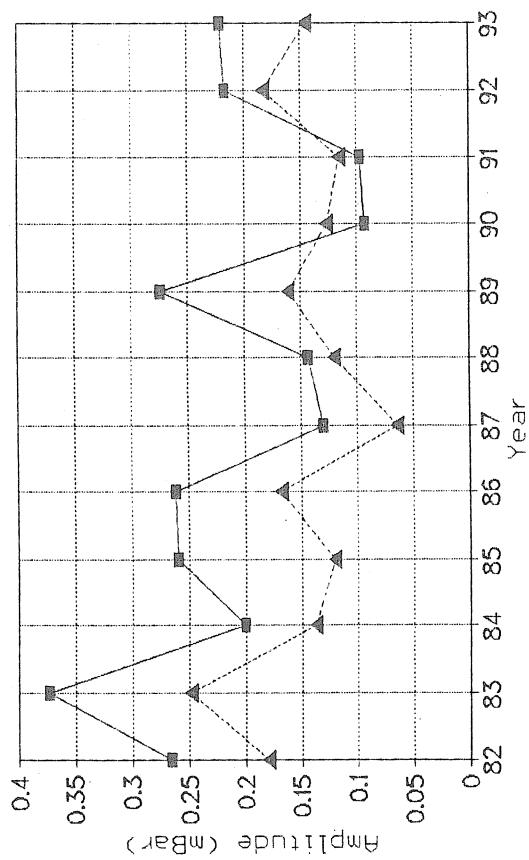


Fig. 38

Air Pressure,Poltava,20.02.82-18.12.93  
Wave S2

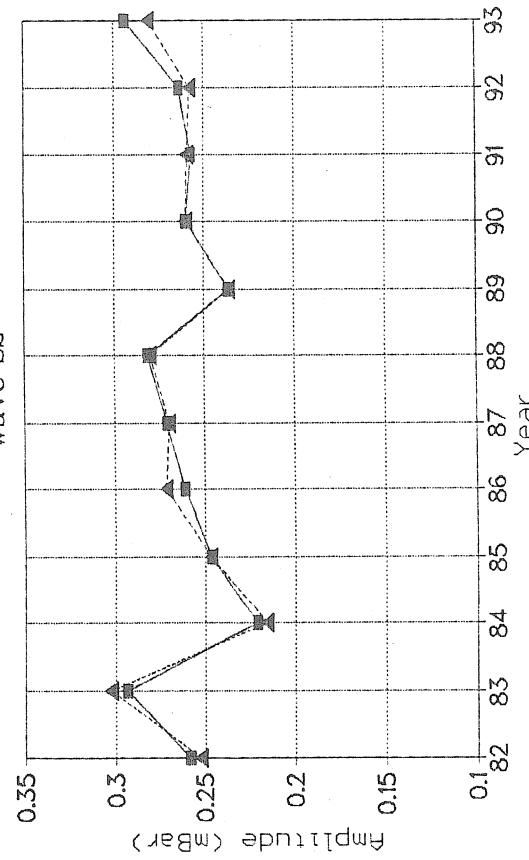


Fig. 34

Air Pressure,Poltava, D-months

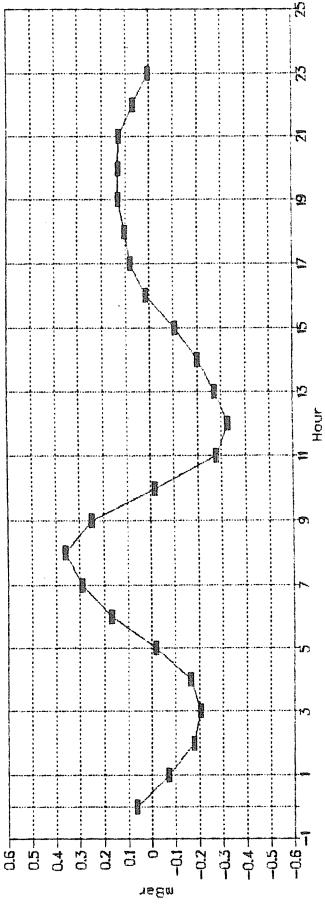


Fig. 35

Air Pressure,Poltava, E-months

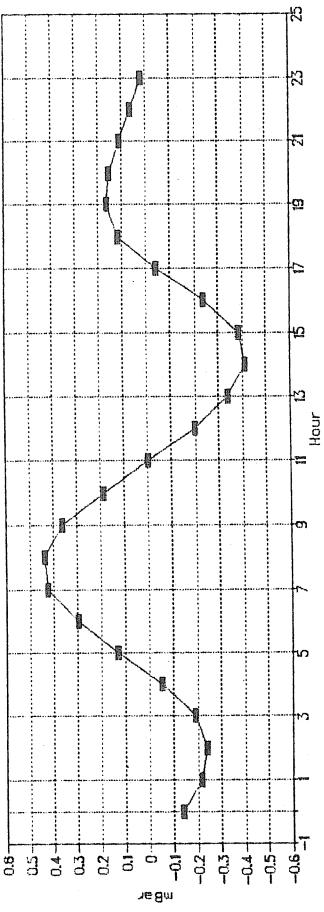


Fig. 36

