

MAREES TERRESTRES
BULLETIN D'INFORMATIONS

1 2 4

30 MARS 1996

Association Internationale de Géodésie

Commission des Marées Terrestres

*Editeur Dr. Olivier FRANCIS
Observatoire Royal de Belgique
Avenue Circulaire 3
1180 Bruxelles*

30 mars 1996

p.

Editorial.	9390
News from ICET.	9391
Symposium on Earth Tides.	9392
WENZEL H-G. Electronic Information Service of the Earth Tide Commission.	9393
WENZEL H-G Accuracy Assessment for Tidal Potential Catalogues.	9394
ALONSO JJ., BRUNO M., MANANES R. Semi-analytical ephemeris and the tide-generating potential TIBAB-95.	9417
WENZEL H-G The nanogal software: Earth tide data processing package: ETERNA 3.3	9425
RESNIKOV E.L., ROSENKNOP L.M. (Traduction) A propos des modes principaux de l'opérateur de Poincaré dans une sphère.	9440
RESNIKOV E.L., ROSENKNOP L.M. (Traduction) Sur les approximations lissées des modes propres de l'opérateur de Poincaré dans une couche sphérique.	9450
RESNIKOV E.L., ROSENKNOP LM. (Traduction) Sur les champs toroïdaux et poloïdaux propres de l'opérateur de Poincaré dans une couche sphérique.	9466
DIAKONOV C.V. (Traduction) Méthode des différences finies pour la solution du problème sur les valeurs propres et de la fonction de l'opérateur de Poincaré.	9477

EDITORIAL

Ce numéro du Bulletin d'Informations des Marées Terrestres est particulier. En effet, il est marqué par un changement d'éditeur. Le Professeur Paul Melchior, éditeur du Bulletin depuis sa création, a décidé de passer le flambeau suite à son remplacement à la direction de l'ICET. Sous sa houlette, le BIM, apprécié par l'ensemble de la communauté des marées terrestres, a acquis une dimension internationale incontestable. De fait, il est rare qu'une publication sur les marées terrestres ne fasse référence à un article paru dans le BIM.

Rappelons que c'est en 1956 que Paul Melchior publie le premier numéro du BIM. Depuis cette date, 123 numéros ont paru totalisant 9388 pages. La plupart de ces BIM contiennent un grand nombre de traductions d'articles russes et, plus récemment, quelques traductions d'articles chinois, donnant ainsi accès aux résultats de recherches dont la diffusion serait autrement restée nationale.

Aujourd'hui, au moment d'assumer la relève, je tiens à remercier le Professeur Paul Melchior au nom des lecteurs du BIM pour le travail considérable qu'il a accompli. En tant que nouvel éditeur, je m'efforcerai d'être à la hauteur de la tâche qui m'attend, fidèle à l'esprit qu'il m'a inculqué.

This issue of the "Bulletin d'Information des Marées Terrestres" is a special one because it marks a change in the editorship. Professeur Paul Melchior, editor of the BIM since its founding, has decided to stop this activity when retiring from ICET. Under his leadership, the BIM, appreciated by the whole Earth Tides community, has acquired an incontestable international spread. Most of the papers on Earth tides refer indeed to those published in the BIM.

Paul Melchior published the first issue of the BIM in 1956. Since that first publication, one numbers 123 issues with a total of 9388 pages. Most of these Bulletins contain a great number of translations of Russian papers and more recently of several Chinese papers giving access to results of research which would have been otherwise restricted to a national diffusion.

Today, at the time of the relief, I wish to thank Professor Paul Melchior on behalf of the readers of the BIM for the considerable amount of work that he accomplished. As new editor, I will try to be up to this new task, faithful to his spirit.

O. Francis
30/03/96

International Center for Earth Tides
Centre international des Marées terrestres
(ICET)
(Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis Services)
(FAGS)

Director: B. DUCARME
Vice-Director: O. FRANCIS
Observatoire Royal de Belgique
Avenue Circulaire 3
B-1180 Bruxelles, Belgium

Email: ducarme@oma.be
Email: francis@oma.be

Tel. 32-2-3730211
FAX 32-2-3749822

NEWS FROM ICET

From January first 1996, Professor Baron P. Melchior retired after nearly forty years of activity as ICET Director. Prof. B. Ducarme is the new Director of ICET and is assisted in his task by Dr O. Francis who is appointed as Vice-Director.

Everybody knows the enthusiasm of Prof. Melchior for all topics of the Earth tidal studies. His activity encompass as well the basic astronomical theories as the most refined instrumental aspects. It is thus not surprising if his successors have to join their efforts to be able to keep pace with him.

ICET is a common enterprise of all tidal scientists and needs more than ever your everyday cooperation and your suggestions in order to meet the new requirements of excellence of the scientific community.

We intend to develop the three main activities of ICET i.e.

- the publication of the "Bulletin d'Information des Marées Terrestres" (BIM) and of the bibliography of Earth Tides;
- the continuous updating of a data base including only validated data and its scientific evaluation for global tidal researches;
- the welcome of guest scientists to develop new activities or simply to get information or training in the various aspects of the tidal studies.

It is clear that your cooperation is strongly needed for each of these activities. We need good papers to maintain the quality and the audience of BIM in the scientific community. The data base will not grow if you are not sending your data. Thanks to the recent development of telematics for data exchange, it is no more a difficult task to make your data available for ICET. We also wish to continue the systematic evaluation of the numerous oceanic tidal models for the benefit of the community. Visiting scientists always brought a great benefit to ICET, coming with new ideas or developing new softwares. Inversely the young scientists may receive a decisive impulse, "getting started" in the practice of tidal computations and theories.

We wish to thank here again the Royal Observatory of Belgium who, since its creation, gives his full support to ICET providing manpower, computing facilities and administrative background.

Last but not least, the ICET is now present on the web :
<http://www.oma.be/KSB-ORB/ICET>.

THIRTEENTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON EARTH TIDES

Brussels, Belgium
July 22-25, 1997

FIRST CIRCULAR AND CALL FOR PAPERS

Convenors :

- Prof. H-G. Wenzel,
President of the Earth Tide Commission
- Prof. S. Takemoto,
Vice-President of the Earth Tide Commission
- Prof. B. Ducarme,
Director of the International Center for Earth
Tides

Scientific Topics :

The objectives of the symposium are to illustrate the multi-disciplinary aspects of the Earth tidal research and its connections to astronomy, geodesy and geophysics. The proposed topics are

1. Tidal instrumentation;
2. Ground-based observations;
3. Space-based observations;
4. Superconducting gravimeters;
5. Tidal data processing and interpretation;
6. Tidal models and solid Earth response;
7. Ocean tide models.

Venue :

The Symposium will be held in the Royal Museums of Art and History under the auspices of the Royal Observatory of Belgium.

Call for Papers :

Participants intending to present a paper or a poster are kindly requested to indicate their intention on the preliminary registration form.

Registration fees :

Before March 31, 1997 : 200 \$ US
Late : 250 \$ US
Students : 100 \$ US

fees include lunches and a free copy of the proceedings.

Accommodation :

The price of hotels ranges from 60 \$ US/a night, to 200 \$ US. Bed and breakfast in private homes are available at 40 \$ US.

Social Activities :

- Excursions are possible after the meeting;
- For accompanying persons activities can be organized according to local travel agencies programs.

Local Organizing Committee :

Prof. P. Pâquet,
President of Organizing Committee
Royal Observatory of Belgium
avenue Circulaire 3
B-1180 Brussels, Belgium

Phone : 32/2/373 02 11

FAX : 32/2/374 98 22

e-mail: et97@oma.be

Please return the attached preliminary registration form to the above address. The second circular will be mailed around January 1997 to those who returned this form.

Electronic Information Service of the Earth Tide Commission

Hans-Georg Wenzel,

Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe, Englerstraße 7, D-76128 Karlsruhe, Germany. e-mail:
wenzel@gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de

The Council of the International Association of Geodesy (IAG) has elected me at the Boulder General Assembly in July 1995 as President of the Earth Tide Commission (ETC) for the period 1995-1999, simply because the past President of ETC, Prof. H.T. Hsu had already served for two periods and could not be re-elected for another period. Because the former Vice-President of ETC, Dr. Trevor Baker (UK) and the former Secretary of ETC, Prof. Dr. Paul Melchior (Belgium) have declared that they don't want to continue their office. Many thanks to Hsu, Baker and Melchior for their continuous engagement to serve for the ETC.

In August 1995, I have appointed Prof. Dr. Shuzo Takemoto, Japan (e-mail: takemoto.kugi.kyoto-u.ac.jp) as Vice-President and Dr. Olivier Francis, Belgium (e-mail: francis@oma.be) as Secretary of the ETC. I am happy that Takemoto and Francis have agreed to serve for the ETC in their offices.

Because quick distribution of information related to the observation, preprocessing, analysis and interpretation of earth tides is a major task of the ETC, the new administration of the ETC has opened at November 1st 1995 an electronic information system on INTERNET, available to public domain:

address: gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de
login: ftp
password: ftp
directory: pub/etc
the file readme describes the current content of this
directory.

This electronic information system shall not replace the Bulletin d'Informations Marées Terrestres (BIM), but shall be an addition to the BIM with the possibility of quicker distribution of information. This information service currently contains my first circular letter (file "etcnew01.txt") and the address list of the members of the ETC (file "etcmail.txt"). Please check your address in this address list and notify errors to me. There is other valuable information stored as e.g. a bibliography (file "litera.txt") and the program package "etgtab" to compute synthetic tides from various tidal potential catalogues, which may freely be used and distributed to public domain.

The electronic information service of ETC may also be used to distribute information from e.g. Working Groups of ETC to public domain. You are not allowed to write into this directory, but you can send me an e-mail message containing the information which you want to be distributed.

If you have any comment to the electronic information service of ETC or to other matters related to the ETC, please send me a message. Keep in contact with the ETC !

Accuracy Assessment for Tidal Potential Catalogues

Hans-Georg Wenzel,

Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe, Englerstraße 7, D-76128 Karlsruhe, Germany.

e-mail: wenzel@gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de

Abstract

Using different independent gravity tide benchmark series from ephemerides of different type (computed with program GTIDE using Newcomb's 1897 and Brown's 1905 analytical ephemerides, and using the high precision numerical ephemerides DE200 and DE403 from Jet Propulsion Laboratory) at two different time spans (1987 ... 1993 and 2017 .. 2023), the accuracy of gravity tides computed from different tidal potential catalogues (Doodson 1921, Cartwright et. al 1971, 1973, Büllersfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Tamura 1993, Roosbeek 1996, Hartmann and Wenzel 1995a,b) has been estimated. With the most accurate and most important benchmark series BFDE403A (hourly gravity tides computed from DE403 ephemerides between 1987 and 1993), the errors of gravity tides computed from tidal potential catalogues are

catalogue	time domain			frequency domain	
	rms [pm/s ²]	minimum [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]	rms [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]
Doodson (1921)	1040.8	-4006.8	4489.6	14.15	1012.04
Cartwright et al. (1971, 1973)	384.4	-2140.1	2410.0	5.65	132.26
Büllersfeld (1985)	240.2	-1223.4	1304.3	3.34	67.65
Tamura (1987)	83.4	-469.2	583.9	1.18	34.59
Xi (1989)	64.2	-429.4	476.9	0.90	35.25
Tamura (1993)	30.8	-223.7	248.9	0.46	14.48
Roosbeek (1996)	20.0	-93.5	93.3	0.26	15.98
Hartmann and Wenzel (1995)	1.4	-9.4	10.4	0.02	0.34

The most accurate tidal potential catalogue is the catalogue of Hartmann and Wenzel (1995); the errors of this catalogue are about ten times less than the errors of the two other recent catalogues by Tamura (1993) and Roosbeek (1996). The tidal potential catalogue of Hartmann and Wenzel (1995) is the only catalogue which is accurate to $10 \text{ pm/s}^2 = 1 \text{ ngal}$ maximum error in time domain and better than 1 pm/s^2 maximum error in frequency domain and thus the only catalogue which fulfills the accuracy requirements for the analysis of precise gravimeter records.

1 Introduction

The precise computation of tidal phenomena (like e.g. ocean tides, earth tides) requires the application of a spectral representation of the tidal potential in the form of a tidal potential catalogue (sometimes called harmonic development of the tidal potential, although the modern catalogues are no more harmonic). Since the pioneering work of Doodson (1921), such tidal potential catalogues have been in use.

All tidal potential catalogues use a representation of the tidal potential on a rigid Earth similar to

$$V_{(t)} = D \sum_{\ell=1}^{\ell=\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{m=\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \Gamma(\theta) \cdot \bar{P}_{\ell m}(\cos \theta) \sum_i \left[C_i^{\ell m}(t) \cos(\alpha_i(t)) + S_i^{\ell m}(t) \sin(\alpha_i(t)) \right] \quad (1)$$

with $D, \Gamma(\theta)$ = normalization constants, r = geocentric distance of the station, a = semi-major axis of the reference ellipsoid, ℓ, m = degree and order, $\bar{P}_{\ell m}$ = fully normalized spherical harmonics, θ, λ = spherical coordinates of the station, $C_i^{\ell m}(t), S_i^{\ell m}(t)$ = time dependent coefficients of the catalogue. The arguments $\alpha_i(t)$ are given by

$$\alpha_i(t) = m \cdot \lambda + \sum_{j=1}^{j=j_{\max}} k_{ij} \cdot \arg_j(t) \quad \text{with } k_{i1} = m. \quad (2)$$

The integer coefficients k_{ij} are given in the specific catalogue, while the astronomical arguments $\arg_j(t)$ (τ = mean local lunar time, s = mean lunar longitude, h = mean solar longitude, p = mean longitude of lunar perigee, N' = negative mean longitude of the lunar ascending node, p_s = mean longitude of solar perigee, L_{Mer} = mean longitude of Mercury, L_{Ven} = mean longitude of Venus, L_{Mar} = mean longitude of Mars, L_{Jup} = mean longitude of Jupiter, L_{Sat} = mean longitude of Saturn) can be computed from polynomials in time. For the Hartmann and Wenzel (1995) catalogue, the normalization constants D and $\Gamma(\theta)$ have been put to unity because of problems with their accurate definition. The time dependent coefficients $C_i^{\ell m}(t), S_i^{\ell m}(t)$ are given by

$$C_i^{\ell m}(t) = C0_i^{\ell m} + t \cdot C1_i^{\ell m} \quad (3)$$

$$S_i^{\ell m}(t) = S0_i^{\ell m} + t \cdot S1_i^{\ell m} \quad (4)$$

The International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) has recommended in 1971 to use the Cartwright et al. (1971) tidal potential catalogue, and this recommendation is still valid. The errors of the Cartwright et al. (1971, 1973) tidal potential catalogue have been estimated already by Wenzel (1976) to about 350 pm/s² in time domain, mainly because of neglect of the lunar tidal potential of degree 4. This was the reason to compute more accurate tidal potential catalogues (see Tab. 1) including the lunar tidal potential of degree 4 by Büllesfeld (1985), Xi (1987), Tamura (1987), Xi (1989), and Tamura (1993). The catalogue of Tamura (1993) includes coefficients due to the direct tidal potential of the planets Venus and Jupiter. The catalogues of Roosbeek (1996) and Hartmann and Wenzel (1995) include the lunar tidal potential of degree 5 and 6 respectively, and they also in-

Table 1: Short description of tidal potential catalogues

catalogue	no. of waves	no. of coeff.	max. degree	truncation [m ² /s ²]	ephemerides
Doodson (1921)	378	378	3	$1.0 \cdot 10^{-4}$	BN
Cartwright et al. (1971, 1973)	505	1 010	3	$0.4 \cdot 10^{-4}$	BN
Büllesfeld (1985)	656	656	4	$0.2 \cdot 10^{-4}$	BN
Tamura (1987)	1 200	1 326	4	$0.4 \cdot 10^{-5}$	DE118/LE62
Xi (1989)	2 934	2 934	4	$0.9 \cdot 10^{-6}$	BN
Tamura (1993)	2 060	3 046	4	$0.4 \cdot 10^{-5}$	DE200/LE200
Roosbeek (1996)	6 499	7 202	5	$0.8 \cdot 10^{-7}$	DE200/LE200
Hartmann and Wenzel (1995)	12 935	19 271	6	$0.1 \cdot 10^{-9}$	DE200/LE200

BN = Brown (1905), Newcomb (1897)
truncation = smallest coefficient greater zero

clude coefficients due to the direct tidal potential of the nearby planets and due to the flattening of the Earth. The truncation level of the tidal potential catalogues has continuously been decreased, and the number of waves and the number of coefficients has continuously been increased with time (see Tab. 1).

The errors of the Cartwright et al. (1971, 1973) tidal potential catalogue contribute significantly to the residuals after adjustment when analyzing precise gravimeter records (e.g. Wenzel and Zürn 1990). Therefore, the Cartwright et al. (1971, 1973) tidal potential catalogue should no longer be used for precise tidal computations, but be replaced by one of the more recent tidal potential catalogues. Because several people are currently searching in the records of precise gravimeters for very small but nevertheless important geodynamic phenomena (such as core modes) with amplitudes of about or less than 10 pm/s^2 , one should strive for a tidal potential catalogue having errors less than 10 pm/s^2 at maximum in time domain and less than 1 pm/s^2 at maximum in frequency domain, contributing in this case negligible noise to the analysis of precise gravimeter records.

Because the tidal potential and the gravity tide on a rigid Earth can be computed very simply and very accurately from the ephemerides of the Moon, the Sun and the nearby planets, this method has already been used by several authors to verify the accuracy of a tidal potential catalogue (e.g. Broucke, Zürn and Slichter 1972, Wenzel 1976, 1978, 1992, 1993, Ducarme 1989, Merriam 1992, 1993, Xi 1993). We will use in this investigation some so-called gravity tide benchmark series computed for a rigid Earth directly from ephemerides to assess the accuracy of the today available tidal potential catalogues, and to help the relevant scientific bodies to recommend the most accurate tidal potential catalogue to be used for the analysis of precise gravimeter records.

2 Benchmark gravity tide series

Neglecting for a while the effects due to the flattening of the Earth, the tidal acceleration vector $\mathbf{f}_j$ due to astronomical body j at a station P can very simply be computed at a certain epoch from

$$\mathbf{f}_j = GM_j \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{l^3} - \frac{\mathbf{d}}{d^3} \right) \quad (5)$$

with GM_j = gravitational constant times mass of body j , $\mathbf{l}$ = topocentric position vector to center of gravity of body j , $\mathbf{d}$ = geocentric position vector to center of gravity of body j .

The tidal accelerations from (5) are given in the reference frame of the position vectors $\mathbf{l}$ and $\mathbf{d}$, which is usually a geocentric reference frame, but can be rotated into a local reference system orientated to the ellipsoidal normal at the station P (e.g. Wenzel 1976). In this case, the tidal gravity is just the negative acceleration in direction of the ellipsoidal normal. Provided that the position vectors $\mathbf{l}$ and $\mathbf{d}$ and the constants GM_j of the relevant astronomical bodies are known with sufficient accuracy, the tidal accelerations can be computed from (5) with sufficient accuracy to determine the errors of gravity tides computed from tidal potential catalogues for a rigid Earth. The above mentioned method has been used e.g. by Broucke et al. (1972), Wenzel (1976, 1978, 1992, 1993), Merriam (1992) to compute so-called benchmark gravity tide series, which are in fact data files containing gravity tides computed at a certain station for a certain time span using a constant sampling interval. For all benchmark gravity tide series used in this investigation (see Tab. 2), we have used as station the Black Forest Observatory (BFO) Schiltach with coordinates $\phi = 48.3306^\circ \text{ N}$, $\lambda = 8.3300^\circ \text{ E}$, $h = 589 \text{ m}$, because some benchmark series for this station were already available and in use (e.g. Wenzel 1992, 1993, Hartmann and Wenzel 1995, Roosbeek 1996). We have selected two different time spans 1987...1993 and 2017...2023, in order to show eventual degradation of the catalogues with time. The benchmark series described in Tab. 2 are available on request from the author. We have done also comparisons

with benchmark series for longer time spans (up to 300 years) which are not reported here and cannot be distributed simply because they are too large (about 200 MByte).

Table 2: Benchmark gravity tide series (hourly samples) used for the accuracy assessment of tidal potential catalogues

Series	ephemerides	start	end	number of samples
BFGTIDEA	Brown (1905), Newcomb (1897)	1987.01.01 0 ^h	1993.12.31 23 ^h	61 367
BFGTIDEB	Brown (1905), Newcomb (1897)	2017.01.01 0 ^h	2023.12.31 23 ^h	61 343
BFDE200A	DE200/LE200	1987.01.01 0 ^h	1993.12.31 23 ^h	61 367
BFDE200B	DE200/LE200	2017.01.01 0 ^h	2023.12.31 23 ^h	61 343
BFDE403A	DE403/LE403	1987.01.01 0 ^h	1993.12.31 23 ^h	61 367
BFDE403B	DE403/LE403	2017.01.01 0 ^h	2023.12.31 23 ^h	61 343

It has to be noted, that we have used as time base for the gravity tide benchmark series the Barycentric Dynamical Time (TDB), because the differences UTC - TDB and UT1 - UTC are not known for the future (UTC = coordinated Universal Time, UT1 = Universal Time corrected for polar motion). Thus, our rigid model Earth used for the benchmark series constantly rotates with 1 revolution per 1 day TDB. Naturally, the same time base had also to be used for the comparisons with tidal potential catalogues. It should also be noted, that we have applied precession and nutation to our rigid model Earth for the computation of the benchmark series.

The first two benchmark gravity tide series BFGTIDEA and BFGTIDEB have been computed with a modified version of program GTIDE (Merriam 1992). The modification was to use the TDB time base and to compute the gravity tide in the direction of the ellipsoidal normal. Program GTIDE uses the ephemerides of Brown (1905) in the formulation of Eckert et al. (1954) for the Moon and of Newcomb (1897) in the formulation of Meeus (1962) for the Sun. GTIDE includes also the direct tidal accelerations due to the planets Venus and Jupiter, but it does not include the effects of the flattening of the Earth. GTIDE uses the IAU 1980 nutation (Seidelmann et. al 1982), but only 20 terms for nutation in obliquity and 13 terms for nutation in longitude. The accuracy of GTIDE is claimed by Merriam (1992) to be about 2.5 pm/s² rms and 8 pm/s² at maximum in time domain.

The next two benchmark gravity tide series BFDE200A and BFDE200B have been computed with program DE200T directly from DE200/LE200 ephemerides of the solar system bodies (Standish and Williams 1981). The DE200/LE200 are the standard ephemerides which are in use for the computation of ephemerides e.g. in the Astronomical Ephemeris, and a number of recent tidal potential catalogues are based on these ephemerides. For the computation of our benchmark series, we have used the routines provided by Standish and Williams (1981) for the extraction of ephemerides from file, the GMST (Greenwich Mean Sideral Time) by Aoki et al. (1982), the precession according to Simon et al. (1994), and the full IAU 1980 nutation according to Seidelmann et al. (1982). For our benchmark series, all astronomical constants have been taken from IERS 1992 Standards (McCarthy 1992). These benchmark series include the direct tidal accelerations due to the Moon and the Sun, and due to the planets Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn. We have however omitted for reasons of consistency the tidal acceleration due to the flattening of the Earth. The errors of the BFDE200A and BFDE200B benchmark series are estimated to be less than 1 pm/s², except for errors of the ephemerides itself. More details on these benchmark series will be given in Wenzel (1996).

The last two benchmark gravity tide series BFDE403A and BFDE403B have been computed with program DE403T directly from DE403/LE403 ephemerides of the solar system bodies (Standish et al. 1995). The DE403/LE403 are the most recent and most accurate numerical ephemerides available today, being superior to the DE200/LE200 because of the introduction of more recently observed data sets than were available in 1981 for the computation of the DE200/LE200 ephemerides. For the computation of our benchmark series, we have used the routines provided by (Standish et al. 1995) for the extraction of ephemerides from file, all other parameters and constants being identical to the computation of the BFDE200A and BFDE200B gravity tide benchmark series (see above). The errors of the BFDE403A and BFDE403B benchmark series are estimated to be less than 1 pm/s^2 , except for errors of the ephemerides itself. More details on these benchmark series will be given in Wenzel (1996).

Naturally, we should have some information on the real accuracy of the gravity tide benchmark series before using them for an accuracy assessment of tidal potential catalogues. Whereas all astronomical constants and parameters, precession and nutation are accurate enough for small time differences (e.g. 30 years) with respect to the year 2000, we have considerable degradations for longer time spans e.g. due to the lunar tidal deceleration. The major differences between the LE200 and LE403 ephemerides for the Moon are due to differences in the adopted constants for lunar tidal acceleration ($-23.9''/\text{cy}^2$ for LE200 and $-25.8''/\text{cy}^2$ for DE403), being now much more accurately determined from Lunar Laser Ranging than it was possible in 1981. The differences between our benchmark gravity tide series can give some impression on the quality of the series, and the more precise series BFDE403A and BFDE403B can show the errors of the GTIDE-derived and DE200/LE200-derived benchmark series. But we have no tool to estimate the errors of the DE403/LE403-derived benchmark series.

In Fig. 1 ... 6 we have given the differences between the gravity tide benchmark series BFGTIDEA, BFDE200A and BFDE403A in time domain and in frequency domain (i.e. the Fourier amplitude spectrum of the differences). We have chosen the same scales as for the errors of the tidal potential catalogues (section 3) in order to enable an easy comparison. Fig. 1 ... 4 show the errors of the BFGTIDEA benchmark series, whereas Fig. 5 and 6 show the errors of the BFDE200A benchmark series (which are below the thickness of the line in the plot). In Tab. 3 we give some statistical parameters of the differences between the gravity tide benchmark series. The errors of gravity tides computed from GTIDE are in the order of 3 pm/s^2 rms and 20 pm/s^2 maximum in time domain, being consistent with the accuracy estimation by Merriam (1992). We have thus to be careful when comparing a very accurate tidal potential catalogue with GTIDE-derived benchmark series. The errors of gravity tides computed from the DE200/LE200 ephemerides are less than 0.3 pm/s^2 at maximum

Table 3: Differences between benchmark gravity tide series

series	time domain			frequency domain	
	rms [pm/s^2]	minimum [pm/s^2]	maximum [pm/s^2]	rms [pm/s^2]	maximum [pm/s^2]
BFDE200A - BFGTIDEA	3.41	-17.39	19.06	0.046	2.840
BFDE200B - BFGTIDEB	3.47	-18.06	18.51	0.051	2.744
BFDE403A - BFGTIDEA	3.43	-17.36	19.12	0.047	2.827
BFDE403B - BFGTIDEB	3.55	-17.95	18.91	0.051	2.664
BFDE403A - BFDE200A	0.10	-0.32	0.32	0.001	0.091
BFDE403B - BFDE200B	0.56	-1.90	1.66	0.007	0.468

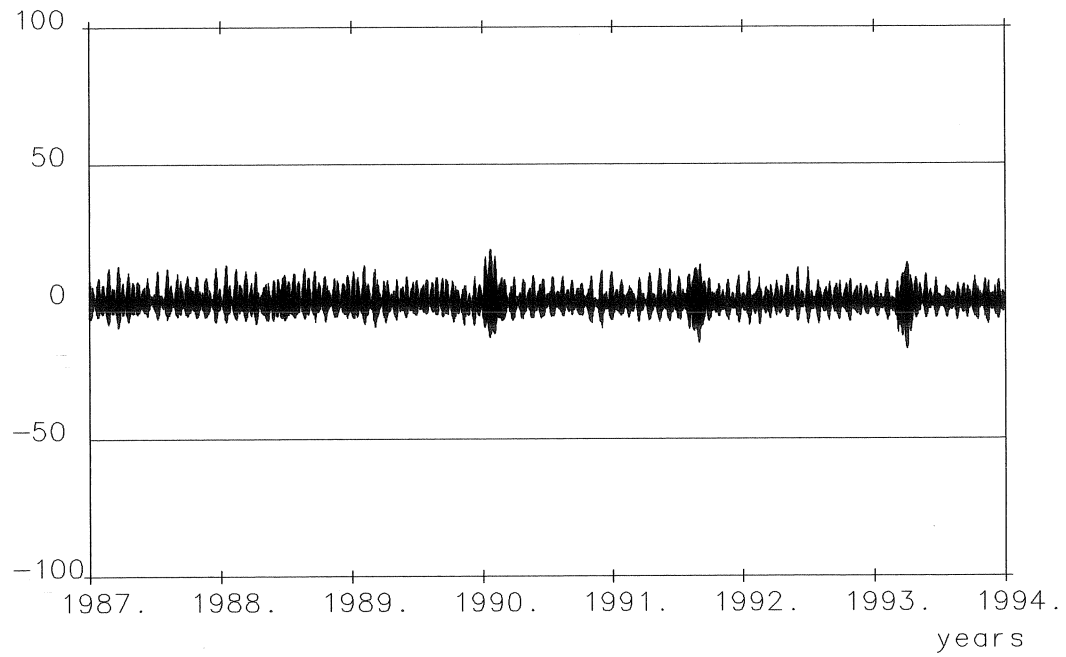


Fig. 1: Differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE200A minus series BFGTIDEA.

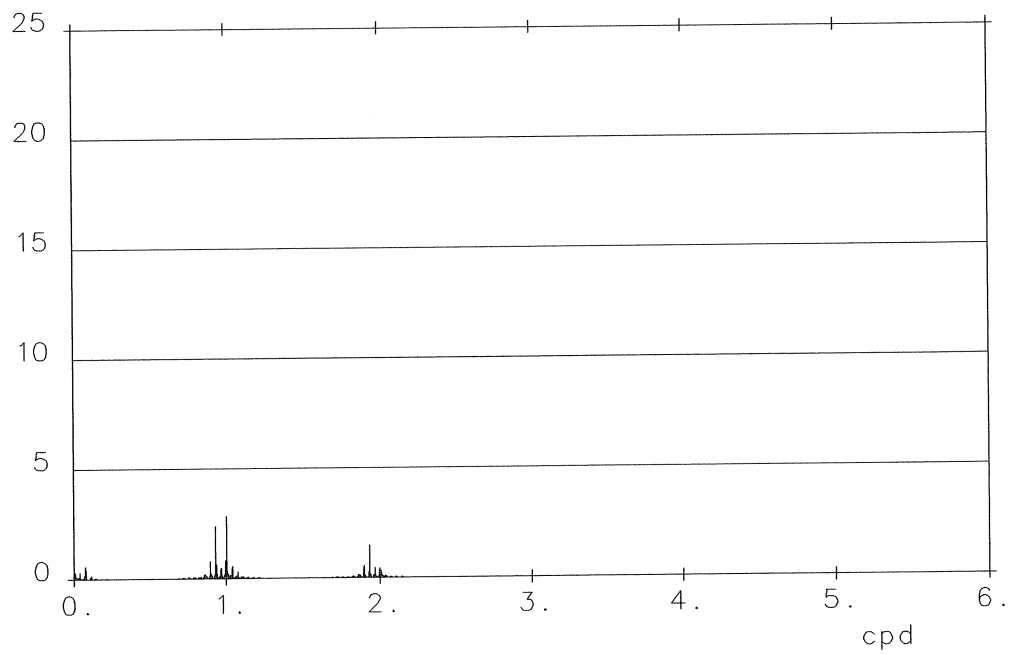


Fig. 2: Spectrum of differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE200A minus series BFGTIDEA.

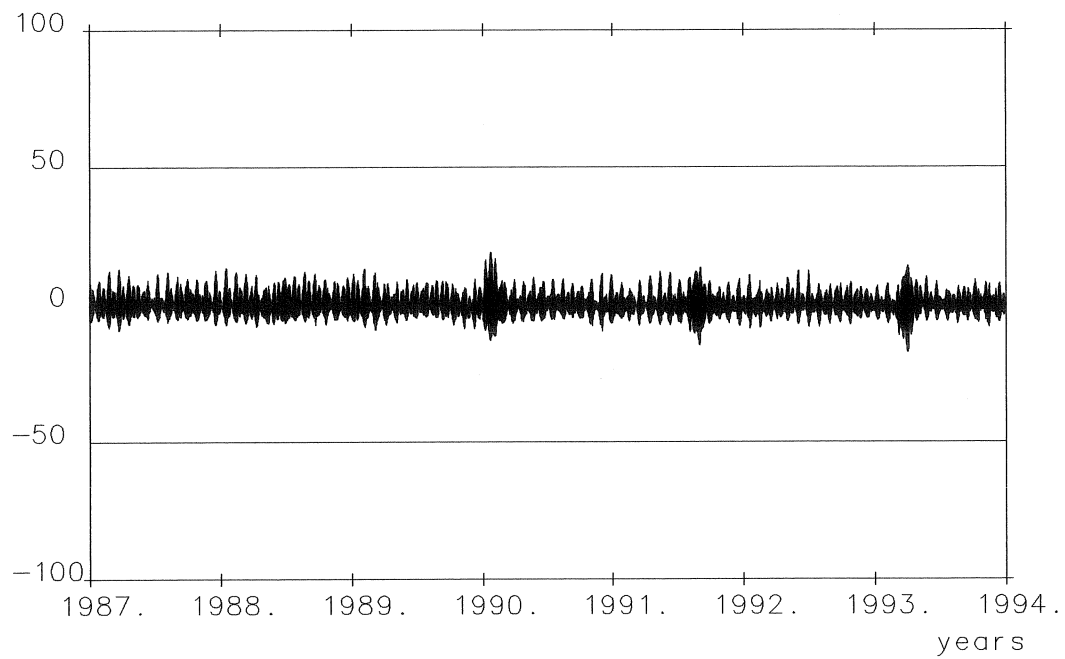


Fig. 3: Differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE403A minus series BFGTIDEA.

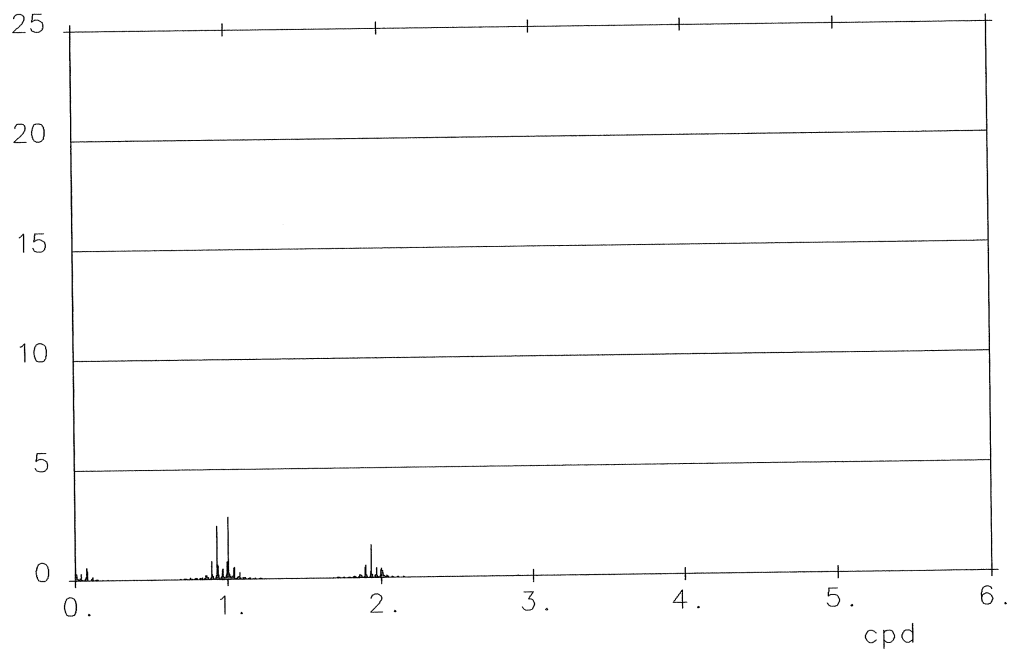


Fig. 4: Spectrum of differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE403A minus series BFGTIDEA.

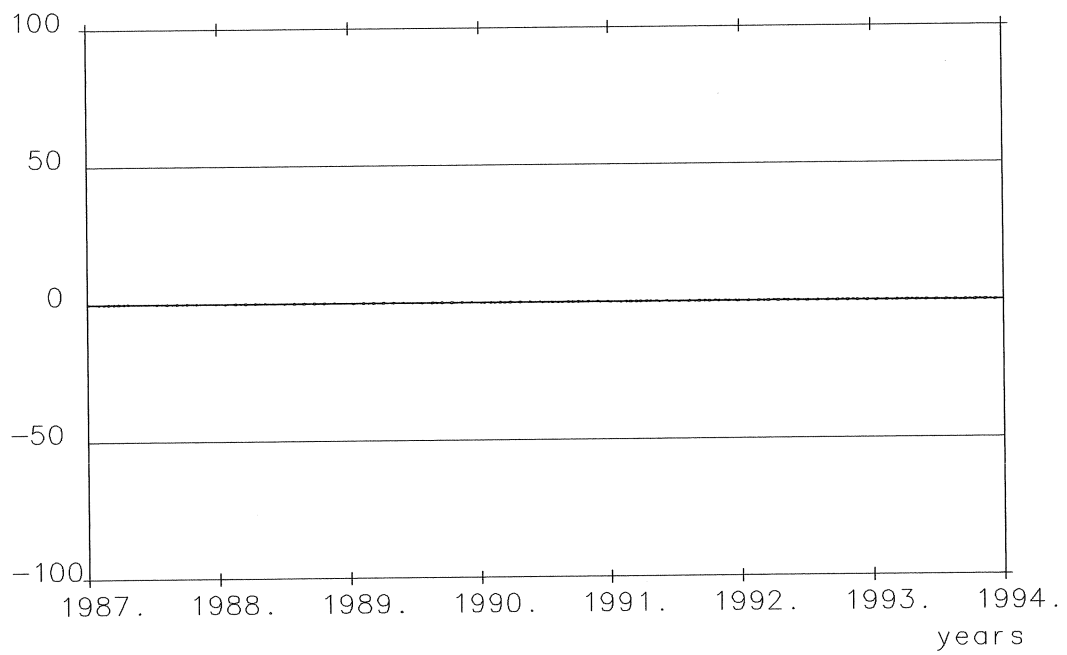


Fig. 5: Differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE403A minus series BFDE200A.

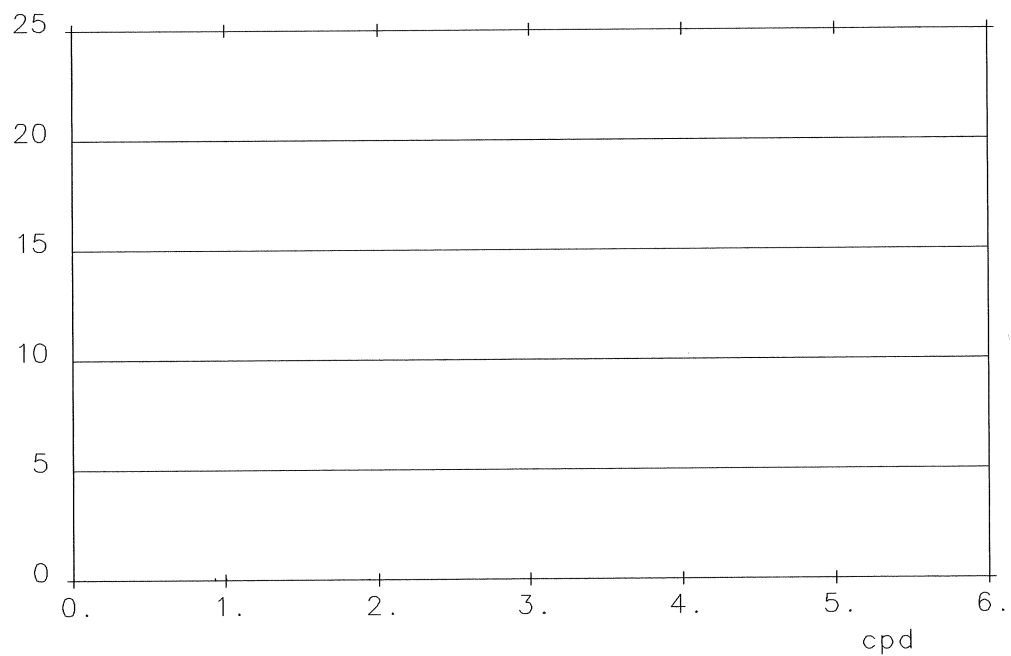


Fig. 6: Spectrum of differences in pm/s^2 of benchmark gravity tide series BFDE403A minus series BFDE200A.

between 1987 and 1993, but increase to 2 pm/s^2 at maximum between 2017 and 2023, clearly showing the effect of the different lunar tidal decelerations. We have found similar effects when comparing DE200/LE200-derived tidal potential catalogues with the DE403/LE403-derived benchmark series for epochs far from year 2000.

3 Errors of tidal potential catalogues

We have computed for all six benchmark gravity tide series described in chapter 2 corresponding gravity tides from various tidal potential catalogues (Doodson 1921, Cartwright et al. 1971, 1973, Büllesfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Tamura 1993, Roosbeek 1996, Hartmann and Wenzel 1995), and subsequently compared to the benchmark series. We have used program HWTIDF (Hartmann and Wenzel 1995) for the tidal potential catalogues which have been transformed by Hartmann and Wenzel (1995) to the HW95 normalization and format (Doodson 1921, Cartwright et al. 1971, 1973, Büllesfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Hartmann and Wenzel 1995). For the Tamura (1987) and the Xi (1989) catalogues, we have used Tamura's astronomical arguments in program HWTIDF (Xi's catalogue gives worse results with Xi's arguments). For the other catalogues, we have used the astronomical arguments according to Simon et al. (1994). Dr. Tamura kindly supplied his program for the evaluation of the Tamura (1993) tidal potential catalogue, and Dr. Roosbeek kindly supplied his tidal potential catalogue transformed to the HW95 normalization and format and a modified version of program HWTIDF in order to evaluate the Roosbeek (1996) tidal potential catalogue. Our results with this program are consistent with the comparison given by Roosbeek (1996).

For all programs, TDB was chosen as time base. For the Roosbeek (1996) and Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogues, we have dropped the contribution from the flattening of the Earth in order to be consistent with the benchmark gravity tide series. The differences of the various tidal potential catalogue-derived gravity tides to the benchmark gravity tide series are summarized in Tab. 4 and Tab. 5.

The differences of the tidal potential catalogues Tamura (1993), Roosbeek (1996) and Hartmann and Wenzel (1995) are shown in Figs. 7 ... 24 in time and frequency domain (i.e. the Fourier amplitude spectrum of differences), the differences to the other catalogues can not be shown due to space limitation. It turns out that the GTIDE-derived benchmark series are not accurate enough to test the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue, and that the differences shown in Figs. 19 and 20 are dominated by the errors of the GTIDE benchmark series.

We don't want to discuss the error sources for the individual tidal potential catalogues in this investigation; this should be done by the authors of the catalogues. We will however use the differences to the benchmark series to derive an accuracy assessment for the individual tidal potential catalogues. It can be found from Tab. 4 and 5, and from Figs. 7 ... 24 that there are three groups of tidal potential catalogues:

- the catalogues of Doodson (1921), Cartwright et al. (1971, 1973), Büllesfeld (1985), Tamura (1987), and Xi (1989) with maximum errors of $400 \dots 4000 \text{ pm/s}^2$ in time domain and maximum errors of $35 \dots 1000 \text{ pm/s}^2$ in frequency domain,
- the catalogues of Tamura (1993) and Roosbeek (1996) with maximum errors of $80 \dots 250 \text{ pm/s}^2$ in time domain and maximum errors of $10 \dots 25 \text{ pm/s}^2$ in frequency domain,
- the catalogue of Hartmann and Wenzel (1995) with maximum errors of about 10 pm/s^2 in time domain and maximum errors below 1 pm/s^2 in frequency domain.

Table 4: Differences between benchmark gravity tide series and gravity tides computed from tidal potential catalogues

series	time domain			frequency domain	
	rms [pm/s ²]	minimum [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]	rms [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]
BFGTIDEA - Doodson (1921)	1040.5	-4001.0	4492.6	14.15	1011.96
BFDE200A - Doodson (1921)	1040.9	-4006.8	4489.3	14.15	1012.03
BFDE403A - Doodson (1921)	1040.8	-4006.8	4489.6	14.15	1012.04
BFGTIDEB - Doodson (1921)	1029.6	-3767.6	4119.6	13.64	983.08
BFDE200B - Doodson (1921)	1030.2	-3771.0	4126.1	13.65	982.77
BFDE403B - Doodson (1921)	1030.2	-3771.0	4124.9	13.65	982.79
BFGTIDEA - CTED73	384.3	-2137.3	2413.0	5.65	132.91
BFDE200A - CTED73	384.4	-2140.2	2409.7	5.65	132.36
BFDE403A - CTED73	384.4	-2140.1	2410.0	5.65	132.26
BFGTIDEB - CTED73	356.2	-1819.3	2085.4	4.73	147.95
BFDE200B - CTED73	356.5	-1821.8	2089.0	4.74	148.48
BFDE403B - CTED73	356.4	-1822.0	2090.0	4.74	148.17
BFGTIDEA - Büllesfeld (1985)	240.2	-1223.1	1304.3	3.35	68.77
BFDE200A - Büllesfeld (1985)	240.2	-1223.3	1304.5	3.34	67.64
BFDE403A - Büllesfeld (1985)	240.2	-1223.4	1304.3	3.34	67.65
BFGTIDEB - Büllesfeld (1985)	246.6	-1015.7	1160.8	3.24	97.05
BFDE200B - Büllesfeld (1985)	247.0	-1015.3	1163.5	3.24	98.16
BFDE403B - Büllesfeld (1985)	247.1	-1016.4	1164.5	3.24	98.18
BFGTIDEA - Tamura (1987)	83.9	-465.4	586.1	1.19	35.38
BFDE200A - Tamura (1987)	83.4	-469.4	583.7	1.18	34.62
BFDE403A - Tamura (1987)	83.4	-469.2	583.9	1.18	34.59
BFGTIDEB - Tamura (1987)	73.4	-373.8	382.1	0.98	28.27
BFDE200B - Tamura (1987)	73.0	-366.6	392.4	0.97	27.92
BFDE4043 - Tamura (1987)	72.8	-365.6	392.3	0.97	27.47
BFGTIDEA - Xi (1989)	64.3	-427.8	472.6	0.91	35.70
BFDE200A - Xi (1989)	64.3	-429.6	477.0	0.90	35.28
BFDE403A - Xi (1989)	64.2	-429.4	476.9	0.90	35.25
BFGTIDEB - Xi (1989)	93.0	-496.0	526.6	1.41	91.90
BFDE200B - Xi (1989)	93.8	-499.8	535.3	1.42	93.05
BFDE403B - Xi (1989)	93.7	-500.4	534.7	1.42	93.07

CTED73 = Cartwright et. al (1971, 1973)

Naturally, there can be applied other grouping criteria, but it is very clear that the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue is superior by a factor of about 10 .. 50 to the two other most recent tidal potential catalogues by Tamura (1993) and Roosbeek (1996). Additionally, the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue is the only catalogue which is accurate to 10 pm/s² maximum error in time domain and better than 1 pm/s² maximum error in frequency domain, which is required for the analysis of precise gravimeter records.

The Roosbeek (1996) tidal potential catalogue is in time domain about ten times worse than the

Hartmann and Wenzel (1995) catalogue, and in frequency domain about 50 times worse. The Tamura (1993) tidal potential catalogue is in time domain slightly worse than the Roosbeek (1996) catalogue, but has less maximum error in frequency domain than the Roosbeek (1996) catalogue.

Table 5: Differences between benchmark gravity tide series and gravity tides computed from tidal potential catalogues, cont.

series	rms [pm/s ²]	time domain		frequency domain	
		minimum [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]	rms [pm/s ²]	maximum [pm/s ²]
BFGTIDEA - Tamura (1993)	30.77	-224.51	251.01	0.461	14.768
BFDE200A - Tamura (1993)	30.82	-223.60	248.66	0.462	14.479
BFDE403A - Tamura (1993)	30.82	-223.74	248.86	0.462	14.478
BFGTIDEB - Tamura (1993)	29.48	-142.57	203.58	0.388	10.607
BFDE200B - Tamura (1993)	29.47	-138.72	215.05	0.392	11.035
BFDE403B - Tamura (1993)	29.49	-139.69	215.57	0.392	11.122
BFGTIDEA - Roosbeek (1996)	21.02	-99.40	95.45	0.275	17.906
BFDE200A - Roosbeek (1996)	20.02	-93.34	93.16	0.262	15.942
BFDE403A - Roosbeek (1996)	20.04	-93.48	93.30	0.263	15.975
BFGTIDEB - Roosbeek (1996)	23.52	-109.11	85.66	0.358	26.341
BFDE200B - Roosbeek (1996)	22.20	-95.78	79.02	0.335	24.440
BFDE403B - Roosbeek (1996)	22.22	-95.55	78.98	0.335	24.444
BFGTIDEA - HW95	3.54	-18.59	17.83	0.049	2.808
BFDE200A - HW95	1.42	-9.28	10.45	0.021	0.335
BFDE403A - HW95	1.42	-9.40	10.43	0.021	0.337
BFGTIDEB - HW95	3.64	-19.21	19.30	0.052	2.809
BFDE200B - HW95	1.31	-10.03	8.64	0.017	0.232
BFDE403B - HW95	1.44	-11.58	9.16	0.018	0.617

HW95 = Hartmann and Wenzel (1995)

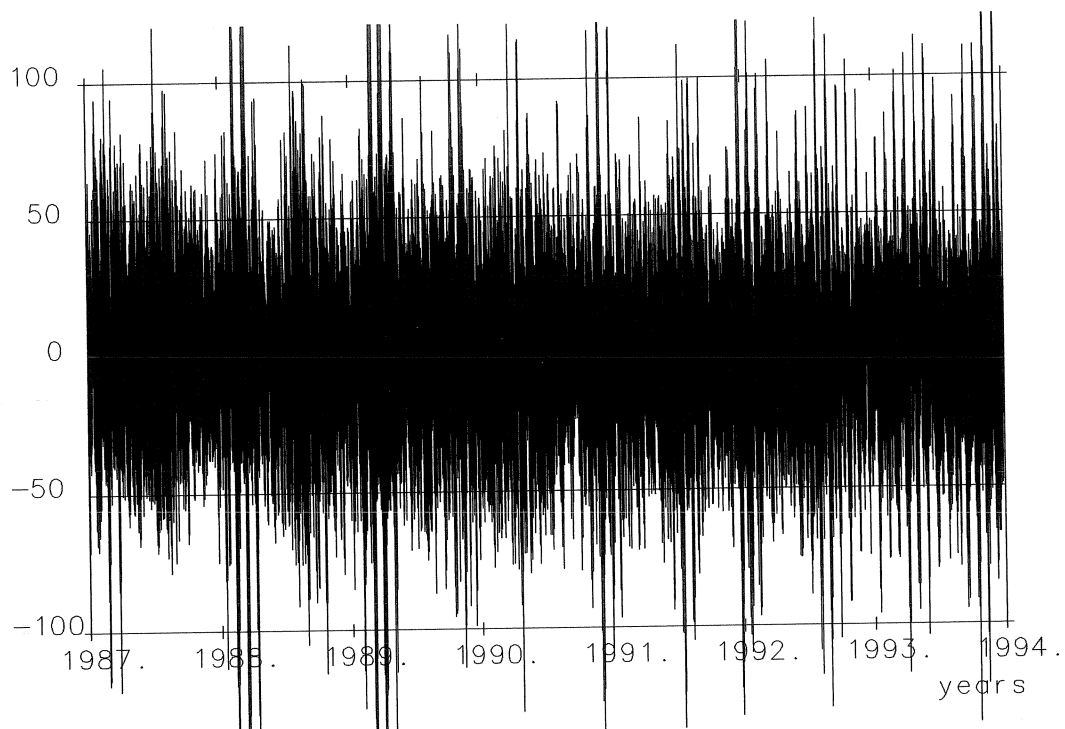


Fig. 7: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

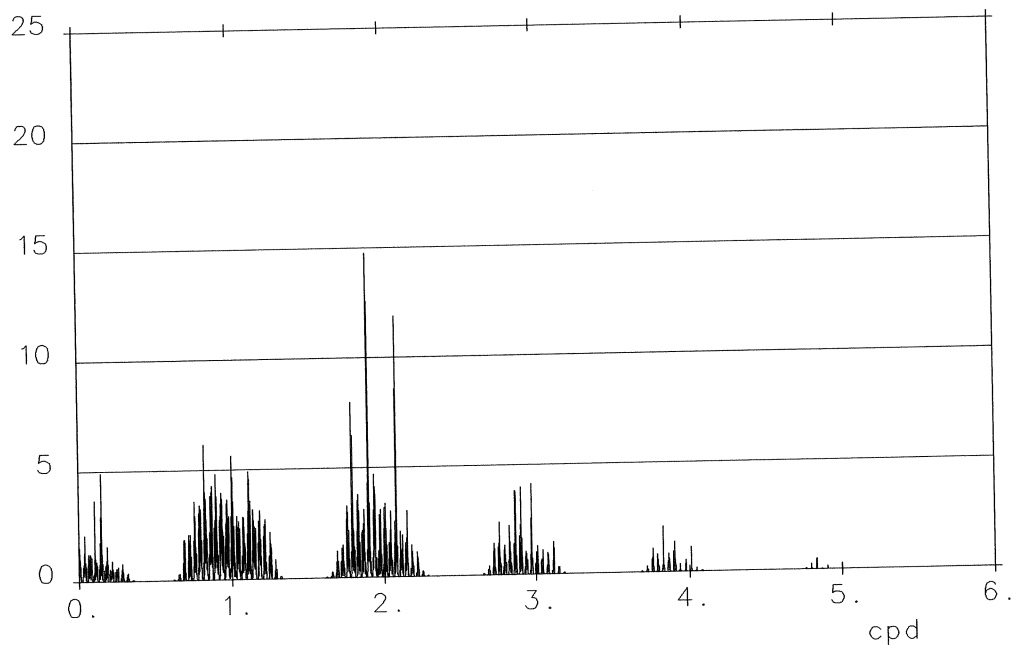


Fig. 8 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

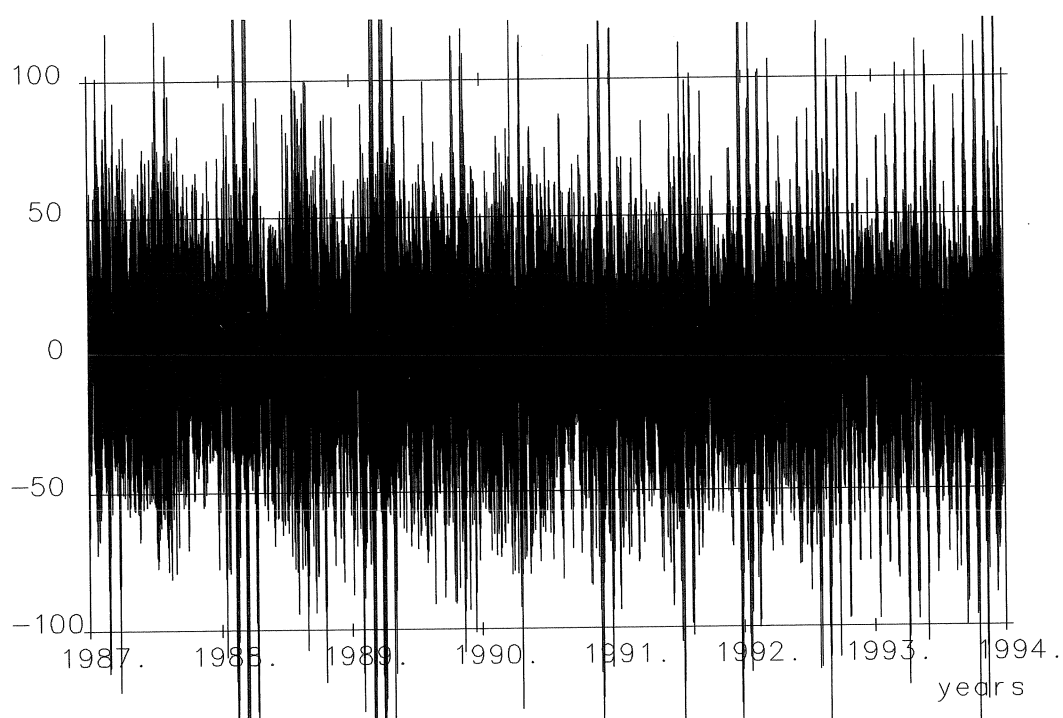


Fig. 9: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

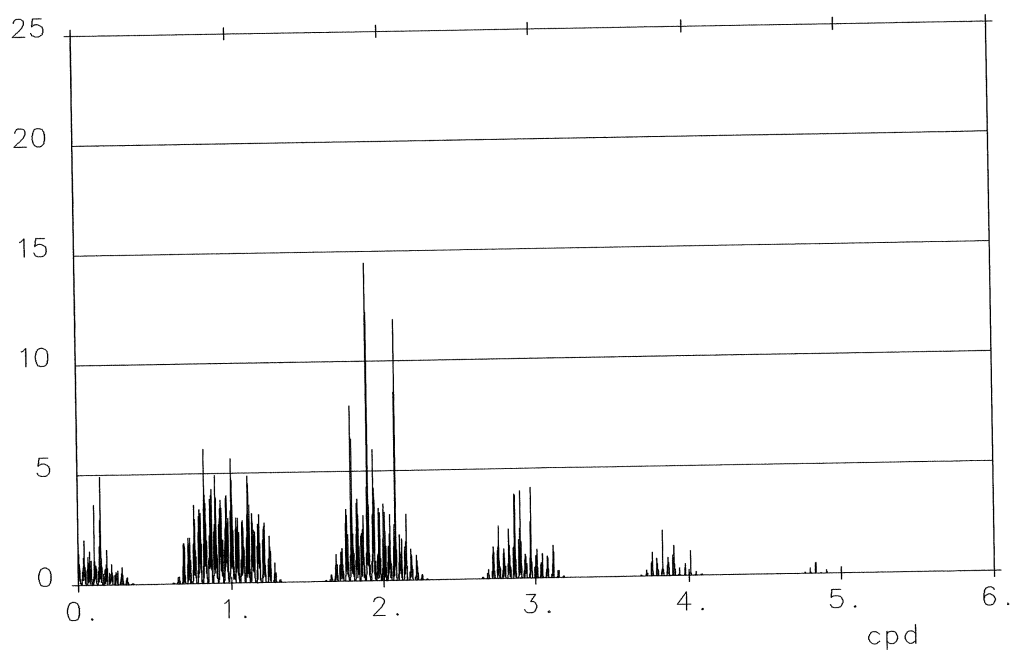


Fig. 10 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

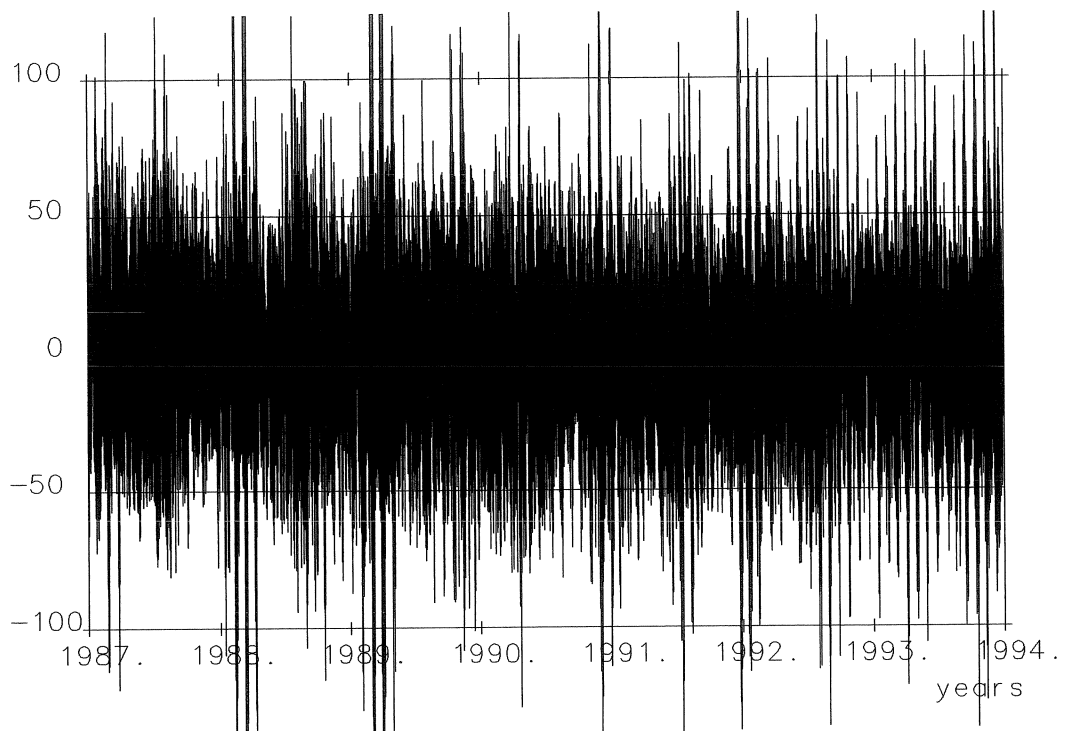


Fig. 11: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403 minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

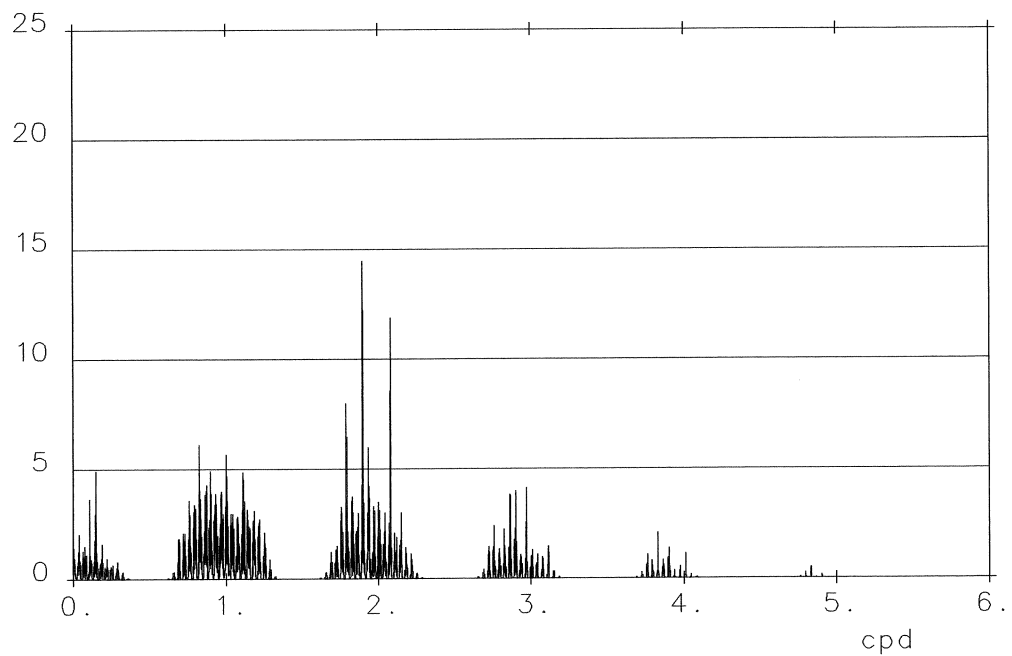


Fig. 12 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403A minus gravity tides computed from Tamura (1993) tidal potential catalogue.

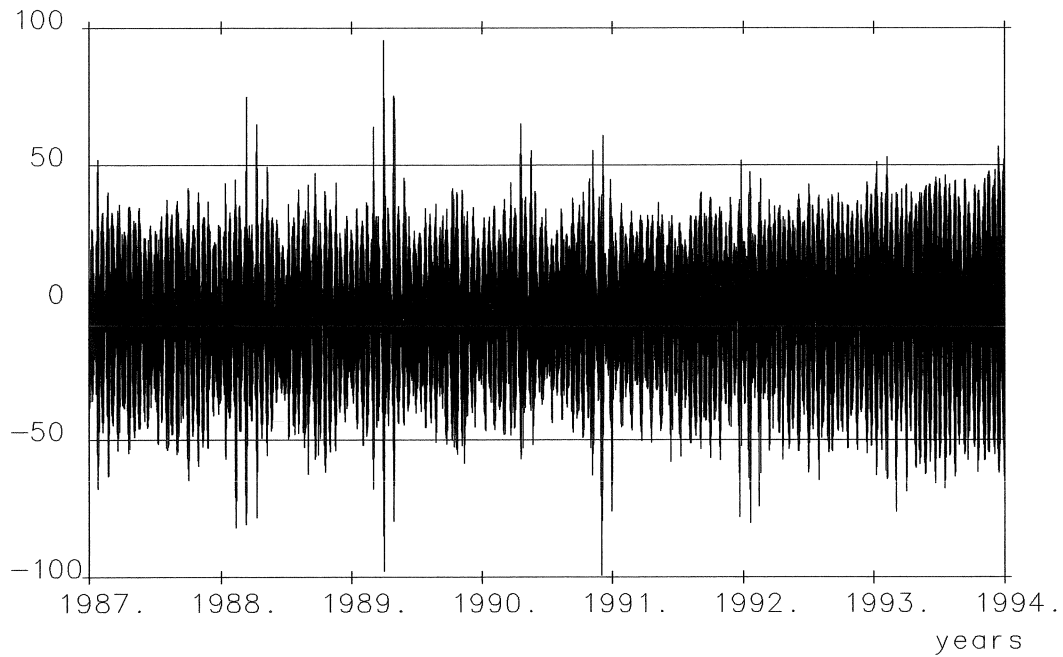


Fig. 13: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

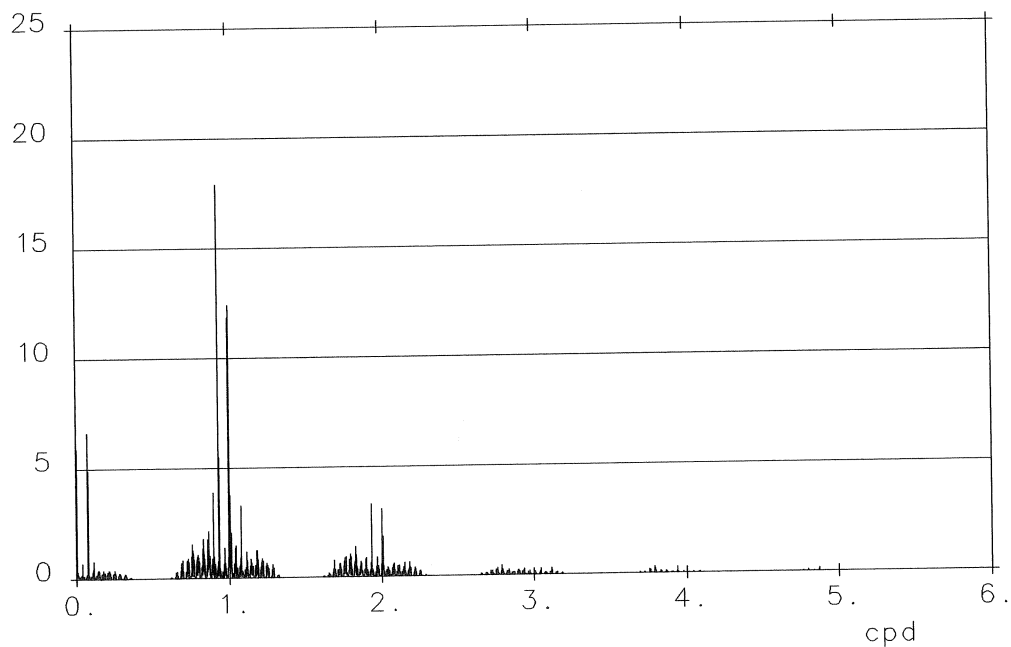


Fig. 14 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

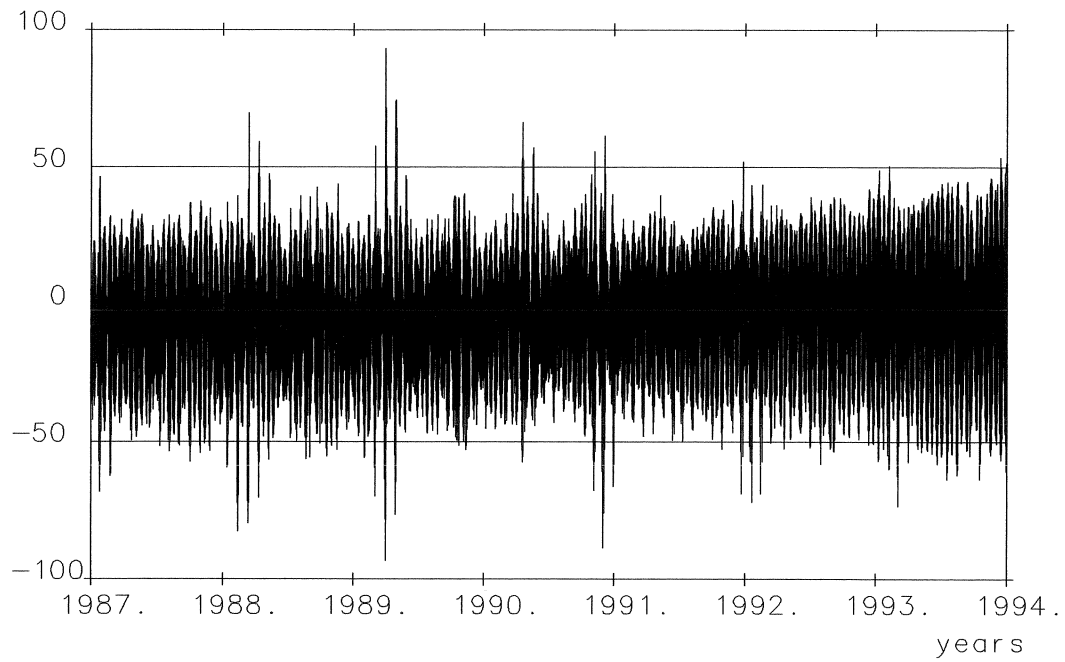


Fig. 15: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

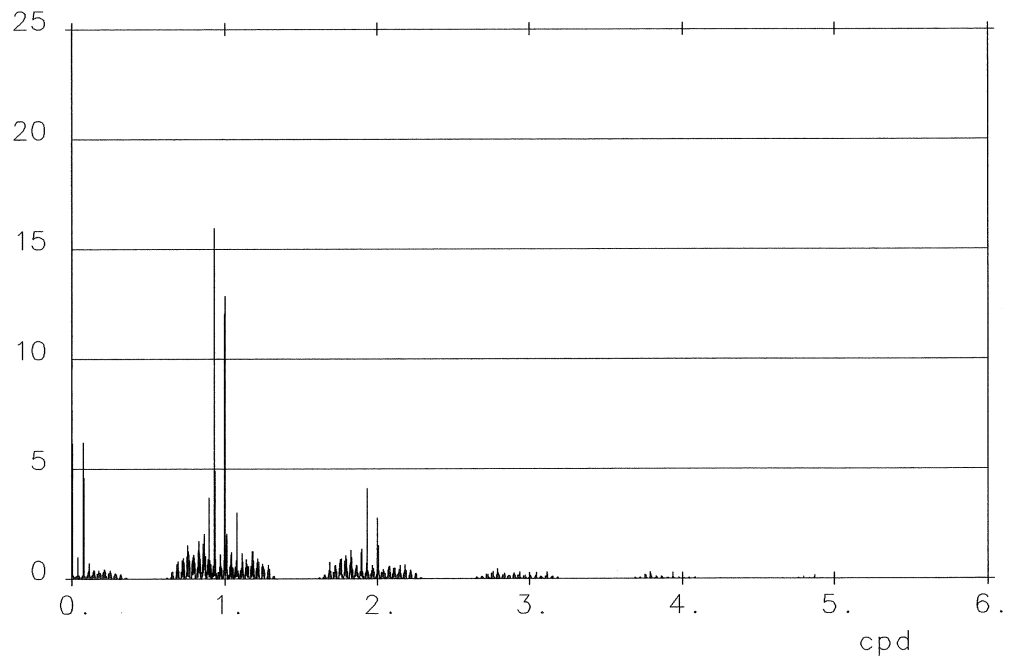


Fig. 16 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

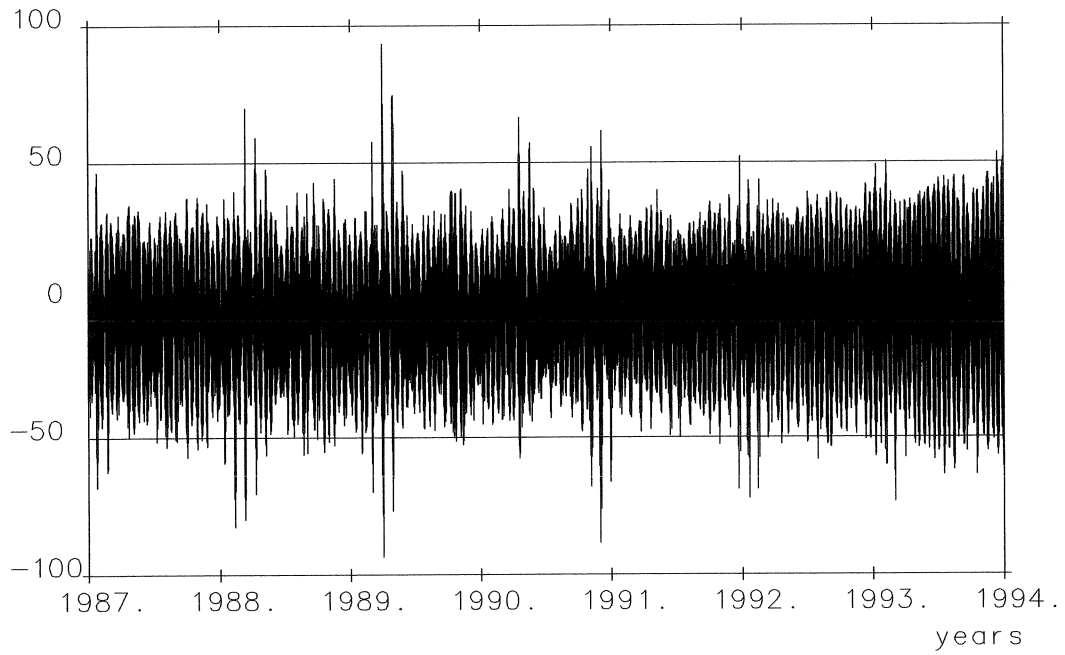


Fig. 17: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403A minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

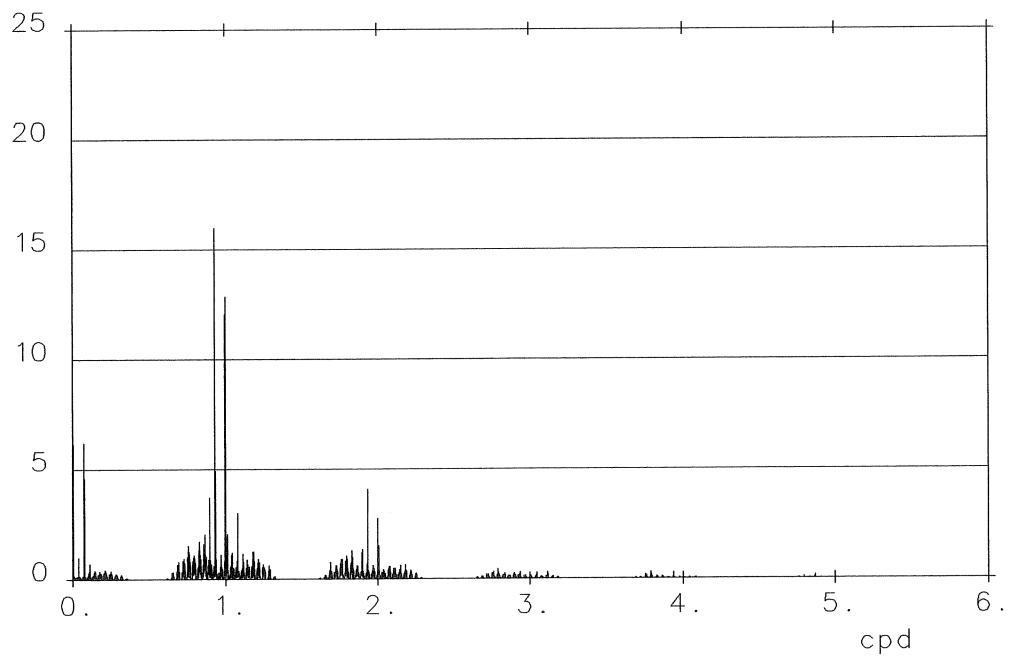


Fig. 18 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403A minus gravity tides computed from Roosbeek (1996) tidal potential catalogue.

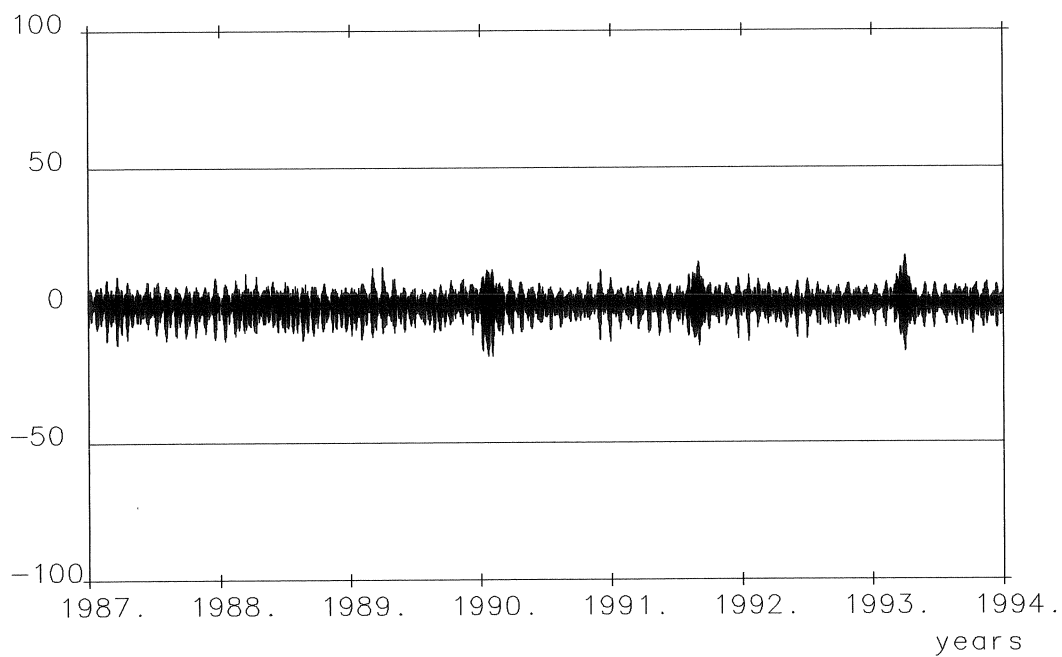


Fig. 19: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

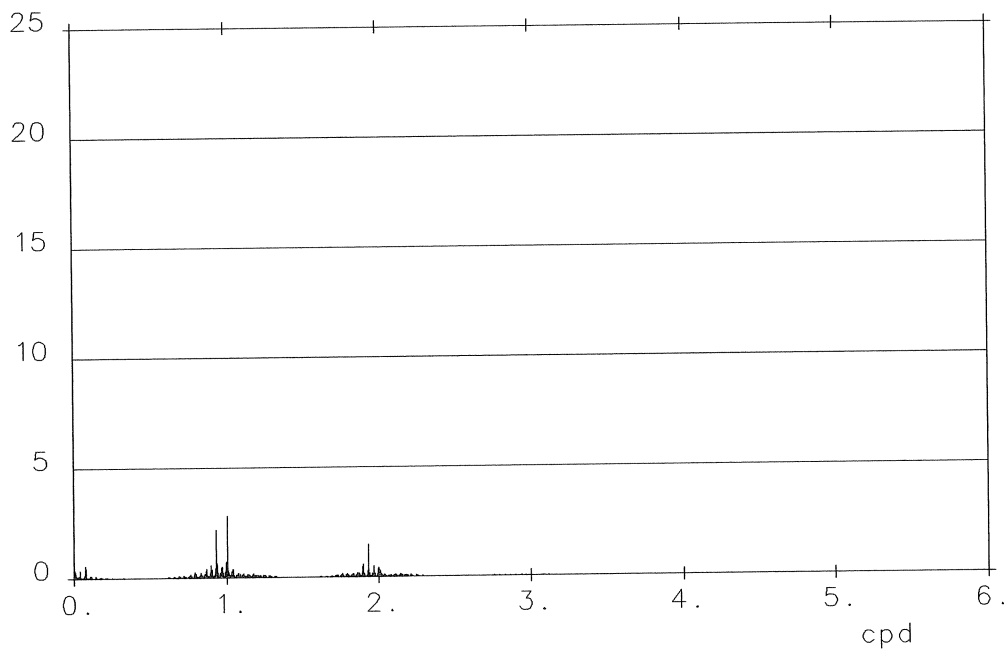


Fig. 20 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFGTIDEA minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

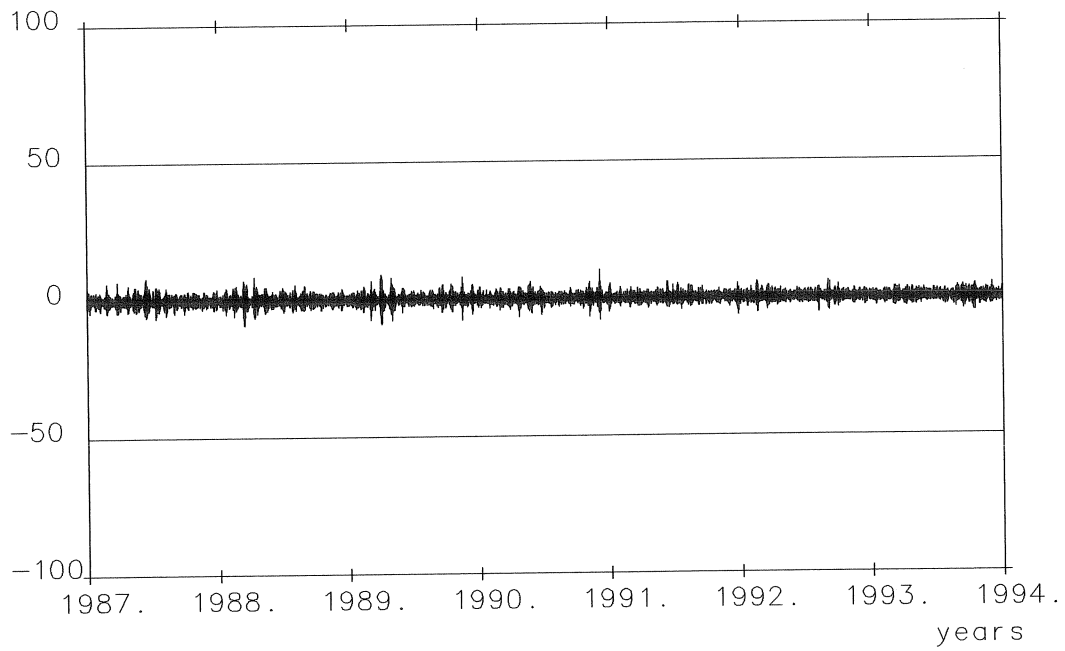


Fig. 21: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

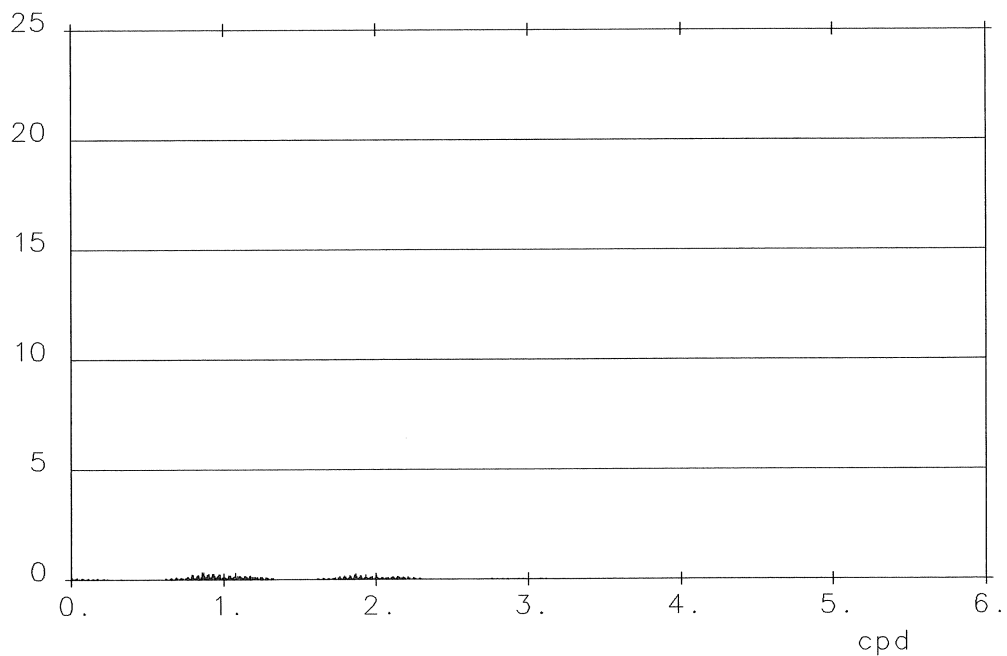


Fig. 22 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE200A minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

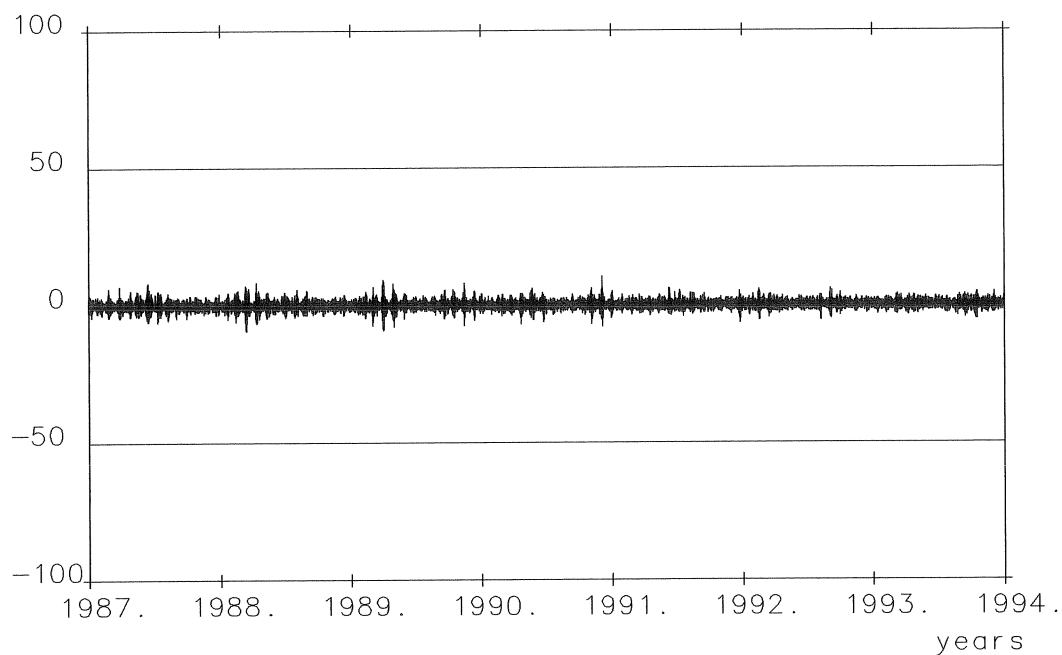


Fig. 23: Differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403A minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

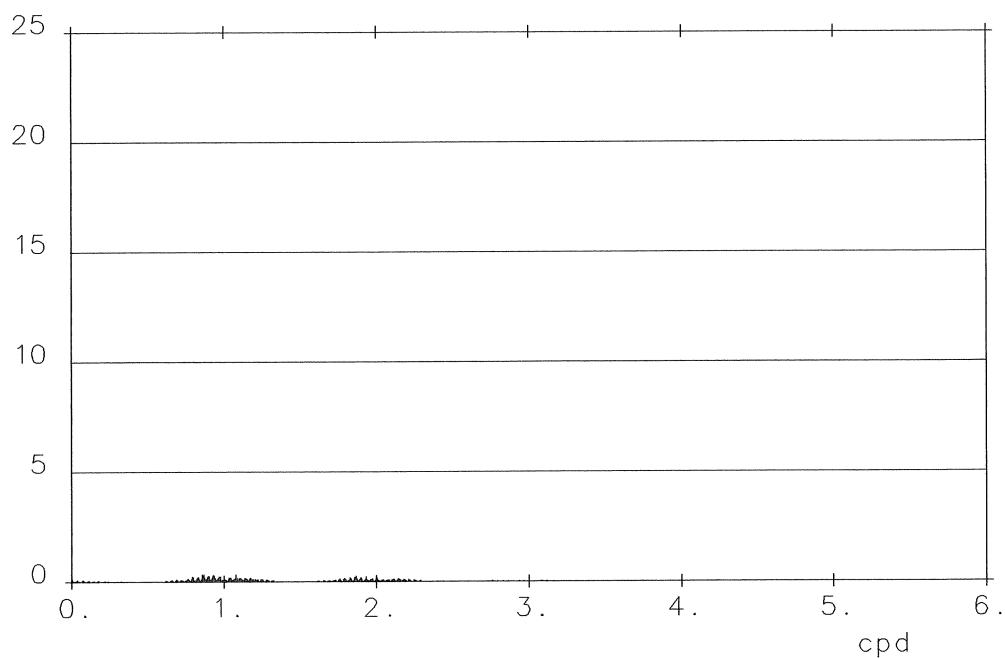


Fig. 24 : Spectrum of differences in pm/s^2 of gravity tides from benchmark series BFDE403A minus gravity tides computed from Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue.

4 Conclusions

We have used independent different benchmark gravity tide series from ephemerides of different type (computed with program GTIDE using Newcomb's 1897 and Brown's 1905 analytical ephemerides, and using the high precision numerical ephemerides DE200/LE200 and DE403/LE403) at two different time spans (1987 ... 1993 and 2017 .. 2023) to assess the accuracy of various tidal potential catalogues. The accuracy of these benchmark series is $0.1 \dots 3 \text{ pm/s}^2$ rms and $0.3 \dots 20 \text{ pm/s}^2$ at maximum in time domain.

Gravity tides computed from various different tidal potential catalogues have been compared with these benchmark gravity tide series. The most accurate tidal potential catalogue is Hartmann and Wenzel (1995); the errors of this catalogue are about 10 ... 50 times less than the errors of the two other recent catalogues by Tamura (1993) and Roosbeek (1996). The tidal potential catalogue of Hartmann and Wenzel (1995) is the only one which is accurate to a maximum error of $10 \text{ pm/s}^2 = 1$ nanogal in time domain and better than $1 \text{ pm/s}^2 = 0.1$ nanogal maximum error in frequency domain, and thus the only catalogue which fulfills the accuracy requirements for the analysis of precise gravimeter records.

Acknowledgements

Data and programs used in this investigation have been supplied by F. Roosbeek (Observatoire Royal Belgique, Bruxelles), E.M. Standish (Jet Propulsion Laboratory, Pasadena/USA) and Y. Tamura (National Astronomical Observatory, Mizusawa/Japan). T. Hartmann, P. Melchior and W. Zürn gave valuable comments to the manuscript. All this is gratefully acknowledged.

References

- Aoki, S., B. Guinot, G.H. Kaplan, H. Kinoshita, D.D. McCarthy and P.K. Seidelmann (1982): The new definition of Universal Time. *Astronomy and Astrophysics*, **105**, 359–361, 1982.
- Broucke, R.A., W.E. Zürn and L.B. Slichter (1972): Lunar tidal accelerations on a rigid earth. *Geophysical Monograph Series*, **16**, Flow and Fracture of Rocks, edited by H.C. Heard, I.Y. Borg, N.L. Carter, and C.B. Raleigh, 319–324. American Geophysical Union, Washington D.C. 1972.
- Brown, W.E. (1905): Theory of the motion of the Moon. *Memoires of the Royal Astronomical Society*, **57**, no. 2, 136–141, London 1905.
- Büllesfeld, F.-J. (1985): Ein Beitrag zur harmonischen Darstellung des gezeitenerzeugenden Potentials. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, **314**, München.
- Cartwright, D.E. and R.J. Tayler (1971): New computations of the tide generating potential. *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **23**, no. 1, Oxford.
- Cartwright, D.E. and C.A. Edden (1973): Corrected tables of tidal harmonics. *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **33**, no. 3, Oxford.
- Doodson, A.T. (1921): The harmonic development of the tide generating potential. *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A 100, 306–328. Reprint in *International Hydrographic Review*, **31**, no. 1, Monaco 1954.
- Ducarme, B. (1989): Tidal potential developments for precise tidal evaluation. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, **104**, 7338–7360, Bruxelles 1989.

- Eckert, W.J., R. Jones and H.K. Clark (1954): Improved lunar ephemeris 1952–1959, 283–263, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. 1954.
- Hartmann, T. and Wenzel, H.-G. (1994): Catalogue of the Earth tide generating potential due to the planets. *Bulletin d'Information Marees Terrestres*, **118**, 8847–8880.
- Hartmann, T. und Wenzel, H.-G. (1994): The harmonic development of the Earth tide generating potential due to the direct effect of the planets. *Geophysical Research Letters*, **21**, 1991–1993.
- Hartmann, T. and Wenzel, H.-G. (1995a): Catalogue HW95 of the tide generating potential. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, **123**, 9278–9301, Bruxelles 1995.
- Hartmann, T. and Wenzel, H.-G. (1995b): The HW95 tidal potential catalogue. *Geophysical Research Letters*, **22** no. 24, 1995.
- McCarthy, D. (1992): IERS Standards 1992. IERS Technical note no. 13, Central Bureau of International Earth Rotation Service, Observatoire de Paris.
- Meeus, J. (1962): *Tables of the Moon and the Sun*. Kesselberg Steernwacht, University of Gent, 1962.
- Merriam, J.B. (1992): An ephemeris for gravity tide predictions at the 1 ngal level. *Geophysical Journal International*, **108**, 415–422, 1992.
- Merriam, J.B. (1993): A comparison of recent tidal catalogues. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, **115**, 8515–8535, Bruxelles 1993.
- Newcomb, S. (1897): A new determination of precessional constant with the resulting precessional motions. *Astronomical Papers of the American Ephemeris VIII*, Part 1, Washington 1897.
- Roosbeek, F. (1996): RATGP95: A harmonic development of the tide generating potential using an analytical method. Preprint, submitted to *Geophysical Journal International* (November 1995).
- Seidelmann, P.K. (1982): 1980 IAU Nutation: The final report of the IAU working group on Nutation. *Celestial Mechanics*, **27**, 79–106.
- Simon, J.L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touze, M., Francou, G. and Laskar, J. (1994): Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets. *Astron. Astrophys.*, **282**, 663–683.
- Standish, E.M. and Williams, J.G. (1981): Planetary and lunar ephemerides DE200–LE200, (magnetic tape).
- Standish, E.M., X.X. Newhall, J.G. Williams and W.M. Folkner (1995): JPL planetary and lunar ephemerides DE403/LE403. Jet Propulsion Laboratory, Interoffice Memorandum IOM 314.10-127, May 22nd 1995.
- Tamura, Y. (1987): A harmonic development of the tide-generating potential. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, **99**, 6813–6855.
- Tamura, Y. (1993): Additional terms to the tidal harmonic tables. *Proceedings 12th International Symposium on Earth Tides*, Beijing 1993, 345–350, Science Press, Beijing/New York.
- Wenzel, H.-G. (1976): Zur Genauigkeit von gravimetrischen Erdzeitenbeobachtungen. *Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover* Nr. 67, Hannover 1976.
- Wenzel, H.-G. (1978): Standard data sets for comparison of tidal potential developments and analysis methods. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, **78**, 4588–4595, Bruxelles 1978.
- Wenzel, H.-G. (1992): The accuracy of tidal potential developments. Presented to Workshop on High Precision Tidal Data Processing, October 13. to 16., Bonn 1992.

- Wenzel, H.-G. (1993): The reference tidal gravity series BFAL8793. Comptes Rendus, 75th Journees Luxembourgeoises Geodynamiques, pp. 44-52, Bruxelles 1993.
- Wenzel, H.-G. (1996): Benchmark gravity tide series for the validation of tidal potential catalogues. In preparation for Bulletin d'Informations Marées Terrestres.
- Wenzel, H.-G. and W. Zürn (1990): Errors of the Cartwright-Tayler-Edden 1973 tidal potential displayed by gravimetric earth tide observations at BFO Schiltach. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, bf 107, 7559-7574, Bruxelles 1990.
- Xi, Q. (1987): A new complete development of the tide-generating potential for the epoch J2000.0. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **99**, 6766-6812.
- Xi, Q. (1989): The precision of the development of the tidal generating potential and some explanatory notes. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **105**, 7396-7404.
- Xi, Q. (1993): On the comparison of the new developments of the tidal generating potential. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **115**, 8439-8445, Bruxelles 1993.

SEMI-ANALYTICAL EPHEMERIS AND THE TIDE-GENERATING POTENTIAL TIPAB-95

Alonso⁽¹⁾, J.J., Bruno, M., Mañanes, R.

Dpt. Applied Physics (Physical Oceanography) Univ of Cádiz
Polígono del Río San Pedro. Box 40. Puerto Real 11510. Cádiz
E-mail⁽¹⁾: rosario@galeon.uca.es

Abstract

A new development of Tide Generating Potential (TGP) based on the semi-analytical solutions VSOP82 and ELP2000-82, from perturbation of n-body keplerian problem is obtained. The expansion is made up to 4th order potential for Moon and 3rd order for Sun. Secular variations longer than 5000 years are not considered. TGP time series is analysed by least squares and by Venedikov's algorithm. This development has been called TIPAB-95.

1. Introduction

The knowledge of theoretical tide is a first order problem in any study where tidal forces are used as input. This knowledge allows us to get into the study of orbital deviations of satellites, specially whose are designed for altimetry and location on the Earth (GPS) and studies on the tidal wave propagation in the crust and the ocean. It is needless to say that the precise theoretical tide computation is needed in tidal analysis and prediction.

Many authors have developed the Tide Generating Potential (TGP): Doodson [1921], Cartwright & Tayler [1971], Cartwright & Edden [1973], Büllsfeld & Schuh [1985], Xi [1985, 1987], Tamura [1982, 1987], Hartmann & Wenzel [1995] and Roosbeek [1995]. Calculation of theoretical tide from position of Moon and Sun requires less computational effort than synthesis of harmonic constituents (Tamura [1982]). The disadvantage is the difficulty to determine amplitude and phase in the direct use of Moon's and Sun's Ephemeris.

As the final objective of time series analysis is to extract the largest amount possible of useful information, theoretical tide must keep several orders of precision higher than most accurate real data.

Recent advances in instrumentation require new high precision developments of TGP. Almost all physical oceanographers have been working with the Cartwright et al development [1971, 1973]. Errors of water level recorders are about ± 5 cm. So the Cartwright & Tayler's development is good enough for oceanographical purposes. However in Geodesy and Geophysics, Cartwright et al development is not sufficient and the Working Group on Theoretical Tidal Model recommends the use of the following developments: Tamura [1987], Xi [1989], Hartmann & Wenzel [1995] or Roosbeek [1995]. The internal errors of superconducting gravity meters are in the order of the nano-Gal.

The standard from few years is the Tamura's development, accepted for the International Union of Geodesy and Geophysics. This development is based in MERIT (Monitoring Earth's Rotation and Intercomparison of Techniques) standard [1983] and JPL ephemeris (Standish, [1981]).

TIPAB-95 is a semi-analytical expansion since its basis are the semi-analytical solutions VSOP82 (Bretagnon [1982]) and ELP2000-82 (Chapront & Chapront-Touzé [1982]). First of all the main problem is solved, VSOP82, and by perturbations theory the solution for the Moon is obtained (Chapront & Chapront-Touzé [1982]). Continuum level is higher due to the use of perturbation theory.

2. Tamura's TGP development

Doodson [1921] and other authors who developed the TGP used six arguments to express phase and angular speed for each component. The six Doodson's fundamental arguments are:

τ :	time angle in lunar days
s :	Moon's mean ecliptical longitude
h :	Sun's mean ecliptical longitude
p :	ecliptical longitude of Moon's mean perigee
N' :	negative ecliptical longitude of Moon's mean node
p_s :	ecliptical longitude of Sun's mean perigee

τ is expressed as a function of s and h ignoring aberration and differences between dynamical time (TD) and universal time (UT):

$$\tau = 15^\circ \cdot t + h - s + \lambda$$

where t is the universal time in hour and λ is the east longitude of the site. These variables are related with MERIT standards by the Delaunay's arguments (Tamura [1987]):

$$\begin{aligned} s &= F + \Omega \\ h &= F + \Omega - D \\ p &= F + \Omega - l \\ N' &= -\Omega \\ p_1 &= F + \Omega - D - l' \end{aligned}$$

where F is the Moon's mean elongation from node, D is the Moon's mean elongation from Sun, Ω is the ecliptical longitude of Moon's perigee, l is the Moon's mean anomaly and l' is the Sun's mean anomaly.

Tamura [1987] found problems at the time of coding frequencies and he decided to use eight arguments defined as (Aoki et al [1982], Kubo [1980], Bretagnon [1982], Chapront [1982]):

$$\begin{aligned} f_1 &= 15^\circ \cdot t + \alpha_m - s + l \\ f_2 &= s + \Delta s \\ f_3 &= h + \Delta h \\ f_4 &= p \\ f_5 &= N' \\ f_6 &= p_1 \\ f_7 &= \text{Jupiter's opposition period} \\ f_8 &= \text{Venus's conjunction period} \end{aligned}$$

where α_m is the right ascension of an object (Sun, Moon, etc.), Δs and Δh mean long period perturbations in Sun and Moon's longitudes. These are added to minimise the phase lags of the main tidal waves: O_1 , K_1 , M_2 , S_2 and K_2 . Arguments f_7 and f_8 summarise the indirect effect of Sun over Earth's orbit. This is useful to compute long period distortions of tidal potential. Short period distortions are not considered.

Right ascension instead hour angle has two reasons:

- right ascension is measured in UT, hour angle is in TD, so the first is more dependent of Earth's rotation.
- small differences in aberration in computation formula.

Since differences in aberration are about $20.4''$ these are no real problem in amplitudes, but it will exist in phase lag, on the use of any quantity. For partial tidal coefficients of main waves see Table III.

Doodson [1921] coded tidal frequencies as linear combination of six numbers. Tamura [1987] proposed the use of eight numbers and pointed out the possibility of additional numbers for a better coding.

3. Recent developments of TGP: Hartmann & Wenzel and Roosbeek developments

In 1995, Hartmann & Wenzel developed a new TGP called HW95 (see Hartmann & Wenzel [1995] for full details). This new development have as a main objective to obtain a TGP with an error of 1 pm/s^2 . This is

possible by a reduction of the threshold level. In addition HW95 includes flattening effects in the Potential definition.

HW95 is non normalised in any of the two possible ways (Hartmann & Wenzel [1995]). HW95 takes in account eleven astronomical arguments (Hartmann & Wenzel [1995]) instead of the eight arguments of Tamura's development and they are used to code frequencies (Tamura [1987]):

τ :	time angle in lunar days
s :	Moon's mean ecliptical longitude
h :	Sun's mean ecliptical longitude
p :	ecliptical longitude of Moon's mean perigee
N' :	negative ecliptical longitude of Moon's mean node
p_s :	ecliptical longitude of Sun's mean perigee
L_{mer} :	Mercury mean longitude
L_{ven} :	Venus mean longitude
L_{mar} :	Mars mean longitude
L_{jup} :	Jupiter mean longitude
L_{sat} :	Saturn mean longitude

HW95 is computed from the standard DE200 of JPL with polynomials for celestial coordinates of all bodies of our solar system from 1599 to 2169. In HW95 the span from 1850 to 2150 is used. Moon's tidal potential is developed in six orders, Sun's potential to the third order and potential for Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn to second order. Conversion from celestial coordinates to geocentric coordinates is performed as:

$$r_{terr} = S \cdot N \cdot P \cdot r_{cel}$$

where S, N and P are the Earth rotation matrix, the nutation matrix and the precession matrix respectively; r_{terr} and r_{cel} mean for geocentric and celestial coordinates respectively.

Precession formula and mean obliquity are taken from Simon et al. [1994] based in ZMOA 1990 theory. For nutation, the four Delaunay's arguments were changed by arguments from Simon et al. [1994] according with the theory of nutation of IAU 1980.

Basis time scale is TDB. GMST is taken from Aoki et al [1982] and GAST is obtained adding the equation for equinoxes:

$$GAST = GMST + \Delta\psi \cdot \cos(\varepsilon)$$

$$GMST = 67310.54841 + (3155760000 + 8640184.812866)t + 0.093104 \cdot t^2 - 6.2E-6 t^3$$

Waves are computed by a iterative procedure. Results are 12935 waves from a fitting of 19300. Validation is performed by comparison with Doodson (1921), Cartwright et al [1971,1973], Büllsfeld and Schuh [1985], Tamura [1987], Xi [1987] and gravity series taken at the Black Forest Observatory. For partial tidal coefficients of main waves for Hartmann & Wenzel's TGP see Table III.

Roosbeek [1995] performs the last development of the TGP, RATGP95. The lunar part is developed to the order five and the solar part to the order three. Several perturbing effects are considered: direct and indirect planetary effects, lunar inequality, effects of the nutations in obliquity, Earth's flattening and time corrections. Results is a full TGP development with 6499 waves (see Roosbeek [1995] for full details).

Solar and lunar ephemeris were taken from VSOP87 series and ELP2000-85 respectively. Venus and Jupiter are introduced in RATGP95 because their gravitational influence is greater than the nanogal level. Reference frame for ephemeris is the heliocentric ecliptical coordinates translated to geocentric ones after their computation. Time reference is J2000 epoch.

Partial tidal coefficients in RATGP95 for main tidal waves are in Table III.

4. Is a new development of TGP necessary?

All the expansions of TGP are based in analysis of long duration time series. Taking as reference Tamura's development, coefficients for secular variations were computed generating five periods of 20 years and analysing trends.

The length of most of data records of physical oceanographical variables is short, generally months and in few cases over 1 year. Fortunately in many places long data records over 25 years are being taken. This fact opens many possibilities to understand the behaviour of real tides in the ocean.

In addition, many problems related with Earth's dynamic are not considered in tidal developments. Anomalous values of ϕ_1 and ψ_1 (Pekeris & Accad [1972], Moritz & Muller [1985], Melchior [1983]) can be related with non rigid Earth's dynamic. Other tidal waves show unusual values but with no satisfactory explanation such as S_2 (Bruno [1993]), S_1 wave (Pugh [1987], Godin [1990]), etc.

Advances in Geophysics and Geodesy and some analytical theories to explain the Earth's internal dynamics have been able to modelling short period nutation and quasi-diurnal nutation (Moritz & Muller [1985]). These effects come from a not rigid Earth and they are not considered in formula to compute the TGP in any development.

The perturbations of Moon's orbit are extremely difficult to evaluate because the movement is highly perturbed, not only for Sun and Earth's influences but for planets. All these effects can be added to the differential equation set of our Solar System (Bretagnon [1982], Chapront & Chapront-Touzé, [1982]).

The use of direct solutions of movement equations for the Solar System with short period nutation and quasi-diurnal nutation give us new possibilities to compute and predict short period distortions in the TGP and to understand its effects on tides.

At the time that new corrections and models for Earth's dynamics and altimetry tidal data are introduced in tidal models we will be able to compute more realistic theoretical tides.

5. Development of TIPAB-95

Basically there are two ways to perform TGP computation. For one hand an algebraic expansion based on astronomical basic frequencies. For the other hand the use of planetary ephemeris. Authors decided for this for two reasons: this is a effortless way to compute TGP (Büllesfeld & Schuh [1985]) and the introduction of more realistic effects associated with Earth's dynamic is easier.

TIPAB-95 development has been carried out in a two complementary ways. Initially the set of equations for the Solar System is solved. The way of solving this step is well known (Bretagnon [1982], Green [1985], Sevilla [1989]) and the analytical theory has been checked with JPL standard (Standish [1981]). After this, special perturbation theory is applied on three-body problem to treat Sun-Earth-Moon problem. This was treated and solved very efficiently (Chapront & Chapront-Touzé [1982])

From VSOP82 solution (Bretagnon [1982]) for secular variations of the orbits of planets, and ELP2000-82 solution (Chapront & Chapront-Touzé [1982]) for Moon's ephemeris we built a time series of each family of harmonics, P_{nm} , by substitution of ephemeris in mathematical formula of each TGP harmonic family, P20 to P44. Because of basis solutions are the semi-analytical theory ELP2000-82, the development can be called as semi-analytical. Period selected was 21 years time series, from 1970 to 1991. The expansion is to the third order for Sun and fourth for Moon. Constants for this development are showed in Table I.

Table I: Constants used in the development of TGP TIPAB-95

Gravitation	$6.672E-11 \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Rate Moon/Earth masses	0.012 300 02

Rate Sun/Earth masses	332 946.0
Mass of Sun	1.989 1 E30 kg
Sun paralaxe	8".794 148
Astronomical unit	1.495 978 70 E11 m

Now the periodogram of the 21 years using Welch's approach was computed for each of 12 final time series. Welch's periodogram is one of the most robust estimation of power spectrum. FFT can have errors in frequency determination (Marple [1980]). After this the peak frequencies were selected and by least square methods amplitudes and phase lags were computed, checking phases, in order to ensure the good behaviour of new TGP.

Harmonic analysis were performed by two different methods: least squares directly on original data set following Foreman's algorithm and by Venedikov's algorithm. Result for Venedikov's procedure is shown for Cartwright, Tayler and Edden's TGP and for Tamura's TGP in Table II.

Table II: Harmonic Analysis of TIPAB-95 by Venedikov's procedure for diurnal and semidiurnal tides. Results from Venedikov, Ducarme, Vieira and de Toro's NSV program. CTE: reference TGP is Cartwright, Tayler and Edden's one Tamura: reference TGP is from Tamura's one.

Values are computed for 28°N.

	CTE	Tamura
Wave	A(cms)/Phase(°)	A(cms)/Phase(°)
ALPHA1	0.61679/ 2.1590	0.61679/ 2.1444
2Q1	2.12041/ 1.9179	2.12041/ 1.9353
SIGMA1	2.56433/ 1.8515	2.56433/ 1.8497
Q1	16.0611/ 1.6365	16.0570/ 1.6367
RHO1	3.05429/ 1.6747	3.05326/ 1.6799
O1	83.9519/ 1.2334	83.9345/ 1.2344
TAU1	1.09754/ 0.9346	1.09447/ 1.0575
NO1	6.60262/ 0.7585	6.60057/ 0.7673
CHI1	1.26222/ 0.6644	1.26222/ 0.6985
PI1	2.27895/ 0.3640	2.27895/ 0.3563
P1	39.0726/ 0.3119	39.0644/ 0.3062
S1	0.92263/ 0.6527	0.92263/ 0.6722
K1	118.082/ 0.2347	118.061/ 0.2337
PSI1	0.91547/ 2.4884	0.90217/ 2.1408
PHI1	1.67955/-0.0530	1.68057/-0.0539
THETA	1.25915/ 0.0152	1.26017/ 0.0316
J1	6.59853/-0.0597	6.59648/-0.0708
SO1	1.09242/-0.4184	1.09242/-0.3874
OO1	3.61277/-0.7173	3.60970/-0.7155
NU1	0.69146/-0.8557	0.68941/-0.9320
EPS2	1.39826/ 2.8296	1.39826/ 2.8101
2N2	4.82078/ 2.4068	4.82180/ 2.4268
MU2	5.81603/ 2.2782	5.81603/ 2.2924
N2	36.4336/ 2.0090	36.4336/ 2.0100
NU2	6.91971/ 1.9252	6.91971/ 1.9284
M2	190.303/ 1.4990	190.308/ 1.4991
LAMB2	1.40542/ 1.1279	1.40542/ 1.1081
L2	5.37517/ 1.0782	5.37620/ 1.0765
T2	5.17674/ 0.6079	5.17776/ 0.6040
S2	88.5385/ 0.4898	88.5385/ 0.4895
K2	24.0487/ 0.6006	24.0507/ 0.6044
ETA2	1.33075/ 0.9908	1.33075/ 0.9950
2K2	0.35800/-1.2070	0.35494/-0.8754

In the development and results there are some distinctive features compared with other expansions:

(1) Perturbation Theory is widely applied to compute lunar ephemeris, basis solutions are VSOP82 and ELP2000-82 with epoch J2000.

(2) Solution has the same characteristics of Bretagnon [1982] and Chapront & Chapront-Touzé [1982] results. Trends longer than 5000 years are not considered, terms for amplitudes are retained from 2 cm. In addition it contains all possible effect on Moon: planetary influences, tidal effects, Earth's figure perturbation, ecliptical plane motions, etc.

(3) Arguments are not considered in the analysis and frequencies are not translated to Doodson's numbers because the application of TIPAB-95 will be by response method.

As a consequence of (1) and (2) the Continuum is higher than other expansions, so the threshold level of picking up components is very oscillating and it can be observed a power spreading around conventional tidal frequencies.

6. Results and conclusions

In order to check the validity of TIPAB-95 development, main constituents were compared with Tamura's, Hartmann & Wenzel's and Roosbeek's expansion after harmonic analysis (Table III).

Table III: Comparison of several TGP developments. Values truncated to six figures.

Name	Doodson	Tamura	HW95	TIPAB-95	RATGP95
Z0	0 0 0 0 0	0.738300	0.869548	0.739239	0.738323
Sa	0 0 1 0 0-1	0.011549	0.013789	0.012238	0.011549
Ssa	0 0 2 0 0	0.072732	0.085508	0.073134	0.072736
Msm	0 1-2 1 0 0	0.015791	0.018596	0.013628	0.015792
Mm	0 1 0-1 0 0	0.082569	0.097250	0.082307	0.082572
Msf	0 2-2 0 0 0	0.013695	0.016133	0.013737	0.013700
Mf	0 2 0 0 0	0.156303	0.184104	0.164114	0.156282
Alp1	1-4 2 1 0 0	0.002783	0.003783	0.002696	0.002784
2Q1	1-3 0 2 0 0	0.009545	0.012986	0.009503	0.009545
Sig1	1-3 2 0 0 0	0.011520	0.015659	0.011651	0.011519
Q1	1-2 0 1 0 0	0.072136	0.098131	0.072919	0.072113
Rho1	1-2 2-1 0 0	0.013702	0.018626	0.013798	0.013700
O1	1-1 0 0 0	0.376763	0.512526	0.379624	0.376740
Tau1	1-1 2 0 0	0.004914	0.006680	0.005117	0.004914
b1	1 0-2 1 0 0	0.002780	0.003779	0.002696	0.002779
NO1	1 0 0 1 0 0	0.029631	0.040287	0.030611	0.029628
Chi1	1 0 2-1 0 0	0.005667	0.007790	0.005939	0.005666
Pi1	1 1-3 0 0 1	0.010251	0.013920	0.010280	0.010249
P1	1 1-2 0 0 0	0.175307	0.239031	0.173798	0.175314
S1	1 1-1 0 0 1	0.004145	0.005714	0.003199	0.004145
K1	1 1 0 0 0	0.529876	0.720507	0.529756	0.529875
Psi1	1 1 1 0 0-1	0.004145	0.005716	0.003793	0.004145
Phi1	1 1 2 0 0	0.007545	0.012393	0.007448	0.007545
Th1	1 2-2 1 0 0	0.005666	0.007707	0.005575	0.005666
J1	1 2 0-1 0 0	0.029630	0.040302	0.029929	0.029628
SO1	1 3-2 0 0 0	0.004915	0.006684	0.005346	0.004915
OO1	1 3 0 0 0	0.016212	0.022044	0.016495	0.016208
Ups1	1 4 0-1 0 0	0.003104	0.004221	0.003290	0.003103
Eps2	2-3 2 1 0 0	0.006709	0.009129	0.006625	0.007600
2N2	2-2 0 2 0 0	0.023009	0.031307	0.022868	0.023001

Mu2	2-2 2 0 0 0	0.027768	0.037785	0.028511	0.027767
N2	2-1 0 1 0 0	0.173881	0.236582	0.173863	0.173883
Nu2	2-1 2-1 0 0	0.033027	0.044940	0.032633	0.033027
Gam2	2 0-2 2 0 0	0.002728	0.003709	0.002895	0.002729
H1	2 0-1 0 0 1	0.003123	0.004245	0.003141	0.003123
M2	2 0 0 0 0	0.908184	1.235635	0.908180	0.908189
H2	2 0 1 0 0-1	0.002749	0.003740	0.002454	0.002749
Dlt2	2 0 2 0 0	0.001066	0.001449	0.001227	0.001065
Lbd2	2 1-2 1 0 0	0.006697	0.009111	0.006625	0.006698
L2	2 1 0-1 0 0	0.025670	0.034929	0.024978	0.025674
T2	2 2-3 0 0 1	0.024701	0.033558	0.024683	0.024702
S2	2 2-2 0 0 0	0.422535	0.573839	0.423739	0.422558
R2	2 2-1 0 0-1	0.003236	0.004798	0.004564	0.003535
K2	2 2 0 0 0	0.114860	0.156191	0.118117	0.114850
Eta2	2 3 0-1 0 0	0.006422	0.008737	0.006527	0.006421
MO3	3-1 0 1-1 0	0.003260	0.002299	0.003850	0.001823
M3	3 0 0 0 0	0.011881	0.014969	0.011880	0.011881

There are not significant differences among Tamura87, Roosbeek95 and TIPAB-95 when partial tide coefficients are inspected for main waves. But with HW95 some coefficients are needed to make a direct comparison, however, equilibrium relations are very close when they are computed for any of TGP's.

Authors have made some tests by response method on ocean tides time series with good results.

Acknowledgements

Authors are grateful to Prof. Antonio Salazar from the Spanish Royal Observatory of the Navy (ROA), Ephemeris Section, San Fernando, Cádiz, for his advice in the computation of Ephemeris; Prof. L. Tejedor from the University of Cádiz for his support; Prof. R. Vieira and Prof C. de Toro from the National Institute of Astronomy and Geodesy (INAG), Madrid, Spain, and Prof. A. P. Venedikov from the Geophysical Institut of Bulgary for their advice and suggestions and for NSV tidal analysis program.

References

- Aoki, S. B. et al, 1982, "The new definition of universal time", *Astron. Astrophys.*, 105, 339-361.
- Bretagnon, P., 1982, "Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82", *Astron. & Astrophys.*, 114, pp 278-288.
- Bruno, M., 1993, "Un análisis de las causas que contribuyen a la distorsión de la señal semidiurna de marea en la costa Este de la Isla de Gran Canaria", Tesis Doctoral, Universidad de Cádiz.
- Büllesfeld & Schuh, 1985, "New harmonic development of the Tide Generating Potential ETMB 85 with applications on VLBI data analysis", *Proc. of the Tenth Int. Symp. of Earth Tides*.
- Cartwright, D.E. & Tayler, R.J., "New computations of the Tide-generating Potential", *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 22, pp 45-74, 1971.
- Cartwright, D.E. & Edden, A.C., "Corrected tables of Tidal harmonics", *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 33, pp 253-264, 1973.
- Chapront, J. & Chapront-Touze, M., "Planetary perturbations of the Moon in ELP2000", *Celestial Mechanics*, 26, pp 83-94, 1982.
- Chapront-Touze, M. & Chapront, J., "The lunar ephemeris ELP2000", *Astron. & Astrophys.*, 124, pp 50-62, 1983.
- Chapront-Touze, M., "The ELP solution for the main problem of the Moon and some applications", *Celestial Mechanics*, 26, pp 63-69, 1982.
- Doodson, A.T., "The harmonic development of the tide generating potential", *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 100, pp 306-308, 1921.
- Foreman, M.G.G., 1977, "Manual for tidal heights analysis and prediction". *Inst. Ocean Sci., Victoria, B.C., Pacific. Mar. Sci., Rep 77-10*.
- Foreman, M.G.G., 1990, "The harmonic analysis of tidal model time series", *Comp. Mech. Pub.*

- Foreman, M.G.G., 1977, "Manual for Tidal Heights Analysis and Prediction". Pacific Marine Science Report 77-10. Ins.of Oc. Scien., Patricia Bay.
- Godin, G., 1972, "The Analysis of Tides", Univ. of Toronto Press.
- Godin, G., "S1: a small but perplexing component of the tide", Dt. hydrogr. Z. 43, 1990
- Godin, G., "Tides", Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, México, 1988.
- Green, R.M., 1985, "Spherical Astronomy", Cambridge University Press.
- Hartmann & Wenzel, 1994, "Catalogue of the Earth Tide Generating Potential due to the planets", Bull. Inf. Mareés Terrestres, 119, pp 8847-8880.
- Heiskanen, W.A. & Moritz, H., 1985, "Geodesia Física", Instituto de Astronomía y Geodesia- Instituto Geográfico Nacional, Madrid.
- Marple, L., "A new autoregressive spectrum analysis algorithm", IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing. Vol ASSP-28.No.4. August 1980.
- Meeus, J., 1962, "Tables of the Moon and Sun", Kesselberg Sterrenwacht, Belgium.
- Melchior, P., 1983, "The Tides of the planet Earth". 2nd Ed., Pergamon Press.
- Moritz, H. & Muller, I.I., 1987, "Earth Rotation: Theory and Practice", Ungar Ed.
- Pekeris & Accad, 1972, "Dynamics of the liquid core of the Earth", Phil. Trans. Royal Soc. of London, A273, 1233/1972, 237-260.
- Pugh, D.T., 1987, "Tides, surges and mean sea level", John Wiley & Sons.
- Roosbeek, F., 1995, "A tide generating potential at nanogal level", Bull. Inf. Mareés Terrestres, 121, pp 9032-9035.
- Roosbeek, F., 1995, "RATGP95: A Harmonic Development of the Tide Generating Potential Using an Analytical Method". GJI, pre-print version (personal communication).
- Roosbeek, F., 1995, RATGP95 development; three versions at anonymous ftp.
- Sevilla, M., 1989, "Mecánica Celeste Clásica". Instituto Nacional de Astronomía y Geodesia, Madrid.
- Standish, E.M., "Two differing definitions of the dynamical equinox and the mean obliquity", Astron. & Astrophys, 101, L17-L18, 1981.
- Standish, E.M., "The JPL planetary ephemerides", Celestial Mechanics, 26, pp 181-186, 1982.
- Tamura, Y., 1982, "A computer program for calculating the tide generating force". Publ. Int. Latit. Obs. Mizusawa. 16, 1-20.
- Tamura, Y., 1987, "A Harmonic development of the Tide Generating Potential". Marees Terrestres, Bulletin d'informations. 99, pp 6813-6855.
- Venedikov, A.P., Vieira, R. y de Toro, C., "A new method for earth tide analysis", Instituto Nacional de Astronomía y Geodesia, CSIC-UCM, Publicación nº183, Madrid, 1992.
- Venedikov, A.P., 1995, personal communications.
- Xi Qinwen, 1985, "The algebaric deduction of Harmonic Development of the Tide Generating Potential with the IBM-PC", Proc. of the Tenth Int. Symp. of Earth Tides.
- Xi Qinwen, 1987, "A new complete development of the Tide Generating Potential for the epoch J2000.0". Marees Terrestres, Bulletin d'informations. 99, pp 6786-6812.

THE NANOGAL SOFTWARE: EARTH TIDE DATA PROCESSING PACKAGE ETERNA 3.30

Hans-Georg Wenzel,

Black Forest Observatory, Universität Karlsruhe,
Englerstr. 7, D-76128 KARLSRUHE, Germany.
e-mail: wenzel@gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de

Abstract

This is to announce that the new version 3.30 of the earth tide data processing package ETERNA will be available after July 1st, 1996. The earth tide data processing package ETERNA version 3.30 allows the recording, preprocessing and analysis of earth tide observations under operating system MS-DOS on an IBM-AT compatible personal computer 80386/387 upwards. The computing kernels DETIDE, DESPIKE, ANALYZE, OCELOAD and PREDICT may also be compiled on a work station under UNIX operating system. The new standard format for the storage and exchange of high rate or high resolution earth tide data (Wenzel 1995) is used in all parts of the ETERNA 3.30 package.

Compared to previous versions, we have included into the earth tide analysis package ETERNA (e.g. Wenzel 1994b,c) the most accurate tidal potential catalogue by Hartmann and Wenzel (1995a,b). In all programs, the DUT1 correction due to the Earth's variable rotation has been implemented using DUT1 values provided by the International Earth Rotation Service IERS. Together with the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue, this upgrade enables the preprocessing and analysis of earth tide observations and the prediction of earth tide signals with a model accuracy better than 1 ngal ($1 \text{ ngal} = 0.01 \text{ nm/s}^2$).

Several parts of the ETERNA earth tide analysis package have been rewritten and several other pieces have been added. For the computation of the tidal signals we have implemented recursion formulas which reduce the total computation time for some data sets down to 35% compared to previous versions without loss of accuracy. The ETERNA package has been given a new and better structure, and several programs have been renamed (e.g. the former program ETERNA has been renamed to ANALYZE, the former program ETGTAB has been renamed to PREDICT, the former program PRETERNA has been splitted into programs DETIDE and DESPIKE). The program OCELOAD has been included which enables the computation of ocean tide loading effects using the Schwidersky (1980) ocean tide model. We believe that a substantial improvement with respect to accuracy, flexibility and operational comfort has been achieved compared to previous versions of the package. ETERNA 3.30 is currently the only earth tide data processing package beeing able to process earth tide observations with a model accuracy better than 1 ngal.

1 Structure of ETERNA 3.30

The ETERNA 3.30 package is installed by an automatic installation procedure within several directories (Fig. 1). It consists of the programs

Directory	Program	Purpose
RECTID	RECTID	earth tide recording program
	ETSTEP	instrumental phase lag determination by step response
	STEPLOT	plot of recorded step response
PREPRO	DETIDE	calibration and detiding of earth tide observations
	PREGRED	graphical editor for earth tide data preprocessing
	DESPIKE	despiking and decimation of earth tide observations
	PREPLOT	plot of earth tide data
ANALYZE	ANALYZE	analysis of earth tide observations
	PLOTDATA	plot of data and residuals
	PLOTHIST	plot of a histogram of residuals
	PLOTSPEC	plot of a spectrum of residuals
	PLOTRESA	interactive plot of residuals
	RESFFT	FFT spectrum of the residuals
OCELOAD	OCELOAD	computation of ocean tide loading
PREDICT	PREDICT	prediction of earth tides

Earth tide data acquisition can be carried out with program RECTIDE (in MS-QuickBasic), which allows the sampling of data from different sensors at 1 s or 5 s interval. After on-line subtraction of computed model tides from the sampled data, the residuals are displayed on the colour graphic screen of the pc. The sampled data are numerically filtered using a symmetrical FIR lowpass filter with zero phase shift; the filtered data are decimated to 1 min interval and the decimated data are stored on diskette and hard disk.

The preprocessing of 1 min earth tide and meteorological data can be carried out with programs DETIDE, DESPIKE (in Fortran 77/90) and PREGRED (in MS-Visual C++). The data preprocessing is carried out using a remove-restore technique: At first all well-known signals (computed model tides and computed air pressure influence) are removed with program DETIDE. The graphical editor PREGRED (Vetter and Wenzel 1995) is a very comfortable tool to delete corrupted parts of the data, to correct steps and to interpolate gaps under graphical control of the operator. With program DESPIKE, the residual signal (the earth tide sensor's drift) is automatically cleaned (destepped, despiked, and degapped) and the known signals are added back to the cleaned residual signal. The corrected samples at 1 min interval are finally numerically filtered and decimated to 5 min samples and subsequently to hourly samples. For the data preprocessing may be used

- up to 500 data sets within one batch run,
- up to 300 data blocks for each data set,
- as observations: tidal potential, gravity tides, tilt tides, vertical displacements, horizontal displacements, vertical strain, horizontal strain, areal strain, shear strain, volume strain and ocean tides,
- seven different tidal potential developments (Doodson 1921, Cartwright et al. 1971, 1973, Büllesfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Roosbeek 1996, Hartmann and Wenzel 1995),
- up to 85 wavegroups,
- up to 8 additional meteorological parameters.

The analysis of earth tide observations can be carried out with program ANALYZE (in Fortran 77/90), using the least squares adjustment procedure with multi channel input to derive tidal parameters, pole tide parameters and meteorological parameters. The spectrum of the residuals is used to derive standard deviations of the adjusted parameters. The mathematical model of the ANALYZE earth tide analysis program has been developed by Chojnicki (1973) and modified and completed by Schüller (1976, 1977a, 1977b, 1978, 1986), and Wenzel (1976a, 1976b, 1977, 1994a, b). With ANALYZE version 3.30 may be used

- up to 500 different data sets within one batch run,
- up to 300 data blocks for each data set,
- up to 85 wavegroups,
- up to 175 unknown parameters,
- unlimited number of observations within each data block,
- seven different tidal potential developments (Doodson 1921, Cartwright et al. 1971, 1973, Büllsfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Roosbeek 1996, Hartmann and Wenzel 1995),
- single- or multi-channel input,
- up to eight meteorological parameters,
- correction of pole tides with a priori pole tide parameters,
- correction of gravity variations due to length of day variation,
- adjustment of pole tide regression parameters,
- either highpass filtering of the data or drift modelling,
- in case of highpass filtering: eight symmetric numerical FIR filters of different length and quality are available,
- in case of drift modelling: Tschebyscheff-polynomials of individual degree per observation block may be adjusted,
- unity window or Hann-window may be applied for the weights of the least squares adjustment,
- error estimation by least squares adjustment or by Fourier-spectrum of residuals.

The prediction of earth tide signals can be carried out with program PREDICT, using the same parameter model as in program ANALYZE. With PREDICT version 3.30 may be used

- up to 85 wavegroups,
- seven different tidal potential developments (Doodson 1921, Cartwright et al. 1971, 1973, Büllsfeld 1985, Tamura 1987, Xi 1989, Roosbeek 1996, Hartmann and Wenzel 1995),
- gravity pole tides with a priori pole tide parameters,
- gravity variations due to length of day variation.

The computation of ocean tide loading effects can be carried out with program OCELOAD, using the Schwidersky (1980) global ocean tide model and applying loading Green's functions. More recent global ocean tide models from satellite altimetry will probably be included in future versions of the program.

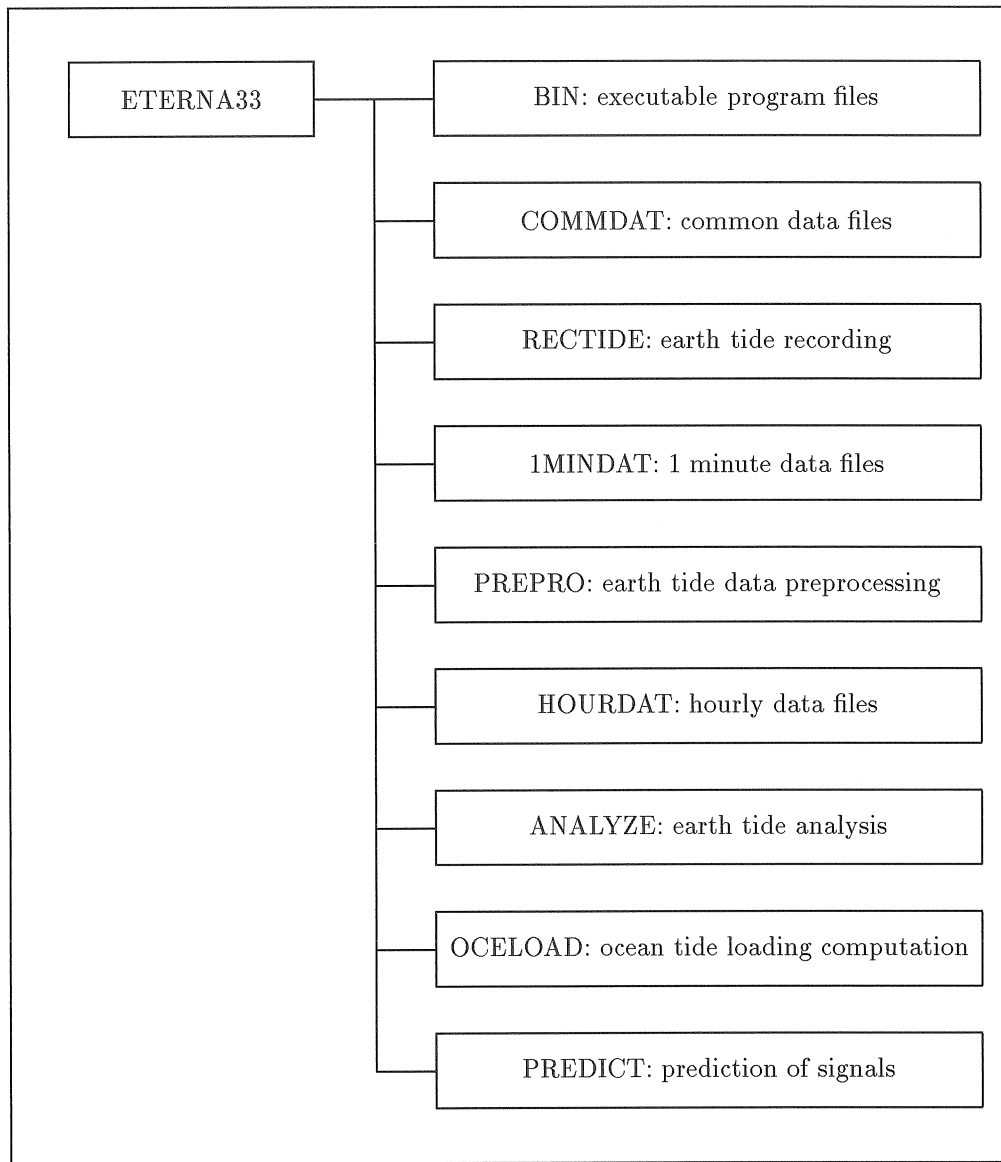


Fig. 1: Directories of the earth tide data processing package ETERNA version 3.30

2 Accuracy of ETERNA 3.30

Within the last year, a new tidal potential catalogue (Hartmann and Wenzel 1995) became available which allows the computation of earth tide signals with an accuracy better than 1 ngal, as has been verified by comparison with different benchmark gravity tide series (Wenzel 1996). Therefore, the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue using in total 12 935 tidal waves has been implemented into the ETERNA package version 3.30. This tidal potential catalogue includes the potential due to the Moon up to degree 6, to the Sun up to degree 3, to the planets Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn to degree 2, and the potential due to the Earth's flattening by the Moon and the Sun. The errors of gravity tides computed from the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue are 1.4 pm/s^2 rms and 10.4 pm/s^2 ($1 \text{ pm/s}^2 = 0.1 \text{ ngal}$) at maximum, as has been verified by comparison with several different benchmark gravity tide series (Wenzel 1996).

Because the computation of tides using the full 12 935 tidal waves of the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue is rather time consuming and may often be unnecessary compared

to the accuracy of the data, a truncation parameter may be used to truncate the tidal potential catalogue, which degrades the accuracy of the computed tides but saves computation time. Due to the truncation option, there is in principle no need to use other tidal potential catalogues, even if very rough tidal computations shall be carried out. Nevertheless, we have made available with ETERNA 3.30 seven different tidal potential catalogues for comparison purpose. Because the Hartmann and Wenzel (1995) potential uses a straightforward and simple normalization being different from the complicated Doodson (1921) normalization, the tidal potential catalogues of Doodson (1921), Cartwright et al. (1971, 1973), Büllesfeld (1985), Tamura (1987), Xi (1989) and Roosbeek (1996) have been transformed into the Hartmann and Wenzel (1995) normalization. Resulting from intensive accuracy tests, the astronomical arguments from Tamura (1987) are used for the tidal potential catalogues of Doodson (1921), Cartwright et al. (1971, 1973), Büllesfeld (1985), Tamura (1987), and Xi (1989). For Roosbeek (1996) and Hartmann and Wenzel (1995), the astronomical arguments given in Hartmann and Wenzel (1995) are used.

Because the astronomical arguments are computed by polynomials of up to degree 4, it is necessary to recompute the phases of the tidal waves from the astronomical arguments at monthly interval in order to achieve the desired accuracy for the computation of tidal signals. For the computation of the tidal signals we have implemented recursion formulas which reduce the total computation time of programs ANALYZE, DETIDE and PREDICT for some data sets down to 35% compared to previous versions without loss of accuracy.

Within ETERNA 3.30, the time scale of the observations (or predicted signals) is assumed to be UTC (Universal Time Coordinated), which is distributed by radio transmitters and by GPS (Global Positioning System). For the accurate computation of tides, the time scales UT1 (Universal Time No. 1, describes the rotation of the Earth) and TDB (Dynamical Barycentric Time, used to describe the positions of the Moon and of the planets) have to be made available. Within ETERNA 3.30 we have implemented for the first time for tidal computations the correction $DUT1 = UT1 - UTC$, which is interpolated from daily tabulated values of DUT1 provided by the International Earth Rotation Service IERS. The difference $DDT = TDT - UTC$, which is constant for several months or years, is also taken from a table. The difference $TDB - TDT$ (a few ms only) is computed from a closed formula. The effect of DUT1 can reach 0.1 nm/s^2 at maximum (e.g. Fig. 8, 9).

The accuracy of the tidal potential catalogue by Hartmann and Wenzel (1995) has been estimated by comparison with several gravity tide benchmark series (Wenzel 1996). We have used here a gravity tide benchmark series called BFDE403E computed from the most recent and most accurate DE403/LE403 ephemerides (Standish et al. 1995) to verify the accuracy of the model tide computation within ETERNA 3.30. The series BFDE403E consists of hourly gravity tides for a rigid model Earth computed directly from the ephemerides of the Moon, Sun, Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn at station BFO ($\phi = 48.3306^\circ$, $\lambda = 8.3300^\circ$, $h = 589 \text{ m}$) between January 1st 1987 and December 31st 1994. This benchmark series has been computed for the UTC time scale and has included corrections DUT1 and DDT. The accuracy of the BFDE403E benchmark gravity tide series is estimated to better than 1 pm/s^2 . In Fig. 2 and 4 are given residuals of the earth tide analysis from program ANALYZE for the benchmark gravity tide series when using the tidal potential catalogues of Tamura (1987) and Hartmann and Wenzel (1995); in Fig. 3 and 5 are given the corresponding Fourier amplitude spectra. One has to have in mind that the residuals of the least squares adjustment always underestimate the errors, because the parameters determined by least squares adjustment absorb to a certain extend the errors. We can see maximum errors of 0.5 nm/s^2 and 0.012 nm/s^2 resp. in time domain and 0.015 nm/s^2 and 0.0005 nm/s^2 resp. in frequency domain for the tidal potential catalogues of Tamura (1987) and Hartmann and Wenzel (1995) resp. In Tab. 1 is given the last page from program ANALYZE for the benchmark gravity

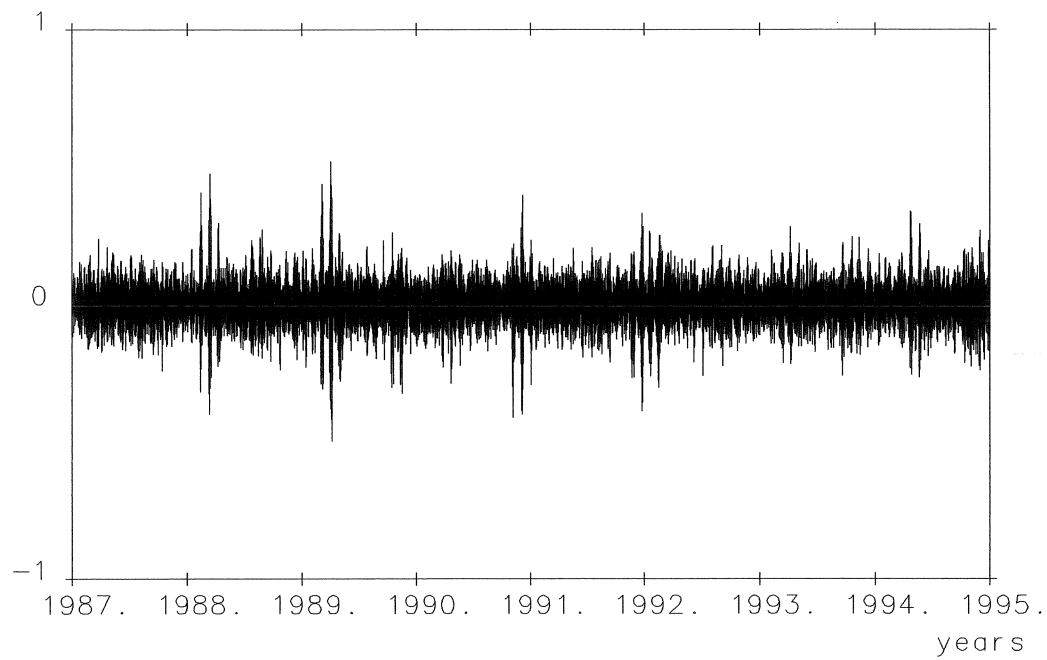


Fig.2: Residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Tamura (1987) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

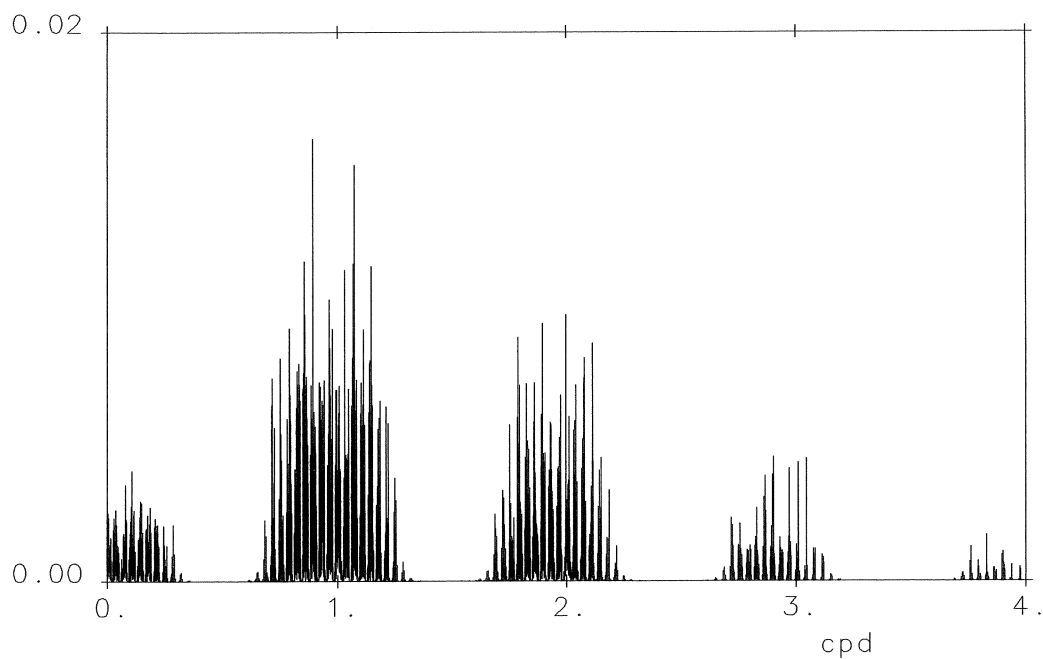


Fig.3: Amplitude spectrum of residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Tamura (1987) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

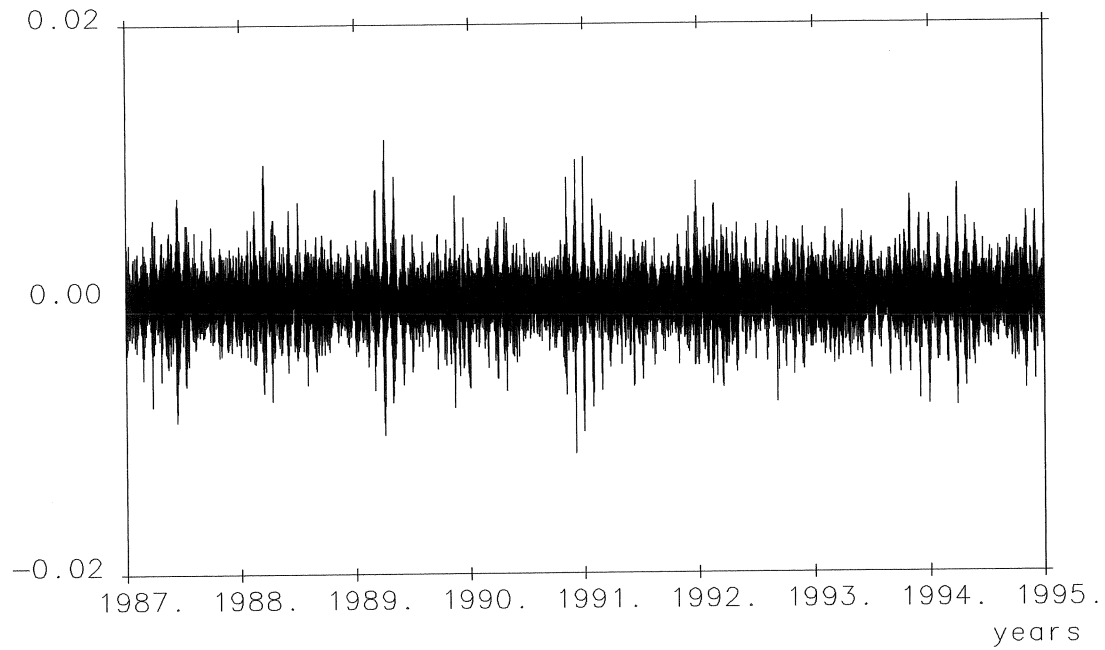


Fig.4: Residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

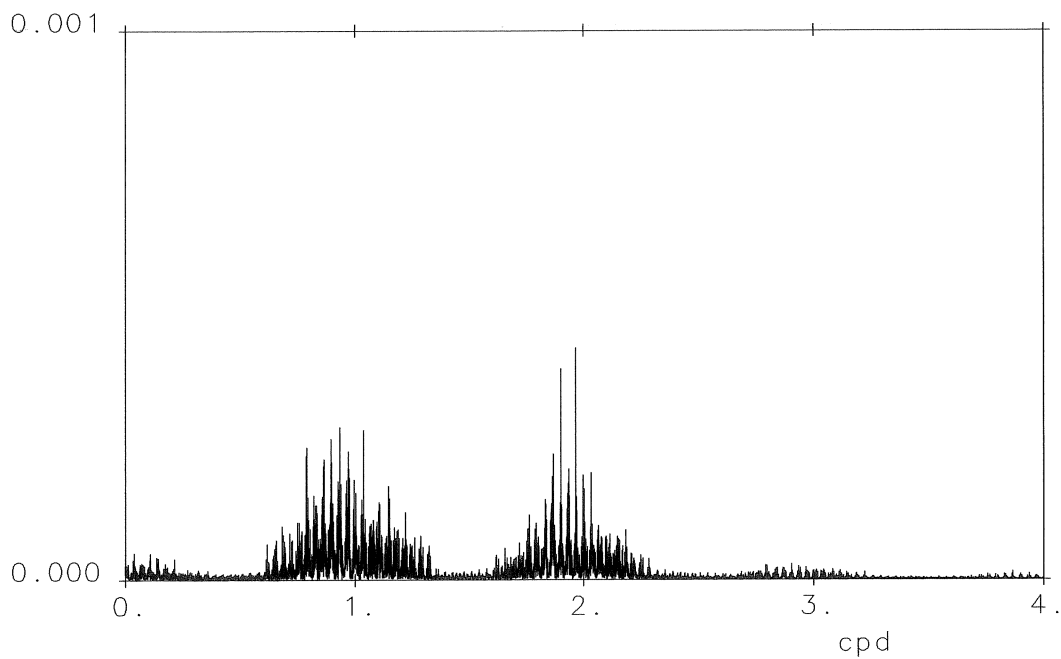


Fig.5: Amplitude spectrum of residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

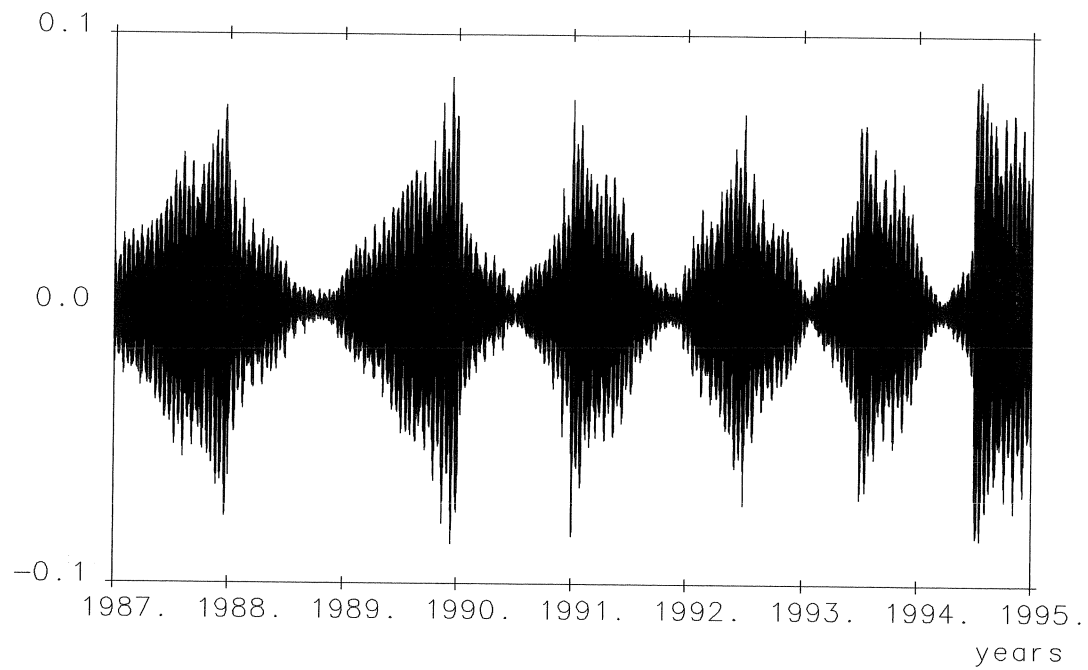


Fig.6: Residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 not corrected.

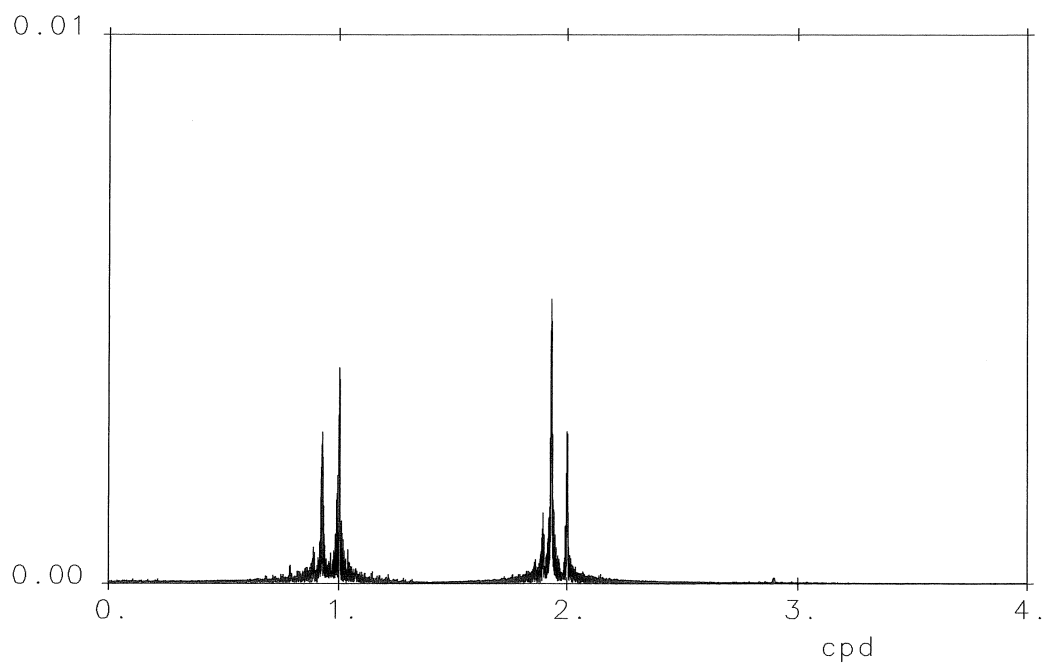


Fig.7: Amplitude spectrum of residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 not corrected.

Tab. 1: Result of analysis of benchmark gravity tide series BFDE403E

Program ANALYZE, version 3.30 960318 File: BFDE403E

Latitude: 48.3306 deg, longitude: 8.3300 deg, azimuth: 0.000 deg.
 Summary of observation data : 19870101 0...19941231230000
 Number of recorded days in total : 2922.00
 HARTMANN+WENZEL 1995 tidal potential used.
 Rigid Earth model used.
 Inertial correction not applied.
 UNITY window used for least squares adjustment.
 Numerical filter is NO FILTER with 1 coefficients.
 Spectral condition number of normal equations: 100.767

Estimation of noise by FOURIER-spectrum of residuals

0.1 cpd band	0.0000 nm/s**2	1.0 cpd band	0.0000 nm/s**2
2.0 cpd band	0.0000 nm/s**2	3.0 cpd band	0.0000 nm/s**2
4.0 cpd band	0.0000 nm/s**2	white noise	0.0000 nm/s**2

adjusted tidal parameters :

from [cpd]	to [cpd]	wave [nm/s**2]	ampl. [nm/s**2]	ampl.fac.	stdv. [deg]	ph. lead [deg]	stdv. [deg]
0.000100	0.004000	SA	18.0710	1.00001	0.00126	0.0003	0.0556
0.004001	0.020000	SSA	20.0225	1.00000	0.00001	0.0000	0.0004
0.020001	0.050000	MM	22.7686	1.00000	0.00000	-0.0001	0.0001
0.050001	0.080000	MF	43.1098	1.00000	0.00000	0.0000	0.0000
0.080001	0.600000	MTM	8.2541	1.00000	0.00000	-0.0001	0.0000
0.600001	0.910000	Q1	59.1065	1.00000	0.00000	0.0000	0.0000
0.910001	0.949000	O1	308.7083	1.00000	0.00000	-0.0001	0.0000
0.949001	0.980000	M1	24.2656	0.99999	0.00000	-0.0001	0.0001
0.980001	0.999000	P1	143.3722	1.00000	0.00000	-0.0001	0.0000
0.999001	1.001000	S1	3.4426	1.00003	0.00001	-0.0045	0.0007
1.001001	1.004000	K1	296.6587	1.00000	0.00000	-0.0001	0.0000
1.004001	1.006000	PSI1	3.4439	1.00000	0.00001	-0.0013	0.0005
1.006001	1.012000	PHI1	6.1680	0.99998	0.00000	-0.0003	0.0003
1.012001	1.050000	J1	24.2746	1.00000	0.00000	-0.0004	0.0001
1.050001	1.500000	O01	13.2795	1.00000	0.00000	-0.0006	0.0001
1.500001	1.875000	2N2	10.1612	1.00000	0.00000	0.0004	0.0001
1.875001	1.910000	N2	63.6222	1.00000	0.00000	-0.0002	0.0000
1.910001	1.950000	M2	332.2901	1.00000	0.00000	-0.0002	0.0000
1.950001	1.985000	L2	9.3932	1.00000	0.00000	-0.0002	0.0001
1.985001	2.003000	S2	154.3181	1.00000	0.00000	-0.0003	0.0000
2.003001	2.500000	K2	28.7077	1.00000	0.00000	-0.0003	0.0000
2.500001	7.000000	M3M6	4.3445	1.00000	0.00000	-0.0004	0.0000

Adjusted TSCHEBYSCHIEFF polynomial bias parameters :

block	degree	bias	stdv.
1	0	203.610182 nm/s**2	0.000018 nm/s**2
1	1	0.002442 nm/s**2	0.000052 nm/s**2

Standard deviation of weight unit: 0.002
 Degree of freedom: 70082
 Max. correlation: -0.935 bias 1 2 X-wave-SA
 Standard deviation: 0.002 nm/s**2

tide series BFDE403E when using the full Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue. The maximum error of the adjusted tidal parameters is $3 \cdot 10^{-5}$ and 0.0045^0 for wave S1. In Fig. 6 and 7 are given the residuals and their Fourier amplitude spectrum for the benchmark gravity tide series BFDE403E when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue but neglecting the DUT1-correction within program ANALYZE. We can see that the DUT1-correction can amount up to 0.1 nm/s^2 in time domain and up to 0.005 nm/s^2 in frequency domain.

3 How to obtain ETERNA 3.30

The earth tide data processing package ETERNA 3.30 is available to anybody; the package should however not be copied and given to third parties by any user. In order to cover the expenses for copying and distributing the ETERNA package, a fee of US \$ 300.- has to be charged to university and research institutes. The program files (source code and executable files), data files and result files are distributed either on 3.5" floppy disks or on a CD-Rom, together with a manual. All programs can be executed on an IBM-AT compatible personal computer 80386/387 upwards under MS-DOS operating system, and the computing kernels DETIDE, DESPIKE, ANALYZE, OCELOAD and PREDICT (written in Fortran 77 / Fortran 90) can also be compiled on a work station under UNIX operating system. Requests for the ETERNA 3.30 package should be submitted to (please use the order form on the last page for your convenience): Prof. Dr.-Ing. H.-G. Wenzel, Black Forest Observatory, Universität Karlsruhe, Englerstr. 7, D-76128 KARLSRUHE, Germany. Tel.: ++49-721-6082307, FAX: ++49-721-694552. e-mail: wenzel@gik.bau-verm.uni-karlsruhe.de

4 Conclusions

The implementation of the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue into the ETERNA 3.30 package was the final stroke under a four years project to improve the accuracy of the available tidal potential catalogues. We have now in our hands several tools to process earth tide data with very low model errors below 1 ngal.

One reason to improve the accuracy of the tidal potential catalogues was certainly that it was believed that the tidal potential catalogues available in 1989 could significantly contribute to the total error budget when processing high precision earth tide data. Thus, one could expect that improved tidal potential catalogues would reduce the residuals when analyzing high precision earth tide data. From the first application of the earth tide analysis program ANALYZE to different data sets (Tab. 2), we can see an improvement from the Doodson (1921) over the Cartwright et al. (1971,1973) to the Bülfeld (1985) and the Tamura (1987) tidal potential catalogues. We can however hardly see any significant difference when using the tidal potential catalogues of Tamura (1987), Xi (1989), Roosbeek (1996) or Hartmann and Wenzel (1995) for the analysis of observed data. Even the most precise data sets currently available (which have partly been preprocessed with previous versions of ETERNA) are too much corrupted by other error sources (like e.g. atmospheric pressure induced gravity signals) to show the effect of using improved tidal potential catalogues (Fig. 8 ... 11); they are also unable to show the effect of the DUT1-correction.

Nevertheless, we believe that a substantial improvement with respect to accuracy, flexibility and operational comfort has been achieved compared to previous versions of the ETERNA package. ETERNA 3.30 is currently the only earth tide data processing package being able to process earth tide observations with a model accuracy better than 1 ngal.

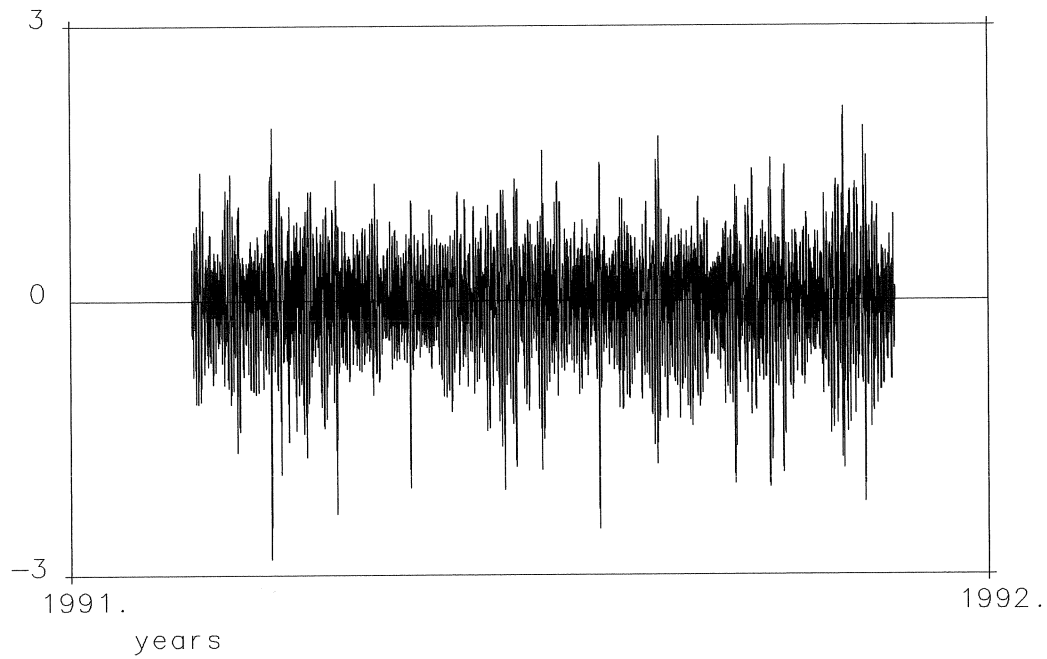


Fig.8: Residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for observed gravity tide series BFET1907 when using the Tamura (1987) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

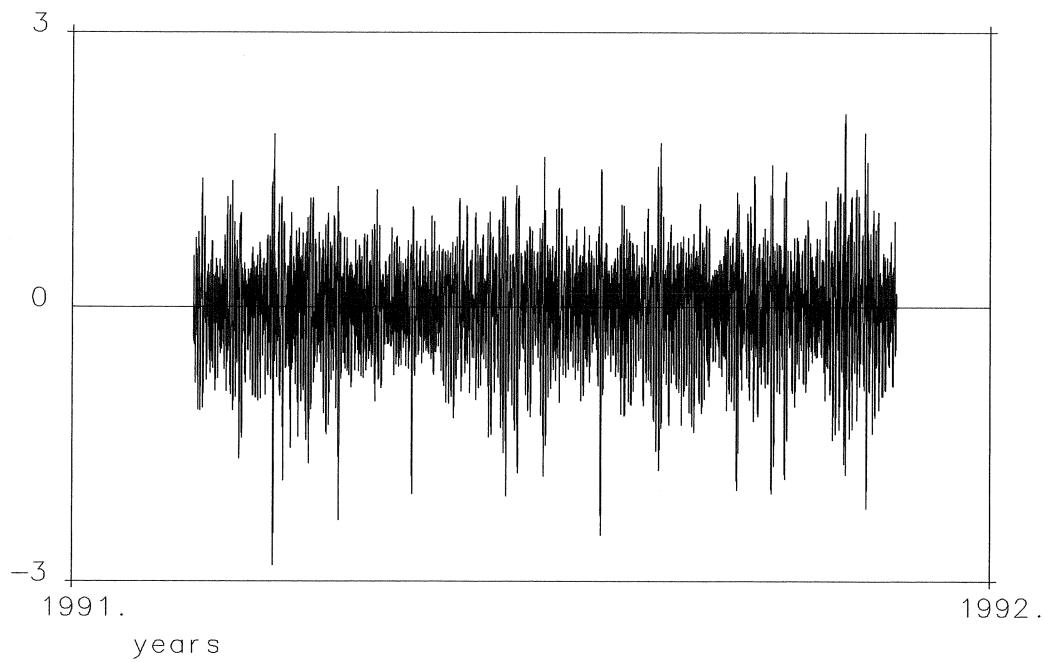


Fig.9: Residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for observed gravity tide series BFET1907 when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

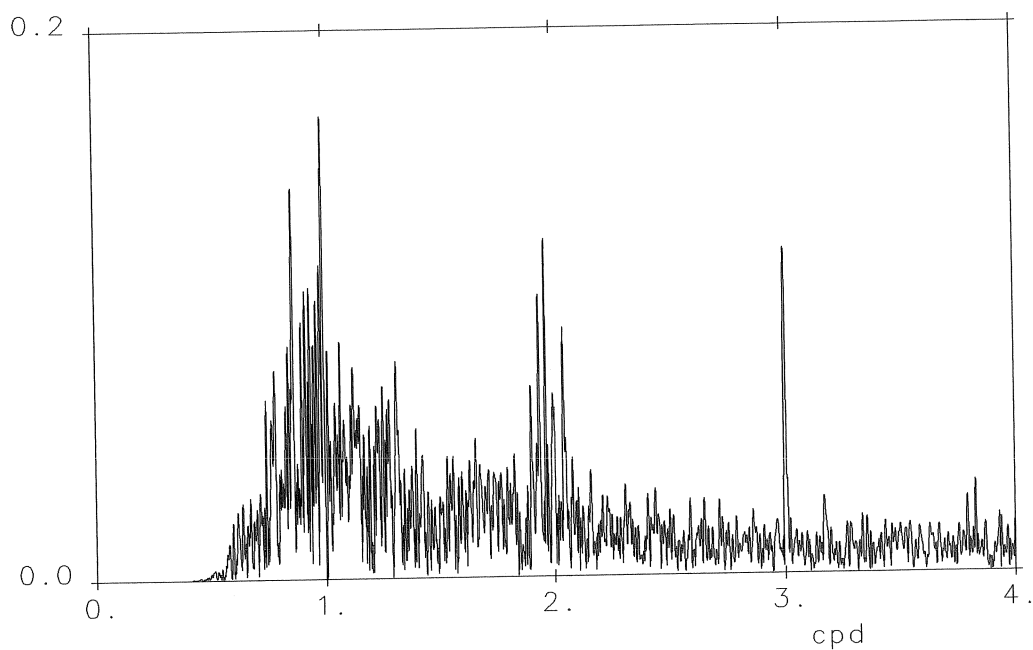


Fig.10: Amplitude spectrum of residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for observed gravity tide series BFET1907 when using the Tamura (1987) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

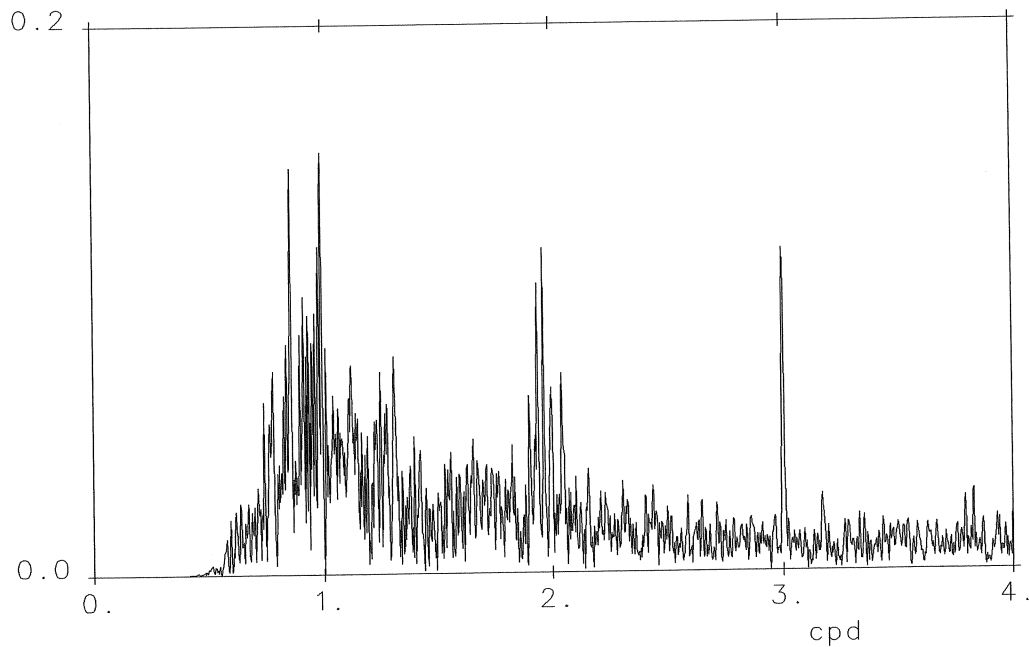


Fig.11: Amplitude spectrum of residuals of earth tide analysis with program ANALYZE for observed gravity tide series BFET1907 when using the Hartmann and Wenzel (1995) tidal potential catalogue; DUT1 corrected.

Tab. 2: Standard deviations from analysis when using different tidal potential catalogues.

DO 1921	=	Doodson (1921)	CT 1973	=	Cartwright et al. (1971, 1973)
BU 1985	=	Buellesfeld (1985)	TA 1987	=	Tamura (1987)
XI 1989	=	Xi (1989)	RO 1996	=	Roosbeek (1996)
HW 1995	=	Hartmann and Wenzel (1995)			

series	unit	DO 1921	CT 1973	BU 1985	TA 1987	XI 1989	RO 1996	HW 1995
BFDE403E	[nm/s ²]	0.910	0.350	0.225	0.068	0.053	0.012	0.002
BFAL8793	[nm/s ²]	0.916	0.351	0.225	0.068	0.051	0.011	0.002
BFD00801	[nstr]	1.577	1.578	1.578	1.578	1.578	1.578	1.578
BFL24903	[nm/s ²]	0.854	0.794	0.676	0.635	0.635	0.634	0.632
BFET1906	[nm/s ²]	0.573	0.528	0.506	0.458	0.462	0.459	0.458
BFET1907	[nm/s ²]	0.752	0.676	0.622	0.561	0.555	0.556	0.556
BHTT4003	[nm/s ²]	6.927	6.890	6.888	6.883	6.885	6.884	6.884
HAL29901	[nm/s ²]	7.044	6.954	6.930	6.948	6.956	6.952	6.952

Series	instrument	epoch	length [days]	filter	remarks
BFDE403E	benchmark	1987-1994	2922.0	no filter	DE403/LE403 ephemerides
BFAL8793	benchmark	1987-1993	2557.0	no filter	DE200 ephemerides
BFL24903	LCR-G249F	1989	121.0	bandpass	BFO Schiltach, digital recording
BFET1906	LCR-ET19	1990	114.5	bandpass	BFO Schiltach, digital recording
BFET1907	LCR-ET19	1991	286.0	bandpass	BFO Schiltach, digital recording
BHTT4003	GWR-TT40	1981-1984	1004.5	no filter	Bad Homburg, digital recording
HAL29901	LCR-G299	1973	63.5	bandpass	Hannover, analog recording

Acknowledgements

Data and programs used in the ETERNA 3.30 package have been supplied by O. Francis and F. Roosbeek (Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles), T. Hartmann (Institut für Theoretische Astrophysik, Universität Tübingen/Germany), B. Richter (Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt a.M/Germany), E.M. Standish (Jet Propulsion Laboratory, Pasadena/USA), Q. Xi (Center for Analysis and Prediction, State Seismological Bureau, Beijing/China), Y. Tamura (National Astronomical Observatory, Mizusawa/Japan). This is gratefully acknowledged.

References

- Büllesfeld, F.-J. (1985): Ein Beitrag zur harmonischen Darstellung des gezeitenerzeugenden Potentials. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 314, München 1985.
- Cartwright, D.E. and A.C. Edden (1973): Corrected tables of tidal harmonics. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **33**, 253-264, Oxford 1973.
- Cartwright, D.E. and R.J. Tayler (1971): New computations of the tide generating potential. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **23**, 45-74, Oxford 1971.
- Chojnicki, T. (1973): Ein Verfahren zur Erdgezeitenanalyse in Anlehnung an das Prinzip der kleinsten Quadrate. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn Nr. 15, Bonn 1973.

- Doodson, A.T. (1921): The harmonic development of the tide generating potential. Proceedings of the Royal Society (London), Series A 100, 306-28. Reprint in International Hydrographic Revue, **31**, No. 1, Monaco 1954.
- Hartmann, T. and H.-G. Wenzel (1995a): The HW95 tidal potential catalogue. Geophysical Research Letters, **22**, no. 24, 3553-3556, 1995.
- Hartmann, T. and H.-G. Wenzel (1995b): Catalogue HW95 of the tide generating potential. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **123**, 9278-9301, Bruxelles 1995.
- Roosbeek, F. (1996): RATGP95: An analytical development of the tide generating potential. Paper submitted to Geophysical Journal International.
- Schüller, K. (1976): Ein Beitrag zur Auswertung von Erdgezeitenregistrierungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 227, München 1976.
- Schüller, K. (1977a): Standard tidal analysis and its modification by frequency domain convolution. Proceedings 8th International Symposium on Earth Tides, Bonn 1977.
- Schüller, K. (1977b): Tidal analysis by the hybrid least squares frequency domain convolution method. Proceedings 8th International Symposium on Earth Tides, Bonn 1977.
- Schüller, K. (1986): Simultaneous tidal and multi-channel input analysis as implemented in the HYCON-method. Proceedings 10th International Symposium on Earth Tides, 515-520, Madrid 1985. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid 1986.
- Schwidersky, E. (1980): Ocean tides, part I: Global ocean tidal equations. Part II: A hydrodynamical interpolation model. Marine Geodesy, **3**, 161-255, 1980.
- Tamura, Y. (1987): A harmonic development of the tide-generating potential. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **99**, 6813-6855, Bruxelles 1987.
- Vetter, M. and H.-G. Wenzel (1995): PREGRED - an interactive graphical editor for digitally recorded tidal data. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **121**, 9102-9107, Bruxelles 1995.
- Wenzel, H.-G. (1976a): Some remarks to the analysis method of Chojnicki. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **73**, 4187-4191, Bruxelles 1976.
- Wenzel, H.-G. (1976b): Zur Genauigkeit von gravimetrischen Erdgezeitenbeobachtungen. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover Nr. 67, Hannover 1976.
- Wenzel, H.-G. (1977): Estimation of accuracy for the earth tide analysis results. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **76**, 4427-4445, Bruxelles 1977.
- Wenzel, H.-G. (1993): Tidal data processing on a personal computer. Proceedings, 12th International Symposium on Earth Tides, 4 - 8. August 1993, 235-244, Beijing 1993.
- Wenzel, H.-G. (1994b): PRETERNA - a preprocessor for digitally recorded tidal data. Bulletin d'Informations, Marées Terrestres, **118**, 8722-8734, Bruxelles 1994.
- Wenzel, H.-G. (1994c): Earth tide data processing package ETERNA 3.20. Bulletin d'Informations Maées Terrestres, **120**, 9019-9022, Bruxelles 1994.
- Wenzel, H.-G. (1995): Format and structure for the exchange of high precision tidal data. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **121**, 9097-9101, Bruxelles 1995.
- Wenzel, H.-G. (1996): Accuracy assessment for tidal potential catalogues. Accepted for publication in Bulletin d'Informations Marées Terrestres, Bruxelles, February 1996.
- Xi, Q. (1989): The precision of the development of the tidal generating potential and some explanatory notes. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, **105**, 7396-7404, Bruxelles 1989.

Order form for ETERNA 3.30 package

I hereby order the ETERNA 3.30 package for scientific use only in my university or research institution.

Please choose one of the following storage media:

- ☐ On seven 3.5" floppy disks readable under MS-DOS operation system.
- ☐ On a CD-Rom readable under MS-DOS operation system.

Please choose one of the following ways of payment to cover the distribution expenses:

- ☐ I have added an international bank cheque of 300 \$ US payable to Baden-Württembergische Bank Karlsruhe.
- ☐ I have transferred US \$ 300.- to Baden-Württembergische Bank Karlsruhe, account no. 4002014103 titel 28292 BA 119 Kap. 1417.

Name: _____

Institute: _____

Street: _____

City: _____

Country: _____

Phone: _____

FAX: _____

E-mail: _____

Signature: _____

Send this form back to: Prof. Dr. H.-G. Wenzel, Black Forest Observatory,
Universität Karlsruhe, Englerstr. 7, D-76128 KARLSRUHE, Germany,
Fax: ++49721-694552

A PROPOS DES MODES PRINCIPAUX DE L'OPERATEUR
DE POINCARÉ DANS UNE SPHERE

E.L. Resnikov, L.M. Rosenknop
Institut International de la théorie de la prévision
des tremblements de terre et de la géophysique
mathématique de l'Académie Russe des Sciences.

GEODYNAMIQUE ET PREVISION DES TREMBLEMENTS DE TERRE

Publ. 26, pp 156-163, 1994.

Dans certains problèmes (par exemple lors de la recherche des modes principaux qui sont fonctions propres d'opérateurs) apparaît la question de sélectionner les plus simples, ou les moins oscillants, des vecteurs ou tenseurs dans une famille donnée. Si le spectre de l'opérateur est discret (en particulier dans le problème de Sturm-Liouville) la comparaison des valeurs propres permet souvent de reconnaître les modes les moins oscillants. Si le spectre de l'opérateur est dense dans un intervalle, alors pour la comparaison des modes la connaissance des nombres propres peut être insuffisante.

Dans l'espace euclidien, en coordonnées cartésiennes, les champs constants les plus simples (et moins oscillants) sont obtenus par translation parallèle. En coordonnées curvilignes ces champs s'appellent covariantement constants. Dans ce travail on propose d'utiliser l'intégrale normalisée de Dirichlet en tant que fonctionnelle définie sur les champs vectoriels permettant de comparer les champs selon "leur comportement oscillatoire" c'est-à-dire d'après le degré de leur écart dans ce sens en fonction du champ constant. Cette fonctionnelle a été utilisée pour la classification des modes propres connus de l'opérateur de Poincaré dans une sphère. On peut également l'appliquer dans le problème plus complexe de recherche des modes principaux de l'opérateur de Poincaré dans une couche sphérique: dans l'espace des champs indivergenciels (solénoïdaux) lissés on peut choisir une base normalisée conforme et construire une succession des sous espaces de Galerkin en utilisant cette base.

1. Nous rappellerons la définition de la dérivée covariante (contravariante) du champ vectoriel q [1]. Nous examinerons, dans R^3 , un domaine Ω avec pour coordonnées $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ et un champ vectoriel $q(x)$ dans ce domaine (x est le rayon vecteur d'un point dans Ω). Les vecteurs $e_i = \delta x / \delta \alpha^i$, $i = 1, 2, 3$ forment une base locale dans l'espace tangent T_x et $q(x) = q^i e_i$. Les $g_{ij} = (e_i, e_j)$ sont les composantes du tenseur métrique G . Dans le système de coordonnées curvilignes $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ les vecteurs de base e_i sont différents en différents points et c'est pourquoi

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \alpha^k} e_i + q^i \frac{\partial e_i}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \alpha^k} e_i + \Gamma_{ik}^m q^i e_m,$$

ou

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial q^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma_{ik}^m q^i \right) e_m.$$

les

$$q_{;k}^m = \frac{\partial q^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma_{ik}^m q^i$$

sont les composantes tensorielles de la dérivée covariante du vecteur q contravariant. Les Γ_{ik}^m sont les symboles de Cristoffel de seconde espèce. Ils sont symétriques en les indices inférieurs et on peut les exprimer à partir des dérivées des composantes du tenseur métrique g_{ij} .

2. En coordonnées cartésiennes tous les $\Gamma_{ik}^m = 0$ et $Q = [q^m; k]$ est la matrice de Jacobi de l'image: $x \rightarrow q(x)$. La norme de cette matrice caractérise la dilatation du champ $q(x)$ au point x . Il nous est plus facile d'examiner le carré de la norme de la matrice de Jacobi Q :

$$|Q|^2 = Sp(Q^* Q) = \sum_{m,k} |q_{;k}^m|^2$$

(le signe astérisque "*" désigne pour les nombres et pour les matrices le conjugué complexe). En coordonnées curvilignes $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ la valeur correspondante de la norme carrée est :

$$B = g^{ik}(q_{;k}^m)^* g_{mn} q_{;i}^n$$

Ici g^{ik} sont les composantes de la matrice G^{-1} .

Il est clair que B est l'invariant scalaire (contraction) du tenseur de la dérivée covariante $q_{;k}^m$. Dans l'expression sous forme matricielle B a l'aspect

$$B = Sp(G^{-1} Q^* G Q) = Sp(G^{-1/2} G^{-1/2} Q^* G^{1/2} G^{1/2} Q) =$$

où

$$= Sp(G^{-1/2} Q^* G^{1/2} G^{1/2} Q G^{-1/2}) = Sp(D^* D),$$

$$D = G^{1/2} Q G^{-1/2}.$$

Nous introduirons la fonctionnelle

$$R(q) = \left[\frac{\int_{\Omega} B dv}{\int_{\Omega} |q|^2 dv} \right]^{1/2} \quad (1)$$

La normalisation est nécessaire pour que la multiplication du champ q par une constante ne change pas R . Il est évident que $R \geq 0$ et $R(q) = 0$ si le champ q est covariant constant. La valeur R caractérise ainsi la "variabilité" moyenne dans le domaine Q du champ q ou la détériorisation du lissage du champ q en comparaison avec le champ constant.

Remarque : à l'aide de la dérivée covariante d'un champ, contraction et moyennisation on peut introduire une fonctionnelle analogue pour n'importe quels champs de tenseurs lissés. Pour la fonction lissée (adoucie) f , par exemple, la fonctionnelle a la forme

$$R \equiv [\int |\nabla f|^2 dv / \int f^2 dv]^{1/2}.$$

Nous utiliserons la fonctionnelle R pour la classification des modes propres, apparaissant dans le problème spectral ci-après

3. Nous examinerons le problème relatif au spectre de l'opérateur de Poincaré

$$\begin{cases} \lambda q = Kq = i[1_z, q] - \nabla \Phi, & \text{div } q = 0, \\ (q, n)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Ici q est le champ de vitesse d'un liquide idéal incompressible dans le domaine Ω avec une frontière lisse $\partial\Omega$; n est le vecteur unitaire de la normale à la surface $\partial\Omega$; $[a, b]$ est le produit vectoriel de a et b ; 1_z est le vecteur unitaire, parallèle à l'axe z ; ϕ est le potentiel scalaire associé à q , tel que $\text{div}(Kq) = 0$; λ est le paramètre spectral; i est l'imaginaire. L'opérateur K s'appelle opérateur de Poincaré. Cet opérateur apparaît en particulier dans le problème linéarisé de la rotation du réservoir Ω rempli d'un liquide idéal incompressible [2]. Nous donnerons certaines propriétés de l'opérateur de Poincaré [2], [3]: a). K - est l'opérateur limité et auto-conjugué sur les champs vectoriels indivergenciels (solenoidaux), $\|K\| \leq 1$.

b). Le spectre de l'opérateur K remplit tout l'intervalle $[-1, 1]$. Les points -1 et 1 n'appartiennent pas au spectre ponctuel de l'opérateur K .

4. Le problème spectral (2), (3) se réduit (par la transformation de Poincaré) à une seule équation scalaire pour le potentiel ϕ

$$-\lambda^2 \nabla^2 \Phi + (1_z, \nabla)^2 \Phi = 0 \quad (4)$$

avec la condition aux limites

$$-\lambda^2 (\nabla \Phi, n) + (1_z, n)(\nabla \Phi, 1_z) - i\lambda (\nabla \Phi, n \times 1_z) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

L'expression

$$2(1 - \lambda^2)q = [1_z, \nabla \Phi] - i\lambda \nabla \Phi - \frac{1}{i\lambda} 1_z (1_z, \nabla \Phi), \quad (6)$$

obtenue par (2) permet de calculer q à partir de ϕ trouvé. Les systèmes (2)-(3) et (4)-(5) sont équivalents.

5. Le problème a été résolu pour un réservoir sphérique il y a plus de cent ans [4]. Nous exposerons brièvement cette solution. Par simplicité nous prendrons le rayon de la sphère Ω égal à l'unité. En coordonnées cylindriques s, y, z le système (4), (5) prend la forme

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (7)$$

$$s \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \Big|_{\partial\Omega}. \quad (8)$$

Nous cherchons une solution de ce problème sous la forme

On peut se limiter à des valeurs non négatives de k : la valeur propre $-\lambda$ correspond à l'indice $-k$. La substitution de l'expression de la solution pour ϕ dans les équations (7) et (8) donne pour ϕ le système suivant :

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} \right) - \frac{k^2 \tilde{\Phi}}{s^2} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} = 0, \quad (9)$$

$$s \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} + \frac{k}{\lambda} \tilde{\Phi} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) z \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = 0 \Big|_{\partial Y}, \quad (10)$$

$$Y = \{(s, z): s^2 + z^2 \leq 1, s \geq 0\}.$$

Bryan a proposé la substitution de variables

$$\begin{cases} s = \left(\frac{1}{1 - \lambda^2} \right)^{1/2} (1 - u^2)^{1/2} (1 - v^2)^{1/2} \\ z = \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right)^{1/2} uv \end{cases} \quad (11)$$

Ici

$$|\lambda| < 1.$$

La substitution de (11) dans (9) permet d'obtenir une équation dans laquelle les variables u et v sont séparées, la solution se factorise et peut être écrite sous la forme

$$\tilde{\Phi} = P_n^k(u) P_n^k(v), \quad \text{où} \quad P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$$

où $P_n^k(x)$ est le polynôme de Legendre associé de $P_n(x)$ qui est le polynôme de Legendre de degré n . Dans les variables s, z :

$$\tilde{\Phi}(s, z) = P_n^k(u(s, z, \lambda)) P_n^k(v(s, z, \lambda)).$$

La condition aux limites (10) transformée à l'aide de (11) (objectif de la substitution) permet d'écrire l'équation de dispersion pour le paramètre spectral λ :

$$k P_n^k(\lambda) = (1 - \lambda^2) \frac{d}{d\lambda} P_n^k(\lambda),$$

ou

$$k \frac{d^k}{d\lambda^k} P_n(\lambda) = (1 - \lambda) \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} P_n(\lambda). \quad (12)$$

Remarque : L'équation (12) a des solutions uniquement pour $n > k$ et qui ne sont différentes de l'unité que pour $n \geq 2$.

Ainsi, λ_{knm} , m -ième racine de l'équation (12), est une valeur propre de l'opérateur K et

$$\Phi(s, \varphi, z) = P_n^k(u(s, z, \lambda_{knm})) P_n^k(v(s, z, \lambda_{knm})) e^{ik\varphi} \quad (13)$$

est la fonction propre (potentiel) du système (9), (10) correspondant à cette valeur propre λ_{knm} .

6. Nous représentons le polynôme associé de Legendre sous la forme

$$P_n^k(y) = \prod_{j=1}^{L_{nk}} (y^2 - y_j^2) Y^{e_{nk}}, \quad (14)$$

où y_j est le j -ième zéro de P_n^k dans $(0, 1)$; L_{nk} est le nombre de ces zéros; $e_{nk} = 0$ si les indices k et n ont même parité, $e_{nk} = 1$ s'ils ont une parité différente. En utilisant (13) et (14) nous obtenons

$$\Phi_{knm}(s, \varphi, z) = z^{e_{nk}} s^k H(s, z, \lambda_{knm}) e^{ik\varphi}, \quad (15)$$

où

$$H = \prod_{j=1}^{L_{nk}} \{y_j^2 (1 - \lambda_{knm}^2) s^2 + \lambda_{knm}^2 (1 - y_j^2) z^2 + y_j^2 (y_j^2 - 1)\}. \quad (16)$$

La formule (6) permet d'écrire la vitesse $q = (A_s, A_\varphi, A_z)$ sous la forme:

$$\begin{cases} A_s = -\frac{1}{1-\lambda^2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \\ A_\varphi = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{i\lambda}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ A_z = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \quad (17)$$

après avoir substitué ϕ et λ_{knm} en (17), nous obtiendrons q_{knm} , fonctions propres du problème (4), (5) correspondant à λ_{knm} .

7. Nous examinerons comment se comporte $R(q)$ sur les champs propres du problème posé. En coordonnées cylindriques la matrice D a pour le champ vectoriel $q = (A_s, A_\varphi, A_z)$, la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_s}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial A_s}{\partial \varphi} - \frac{1}{s} A_\varphi & \frac{\partial A_s}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} A_s & \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

La formule (1) donne, dans notre cas :

$$R^2(q) = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_Y s \left(\sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}|^2 \right) ds dz}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_Y s (|A_s|^2 + |A_\varphi|^2 + |A_z|^2) ds dz} \quad (18)$$

$$Y = \{(s, z): s^2 + z^2 \leq 1, s \geq 0\}.$$

8. Nous donnons ci-après la composition des valeurs λ_{knm} et $R_a = R_{knm}^2$ pour tous les k et n pour lesquels existent des valeurs $R_a \leq 200$. La valeur R_a est choisie pour la facilité: certaines valeurs de R^2 sont entières et s'expriment par les formules suivantes :

$$R_{0,n,1}^2 = \frac{1}{3} n(n-1)(2n+5) - 1,$$

$$R_{k,k+1,1}^2 = k(2k+3).$$

La composition des paires (λ_{knm}) pour certains modes propres de l'opérateur de Poincaré dans la sphère est donnée dans le tableau ci-après. Pour chaque paire (k, n) , m prend les valeurs $m = 1 \dots M_{kn}$ où M_{kn} est le nombre de racines de l'équation (12). Les données permettent de constater que :

a. Pour chaque k , la valeur de R croît avec la croissance de n .

b. Pour des (k, n) fixés dans le cas général il n'y a pas de dépendance monotone de R en λ_{knm} sauf pour le cas $k = 0$: pour n'importe quel n , la valeur de la fonctionnelle R est la même pour toutes les valeurs propres $\lambda_{0,nm}$, $m = 1, 2, \dots$

c. Les 10 premiers modes principaux (les moins oscillants) par exemple ont les compositions des indices:

$$\begin{array}{l} k=0 \quad n=2 \quad \begin{pmatrix} 0. \\ 5. \end{pmatrix} \\ \\ n=3 \quad \begin{pmatrix} -0.447 \\ 21. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.447 \\ 21. \end{pmatrix} \\ \\ n=4 \quad \begin{pmatrix} -0.654 \\ 51. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.0 \\ 51. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.654 \\ 51. \end{pmatrix} \\ \\ n=5 \quad \begin{pmatrix} -0.765 \\ 99. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.285 \\ 99. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.285 \\ 99. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.765 \\ 99. \end{pmatrix} \\ \\ n=6 \quad \begin{pmatrix} -0.830 \\ 169. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.468 \\ 169. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.0 \\ 169. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.468 \\ 169. \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.830 \\ 169. \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 k=1 \quad n=2 & \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5. \end{pmatrix} \\
 n=3 & \begin{pmatrix} -0.088 \\ 18.233 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.754 \\ 23.767 \end{pmatrix} \\
 n=4 & \begin{pmatrix} -0.410 \\ 44.436 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.305 \\ 49.715 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.854 \\ 58.847 \end{pmatrix} \\
 n=5 & \begin{pmatrix} -0.591 \\ 86.681 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.034 \\ 95.078 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.522 \\ 99.230 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.902 \\ 115.01 \end{pmatrix} \\
 n=6 & \begin{pmatrix} -0.702 \\ 148.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.268 \\ 161.82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.220 \\ 166.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.653 \\ 171.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.930 \\ 196.96 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=2 \quad n=3 & \begin{pmatrix} 0.333 \\ 14. \end{pmatrix} \\
 n=4 & \begin{pmatrix} -0.115 \\ 37.425 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.615 \\ 43.574 \end{pmatrix} \\
 n=5 & \begin{pmatrix} -0.381 \\ 75.280 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.233 \\ 87.109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.748 \\ 90.610 \end{pmatrix} \\
 n=6 & \begin{pmatrix} -0.546 \\ 130.79 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.050 \\ 150.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.442 \\ 156.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.821 \\ 159.48 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=3 \quad n=4 & \begin{pmatrix} 0.25 \\ 27. \end{pmatrix} \\
 n=5 & \begin{pmatrix} -0.126 \\ 62.632 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.526 \\ 69.368 \end{pmatrix} \\
 n=6 & \begin{pmatrix} -0.359 \\ 113.51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.188 \\ 133.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.670 \\ 129.83 \end{pmatrix} \\
 n=7 & \begin{pmatrix} -0.511 \\ 183.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.060 \\ 218.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.386 \\ 225.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.755 \\ 212.91 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$k=4 \quad n=5 \quad \begin{pmatrix} 0.2 \\ 44. \end{pmatrix}$$

$$n=6 \quad \begin{pmatrix} -0.130 \\ 93.856 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.463 \\ 101.14 \end{pmatrix}$$

$$n=7 \quad \begin{pmatrix} -0.340 \\ 159.12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.158 \\ 189.44 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.610 \\ 176.43 \end{pmatrix}$$

$$k=5 \quad n=6 \quad \begin{pmatrix} 0.166 \\ 65. \end{pmatrix}$$

$$n=7 \quad \begin{pmatrix} -0.131 \\ 131.09 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.417 \\ 138.90 \end{pmatrix}$$

$$k=6 \quad n=7 \quad \begin{pmatrix} 0.142 \\ 90. \end{pmatrix}$$

$$n=8 \quad \begin{pmatrix} -0.131 \\ 174.35 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.381 \\ 182.64 \end{pmatrix}$$

$$k=7 \quad n=8 \quad \begin{pmatrix} 0.125 \\ 119. \end{pmatrix}$$

$$k=8 \quad n=9 \quad \begin{pmatrix} 0.111 \\ 152. \end{pmatrix}$$

$$k=9 \quad n=10 \quad \begin{pmatrix} 0.1 \\ 189. \end{pmatrix}$$

11. Геодинамика. . .

Remarques

- a) Dans ce problème, lors du calcul de $R(q)$ l'ordinateur n'est nécessaire que pour le calcul des racines des équations de dispersion et des zéros des polynômes associés de Legendre. Tout le reste peut être fait avec précision de manière analytique.
- b) Dans le problème donné, ayant des expressions explicites pour ϕ_{knm} , on pourrait deviner la dépendance de R en k et n . Le lien de R avec λ_{knm} est très difficile à imaginer.
- c) Pour tout k fixé, les champs les moins oscillants sont les champs vectoriels correspondant à $n = k + 1$. Dans ces cas $m = 1$ et il existe un seul $\lambda_{k, k+1, 1} = 1/k + 1$. Ces vecteurs sont dérivés des potentiels $\phi = z s^k e^{ik\phi}$. En 9 on a montré que ces champs sont les seuls champs propres toroïdaux dans ce problème.

9. Un champ vectoriel $q(x)$ s'appelle toroïdal s'il existe cette fonction scalaire $T(x)$ telle que

$$q = \text{rot} (x T(x)) = [\nabla T, x] \quad (19)$$

Un champ toroïdal n'a pas de composante radiale c'est pourquoi en coordonnées cylindriques $q = A_s, A_\psi, A_z$ satisfait à la condition

$$sA_s + zA_z = 0 \quad (20)$$

en chaque point de Ω .

Soit $k > 0$ fixé et $\lambda \neq 0$, une valeur propre qui est une racine probable d'une des équations (12) répondant aux valeurs $n_1, n_2, \dots$. Le potentiel propre arbitraire correspondant à cette valeur λ , a la forme

$$\Phi(s, \varphi, z) = s^k \Psi(s, z, \lambda) e^{ik\varphi}, \quad (21)$$

où

$$\Psi = \sum c_i z^{e_i} H_i(s, z, \lambda), \quad c_i \in H_i(s, z, \lambda)$$

se déterminent par les paires (k, n_i) et par la formule (16); c_i sont des coefficients arbitraires. En utilisant (17), (20), (21) et éliminant $e^{ik\varphi}$, nous obtiendrons

$$\frac{k\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda^2} s^k \Psi + s^k \frac{\lambda^2 s \Psi'_s - (1-\lambda^2) z \Psi'_z}{1-\lambda^2} = 0,$$

où

$$\frac{k\lambda}{1-\lambda} + \frac{\lambda^2 s \Psi'_s - (1-\lambda^2) z \Psi'_z}{(1-\lambda^2) \Psi} = 0. \quad (22)$$

Le second terme ne dépend pas de s et z et est différent de zéro puisque $k > 0, \lambda \neq 0$. En examinant les coefficients des puissances supérieures de s et z en Ψ il est facile de démontrer que (22) n'a de solution que dans le cas où $\psi = \alpha s + \beta z$ où α et β sont des nombres arbitraires. Mais Ψ ne renferme s que suivant les degrés pairs c'est pourquoi $\alpha = 0$ et le second terme en (22) est égal à -1 . D'où $\lambda = 1/(k+1)$ et $n = k + 1$.

Ainsi les seuls champs propres satisfaisant à la condition (20) ont le potentiel $\phi = z s^k e^{ik\phi}$ et la valeur propre $\lambda = 1/(k+1)$. Ces champs ont la forme

$$\mathbf{q} = \{A_s, A_\phi, A_z\},$$

où

$$A_s = -\frac{i(k+1)}{s} \Phi, \quad A_\phi = \frac{(k+1)}{s} \Phi, \quad A_z = \frac{i}{2} (k+1) \Phi.$$

Ils sont toroïdaux puisqu'ils satisfont à (19) avec $T = -(k+1/k) s^k e^{ik\phi}$.

M.M. Vichik fut le premier à formuler le problème sur les modes principaux de l'opérateur de Poincaré. Les auteurs ont utilisé ses conseils et leçons non publiées sur l'hydrodynamique et expriment à M.M. Vichik une profonde reconnaissance.

Bibliographie

1. Победра Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.
2. Гринспен Х.П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 303 с.
3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. Bryan G.H. The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity // Phil. Trans. Roy. Soc. 1889. Vol. A180. P. 187-219.

Traduction

SUR LES APPROXIMATIONS LISSEES DES MODES PROPRES
DE L'OPERATEUR DE POINCARÉ DANS UNE COUCHE SPHERIQUE

E.L. Resnikov, L.M. Rosenknop
Institut International de la théorie de la prévision
des tremblements de terre et de la géophysique
mathématique de l'Académie Russe des Sciences.

PROBLEMES THEORIQUES DE GEODYNAMIQUE ET DE SEISMOLOGIE

Publicat. 27, pp. 70-85, 1994

Introduction

L'opérateur de Poincaré apparaît dans le problème des ondes inertielles dans un noyau liquide, cadre du modèle le plus simple de la Terre. Dans ce modèle le noyau extérieur est représenté par un liquide incompressible, non visqueux, en rotation entre deux sphères concentriques. Les courants dans le noyau liquide de la Terre sont en soi très intéressants pour la géophysique fondamentale. D'autre part selon les représentations actuelles, le champ magnétique terrestre s'excite par le courant du liquide constituant le noyau externe de la Terre. Dans la théorie cinématique de la dynamo magnétique ce courant est considéré comme donné (voir [1 à 3]).

L'analyse des mouvements propres du noyau liquide (dans le cas de faibles variations résultant de la rotation du corps solide) conduit au problème du spectre et des champs propres de l'opérateur de Poincaré dans une couche sphérique. Ce problème n'a pas de solution exacte [4], c'est pourquoi à côté de l'expérimentation (références voir en [4]), l'essai de solutions approximatives à l'aide de l'ordinateur peut être utile. On sait comment est devenu le spectre continu de l'opérateur de Poincaré d'un liquide idéal en rotation [5] - les séries de Weil déterminant cette partie du spectre représentant un champ oscillant rapidement dans l'espace. Ce qui nous intéresse est de savoir s'il y a dans ce problème un spectre discret. C'est pourquoi nous examinerons les champs "lissés" (lentement oscillant) et établirons par eux des approximations des modes propres principaux (probablement généralisés) de l'opérateur de Poincaré. Dans le présent travail on décrit la construction de la base lissée de Galerkin ordonnée harmoniquement. Comme critère de lissage on a choisi l'intégrale normalisée de Dirichlet déterminée dans les champs vectoriels lissés. L'exemple d'utilisation de cette fonction est décrit en [6]. La base obtenue est commode pour l'établissement des approximations lissées des modes principaux dans une couche sphérique et peut être utile dans un problème plus général sur le courant d'un liquide visqueux dans une couche sphérique en rotation pour la description des solutions hors des couches limites.

1. But du travail

Nous examinerons le problème spectral suivant:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{q} = A\mathbf{q} \equiv [1_z, \mathbf{q}] - \nabla \Phi, & \text{div } \mathbf{q} = 0, \\ (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

où A est l'opérateur de Poincaré apparaissant dans l'hydrodynamique d'un liquide en rotation; ϕ est une fonction scalaire inconnue (potentiel); Ω est la couche sphérique de rayon intérieur r_0 et extérieur unitaire; 1_z est le vecteur unitaire dirigé suivant z . Cet opérateur est symétrique diagonal, son spectre est partout dense sur l'intervalle $(-i, i)$ (i - unité imaginaire). Les extrémités n'appartiennent pas au spectre discret de l'opérateur A [4, 5]. Une solution exacte du problème (1), (2) n'est pas connue. La recherche d'une solution approchée, par exemple, par la méthode de Galerkin, exige le choix d'une base convenant dans l'espace correspondant des fonctions.

Nous désignerons par $V(\Omega)$ l'espace de Hilbert des champs vectoriels lissés indivergencielles (solénoïdaux) dans la couche Ω , satisfaisant à la condition aux limites (2) avec un produit scalaire

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_{\Omega} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2^*) dv$$

(ici et par la suite le signe $*$ désigne le conjugué des scalaires et des matrices). Dans le travail [6] on a proposé la fonctionnelle $R(\mathbf{q})$ permettant de distinguer les champs selon le lissage (selon le degré d'oscillation) dans l'espace. Dans ce travail nous construirons une base dans $V(\Omega)$ dont les éléments sont ordonnés suivant la décroissance de $R(\mathbf{q})$. Cette base est satisfaisante pour construire des approximations lissées de Galerkin vers des solutions propres ou quasi propres (généralisées) du problème (1), (2).

Indications préliminaires

Nous énumérerons une série de facteurs connus utilisés dans ce travail. Nous introduisons dans Ω les coordonnées sphériques r, θ, ϕ . On sait (voir [7]) que $2n + 1$ fonctions sphériques d'ordre n :

$$\begin{aligned} P_n^{m+}(\theta, \varphi) &= \sin(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \\ P_n^{m-}(\theta, \varphi) &= \cos(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad m = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

sont fonctions propres pour l'opérateur Δ_s - partie "angulaire" de l'opérateur de Laplace :

$$\Delta_s P_n^m = -n(n+1) P_n^m, \quad (3)$$

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (4)$$

$$P_n^{(m)}(\cos \theta) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \Big|_{x=\cos \theta},$$

$P_n(x)$ est le polynôme de Legendre de degré n .

Le symbole P_n^m en (3) signifie ensuite n'importe laquelle des fonctions P_n^{m+} et P_n^{m-} (quand c'est admissible). Les signes "+" et "-" correspondent à $\sin(m\phi)$ et $\cos(m\phi)$ dans les formules pour les fonctions sphériques dans les deux fonctions de même $m > 0$. Soit (ℓ, m) une paire ordonnée des indices supérieurs des fonctions P_k et P_n^m . Nous déterminerons sur ces paires (ℓ, m) une fonction

$$\gamma_m = \begin{cases} 1, & \text{si les nombres forment dans la paire la combinaison } (+, -), \\ 0, & \text{dans le cas des paires } (+, +) \text{ et } (-, -), \\ -1, & \text{pour la combinaison } (-, +) \end{cases}$$

Cette fonction sera utile pour l'écriture de certaines formules. Les fonctions sphériques satisfont aux relations [7]

$$\int_{S_1} P_k^l P_n^m d\sigma = \delta_{kn} \delta_{lm} (1 - |\gamma_{lm}|) Z_{kl}, \quad (5)$$

$$\int_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) d\sigma = k(k+1) \delta_{kn} \delta_{lm} (1 - |\gamma_{lm}|) Z_{kl}, \quad (6)$$

où S_1 est la sphère unitaire; $\nabla_s = e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ - le gradient horizontal; e_r, e_θ, e_ϕ la base locale,

$$Z_{kl} = \int_{S_1} (P_k^l)^2 d\sigma. \quad (7)$$

De (3) et (4) il s'ensuit que

$$(P_k^l)''_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (P_k^l)'_\theta + \left(k(k+1) - \frac{l^2}{\sin^2 \theta} \right) P_k^l = 0. \quad (8)$$

Nous rappellerons que les champs vectoriels satisfaisant aux relations

$$B_t = \text{rot}(T(r)r) = [\nabla T, r] \quad \text{et} \quad B_p = \text{rot rot}(P(r)r)$$

($T(r)$ et $P(r)$ sont des fonctions scalaires arbitraires) s'appellent respectivement des champs toroïdaux et poloïdaux. On montre [1, 8] que

$$\text{rot } B_p = -\text{rot}(\Delta P(r)r). \quad (9)$$

Un champ arbitraire B de $V(\Omega)$ peut être représenté sous la forme : $B = B_t + B_p$ où B_t et B_p se déterminent univoquement par le champ B [1, 8].

3. Choix de la base dans l'espace des champs indivergentiels dans la couche sphérique.

Nous construisons dans $V(\Omega)$ une base de champs toroïdaux et poloïdaux sous la forme

$$\begin{aligned} t_\alpha &= c_{t_\alpha} \text{rot}(R_i(r) P_k^l(\theta, \phi) r), \\ p_\beta &= c_{p_\beta} \text{rot rot}(\tilde{R}_j(r) P_n^m(\theta, \phi) r). \end{aligned}$$

α et β désignent ici les trois indices (i, k, l) et (j, n, m) . Les facteurs c_{t_α} et c_{p_β} et les fonctions $R_i(r)$ et $\tilde{R}_j(r)$ seront choisies plus tard. Nous voulons que ces champs vectoriels satisfassent aux conditions aux limites (2). Les champs vectoriels t_α n'ont pas de composante radiale, c'est pourquoi pour ceux-ci la condition (2) est réalisée pour n'importe quel R_i . Afin que les champs p_β satisfassent à (2) ils doivent remplir les conditions :

$$\tilde{R}_j(r_0) = \tilde{R}_j(1) = 0. \quad (10)$$

La matrice de Gram du système des champs $\langle t_\alpha, p_\beta \rangle$ comporte des éléments des trois aspects : $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle$, $\langle t_\alpha, p_\beta \rangle$, $\langle p_\alpha, p_\beta \rangle$. En utilisant (5), (6) et (9) on peut calculer ces éléments :

$$\begin{aligned} \text{a. } \langle t_\alpha, t_\beta \rangle &= \int_{\Omega} (\text{rot}(R_i P_k^l r), \text{rot}(R_j P_n^m r)) dv = \int_{r_0}^1 r^2 R_i \tilde{R}_j dr \int_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) d\sigma = \\ &= k(k+1) \delta_{kn} \delta_{lm} (1 - |\gamma_{lm}|) Z_{kl} \int_{r_0}^1 r^2 R_i \tilde{R}_j dr. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \langle t_\alpha, p_\beta \rangle &= \int_{\Omega} (\text{rot}(R_i P_k^l r), \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)) dv = \\ &= \int_{\Omega} \text{div}[R_i P_k^l r, \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)] dv + \int_{\Omega} (R_i P_k^l r, \text{rot rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)) dv = \\ &= \int_{\partial\Omega} ([R_i P_k^l r, \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)], e_r) d\sigma - \int_{\Omega} (R_i P_k^l r, \text{rot}(\Delta(\tilde{R}_j P_n^m r))) dv = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \langle p_\alpha, p_\beta \rangle &= \int_{\Omega} (\text{rot rot}(\tilde{R}_i P_k^l r), \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)) dv = \\ &= \int_{\Omega} \text{div}[\text{rot}(\tilde{R}_j P_n^m r), \text{rot rot}(\tilde{R}_i P_k^l r)] dv - \int_{\Omega} (\text{rot}(\tilde{R}_j P_n^m r), \text{rot}(\Delta(\tilde{R}_i P_k^l r))) dv. \end{aligned}$$

La première intégrale se transforme en intégrale de surface et devient zéro puisque dans l'intégrand apparaît le facteur $\tilde{R}_j$ nul aux points limites de l'intervalle. Ensuite, puisque

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_s \right),$$

alors

$$\Delta(\tilde{R}_i P_k^l) = -\frac{P_k^l}{r^2} \left(k(k+1) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \tilde{R}_i$$

et la deuxième intégrale a la forme

$$\int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j) dr \int_{S_1} (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) d\sigma,$$

où

$$B_k = k(k+1) - \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

Dans la plupart des fonctions lissées sur $[r_0, 1]$ satisfaisant à (10), l'opérateur B_k est positif auto conjugué. Finalement :

$$\langle p_\alpha, p_\beta \rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1-|\gamma_{lm}|)Z_{kl} \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j) dr.$$

Si $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ sont choisis de sorte que $\int_{r_0}^1 r^2 R_i R_j dr$ et $\int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j) dr$ soient égales à zéro pour $i \neq j$, alors la matrice de Gram du système obtenu devient diagonale. Si on pose ensuite

$$c_{t_\alpha} = \left[k(k+1)Z_{kl} \int_{r_0}^1 r^2 R_i^2 dr \right]^{-1/2}, \quad c_{p_\beta} = \left[k(k+1)Z_{kl} \int_{r_0}^1 \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) dr \right]^{-1/2}, \quad (12)$$

alors la matrice de Gram devient identité. Les fonctions R_i et $\tilde{R}_j$ doivent en outre être choisies de sorte que le système construit $\langle t_\alpha, p_\beta \rangle$ soit complet. Il forme alors une base orthonormale dans $V(\Omega)$. Le choix des fonctions R_i et $\tilde{R}_j$ est décrit dans la section 6.

4. Matrice de l'opérateur de Poincaré dans la base choisie et structure des sous espaces invariants

Nous supposons que $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$ et les facteurs c_{t_α} , c_{p_β} sont choisis et que la base $\{t_\alpha, p_\beta\}$ est construite. Nous trouverons les éléments de la matrice de l'opérateur A dans cette base :

$$a_{\alpha\beta} = \langle Aq_\alpha, q_\beta \rangle = \int_{\Omega} ([1_z, q_\alpha], q_\beta) dv.$$

Ici q_α , q_β sont les champs vectoriels de base arbitraire. L'intégrale

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_\alpha, q_\beta) dv = 0,$$

puisque $\text{div } q_\alpha = 0$ et q_β satisfait à (2) sur $\partial\Omega$. Soit $\alpha = (i, k, l)$, $\beta = (j, n, m)$. La matrice de l'opérateur A consiste en élément de trois formes (At_α, t_β) , (At_α, p_β) , (Ap_α, p_β) . Les calculs que nous ne développerons pas ici, donnent :

$$\langle At_\alpha, t_\beta \rangle = c_{t_\alpha} c_{t_\beta} \int_{\Omega} ([1_z, \text{rot}(R_i P_k^l r)], \text{rot}(R_j P_n^m r)) dv = \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)},$$

$$\begin{aligned} \langle Ap_\alpha, p_\beta \rangle &= c_{p_\alpha} c_{p_\beta} \int_{\Omega} ([1_z, \text{rot rot}(\tilde{R}_i P_k^l r)], \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)) dv = \\ &= \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle At_\alpha, p_\beta \rangle &= c_{t_\alpha} c_{p_\beta} \int_{\Omega} ([1_z, \text{rot}(R_i P_k^l r)], \text{rot rot}(\tilde{R}_j P_n^m r)) dv = \\ &= c_{t_\alpha} c_{p_\beta} \left[n(n+1) \int_{r_0}^1 r R_i \tilde{R}_j dr \int_{S_1} \sin \theta \frac{\partial P_k^l}{\partial \theta} P_n^m d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_0}^1 r R_i \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) dr \int_{S_1} \cos \theta (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) d\sigma \right]. \end{aligned}$$

On peut calculer les intégrales sur la sphère unitaire, en utilisant les relations récurrentes pour les polynômes de Legendre [7]. Ces intégrales sont différentes de zéro pour $l = m$, $\gamma_{lm} = 0$ et $k - n = \pm 1$. Des calculs de $a_{\alpha\beta}$ il résulte :

- A chaque l correspond au sous espace invariant (par rapport à l'opérateur A) $V^l(\Omega)$ et $V(\Omega) = \bigoplus_1 V^l(\Omega)$
- Chaque $V^l(\Omega)$ se désintègre en deux espaces invariants : V_1^l , engendré par les champs de base

$$\{t_{ik}^l, p_{jn}^l, \quad k = l, l+2, l+4, \dots, \quad n = l+1, l+3, l+5, \dots\},$$

et V_2^l engendré par les champs

$$\{t_{ik}^l, p_{jn}^l, \quad k = l+1, l+3, l+5, \dots, \quad n = l, l+2, l+4, \dots\}.$$

Nous noterons que cette structure $V(\Omega)$ apparaît pour n'importe quel choix $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$, donnant une matrice unitaire de Gram.

Remarque

Dans la suite nous considérerons que $l > 0$ puisque $l = 0$ correspond au cas dégénéré que nous n'examinons pas.

5. Forme quadratique du lissage du champ et son aspect dans le sous espace invariant

Soit $\tilde{V} = V_1^l, l > 0$, $i = 1$ ou 2 , $\{t_{ik}^l, p_{jn}^l\}$ - composition des champs toroïdaux et poloïdaux formant la base en $\tilde{V}$. La fonctionnelle $R(q)$ a la forme (voir [1]) :

$$\mathcal{R}(q) = \left[\frac{\int_{\Omega} B dv}{\int_{\Omega} |q|^2 dv} \right]^{1/2},$$

ici $B = \text{Sp}(D^*D)$; $D = G^{1/2} Q G^{-1/2}$; G tenseur métrique en Ω ; Q tenseur du champ q produit covariant. Toutes les matrices sont écrites en coordonnées sphériques.

Soit q - vecteur unitaire en $\tilde{V}$:

$$q = \sum_{\alpha} c_{\alpha} q_{\alpha}, \quad |q|^2 = \langle q, q \rangle = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 = 1.$$

Alors :

$$D(q) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} D(q_{\alpha}), \quad D^* D = D^*(q) D(q) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} D^*(q_{\alpha}) D(q_{\beta}).$$

En substituant cette expression dans la formule pour $R(q)$ nous obtenons

$$\mathfrak{R}^2(q) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} M_{\alpha\beta},$$

où

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \text{Sp}(D^*(q_{\alpha})D(q_{\beta}))dv.$$

Puisqu'il n'y a pas de champs covariantement constants satisfaisant aux conditions (2) alors $R(q) > 0$ pour n'importe quel $q \neq 0$ provenant de $\tilde{V}$ et $\{M_{\alpha\beta}\}$ est une matrice déterminée positive.

Nous dérivons les expressions pour $\{M_{\alpha\beta}\}$. Nous désignerons $\alpha = (i, k, \mathfrak{I})$, $\beta = (j, n, \mathfrak{J})$, $b_k = k(k+1)$. Les éléments $M_{\alpha\beta}$ peuvent avoir trois formes : $M(t_{\alpha}, t_{\beta})$, $M(t_{\alpha}, p_{\beta})$, $M(p_{\alpha}, p_{\beta})$. Les matrices $D(t_{\alpha})$ et $D(p_{\beta})$ sont calculées d'après les formules pour les dérivées covariantes (voir, par exemple [6]). Après quelques transformations et l'intégration suivant les variables angulaires (voir annexe A) les éléments $M_{\alpha\beta}$ prennent la forme

$$M(t_{ik}^{\mathfrak{I}}, t_{jn}^{\mathfrak{J}}) = \delta_{kn}(1 - |\gamma_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}|) \int_{r_0}^1 [b_k R_i R_j + r^2 R_i' R_j'] dr \left[\int_{r_0}^1 r^2 R_i^2 dr \int_{r_0}^1 r^2 R_j^2 dr \right]^{-1/2}, \quad (13)$$

$$M(t_{ik}^{\mathfrak{I}}, p_{jn}^{\mathfrak{J}}) = 0$$

pour n'importe quels k et n de parité opposée (c'est à dire dans n'importe quel V),

$$M(p_{ik}^{\mathfrak{I}}, p_{jn}^{\mathfrak{J}}) = \delta_{kn}(1 - |\gamma_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}|) \times$$

$$\times \int_{r_0}^1 \left[b_k^2 \frac{\tilde{R}_i \tilde{R}_j}{r^2} + 2b_k \left(\tilde{R}_i' \tilde{R}_j' - \frac{\tilde{R}_i \tilde{R}_j}{r^2} \right) + r^2 \left(\frac{1}{r} (r \tilde{R}_i)' \right)' \left(\frac{1}{r} (r \tilde{R}_j)' \right)' \right] dr \times$$

$$\times \left[\int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_i) dr \int_{r_0}^1 \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) dr \right]^{-1/2} \quad (14)$$

6. Achèvement de la construction de la base dans le sous espace invariant

Il nous restait à choisir les fonctions R_i et $\tilde{R}_j$ entrant en t_{α} et t_{β} . Le schéma du choix des fonctions R_i et $\tilde{R}_j$ est le même. En somme se résoud le problème suivant : trouver la composition des fonctions $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2$ en diagonalisant simultanément la matrice de Gram du système $\{t_{\alpha}, p_{\beta}\}$ et la matrice $\{M_{\alpha\beta}\}$. Des conditions aux limites supplémentaires, nécessaires pour la détermination de R_i et $\tilde{R}_j$, concordent avec les conditions de transversalité qui apparaîtraient lors de l'étude de R_i et $\tilde{R}_j$ par la méthode variationnelle.

Par les formules (13) et (14) on constate qu'on peut suivre la diagonalisation de la matrice $\{M_{\alpha\beta}\}$ (les blocs sont numérotés par l'indice k et occupent la diagonale principale de cette matrice). Les fonctions obtenues ci-après (en 6.1, 6.2) R_i et $\tilde{R}_j$ dépendent en effet de l'indice k , mais nous omettrons cet indice afin de ne pas encombrer les notations.

6.1. Choix de $\{R_i\}$ pour k fixé

Pour les fonctions de R_i les conditions aux limites supplémentaires prennent la forme

$$R'_i(r_0) = R'_i(1) = 0. \quad (15)$$

Sur l'ensemble de ces fonctions introduisons le produit scalaire

$$(R_i, R_j)_1 = \int_{r_0}^1 r^2 R_i R_j dr. \quad (16)$$

Nous noterons

$$T_k = \frac{1}{r^2} B_k = \frac{1}{r^2} \left(b_k - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right)$$

et examinerons l'opérateur T_k sur les fonctions satisfaisant à (15). L'opérateur B_k est symétrique sur ces fonctions c'est pourquoi les fonctions propres de l'opérateur T_k sont orthogonales par rapport au produit scalaire (16). Le spectre de l'opérateur T_k est discret et tous ses nombres propres sont plus grands que b_k .

En intégrant par parties et en utilisant (15) nous obtenons

$$\int_{r_0}^1 [b_k R_i R_j + r^2 R'_i R'_j] dr = \int_{r_0}^1 \left[b_k R_i R_j - R_i \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R_j \right] dr = \int_{r_0}^1 R_i B_k R_j dr.$$

maintenant l'expression du second membre (13) prend la forme

$$\int_{r_0}^1 r^2 R_i T_k R_j dr / |R_i|_1 |R_j|_1 = (R_i, T_k R_j)_1 / |R_i|_1 |R_j|_1.$$

Nous montrons que pour R_i on peut prendre les fonctions propres de l'opérateur T_k sur $[r_0, 1]$ avec les conditions aux limites (15).

L'équation

$$T_k R = \lambda R \quad (\lambda = \xi^2) \quad (17)$$

a la solution

$$R = C_1 j_k(\xi r) + C_2 y_k(\xi r), \quad (18)$$

où j_k et y_k sont les fonctions sphériques de Bessel du $k^{\text{ème}}$ ordre [7]. Les conditions (15) donnent un système d'équations pour la détermination de C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} C_1 j'_k(\xi r_0) + C_2 y'_k(\xi r_0) = 0 \\ C_1 j'_k(\xi) + C_2 y'_k(\xi) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

En utilisant la relation

$$f'_n(z) = f_{n-1}(z) - \frac{n+1}{z} f_n(z) \quad (20)$$

pour les fonctions sphériques de Bessel [10] on peut écrire le déterminant de ce système

$$\det_1(\xi) = \begin{vmatrix} \xi j_{k-1}(\xi r_0) - \frac{k+1}{r_0} j_k(\xi r_0) & \xi y_{k-1}(\xi r_0) - \frac{k+1}{r_0} y_k(\xi r_0) \\ \xi j_{k-1}(\xi) - (k+1) j_k(\xi) & \xi y_{k-1}(\xi) - (k+1) y_k(\xi) \end{vmatrix}$$

Les zéros de $\det_1(\xi)$ donnent la composition de (ξ_i) et la composition correspondante de $\{R_i\}$:

$$R_i(r) = C_1(\xi_i) j_k(\xi_i r) + C_2(\xi_i) y_k(\xi_i r),$$

où $C_1(\xi_i)$, $C_2(\xi_i)$ est la solution du système (19) pour $\xi = \xi_i$.
Ainsi :

$$(R_i, R_j)_1 = \delta_{ij} \xi_i^2 |R_i|_1^2, \\ M(t_{ik}^l, t_{jn}^{l'}) = \delta_{kn} \delta_{ij} (1 - |\gamma_{ll'}|) \xi_i^2.$$

Les fonctions $\{R_i\}$ ainsi construites diagonalisent la partie toroïdale de la matrice $\{M_{\alpha\beta}\}$, les nombres $\xi_i = R(t_{ik}^l)$ donnent l'estimation du lissage des champs de base.

6.2. Choix de $\{R_{i,j}^L\}$ pour un k fixé

Les fonctions de $\tilde{R}_i$ sont déjà soumises aux conditions (10). Soit que se réalise en outre une condition aux limites

$$(r \tilde{R}_i')' = r \tilde{R}_i'' + \tilde{R}_i' = 0 \quad \text{в точках } r_0 \text{ и } 1. \quad (21)$$

aux points r_0 et 1

Nous poserons

$$(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2 = \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k \tilde{R}_j dr.$$

L'opérateur B_k est symétrique et défini positif dans les fonctions satisfaisant à (10), c'est pourquoi $(\ , \)_2$ est le produit scalaire pour ces fonctions. Les conditions (10) et (21) permettent (voir annexe b) d'écrire le second membre (14) sous la forme

$$\int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k T_k \tilde{R}_j dr / (|\tilde{R}_i|_2 |\tilde{R}_j|_2)^{1/2} = (\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 / (|\tilde{R}_i|_2 |\tilde{R}_j|_2)^{1/2}. \quad (22)$$

Les noyaux des opérateurs différentiels B_k et T_k concordent et sont constitués par les combinaisons linéaires r^k et $r^{-(k+1)}$. Nous examinerons les fonctions de $\tilde{R}$ sous la forme

$$\tilde{R} = C_1 j_k(\varepsilon r) + C_2 y_k(\varepsilon r) + C_3 r^k + C_4 r^{-(k+1)}, \quad (23)$$

où les deux premiers termes représentent la solution générale (18) de l'équation (17) pour $\lambda = \varepsilon^2$ et les deux termes restants viennent du noyau de l'opérateur T_k . Ces fonctions satisfont à l'équation différentielle du quatrième ordre :

$$T_k^2 \tilde{R} = \varepsilon^2 T_k \tilde{R}. \quad (24)$$

Prenons pour $\tilde{R}$ les fonctions de la forme (23) satisfaisant l'équation (24) et les conditions aux limites (10) et (21). Ces conditions donnent le système résultant des quatre équations pour la détermination de C_n , $n = 1, \dots, 4$. La relation (20) permet d'écrire le déterminant de ce système sous la forme

$$\det_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} j_k(\varepsilon r_0) & y_k(\varepsilon r_0) & r_0^k & r_0^{-(k+1)} \\ -\varepsilon j_{k-1}(\varepsilon r_0) & -\varepsilon y_{k-1}(\varepsilon r_0) & \varepsilon^2 r_0^{k+1} - (2k+1)r_0^{k-1} & \varepsilon^2 r_0^{-k} \\ j_k(\varepsilon) & y_k(\varepsilon) & 1 & 1 \\ -\varepsilon j_{k-1}(\varepsilon) & -\varepsilon y_{k-1}(\varepsilon) & \varepsilon^2 - (2k+1) & \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

Connaissant les zéros $\{\varepsilon_j\}$ de la fonction $\det_2(\varepsilon)$ on peut trouver $C_n(\varepsilon_j)$, $n = 1, \dots, 4$ et par là même $\tilde{R}_j$. Pour calculer ces zéros l'expression pour $\det_2(\varepsilon)$ peut être simplifiée en utilisant le théorème de Laplace sur la décomposition du déterminant et la relation [10] :

$$\begin{vmatrix} j_k(\varepsilon) & y_k(\varepsilon) \\ j_{k-1}(\varepsilon) & y_{k-1}(\varepsilon) \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Nous vérifierons que

$$(\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 = \varepsilon_i^2 \delta_{ij} (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2. \quad (25)$$

En effet

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 &= \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k T_k \tilde{R}_j dr = \int_{r_0}^1 r^2 \tilde{R}_i T_k^2 \tilde{R}_j dr = \varepsilon_j^2 \int_{r_0}^1 r^2 \tilde{R}_i T_k \tilde{R}_j dr = \\ &= \varepsilon_j^2 \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k \tilde{R}_j dr = \varepsilon_j^2 (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2. \end{aligned}$$

D'autre part, l'opérateur $B_k T_k$ est symétrique sur les fonctions satisfaisant à (10) et (21), c'est pourquoi $(\tilde{R}_i, T_k \tilde{R}_j)_2 = \varepsilon_i^2 (\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)_2$ d'où résulte (25). Les fonctions construites $[R_j]$ satisfont aux exigences nécessaires et c'est pourquoi

$$M(p_{ik}^l, p_{jn}^{l'}) = \delta_{kn} \delta_{ij} (1 - |\gamma_{ll'}|) \varepsilon_i^2, \quad \Re(p_{ik}^l) = \varepsilon_i.$$

6.3. Fermeture des systèmes des fonctions $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ pour un k donné

Par les constructions décrites plus haut il est clair que $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ forment des systèmes orthogonaux des fonctions sur $[r_0, 1]$ par rapport aux produits scalaires $(\cdot)_1$ et $(\cdot)_2$ respectivement. De la théorie des opérateurs linéaires différentiels [11] découle que ces systèmes de fonctions sont fermés dans $L_2(r_0, 1)$ dans les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

7. Ordonnancement de la base

Une fonction arbitraire sur une sphère se développe en série de Fourier de fonctions sphériques [4]. De ce fait et vu la fermeture des systèmes des fonctions $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ pour un k fixé il s'ensuit que la composition des champs vectoriels $\{t_\alpha, p_\beta\}$ forme une base orthonormée dans $V(\Omega)$ (cela peut s'extraire de l'analyse des coefficients de Fourier de la décomposition d'un champ arbitraire selon le système $\{t_\alpha, p_\beta\}$).

Maintenant dans chaque sous espace invariant V nous réunirons les ensembles $\{\xi_i\}$ et $\{\epsilon_j\}$ et nous ordonnerons ces éléments en ordre croissant. Enfin nous obtiendrons un ensemble de nombres $\{R_N\}$, $R_1 < R_2 < \dots$ et la succession correspondante $\{q_N\}$, $R_N = R(q_N)$. Les champs toroïdaux et poloïdaux en $\{q_N\}$ sont mélangés. La séquence $\{q_N\}$ ainsi ordonnée est cette base que nous voulions construire.

Remerciement

Les auteurs remercient MM. Vichik pour son soutien et ses précieux conseils.

Annexe A. Calcul des éléments $\{M_{\alpha\beta}\}$

Soit $t_\alpha = c_{t_\alpha} \text{rot} (R_i P_k^1 r)$ $p_\beta = c_{p_\beta} \text{rot rot} (\tilde{R}_j P_m^{1'} r)$

Nous noterons $\alpha = (i, k, 1)$, $\beta = (j, m, 1')$, $P_\alpha = P_k^1$, $P_\beta = P_m^{1'}$, $b_k = k(k+1)$, $b_m = m(m+1)$.

Les formules pour le produit covariant [9] et le tenseur métrique en coordonnées sphériques donnent les expressions pour les matrices D (voir II 5):

$$D(t_\alpha) = c_{t_\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_i}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} & \frac{R_i}{r} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial R_i}{\partial r} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} & \frac{R_i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) & -\frac{R_i}{r} [b_k P_\alpha + (P_\alpha)''_\theta] \\ -\frac{\partial R_i}{\partial r} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} & -\frac{R_i}{r} (P_\alpha)''_\theta & -\frac{R_i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) \end{pmatrix},$$

$$D(p_\beta) = c_{t_\beta} Q,$$

où Q est la matrice composée par les colonnes Q_1, Q_2, Q_3 :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} b_m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{R}_j}{r} \right) P_\beta \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) \right) \frac{\partial P_\beta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{R}_j)}{\partial r} \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \left[b_m \tilde{R}_j - \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) \right] \frac{\partial P_\beta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) (P_\beta)''_\theta + \frac{\tilde{R}_j}{r^2} b_m P_\beta \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \right) \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[b_m \tilde{R}_j - \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) \right] \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\beta}{\sin \theta} \right) \right) \\ - \left[b_m \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}_j}{\partial r} P_\beta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \tilde{R}_j)}{\partial r} (P_\beta)''_\theta \right] \end{pmatrix}.$$

Nous calculerons maintenant les éléments $M_{\alpha\beta}$ dans chacun des trois cas.

a) $M(t_\alpha, t_\beta) = \int_{\Omega} \text{Sp}(D^*(t_\alpha) D(t_\beta)) dV.$

Les transformations avec le calcul de la formule pour ∇_s (voir 2.1) conduisent à l'expression

$$M_{\alpha\beta} = c_{t_\alpha} c_{t_\beta} \left\{ \int_{r_0}^1 R_i R_j dr \left[\int_{S_1} (\nabla_s P_\alpha \cdot \nabla_s P_\beta) d\sigma + b_k b_m \int_{S_1} P_\alpha P_\beta d\sigma \right] + \right. \\ \left. + \int_{r_0}^1 r^2 R'_i R'_j dr \int_{S_1} (\nabla_s P_\alpha \cdot \nabla_s P_\beta) d\sigma + \int_{r_0}^1 R_i R_j dr \int_{S_1} W d\sigma \right\}, \quad (\text{II1})$$

où

$$W = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \right) + b_k P_\alpha (P_\beta)''_\theta + b_m (P_\alpha)''_\theta + 2(P_\alpha)''_\theta (P_\beta)''_\theta.$$

Les intégrales sur la sphère unitaire dans les trois premiers termes en (III) sont déterminées par les formules (5) et (6). Il restait à calculer $I = \int_{S_1} W d\sigma$. De la forme W il s'ensuit que $I = 0$ pour $\gamma_{11} \neq 0$ à cause de l'intégration suivant ϕ . Nous calculerons que $\gamma_{11} = 0$ et nous introduirons la notation

$$P_\alpha = h_\alpha(\phi) \bar{P}_\alpha(\theta) \quad (h_\alpha(\phi) = \sin \ell \phi \text{ ou } \cos \ell \phi)$$

Nous substituerons cette équation pour P_α dans I et nous intégrerons suivant ϕ :

$$I = \int_{S_1} W d\sigma = \pi \int_0^\pi \sin \theta W_1 d\theta,$$

où

$$W_1 = 2l^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \bar{P}_\alpha \right) \left(\frac{1}{\sin \theta} \bar{P}_\beta \right) + b_k \bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta'' + b_m \bar{P}_\beta \bar{P}_\alpha'' + 2\bar{P}_\alpha'' \bar{P}_\beta''$$

ne dépend que de θ . Pour la fonction P_α et P_β la relation (8) est exacte puisqu'elle ne renferme pas de différenciation en ϕ . En utilisant (8) nous obtiendrons

$$2\bar{P}_\alpha'' \bar{P}_\beta'' + b_k \bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta'' + b_m \bar{P}_\beta \bar{P}_\alpha'' = \frac{l^2}{\sin^2 \theta} (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)'' - \frac{2l^2 \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta'}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta')'. \quad (\text{II2})$$

$$2l^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \bar{P}_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \bar{P}_\beta \right) = \frac{2l^2}{\sin^2 \theta} \left(\bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)' + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta \right). \quad (\text{II3})$$

La substitution de (II2) et (II3) dans l'expression pour W_1 après les transformations donne finalement

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta W_1 d\theta &= \int_0^\pi \left[l^2 \left(\left(\frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right)'' - \frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right) - \cos \theta (\bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta')' \right] d\theta = \\ &= \left[l^2 \left(\frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right)' - \cos \theta \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' \right] \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left[l^2 \frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin \theta} + \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' \sin \theta \right] d\theta. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $[\dots]_0^\pi = 0$ pour n'importe quel $\ell > 0$, c'est pourquoi

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_0^\pi \sin \theta W_1 d\theta = -\pi \int_0^\pi \sin \theta \left[l^2 \frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin^2 \theta} + \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' \right] d\theta = \\ &= -\int_{S_1} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \theta} \right] d\sigma = -\int_{S_1} (\nabla_S P_\alpha, \nabla_S P_\beta) d\sigma. \quad (\text{II4}) \end{aligned}$$

Maintenant, en revenant à (III) et en utilisant (11), (12) et (7) nous obtiendrons pour $M(t_\alpha, t_\beta)$ la formule (13)

$$b) \quad M(t_\alpha, t_\beta) = \int_{\Omega} \text{Sp}(D^*(t_\alpha)D(p_\beta))dV.$$

Après sommation et quelques transformations nous obtenons

$$M_{\alpha\beta} = \int_{r_0}^1 a_1(r)dr \int_{S_1} \left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial P_\beta}{\partial \theta} - \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \theta} \right] d\sigma + \int_{r_0}^1 a_2(r)dr \int_{S_1} Y d\sigma,$$

où

$$Y = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) (P_\beta)''_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \right) (P_\alpha)''_\theta \right) +$$

$$+ b_m P_\beta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \right) - b_k P_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \right).$$

Les fonctions $a_1(r)$ et $a_2(r)$ dépendent de R_i et $\tilde{R}_j$. Leur forme concrète n'a pas ici d'intérêt.

Nous noterons

$$I_1 = \int_{S_1} \left[\frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial P_\beta}{\partial \theta} - \frac{\partial P_\beta}{\partial \varphi} \frac{\partial P_\alpha}{\partial \theta} \right] d\sigma.$$

Si $\gamma_{11} = 0$, alors $I_1 = 0$ à cause du facteur $\int_0^{2\pi} \sin l\varphi \cos l\varphi d\varphi$.

Donc si $\gamma_{11} \neq 0$, alors

$$I_1 = \pm l\pi \int_0^{\pi_0} \left(\bar{P}_\alpha \frac{\partial \bar{P}_\beta}{\partial \theta} + \bar{P}_\beta \frac{\partial \bar{P}_\alpha}{\partial \theta} \right) d\theta = \pm l\pi (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)|_0^\pi = 0 \text{ при } l > 0.$$

Nous calculerons $I_2 = \int_{S_1} Y d\sigma$. Si $\gamma_{11} = 0$, alors $I_2 = 0$ pour la même raison que I_1 .

Soit $\gamma_{ee} \neq 0$. En intégrant suivant ϕ , nous obtiendrons

$$I_2 = \pm l\pi \int_0^\pi \sin \theta Y_1 d\theta,$$

où

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{P}_\alpha}{\sin \theta} \right) \bar{P}_\beta'' + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right) \bar{P}_\alpha'' + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{P}_\alpha}{\sin \theta} \right) (\bar{P}_\beta'' + b_m \bar{P}_\beta) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right) (\bar{P}_\alpha'' + b_k \bar{P}_\alpha).$$

La dernière expression amène à l'aide de (8) à la forme

$$Y_1 = \frac{1}{\sin \theta} (\bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta')' + \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)' (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)'' + \frac{l^2}{\sin \theta} \left(\frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin \theta} \right)' + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)'$$

L'intégration par parties donne comme résultat

$$\int_0^\pi \sin \theta Y_1 d\theta = l^2 \frac{\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta}{\sin^2 \theta} \Big|_0^\pi + \bar{P}_\alpha' \bar{P}_\beta' \Big|_0^\pi - (\bar{P}_\alpha \bar{P}_\beta)' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Big|_0^\pi. \quad (\text{II5})$$

Connaissant les expressions pour $\bar{P}_\alpha$ et $\bar{P}_\beta$ on peut vérifier que (II5) est égal à zéro pour $l > 0$ et pour différentes parités de k et m . Ainsi $M(t_\alpha, p_\beta) = 0$

dans n'importe quel sous espace V.

$$c) \quad M(p_\alpha, p_\beta) = \int_{\Omega} \text{Sp}(D^*(p_\alpha)D(p_\beta))dV.$$

Lors de la déduction de la formule (14) on utilise (5) - (8), (11), (12) et (II4). La déduction même est assez volumineuse et nous ne la donnerons pas.

Annexe B. Déduction de la formule (22)

Soient les fonctions f et g, satisfaisant à (10) et (21), et

$$I = \int_{r_0}^1 \left[b_k^2 \frac{fg}{r^2} + 2b_k \left(f'g' - \frac{fg}{r^2} \right) + r^2 \left(\frac{1}{r}(rf)' \right)' \left(\frac{1}{r}(rg)' \right)' \right] dr.$$

Alors

$$a. \quad \int_{r_0}^1 f'g'dr = - \int_{r_0}^1 gf''dr, \text{ так как } (f'g)|_{r_0} = 0.$$

$$б. \quad \int_{r_0}^1 r^2 \left(\frac{1}{r}(rf)' \right)' \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rg) \right) dr = \frac{1}{r} \frac{d(rg)}{dr} (r^2 f'' + rf' - f) \Big|_{r_0}^1$$

$$- g \frac{d}{dr} (r^2 f'' + rf' - f) \Big|_{r_0}^1 + \int_{r_0}^1 gr \frac{d}{dr} (r^2 f'' + rf' - f) dr.$$

Les deux premiers termes dans le second membre de la dernière expression sont égaux à zéro. Il en résulte

$$I = \int_{r_0}^1 g \Psi f dr,$$

où

$$\begin{aligned} \Psi(f) &= b_k^2 \frac{f}{r^2} - 2b_k \left(f'' + \frac{f}{r^2} \right) + r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 f'' + rf' - f) \right) = \\ &= r^2 f^{(IV)} + 4rf''' - 2b_k f'' + (b_k^2 - 2b_k) \frac{f}{r^2}. \end{aligned}$$

$$в. \quad B_k T_k(f) = B_k(T_k f) = \left[b_k - \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \right] \left(b_k f - 2b_k \frac{f'}{r} - b_k f'' \right).$$

Si dans la dernière expression on réalise tous les effets et qu'on regroupe les termes nous obtiendrons à la précision ψf . Par conséquent,

$$I = \int_{r_0}^1 g B_k T_k f dr = (g, T_k f)_2,$$

et la formule (22) est démontrée.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
2. *Вишик М.М.* Периодическое динамо // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С.186-215. (Вычисл. сейсмология; Вып.19).
3. *Желиговский В.А.* О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.161-181. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
4. *Гринспен Х.П.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 303 с.
5. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
6. *Резников Е.Л., Розенкноп Л.М.* О главных модах оператора Пуанкаре в шаре // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.156-163. (Вычисл. сейсмология; Вып.26).
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University press, 1961. 654 p.
9. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986. 263 с.
10. *Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана.* М.: Наука, 1979. 830 с.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: ГИТТЛ, 1954. 351 с.

Traduction

SUR LES CHAMPS TOROIDAUX ET POLOIDAUX PROPRES
DE L'OPERATEUR DE POINCARÉ DANS UNE COUCHE SPHERIQUE

E.L. Resnikov, L.M. Rosenknop
Institut International de la théorie de la prévision
des tremblements de terre et de la géophysique
mathématique de l'Académie Russe des Sciences.

PROBLEMES THEORIQUES DE GEODYNAMIQUE ET DE SEISMOLOGIE

Publicat. 27, pp. 86-96, 1994

Dans le modèle le plus simple de la Terre le noyau extérieur est constitué d'un liquide non visqueux, incompressible, en rotation dans une couche sphérique. L'étude des oscillations propres de ce liquide lors de faibles écarts à l'équilibre conduit au problème du spectre de l'opérateur de Poincaré.

Dans ce travail on construit une base dans l'espace des champs lissés permettant d'analyser la matrice de l'opérateur et de conclure qu'il n'y a pas de champs propres poloïdaux dans la couche sphérique pour l'opérateur de Poincaré et que les champs propres toroïdaux sont obtenus par le rétrécissement dans la couche sphérique des champs propres toroïdaux existant dans le globe.

Introduction

Dans le modèle le plus simple de la Terre on suppose que le noyau extérieur est constitué d'un liquide non visqueux, incompressible, en rotation entre deux sphères concentriques. Dans le cadre de ce modèle, l'étude des oscillations propres du liquide dans le noyau extérieur de la Terre présente un intérêt. Dans le cas de faibles écarts à l'équilibre [1] nous arriverons au problème du spectre et des champs vectoriels propres de l'opérateur de Poincaré dans la couche sphérique.

La solution précise de ce problème n'est pas connue. Dans le travail [2] on a décrit la construction d'une base de Galerkin pour la recherche d'approches lissées des champs vectoriels propres principaux, les plus lissés de ce problème. On établit ici une base de Galerkin plus simple mais dans un autre but qui est de trouver et de décrire s'il existe des champs propres toroïdaux et poloïdaux. L'analyse de la structure de la matrice de l'opérateur dans la base construite permet de conclure qu'il n'y a pas de champs propres poloïdaux dans la couche sphérique de Poincaré mais toroïdaux - seulement ceux qui sont obtenus par le rétrécissement des champs propres toroïdaux existant dans la sphère.

1. But du travail

Comme on le constate par l'avant propos on étudie dans le travail quelques champs propres du problème spectral suivant :

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{q} = A\mathbf{q} \equiv [1_z, \mathbf{q}] - \nabla \Phi, & \text{div } \mathbf{q} = 0, \\ (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ici A est l'opérateur de Poincaré; ϕ est le potentiel scalaire inconnu; Ω est une couche sphérique de rayon intérieur r_0 et extérieur égal à l'unité; $[,]$ est le produit vectoriel. Certaines propriétés de cet opérateur sont énumérées en [2, 3]. Dans notre travail nous construirons une base naturelle dans l'espace correspondant des fonctions et la matrice de l'opérateur A dans cette base. L'analyse de la structure de cet opérateur et de sa matrice permet de déduire tous les champs propres poloïdaux et toroïdaux.

2. Indications préliminaires.

Toutes les notations, les déterminations et les faits nécessaires pour la compréhension du travail sont exposées dans l'article [2] (pp 1 à 4) publié dans notre revue. Pour la facilité nous donnons certaines de celles-ci. Le symbole $V(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des champs lissés non divergent dans la couche Ω satisfaisant à la condition aux limites (2) avec un produit scalaire.

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int_{\Omega} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2^*) dv$$

(le signe $*$ désigne ici et dans la suite les conjugués complexes des nombres et des matrices). Pour les fonctions sphériques de $n^{\text{ème}}$ ordre on utilise les notations $(r, \theta, \phi$ - coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned} P_n^{m+}(\theta, \varphi) &= \sin(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \\ P_n^{m-}(\theta, \varphi) &= \cos(m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad m = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

où $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ est un polynôme associé de Legendre.

Le symbole P_n^m désigne n'importe quelle des fonctions P_n^{m+} et P_n^{m-} (quand c'est permis). Les signes "+" et "-" correspondent à $\sin(m\phi)$ et $\cos(m\phi)$ dans les formules en fonctions sphériques.

Un champ vectoriel arbitraire découlant de $V(\Omega)$ se développe dans une somme directe des champs toroïdaux et poloïdaux (voir [2, 4]. La base en $V(\Omega)$ est constituée des champs toroïdaux et poloïdaux de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha &= c_{t_\alpha} \text{rot}(R_i(r) P_k^l(\theta, \varphi) \mathbf{r}), \\ \mathbf{p}_\beta &= c_{p_\beta} \text{rot rot}(\tilde{R}_j(r) P_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ici α et β désignent les trois indices (i, k, l) et (j, n, m) . Les facteurs c_{t_α} et c_{p_β} et les fonctions $R_i(r)$ et $\tilde{R}_j(r)$ seront choisis plus bas. Les champs

t_α n'ont pas de composante radiale, c'est pourquoi pour ceux-ci la condition (2) se réalise pour n'importe quel R_i . Pour que les champs p_β satisfassent à (2) ils doivent remplir les conditions

$$\tilde{R}_j(r_0) = \tilde{R}_j(1) = 0. \quad (3)$$

Dans le travail [2] on a indiqué que la matrice de Gram du système de ses champs (t_α, p_β) consiste en éléments des trois aspects :

$$a. \quad \langle t_\alpha, t_\beta \rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1 - |\gamma_{lm}|)Z_{kl} \int_{r_0}^1 r^2 R_i R_j dr,$$

$$b. \quad \langle t_\alpha, p_\beta \rangle = 0 \quad \text{pour n'importe quel } t_\alpha, p_\beta$$

$$c. \quad \langle p_\alpha, p_\beta \rangle = k(k+1)\delta_{kn}\delta_{lm}(1 - |\gamma_{lm}|)Z_{kl} \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j) dr,$$

$$\text{où} \quad Z_{kl} = \int_{S_1} (P_k^l)^2 d\sigma \quad (S_1 \text{ est la sphère unitaire})$$

$$\gamma_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{si les signes } (l, m) \text{ forment une combinaison } (+, -) \\ 0, & \text{dans le cas des paires } (+, +) \text{ et } (-, -), \\ -1, & \text{pour la combinaison } (-, +) \end{cases}$$

et $B_k = k(k+1) - d/dr (r^2 d/dr)$ est l'opérateur positif auto conjugué sur l'ensemble de fonctions lissées satisfaisant à (3). Les fonctions $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ sont choisies de sorte que

$$\int_{r_0}^1 r^2 R_i R_j dr \text{ et } \int_{r_0}^1 \tilde{R}_i B_k(\tilde{R}_j) dr$$

soient égales à zéro pour $i \neq j$. Si on pose maintenant

$$c_{t_\alpha} = \left[k(k+1)Z_{kl} \int_{r_0}^1 r^2 R_i^2 dr \right]^{-1/2}, \quad (4)$$

$$c_{p_\beta} = \left[k(k+1)Z_{kl} \int_{r_0}^1 \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) dr \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

alors la matrice de Gram devient identité. Le choix des fonctions R_i et $\tilde{R}_j$ doit en outre garantir que le système (t_α, p_β) est complet. Alors elle forme une base orthogonale en $V(\Omega)$.

Si $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$ et les coefficients c_{t_α} , c_{p_β} sont choisis et la base (t_α, p_β) est construite on peut calculer les éléments de la matrice de l'opérateur A dans cette base :

$$a_{\alpha\beta} = \langle Aq_\alpha, q_\beta \rangle = \int_{\Omega} ([1_z, q_\alpha], q_\beta) dv.$$

La matrice de l'opérateur A renferme les éléments de trois formes $\{At_\alpha, t_\beta\}$, $\{At_\alpha, p_\beta\}$, $\{Ap_\alpha, p_\beta\}$. Dans le travail [2] nous donnons les formules pour ces éléments :

$$\langle A t_{\alpha}, t_{\beta} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)}. \quad (6)$$

$$\langle A p_{\alpha}, p_{\beta} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \gamma_{lm} \frac{1}{k(k+1)}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle A t_{\alpha}, p_{\beta} \rangle = & c_{t_{\alpha}} \dot{c}_{p_{\beta}} \left[n(n+1) \int_{r_0}^1 r R_i \tilde{R}_j dr \int_{S_1} \sin \theta \frac{\partial P_k^l}{\partial \theta} P_n^m d\sigma + \right. \\ & \left. + \int_{r_0}^1 r R_i \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{R}_j) dr \int_{S_1} \cos \theta (\nabla_s P_k^l, \nabla_s P_n^m) d\sigma \right], \end{aligned} \quad (8)$$

où $\nabla_s = \frac{\partial}{\partial \theta} e_{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} e_{\varphi}$ est le gradient angulaire.

On peut calculer les intégrales sur la sphère unitaire en utilisant les relations de récurrence pour les polygones de Legendre [5]. Ces intégrales sont différentes de zéro pour $\ell = m$, $\gamma_{lm} = 0$ et $k - n = \pm 1$. Leurs expressions seront données en 4.

Des calculs de $a_{\alpha\beta}$ il s'ensuit :

a. à chaque ℓ correspond un sous espace invariant (par rapport à l'opérateur A) $V^1(\Omega)$ et $V(\Omega) = \bigoplus_{\ell} V^1(\Omega)$.

b. Chaque $V^1(\Omega)$ se disloque en deux sous espaces invariants :

V^1_1 engendré par les champs de base

$$\{t_{ik}^l, p_{jn}^l, \quad k = l, l+2, l+4, \dots, \quad n = l+1, l+3, l+5, \dots\},$$

et V^1_2 engendré par les champs

$$\{t_{ik}^l, p_{jn}^l, \quad k = l+1, l+3, l+5, \dots, \quad n = l, l+2, l+4, \dots\}.$$

Nous noterons que cette structure $V(\Omega)$ apparaît pour n'importe quel choix $\{R_i\}$, $\{\tilde{R}_j\}$ donnant la matrice identité de Gram. Comme en [2] nous n'examinons pas le cas dégénéré $\ell = 0$

3. Construction de la base dans l'espace des champs indivergenciels (solénoïdaux) dans une couche sphérique.

Les champs de bases $\{t_{\alpha}, p_{\beta}\}$ dépendent des fonctions R_i et $\tilde{R}_j$. Nous expliquons leur choix.

3.1. Fonctions $\tilde{R}_j$ pour les champs poloidaux de la base

Pour ces fonctions il convient de prendre les fonctions propres de l'opérateur $B_k = k(k+1) - d/dr (r^2 d/dr)$ avec des conditions aux limites nulles (3). Ces fonctions ne dépendent pas de k et ont la forme

$$\tilde{R}_j = r^{-1/2} \sin \left(\frac{j\pi \ln(r)}{\ln(r_0)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (r_0 < 1)$$

(le facteur rationnel a été pris égal à l'unité). A la composition de $\{\tilde{R}_j\}$ correspondent les valeurs propres λ_j^k (dépendant déjà de k) et les valeurs $a e_j^k$

$$\lambda_j^k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{\ln(r_0)}\right)^2, \quad \tilde{a}_j^k = \left[\int_{r_0}^1 \tilde{R}_j B_k(\tilde{R}_j) dr \right]^{1/2} = \left[\lambda_j^k \left(-\frac{\ln(r_0)}{2}\right) \right]^{1/2}.$$

Le système $\{\tilde{R}_j\}$ satisfait aux exigences nulles puisqu'il est complet sur l'intervalle $[r_0, 1]$ et $\int_{r_0}^1 \tilde{R}_i \tilde{R}_j dr = 0$ pour $i \neq j$ (elle découle de l'autoconjugaison de l'opérateur B_k).

3.2. Fonctions R_i pour les champs toroïdaux de la base

Nous supposons $R_i = r^{-3/2} \cos\left(\frac{i\pi \ln(r)}{\ln(r_0)}\right), i = 0, 1, \dots$

(habituellement pour tous les k et nous désignerons

$$a_i = \left[\int_{r_0}^1 r^2 R_i^2 dr \right]^{1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0 = (-\ln(r_0))^{1/2}, \quad a_i = (-\ln(r_0)/2)^{1/2}, \quad i > 0.$$

Il est simple de vérifier que

$$\int_{r_0}^1 r^2 R_i R_j dr = 0$$

pour $i \neq j$. La fermeture de l'ensemble des fonctions $\{R_i\}$ est la conséquence de la fermeture du système $\{\cos(nx)\}$, $n = 0, 1, 2 \dots$ sur $[0, \pi]$.

3.3. Base en $V(\Omega)$

Nous poserons

$$c_{t_\alpha} = [k(k+1)Z_{kl}]^{-1/2}/a_i, \quad c_{p_\beta} = [k(k+1)Z_{kl}]^{-1/2}/\tilde{a}_j^k$$

(voir (4) et (5)). Le système des champs $\{t_\alpha, p_\beta\}$ obtenu a une matrice identité de Gram. On sait qu'une fonction arbitraire sur la sphère se développe en une série de Fourier de fonctions sphériques [5]. De ce fait et par la fermeture des systèmes des fonctions $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_j\}$ il s'ensuit que l'ensemble des champs $\{t_\alpha, p_\beta\}$ forme une base orthonormale en $V(\Omega)$ (cela découle de l'analyse des coefficients de Fourier de la décomposition d'un champ arbitraire selon le système $\{t_\alpha, p_\beta\}$).

4. Eléments de la matrice de l'opérateur de Poincaré dans la base construite

Avec ℓ fixé le sous espace $V^\ell(\Omega)$ se désintègre en deux sous espaces invariants : V_1^ℓ et V_2^ℓ (voir section 2). Nous disposerons les champs de base dans ces sous espaces de la façon suivante (nous donnons l'ordre de variation des indices) :

$$\begin{array}{l}
 V_1^l: \begin{array}{ccc} + & - & + \\ 012\dots & 012\dots & 123\dots \\ k_T = l & k_P = l+1 & k_T = l+2 \end{array} \\
 V_2^l: \begin{array}{ccc} + & - & + \\ 123\dots & 123\dots & 012\dots \\ k_P = l & k_T = l+1 & k_P = l+2 \end{array}
 \end{array}$$

Ici k_T et k_P sont les indices inférieurs dans les notations des fonctions sphériques, "+" et "-" se rapportent aux indices supérieurs (voir section 2), les nombres 0, 1, 2 ... et 1, 2, 3 ... numérotent respectivement les fonctions R_i et $\tilde{R}_j$. Les éléments de la matrice de l'opérateur A s'expriment par les formules (6) à (8) mais R_i et $\tilde{R}_j$ n'entrent que dans la dernière de celles-ci. Les calculs que nous n'avons pas donnés ici, donnent

$$\langle A t_{ik_T}^l, p_{jk_P}^{l'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{1s} (\Pi_{k_T, l} \Pi_{k_P, l'} \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j^{k_P})^{-1} d(k_T, k_P, l, i, j), \quad (9)$$

où l et l' peuvent être l^+ ou l^- , $s = |k_T - k_P|$, $\Pi_{k, l} = k(k+1)Z_{kl}$, a

mais

$$d = \begin{cases} 0, & i \neq j, & \text{parité habituelle } 0 \text{ est pair} \\ -\frac{j\pi}{2} a_2(k_T, k_P, l), & i = j \\ \frac{j \ln(r_0)}{\pi(i^2 - j^2)} (2k_P(k_P + 1) a_1(k_T, k_P, l) + a_2(k_T, k_P, l)) & \text{parité différente} \end{cases} \quad (10)$$

$$a_1(k_T, k_P, l) = \int_{S_1} \sin \theta \frac{\partial P_{k_T}^l}{\partial \theta} P_{k_P}^l d\sigma, \quad (11)$$

$$a_2(k_T, k_P, l) = \int_{S_1} \cos \theta (\nabla_s P_{k_T}^l, \nabla_s P_{k_P}^l) d\sigma. \quad (12)$$

Le facteur δ_{1s} en (9) est différent de zéro uniquement quand $k_T - k_P = \pm 1$. Le calcul des intégrales (11), (12) donne

$$a_1(k, k-1, l) = -\frac{2(k+1)(k+l)!}{(2k+1)(2k-1)(k-l-1)!}, \quad (13)$$

$$a_1(k, k+1, l) = \frac{2k(k+l+1)!}{(2k+1)(2k+3)(k-l)!}, \quad (14)$$

$$a_2(k, k-1, l) = 2 \frac{(k+l)(k^2-1)(k+l-1)!}{(2k+1)(2k-1)(k-l-1)!}, \quad (15)$$

$$a_2(k, k+1, l) = 2 \frac{k(k+2)(k+l+1)!}{(2k+1)(2k+3)(k-l)!}. \quad (16)$$

5. Structure de la matrice de l'opérateur de Poincaré dans une couche sphérique

Dans chacun des sous espaces V_1^1 et V_2^1 la matrice de l'opérateur A consiste en trois blocs diagonaux (un bloc se détermine par une paire des indices inférieurs des fonctions sphériques). Les éléments de la forme (5), (6) forment le bloc diagonal principal, les éléments de la forme (7) constituent deux diagonales voisines. Ainsi dans n'importe lequel des sous espaces V_1^1 et V_2^1 on peut représenter l'opérateur $A = J + S$, où J conserve les champs de base du même type (toroïdaux en toroïdaux, poloïdaux en poloïdaux), tandis que S change les champs en l'autre type. L'opérateur J a une matrice de forme bloc-diagonale avec les blocs $J_{\ell\ell}, J_{\ell,\ell+1}, J_{\ell,\ell+2}$ sur les diagonales où

$$J_{lk} = \frac{l}{k(k+1)} J_0, \quad J_0 = \begin{matrix} + & - \\ \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Les champs t_{ik}^{1+} sont désignés ici par le symbole "+", $i = 0, 1, 2 \dots$ si k est l'indice du champ toroïdal, ou p_{jk}^{1+} , $j = 1, 2, 3$, si k est l'indice du champ poloïdal. Le symbole "-" a un sens analogue. Le second indice k égal à $\ell, \ell+1, \ell+2 \dots$ numérote alternativement les champs vectoriels des deux types.

La matrice de l'opérateur S consiste en blocs marqués par deux indices (correspondant aux champs de base toroïdaux et poloïdaux). Elle est obliquement symétrique, sa diagonale (de bloc) principale est zéro. La première colonne de bloc renferme un bloc non nul avec les indices ($\ell+1, \ell$). Les autres colonnes ont deux blocs non nuls : le bloc avec indice ($k-1, k$) au-dessus de la diagonale et le bloc avec indices ($k+1, k$) en-dessous de la diagonale. Chaque bloc non nul renferme deux matrices habituelles (non nulles) formées par les éléments de la forme (7) (l'une correspond à la paire "+, +", l'autre la paire "-", "-"). Par exemple, le bloc avec indices ($k-1, k$) a la forme

$$\begin{matrix} + & - \\ \begin{pmatrix} S_{k-1,k} & 0 \\ 0 & S_{k-1,k} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

La symétrie oblique de la matrice signifie que

$$S_{k-1,k} = - S_{k, k-1}$$

6. Quelques propriétés des champs propres des types toroïdal et poloïdal et de leurs valeurs propres

Nous énumérons les propriétés qui découlent directement de la représentation $A = J + S$ et de la forme des matrices des opérateurs J et S.

A. Chaque champ propre poloïdal ou toroïdal doit appartenir au noyau de l'opérateur S.

B. Dans la décomposition de ce champ propre selon les champs de base ne peut exister qu'un indice k (autrement l'opérateur J croît différemment pour différents k).

C. Les nombres propres associés à ces champs vectoriels appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \pm i \frac{l}{k(k+1)}, \quad k = l, l+1, l+2, \dots \right\}$$

(i : imaginaire)

D. A la paire $\pm i \ell / k(k+1)$ des valeurs propres possibles correspond la paire

$$\begin{pmatrix} C_k \\ 0 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0 \\ C_k \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres possibles. Ici C_k est la colonne des coefficients réels de la décomposition du champ propre selon les champs de base; pour les champs toroïdaux $C_k = \{C_{ki}, i = 0, 1, 2, \dots\}$ pour les champs poloïdaux $C_k = \{C_{kj}, j = 1, 2, 3, \dots\}$. Les signes "+" et "-" ont été expliqués plus haut.

7. Organisation des blocs formant la matrice de l'opérateur de Poincaré

La matrice de l'opérateur J est arrangée simplement. Nous examinerons la matrice de l'opérateur S . Dans chacun des sous espaces V_1^1 et V_2^1 la matrice de l'opérateur S est constituée de blocs colonnes. La première colonne renferme un bloc non nul (avec les indices $\ell + 1, \ell$) les autres - jusqu'à deux blocs. Nous examinerons le bloc colonne formé par les éléments

$$\langle At_{ik}^l, p_{jm}^l \rangle, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots$$

Pour $m = k - 1$ ($k > \ell$) on obtient le bloc supérieur non nul, pour $m = k + 1$ le bloc inférieur. Le bloc colonne est constitué en projections d'images des champs de base toroïdaux par les poloïdaux. Le bloc supérieur se compose des deux matrices identité

$$S_{k-1,k} = \{ \langle At_{ik}^l, p_{j,k-1}^l \rangle \}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots$$

En utilisant les formules (9) à (12) nous amenons la matrice $S_{k-1,k}$ à la forme aisée

$$S_{k-1,k} = (\Pi_{k,l} \Pi_{k-1,l})^{-1} \varepsilon \tilde{H}^{k-1} Z_{k-1,k} \Gamma. \quad (17)$$

Ici

$$\varepsilon = \varepsilon(k, k-1, l) = -\frac{\ln(r_0)}{\pi} [2k(k-1)a_1(k, k-1, l) + a_2(k, k-1, l)],$$

$\tilde{H}^{k-1}$ est une matrice diagonale avec les éléments $(h^{k-1}_1, h^{k-1}_2, \dots)$ sur les diagonales où

$$h^{k-1}_j = \frac{j}{\tilde{\alpha}^{k-1}_j} = j \left(\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{\ln(r_0)} \right)^2 \left(-\frac{\ln(r_0)}{2} \right) \right)^{-1/2},$$

Γ est également une matrice diagonale avec les éléments $(\alpha_0^{-1}, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots)$. La matrice $Z_{k-1,k}$ renferme les lignes avec les numéros $j = 1, 2, 3 \dots$ et les colonnes avec les numéros $i = 0, 1, 2 \dots$. La matrice $Z = \{z_{i,j}\}$, $i \geq 0, j \geq 0$ (la matrice $Z_{k-1,k}$ sans la première colonne) peut être représentée sous la forme

$\tilde{Z} = t(k, k-1, l) E - W$ où

$$t(k, k-1, l) = -\frac{\pi a_2(k, k-1, l)}{2 \varepsilon(k, k-1, l)}, \quad (18)$$

$$W = \{w_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i \text{ et } j \text{ de même parité} \\ -\frac{1}{i^2 - j^2}, & i \text{ et } j \text{ de parité différente} \end{cases}$$

Nous montrons que les lignes de la matrice $Z_{k-1,k}$ sont linéairement indépendantes. Prenons N arbitraire et examinons les lignes de numéros $j = 1, 2, 3 \dots N$. Ces lignes et les colonnes de numéros $i = 1, 2, 3 \dots N$ forment la matrice

$$\tilde{Z}_N = t(k, k-1, l) E_N - W_N.$$

Le déterminant de cette matrice $\det \tilde{Z}_N = \det (tE_N - W_N) \neq 0$ puisque W_N est à symétrie oblique et le nombre effectif t ne peut être une valeur propre pour W_N . Par conséquent, les lignes de la matrice $Z_{k-1,k}$ (et les colonnes de numéros $i \geq 0$) sont linéairement indépendantes. Nous noterons que $\tilde{H}^{k-1}_N$ et Γ_N sont des matrices non dégénérées. De façon analogue on établit le bloc inférieur ($m = k+1$). Les blocs colonnes constitués par les projections des images des champs de base poloïdaux sur les toroïdaux sont constituées des matrices transposées de celles examinées.

8. Etude des champs propres

Nous étudions maintenant le problème de l'existence des champs vectoriels propres toroïdaux et poloïdaux.

8.1. Champs propres poloïdaux

Nous montrons que ces champs n'existent pas dans le problème donné. Soit q_p le champ propre supposé exister,

$$q_p = \sum_{j=1}^{\infty} C_{kpj} (q_{kpj}^+ \mp i q_{kpj}^-), \quad k_p \geq l,$$

Ici la situation en V_1^l est similaire à V_2^l . La condition $S_{qp} = 0$ dans la forme de matrice signifie $S_{mkp}^* C_{kp} = 0$ où $m = k \mp 1$, ou seulement $m = k+1$, si

$k_p = \ell$. L'égalité, par exemple $\Gamma Z_{k-1,k}^* \tilde{H}^{k-1} C_{k_p} = 0$ est de même force (voir (17))

Ici Γ et H^{k-1} sont les matrices diagonales avec éléments non nuls. Puisque les colonnes de la matrice $Z_{k-1,k}^*$ sont linéairement indépendantes (voir 7) cette dernière égalité est possible uniquement si $C_{k_p} = \{C_{k_p j}\}$ est une composition nulle. Le cas $m = k + 1$ est analogue. Il n'existe pas de champs propres poloïdaux de ce type.

8.2. Champs propres toroïdaux

Soit $q_T = \sum_{i=1}^{\infty} C_{k_T i} (q_{k_T i}^+ \mp i q_{k_T i}^-)$ le champ propre supposé ($k_T \leq 1$). Sq_{k_T} dans la forme matricielle sont les combinaisons linéaires des colonnes de la matrice du type S_{mk} . En 7 on a indiqué que S_{mk} est proportionnelle à $H^m Z_{mk} \Gamma$ où H^m et Γ sont les matrices diagonales avec éléments non nuls. Les colonnes de la matrice Z_{mk} de numéros 1, 2, 3 ... forment un système linéairement indépendant. C'est pourquoi pour n'importe quel k_T la dimension de l'espace des solutions de l'équation $Sq_{k_T} = 0$ ne dépasse pas l'unité.

8.2.1. Espace V_1^ℓ .

Dans ce cas $k_T = \ell, \ell + 2, \ell + 4$

a. $k_T = \ell$. Soit $q_\ell = \sum_{i=0}^{\infty} C_{\ell i} (q_{\ell i}^+ \mp i q_{\ell i}^-)$ est un champ toroïdal propre. La valeur propre possible est $\lambda = 1 / (\ell + 1)$. La condition $Sq_\ell = 0$ dans l'enregistrement de matrice a la forme

$$S_{\ell+1,1} C_\ell = 0 \quad (19)$$

($S_{\ell-1,\ell}$ - manque).

On sait [1] que l'opérateur de Poincaré dans une sphère a des espaces invariants correspondant à l'indice supérieur en P_m^1 . Dans le travail [6, p9] on indique que dans chaque espace il y a un champ propre unique toroïdal avec $\lambda = 1 / \ell + 1$. Puisque le champ toroïdal n'a pas de composante normale, le rétrécissement de ce champ sur la couche sphérique $(r_0, 1)$ est un champ toroïdal propre de l'opérateur de Poincaré dans la couche sphérique puisqu'il satisfait à (1) et (2). Les coefficients de décomposition de ce champ selon la base $\{q_i\}$ donnent l'ensemble $\{C_{\ell i}\}$ satisfaisant à (19). Il n'y a pas d'autres solutions puisque la dimension de l'espace des solutions ne dépasse pas l'unité.

b. $k_T > \ell$. Nous examinerons à nouveau les champs propres $q_{k_T} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{k_T i} (q_{k_T i}^+ \pm i q_{k_T i}^-)$ avec les valeurs propres possibles $\lambda = \ell / k_T (k_T + 1)$. Le bloc colonne correspondant de k_T de la matrice de l'opérateur S renferme deux blocs non nuls constitués par les matrices S_{k_T-1,k_T} , et S_{k_T+1,k_T} . La condition $Sq_{k_T} = 0$ indique que c'est la même composition des coefficients $C_{k_T} = \{C_{k_T i}\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ qui doit satisfaire au deux équations.

Par la description des matrices S_{mk} ($m = k \pm 1$) (voir 8) on constate que la colonne de numéro $i = 0$ pour les matrices $Z_{k-1,k}$ et $Z_{k+1,k}$ sont les mêmes et les matrices $Z_{k-1,k}$ et $Z_{k+1,k}$ sont composées par des colonnes linéairement indépendantes. Cela signifie que si $C_{kT} \neq 0$ existe il faut réaliser l'égalité $t(k, k-1, \ell) = t(k, k+1, \ell)$ ou voir (18))

$$\frac{a_1(k, k+1, \ell) a_2(k, k-1, \ell)}{a_1(k, k-1, \ell) a_2(k, k+1, \ell)} = \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)} \quad (20)$$

Mais les formules (13) à (16) pour $a_1(k, m, \ell)$ et $a_2(k, m, \ell)$ pour $m = k \pm 1$ indiquent que le premier membre de (20) est égal à $-(k-1)/(k+2)$ c'est-à-dire que la relation (20) ne se réalise pour aucun $k > \ell$. Par conséquent, pour $k_T > \ell$ il n'y a pas de champs propres toroïdaux dans V_1^ℓ .

8.2.2. Espace V_2^ℓ

Dans ce cas $k_T = \ell + 1, \ell + 3, \ell + 5, \dots$ et chaque bloc colonne de la matrice de l'opérateur S contient deux blocs non nuls. Comme dans 8.2.1b on peut montrer qu'il n'y a pas de champs propres toroïdaux dans V_2^ℓ .

Conclusion

Nous avons montré que pour l'opérateur de Poincaré il n'y a pas de champs propres poloïdaux dans une couche sphérique. Les champs propres toroïdaux même sont seulement ceux qui sont un rétrécissement des champs propres toroïdaux de l'opérateur de Poincaré dans la sphère sur la couche sphérique.

Remerciements

Les auteurs ont bénéficiés des conseils et du support de M.M. Vichik auquel ils expriment une profonde reconnaissance.

Bibliographie

1. Гринспен Х.П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 303 с.
2. Резников Е.Л., Розенкноп Л.М. О гладких приближениях главных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое // Наст. сборник. С.70-85.
3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
6. Резников Е.Л., Розенкноп Л.М. О главных модах оператора Пуанкаре в шаре // Геодинамика и прогноз землетрясений. М.: Наука, 1994. С.156-163. (Вычисл. сейсмология; Вып.26).

Traduction

METHODE DES DIFFERENCES FINIES POUR
LA SOLUTION DU PROBLEME SUR LES VALEURS PROPRES
ET DE LA FONCTION DE L'OPERATEUR DE POINCARÉ

Géométrie sans noyau interne

C.V. Diakonov
Institut de physique de la Terre
Académie des Sciences
Fizika Zemli n° 1 pp 18-25, 1994

On a élaboré une méthode numérique originale de solution du problème relatif aux fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur de Poincaré. Cette méthode peut être utilisée pour la solution de ce problème et également pour le calcul des oscillations inertielles d'un liquide en rotation dans une géométrie à symétrie axiale arbitraire de la frontière. On a fait un test de la méthode sur l'exemple d'une limite extérieure ellipsoïdale sans noyau intérieur. On a montré la concordance et la haute efficacité de la méthode.

Introduction

Le développement de la théorie de la rotation de la Terre est un des problèmes prioritaires pour la géophysique actuelle. La nécessité de préciser la théorie de la nutation est déterminée par les nouvelles données expérimentales obtenues sur la base des observations interférométriques à très longue base. Ces nouvelles données très précises ont décelé des divergences importantes entre les amplitudes théoriques et expérimentales de la nutation [1, 2]. D'autre part, la connaissance des paramètres théoriques de la nutation calculée pour les différents modèles de Terre avec les valeurs expérimentales obtenues par les observations radio-interférométriques, permet d'obtenir une information unique sur les propriétés rhéologiques du manteau et les autres caractéristiques de la structure interne de la Terre [2 à 5]. Cette information ne peut à présent être obtenue par d'autres sources. Bien entendu, pour ces comparaisons, la précision des calculs théoriques ne doit pas être moindre que la précision des données expérimentales.

Le développement de la théorie de la nutation est étroitement lié à la théorie des oscillations inertielles du noyau liquide de la Terre. A cause de la résonance voisine de la période diurne dans le noyau, l'effet dynamique du noyau liquide influence de façon importante les amplitudes et les phases de la nutation forcée et provoque l'existence de la nutation quasi diurne. Cette résonance est déterminée par la perturbation du mode le plus simple des oscillations inertielles du noyau. C'est pourquoi, le processus ultérieur dans la théorie de la nutation dépend directement du développement de procédés mathématiquement corrects du calcul des oscillations inertielles du noyau. Ceci présente un intérêt indépendant à cause de l'enregistrement proposé ces dernières années des oscillations inertielles du noyau de la Terre [6 à 8].

L'examen historique complet du développement de la théorie de la nutation et de la théorie des oscillations inertielles du liquide en rotation sort du cadre de notre article c'est pourquoi nous ne mentionnerons que les travaux les plus fondamentaux et principaux de notre point de vue.

Les bases des deux théories ont été mises en oeuvre à la fin du dix-neuvième siècle. Ainsi, Poincaré a obtenu une solution précise du problème de la nutation de la Terre absolument rigide avec un noyau liquide [9] elliptique non compressible.

La théorie des oscillations inertielles d'un liquide en rotation, parfait, non compressible avec une limite ellipsoïdale a été élaborée par Bryan [10]. Ces oscillations sont décrites par l'équation de Poincaré. Pour la géométrie donnée de la limite, Bryan a trouvé le système complet des solutions analytiques de l'équation de Poincaré qui permet d'établir la solution et de calculer les oscillations inertielles avec des conditions aux limites arbitraires. Nous noterons que le mode le plus simple parmi les solutions trouvées par Bryan correspond au courant du liquide dans la solution de Poincaré.

La théorie de Bryan a été généralisée au cas du liquide visqueux de Kudlick [11]. Sa théorie permet de calculer les corrections aux fonctions propres de Bryan et aux fréquences propres provoquées par la viscosité du liquide.

Ces deux théories ont connu un développement ultérieur dans les travaux d'un grand nombre d'auteurs qui utilisent différentes méthodes d'approximations. D'autant plus que quelques difficultés de principe sont conservées jusqu'à présent.

Dans la théorie actuelle de la nutation et la théorie des oscillations inertielles on utilise habituellement la décomposition du champ des déplacements des éléments de la Terre en harmoniques vectorielles sphériques (voir exemple [12 à 16]. Cette approche apparaissait très satisfaisante pour le calcul des déformations de marées et de la nutation dans les parties solides de la Terre. Cette méthode donne un système infini d'équations différentielles ordinaires par rapport aux coefficients de décomposition dépendant de la distance du centre. Les solutions approximatives du système sont obtenues par sa réduction. Dans les parties solides de la Terre, les équations pour les coefficients pour différentes harmoniques sont faiblement liées l'une avec l'autre. En d'autres termes, la matrice du système donné est voisine de la diagonale. Cela signifie que la solution du système par la méthode de réduction est correcte.

Par contre, dans le noyau liquide la décomposition du champ des déplacements selon les harmoniques vectorielles sphériques donne un système infini d'équations différentielles ordinaires dans lequel les équations pour les coefficients des différentes harmoniques sont fortement liées réciproquement l'une avec l'autre. Les éléments non diagonaux de la matrice de ce système sont du même ordre que les diagonaux. La solution de ce système par la méthode de réduction n'est pas correcte. Certaines expériences numériques ont montré que dans l'application au noyau liquide cette méthode diverge en effet parfois [16, 17]. Les résultats des travaux [16, 17] montrent que l'utilisation de la décomposition en harmoniques sphériques vectorielles avec la réduction suivante du système est apparemment non correcte, au moins lors du calcul des

oscillations inertielles du noyau dans la géométrie avec un noyau interne. Dans l'application à la théorie de la nutation le calcul uniquement des quelques premières harmoniques donne probablement une certaine solution approximative du problème, cependant la précision réelle de cette solution n'est pas connue. En particulier on ne sait pas si la précision de ce procédé permet d'évaluer correctement l'influence du noyau solide interne sur les paramètres de la nutation.

Le développement d'une théorie adéquate des oscillations inertielles du noyau liquide pour la Terre réelle rencontre certaines difficultés de principe. Dans ce cas, les solutions de Bryan ne sont pas exactes à cause de la compressibilité et de l'hétérogénéité du liquide et en outre ne satisfont pas à la condition limite supplémentaire sur la surface du noyau interne solide. L'équation de Poincaré comme aussi le système plus complexe des équations décrivant les oscillations inertielles dans le noyau réel est de type hyperbolique dans l'espace à trois dimensions. Quant à la condition aux limites elle est donnée sur une surface fermée dans l'espace à trois dimensions. Pour la solution des problèmes limite de la zone déterminée par cette combinaison du type de l'équation et du caractère des conditions aux limites (de la région) il n'y a pas de méthodes numériques actuellement élaborées. Qui plus est il n'y a pas non plus de théorie d'existence et d'unicité de la solution pour ce problème aux limites. Ainsi, une solution numérique directe de ce problème renferme une difficulté même lors de l'utilisation d'ordinateurs puissants.

Dans les travaux précédents l'auteur a obtenu quelques résultats indiquant que dans l'élaboration d'une méthode adéquate de calcul des oscillations inertielles du noyau de la Terre on peut employer les fonctions propres de l'opérateur de Poincaré formant un système orthogonal complet. Ainsi, dans les travaux [18 à 21] l'auteur a proposé une méthode de calcul des oscillations inertielles d'un liquide compressible en rotation basée sur l'utilisation des fonctions propres de l'opérateur de Poincaré. Les expériences numériques ont montré une convergence rapide de la méthode. Malheureusement, dans ces travaux, l'algorithme donné par l'auteur pour le calcul de nombres propres et de fonctions de l'opérateur de Poincaré ne peut être employé que pour la géométrie sans noyau interne avec une limite extérieure ellipsoïdale du liquide. En [22] l'auteur a utilisé le formalisme des fonctions propres de l'opérateur de Poincaré pour évaluer l'influence du noyau interne solide sur la nutation de la Terre. On a obtenu une solution analytique approximative du problème. Cependant on n'a pas réussi à évaluer la précision de cette solution. La réduction de l'algorithme est le but principal de notre travail étant donné ce qui a été proposé plus haut pour la solution du problème sur les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur de Poincaré dans une région à symétrie axiale arbitraire pour laquelle l'axe de symétrie coïncide avec l'axe moyen de rotation.

Formulation du problème

Ayant en vue les applications ultérieures en géophysique nous nous limiterons à la solution du problème dans la région limitée par deux sphéroïdes dont les surfaces sont décrites par les équations :

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 / (1 - \epsilon_1^2) = R_1^2, \quad (1)$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 / (1 - \epsilon_2^2) = R_2^2. \quad (2)$$

Ici R_1 et ϵ_1 désignent le rayon équatorial et l'excentricité de l'interface noyau-manteau. R_2 et ϵ_2 sont le rayon équatorial et l'excentricité du noyau intérieur solide. Cependant la méthode proposée peut être appliquée dans n'importe quelle géométrie axiale symétrique.

Du point de vue de l'application au calcul de la nutation et des oscillations inertielles du noyau l'étude des trois modifications suivantes du problème sur les valeurs propres présente un intérêt :

$$\begin{cases} \mathbb{L}\psi = \lambda\psi, \\ \mathbb{B}\psi = 0, & r \in S_1, \\ \mathbb{B}\psi = 0, & r \in S_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}\psi = 0, \\ \mathbb{B}\psi = \chi\psi, & r \in S_1, \\ \mathbb{B}\psi = 0, & r \in S_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}\psi = 0, \\ \mathbb{B}\psi = 0, & r \in S_1, \\ \mathbb{B}\psi = \chi\psi, & r \in S_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ici

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \mathbb{B} &= \frac{-ik}{2\omega(1-k^2)R} \left\{ \left(x - \frac{y}{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y - \frac{x}{ik} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^2 z}{1-\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \\ k &= \sigma/2\omega, \quad \tau^2 = 1 - 1/k^2, \quad k^2 < 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

σ est la fréquence des oscillations, ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Pour la géométrie sans noyau interne la modification (3.2) du problème donné a été résolu pour la première fois par Bryan [10] par la méthode de séparation

de variables. Le système de coordonnées proposé par Bryan a été utilisé par l'auteur pour résoudre la modification (3.1) [19 - 21].

Dans ce travail nous proposons une méthode numérique originale pour la solution du problème considéré ne dépendant pas de la géométrie concrète de la limite. Dans la première partie nous donnons un exposé de la méthode et nous résoudrons la modification (3.1) du problème pour la géométrie sans noyau interne dans le but d'étudier l'accord et la comparaison avec les résultats obtenus en [19 à 21]. Ensuite dans la seconde partie nous généraliserons la méthode sur le cas de la présence du noyau interne et nous étudierons son influence sur les nombres propres et les fonctions propres.

Equations principales

Introduisons le système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = R_1 r \cos \varphi, \\ y = R_1 r \sin \varphi, \\ z = R_1 z'. \end{cases} \quad (4)$$

Dans les nouvelles coordonnées les dérivées partielles en coordonnées cartésiennes x, y, z se déterminent par les formules :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R_1} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R_1} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (5.3)$$

Dans le nouveau système de coordonnées l'équation étudiée prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} = R_1^2 \lambda \psi. \quad (6)$$

Ici

$$c^2 = -\tau^2.$$

Les solutions de l'équation (5) sont naturellement cherchées sous la forme de

$$\psi = \Psi^m \exp(im\varphi). \quad (7)$$

Il est simple de constater que $\psi^m(r, z)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \Psi^m - c^2 \frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial z'^2} = R_1^2 \lambda \Psi^m. \quad (8)$$

L'équation (8) est de type hyperbolique. Dans la géométrie examinée elle doit être résolue dans la région à deux dimensions limitée par l'axe Z et C_1 semi-ellipsoïdal décrit par l'équation (fig. 1):

$$r^2 + z'^2 / (1 - \epsilon_1^2) = 1.$$

Les conditions aux limites prennent la forme

$$\mathbb{B}\Psi^m = 0, \quad (9)$$

$$\mathbb{B} = \begin{cases} kr \frac{\partial}{\partial r} + \frac{k\tau^2}{1 - \epsilon^2} z' \frac{\partial}{\partial z'} + (m - k\chi^*), (r, z) \in C_1, \\ 1, \quad m^2 > 0, \quad r = 0, \end{cases} \quad (9.1)$$

$$(9.2)$$

où

$$\chi^* = \frac{2\omega(1 - k^2)R}{-ik} \chi.$$

Ici la condition (9) - (9.1) représente la prise en considération de la condition limite sur la surface de l'ellipsoïde en coordonnées cylindriques et (9) (9.2) est déterminé par la condition imposée de continuité de la solution pour $r = 0$.

Pour résoudre l'équation (8) il est facile de passer dans le système de coordonnées formé par les caractéristiques de l'équation :

$$\begin{cases} r = \frac{X - Y}{2c} \\ z' = \frac{X + Y}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} X = z' + cr \\ Y = z' - cr \end{cases}. \quad (10)$$

Ici X, Y sont les nouvelles coordonnées. Les produits partiels en r et z se déterminent par les formules :

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = c \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right). \quad (11.2)$$

Dans les nouvelles coordonnées l'équation (8) prend la forme canonique :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial X \partial Y} - \frac{1}{2(X - Y)} \left(\frac{\partial \Psi^m}{\partial X} - \frac{\partial \Psi^m}{\partial Y} \right) + \\ & + \left(\frac{m^2}{(X - Y)^2} - \lambda^* \right) \Psi^m = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

où

$$\lambda^* = -\frac{R_1^2}{4c^2} \lambda.$$

Idée principale de la méthode numérique

Pour la géométrie simple examinée ici, sans noyau interne, la région à l'intérieur de laquelle il faut résoudre l'équation (12) est indiquée sur la fig. 1.

Il faut souligner que les conditions aux limites du problème sont données sur une limite fermée. En même temps on sait que, dans le cas général, des conditions aux limites sur une limite fermée ne sont pas admises pour une équation hyperbolique. Pour le problème examiné ici on n'a pas à présent démontré de théorème d'existence et d'unicité de la solution pour une forme arbitraire de la limite. Le cas de la couverture sphéroïdale d'excentricité arbitraire est l'unique exception pour laquelle Bryan a trouvé le système complet de solution pour la modification (3.2) et l'auteur a résolu le problème sans la modification (3.1).

Nous donnons deux lignes caractéristiques de l'équation (12) comme il est indiqué sur la figure 1.

(1) $X = X_c$ (2) $Y = Y_c$. Nous supposons maintenant que les valeurs de la solution du problème $\psi^m(X, Y)$ sur ces caractéristiques sont connues

$$\Psi^m(X, Y_c) = f(X), \quad (13.1)$$

$$\Psi^m(X_c, Y) = g(Y). \quad (13.2)$$

Alors on peut résoudre les problèmes de Goursat pour l'équation (12) dans les régions (o a f b) (o b g c) (o c q d), (o d a) et obtenir ainsi la solution du problème dans toute la région. Par conséquent, connaissant la solution du problème sur les deux caractéristiques tel que le parallélogramme construit sur elles qui couvre le domaine étudié, on peut obtenir la solution pour toutes les régions

$$\left(\begin{array}{l} f(X) \text{ sur les} \\ g(Y) \text{ caractéristiques} \end{array} \right) \text{ donne } (\psi^m(X, y) \text{ pour toutes les régions})$$

Pour résoudre le problème il faut ensuite trouver les fonctions $f(X)$ et $g(Y)$ et cette valeur propre λ (ou χ) pour lesquels ψ^m satisfait aux conditions aux limites.

A cause de la symétrie du problème par rapport à l'axe (Oz) ψ satisfait à la condition

$$\psi(z, r) = \pm \psi(-z, r). \quad (14)$$

Etant donné cela, il est simple de se convaincre que

$$\begin{aligned} \Psi^m(X, Y) &= \Psi^m(z + cr, z - cr) = \pm \Psi^m(z + cr, z - cr) = \\ &= \pm \Psi^m(-X, -Y). \end{aligned}$$

Puisque $X_c = r_p$, $Y_c = -r_p$ où r_p est le rayon polaire sans dimension, il est facile de voir que

$$f(X) = \Psi^m(X, -r_p), \quad g(Y) = \Psi^m(r_p, Y).$$

D'où

$$\begin{aligned} f(-X) &= \Psi^m(-X, -r_p) = \pm \Psi^m(r_p, X) = \pm g(X), \\ f(-X) &= \pm g(X). \end{aligned} \quad (15)$$

Ainsi, pour résoudre le problème il suffit de trouver une seule fonction inconnue d'une variable (par exemple $g(x)$) et le nombre propre λ (ou χ).

Méthode numérique

Nous construirons un réseau formé par les caractéristiques comme cela est montré sur la fig. 2 et nous approcherons ψ^m et g par leurs valeurs aux noeuds du réseau : ψ_{ij} , g_j

1. Equation aux différences finies

Pour déduire l'équation de différence reliant les valeurs de la solution cherchée aux noeuds voisins nous ferons l'intégration de l'équation (12) sur le petit parallélogramme formé par les caractéristiques :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h_x} dX \int_{y_0}^{y_0+h_y} dY \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial X \partial Y} - \frac{1}{2(X-Y)} \left(\frac{\partial \Psi^m}{\partial X} - \frac{\partial \Psi^m}{\partial Y} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{m^2}{(X-Y)^2} - \lambda^* \right) \Psi^m \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Ici h_x et h_y sont les pas du réseau en X et Y respectivement. Nous noterons :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + h_x, \quad Y_1 = Y_0 + h_y, \\ \Psi_{00} &= \Psi^m(X_0, Y_0), \quad \Psi_{10} = \Psi^m(X_1, Y_0), \\ \Psi_{01} &= \Psi^m(X_0, Y_1), \quad \Psi_{11} = \Psi^m(X_1, Y_1). \end{aligned}$$

Après avoir réalisé l'intégration avec une précision jusqu'aux termes du troisième ordre selon h nous obtenons l'équation aux différences suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_{11} - \Psi_{01} - \Psi_{10} + \Psi_{00} + \frac{h_x + h_y}{4} \left(\frac{\Psi_{01}}{X_0 - Y_1} - \frac{\Psi_{10}}{X_1 - Y_0} \right) + \frac{h_x - h_y}{4} \left(\frac{\Psi_{11}}{X_1 - Y_1} - \frac{\Psi_{00}}{X_0 - Y_0} \right) + \\ + (m^2 - 1) \frac{h_x h_y}{4} \left(\frac{\Psi_{00}}{(X_0 - Y_0)^2} + \frac{\Psi_{01}}{(X_0 - Y_1)^2} + \frac{\Psi_{10}}{(X_1 - Y_0)^2} + \frac{\Psi_{11}}{(X_1 - Y_1)^2} \right) - \\ - \frac{h_x h_y}{4} \lambda^* (\Psi_{11} + \Psi_{01} + \Psi_{10} + \Psi_{00}) + O(h^4) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Solution du problème direct

Nous supposons que les valeurs g_j sont connues. Cela signifie que ψ_{1j} et ψ_{i1} sont connus. Alors on peut, en utilisant (17) trouver ψ_{22} , ensuite ψ_{32} et ainsi de suite jusqu'à $\psi_{i_{\max}}$; ensuite ψ_{33} et ainsi de suite jusqu'à $\psi_{i_{\max}}$; de cette façon on peut obtenir ψ_{ij} dans toutes les régions. Ce processus est indiqué schématiquement sur la figure 2 et peut être exprimé par le diagramme suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Psi_{i-1,j-1} \\ \Psi_{i,j-1} \\ \Psi_{i-1,j} \end{array} \right\} \text{ donne } \Psi_{ij}.$$

Ainsi, si on connaît g , Ψ_g^m peut être facilement calculé :

$$g \text{ donne } \Psi_g^m.$$

Nous calculerons l'effet de l'opérateur B sur la fonction ψ_g obtenue de cette façon aux points d'intersection des lignes du réseau avec la limite de la région. Cela donne le vecteur des erreurs sur la limite :

$$B\Psi_g|_{\text{на границе}} = b_g, \quad b_g = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{k_{\max}} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Puisque tous les opérateurs examinés sont linéaires on peut écrire la relation suivante entre g_i et b_k :

$$b_k = A_{ki} g_i, \quad i = 1, i_{\max}; \quad k = 1, k_{\max}; \quad k_{\max} > i_{\max}. \quad (19)$$

Ici A est la matrice numérique et ses éléments dépendent de la valeur λ (ou χ).

Remarque

Puisque l'équation (12) a une singularité sur la ligne $r = 0$, nous la résolvons pratiquement dans la région limitée par le semi-ellipsoïde C_1 et les lignes $r = r_c$ (voir fig. 2). La condition aux limites $\psi = 0$ pour $r = 0$ nous faisons l'approximation par la condition

$$\Psi - (r/|m|)(\partial\Psi/\partial r) = 0$$

où $r = r_c$

3. Solution du problème inverse

Pour trouver la solution approximative du problème aux valeurs propres, nous essayerons de trouver ces nombres propres λ (ou χ) et le vecteur g qui minimisent le vecteur des erreurs de b . Nous minimiserons pratiquement la fonction positive $F(\lambda, g)$ représentant la somme des carrés des erreurs à la limite :

$$F(\lambda, g) = (b_g, b_g) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} b_k^2 \quad (20)$$

avec la condition normalisante sur g :

$$\|g\|^2 = \frac{g_i g_i}{i_{\max}} = 1.$$

Nous transformons (20) sous la forme suivante:

$$F(\lambda, g) = b_k b_k = A_{ki} g_i A_{kj} g_j = A_{ki} A_{kj} g_i g_j = A_{ij}^* g_i g_j, \quad (21)$$

$$A_{ij}^* = A_{ki} A_{kj}.$$

Ici A^* est la matrice symétrique carrée déterminée positive. Ses éléments dépendent de λ (ou χ).

Nous examinerons les vecteurs propres g_q de la matrice A^* :

$$A^* g_q = q g_q. \quad (22)$$

Il est évident que les nombres propres sont positifs. Il est facile de démontrer que pour n'importe quel λ fixe ce vecteur propre de la matrice A^* qui correspond au nombre propre minimum, donne la valeur F minimale pour le λ donné:

$$F_{\min}(\lambda) = q_{\min}(\lambda) i_{\max}. \quad (23)$$

Finalement pour résoudre le problème aux valeurs propres il faut trouver les valeurs λ_k minimisant le nombre propre minimum $q_{\min}(\lambda)$. Le vecteur propre de la matrice A^* correspondant à $q_{\min}(\lambda_k)$ donne le vecteur g_k correspondant à λ_k . Nous noterons que $q_{\min}(\lambda_k)$ donne une estimation de la précision du calcul correspondant à la fonction propre.

4. Résultats numériques

Nous nous limiterons au calcul des quelques premiers nombres propres λ_{ik}^m pour le cas qui est pratiquement important en géophysique $m = -1$ (calcul de la nutation).

Les résultats des expériences numériques effectuées sont donnés dans la table et sur les figures 3.1 à 3.4. L'allure générale de la fonction $q_{\min}(\lambda)$ est donnée sur la figure 3.1. Chaque minimum sur ce graphique correspond à un certain nombre propre de l'opérateur de Poincaré λ^{*-1}_{ik} . La numération des nombres propres correspond à celle prise en [19 à 21].

Les figures 3.2 à 3.4 montrent l'allure de $q_{\min}(\lambda)$ près des nombres propres de l'opérateur de Poincaré pour quelques valeurs du pas du réseau h . A mesure de la diminution du pas du réseau h les minima deviennent toujours plus profonds et étroits ce qui signifie une détermination de λ toujours plus précise.

Les résultats du calcul des nombres propres de l'opérateur de Poincaré λ^* pour différentes valeurs du pas du réseau h et γ_c sont donnés dans la table. Pour comparer et estimer de la façon la plus évidente la précision du calcul λ^* nous donnons les valeurs précises des nombres propres obtenues à l'aide de la répartition des variables [19 à 21].

Les champs de vitesses du liquide correspondant aux fonctions propres calculées sont données sur les figures 4.1 à 4.4. A mesure de la diminution du pas du réseau la succession des fonctions calculées coïncident avec les fonctions propres de l'opérateur de Poincaré.

Conclusion

Les résultats obtenus permettent de tirer la conclusion que la méthode proposée pour la solution du problème des nombres propres et des fonctions de l'opérateur de Poincaré convergent. Plus précisément

$$\lim_{r_c \rightarrow 0} (\lim_{h \rightarrow 0} (\lambda^*(h, r_c))) = \lambda^*, \quad (24)$$

$$\lim_{r_c \rightarrow 0} (\lim_{h \rightarrow 0} (\Psi_{lk}^m(h, r_c))) = \Psi_{lk}^m. \quad (25)$$

Pour une géométrie simple de la limite, sans noyau interne, les résultats convergent avec ceux connus précédemment.

Les résultats de l'application de la méthode pour le calcul des nombres propres de l'opérateur de Poincaré dans la géométrie avec un noyau intérieur et l'étude de son influence sur les nombres propres et les fonctions seront donnés dans la partie 2.

Remerciements

Une grande partie des calculs numériques a été faite par l'auteur lors de son séjour à l'Observatoire Royal de Belgique. L'auteur est reconnaissant au Directeur de l'Observatoire le Professeur P. Pâquet pour l'organisation d'excellentes conditions de travail et également au Docteur V. Dehant pour ses avis utiles.

BIBLIOGRAPHIE

1. Herring T.A., Gwinn C.R., Shapiro I.I.
Geodesy by radio interferometry: studies of the forced nutation of the Earth, 1 Data analysis, J. geophys. Res., 1986. V. 91. B. 5. P.4745-4754.
2. Gwinn C.R., Herring T.A., Shapiro I.I.
Geodesy by radio interferometry: studies of the forced nutation of the Earth, 2 Interpretation, J. geophys. Res., 1986. V. 91. B. 5. P.4755-4765.
3. Molodenski S.M., Kramer M.B.
Mechanical properties of mantle and core based of new astrometrical data. Phys. Earth, 1987. V. 11. P. 3-11.
4. Dehant V.
On the nutations of a more realistic earth model. Geophys. J. Int., 1990. V. 100. P. 477-483.
5. Dehant V.
Tidal parameters and nutation: influence from the Earth interior. Comm. Observ. Royal de Belgique. Serie A 99, 1990, n° 173.
6. Melchior P., Ducarme B.
Detection of inertial gravity oscillations in the Earth's core with a superconducting gravimeter at Brussels. Phys. Earth Planet. Int., 1986. V. 42. P. 129-134.
7. Melchior P., Crossley D.J., Dehant V., Ducarme B.
Have inertial waves been identified from the Earth's core ? Comm. Observ. Royal de Belgique. Serie A 91, 1988, n° 162.
8. Cummings P., Wahr J-M., Agnew D.C., Tamyra Y.
Constructing core undertones using stacked IDA gravity records. Geoph. J. Int., 1991. V. 106. P. 189-198.
9. Poincaré H.
Sur la précession des corps déformables. Bull. Astr., 1910. V. 27. P. 321-356.
10. Bryan G.H., B.A.
The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. Phil. Trans. Roy. Soc., London (A), 1888. V. 180. P. 187-219.
11. Kudlick M.D.
On transient motions in a contained rotating fluid. Ph. D. Thesis M.I.T., USA, 1966.
12. Smith M.L.
The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating slightly elliptical Earth. Geoph. J. R. Astr. Soc., 1974. V. 37. P. 491-526.

13. Crossly D.J., Rochester M.G.
Simple core undertones. Geoph. J.R. Astr. Soc., 1980. V. 60. P. 129-161.
14. Wahr J-M.
The tidal motions of a rotating elliptical and oceanless Earth.
Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1979.
15. Wahr J-M.
The forced nutation of an elliptical, rotating elastic and oceanless Earth., Geoph. J.R. Astr. Soc., 1981. V. 64. P. 705-727.
16. Dehant V.
Core undertones in an elliptical uniformly rotating Earth. Comm. Observ. Royal de Belgique, Serie A 92, 1990. Serie geophys. 163 p.
17. Bykova V.V.
On the reduction of infinite system of differential equations in the problem of Earth nutation. Kinematics and Physics of sky bodies, 1991. V. 7. № 6, P. 3-10.
18. Diakonov S.V.
To the calculation of low frequency oscillations of the earth core. Proceedings of IAU Symposium 141, 1990. P. 163-164.
19. Дьяконов С.В. Учет сжимаемости жидкости при расчете низкочастотных колебаний ядра Земли. Изв. АН СССР, Серия Физика Земли, 1990. № 4. С. 15 - 21.
20. Дьяконов С.В. К расчету нутации Земли со сжимаемым ядром. Кинематика и физика небесных тел. 1990. Т. 6. № 4. С. 17 - 22.
21. Diakonov S.
On the calculation of low frequency oscillations on the core. Geophys. J. Int., 1991. V. 107, P. 291-296.
22. Дьяконов С.В. К расчету влияния твердого внутреннего ядра на нутацию Земли. Физика Земли. 1991. № 3. С. 3 - 7.

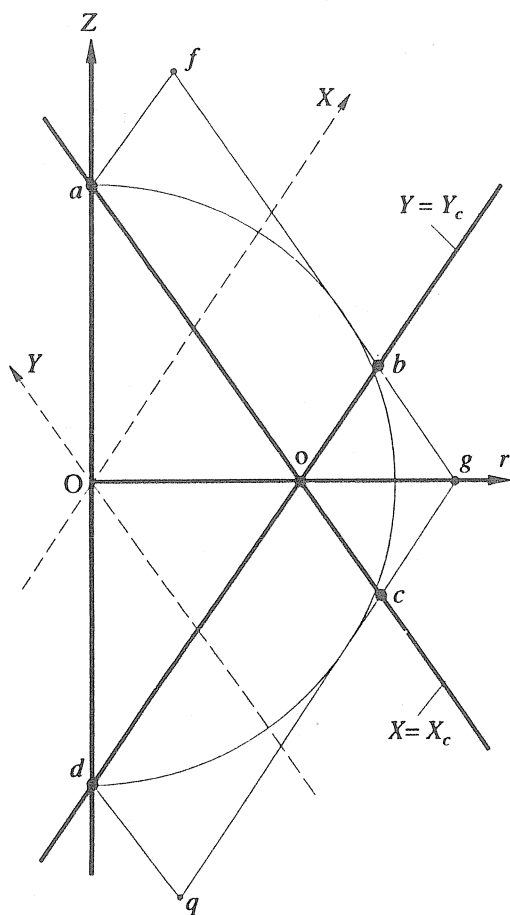


Fig. 1. Région de la solution de l'équation (8), axes de coordonnées et caractéristiques.

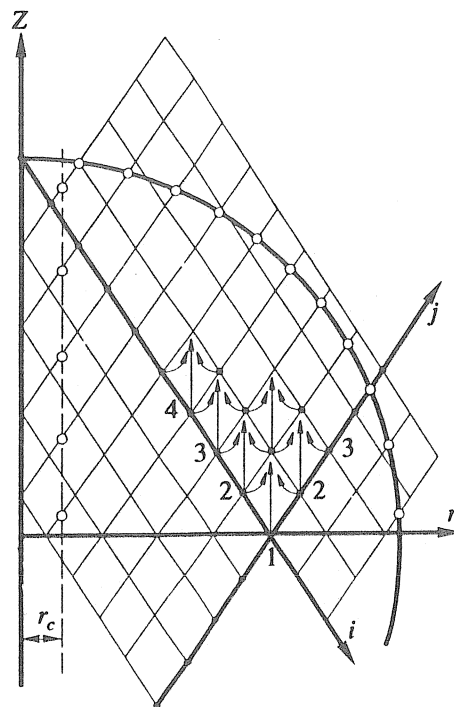


Fig. 2. Exposé schématique de l'algorithme de la solution "du problème direct"

Table : Résultats du calcul des nombres propres des opérateurs de Poincaré λ_{1k}^{*-1} dans la géométrie sans noyau interne ($\epsilon = 0.0715$, $k = -0.5$, $k_0 = 1/15$, $r = 0.043$).

r_c	h	λ^*	$q_{\min}$	λ^*	$q_{\min}$	r_c	h	λ^*	$q_{\min}$	λ^*	$q_{\min}$
r_0	h_0	$l=1, k=2$		$l=1, k=4$		r_0	h_0	$l=3, k=2$		$l=3, k=4$	
	$h_0/2$	-0.0090	6.6×10^{-11}	-15.23	3.0×10^{-4}		$h_0/2$	7.97	6.0×10^{-5}	-0.88	2.5×10^{-4}
	$h_0/4$	-0.0090	1.9×10^{-13}	-14.87	2.6×10^{-5}		$h_0/4$	7.924	8.5×10^{-7}	-1.012	1.1×10^{-5}
	$h_0/8$			-14.7891	2.0×10^{-6}		$h_0/8$	7.9108	1.1×10^{-7}	-1.0000	7.8×10^{-7}
$r_0/2$	$h_0/2$	-0.0090	3.0×10^{-13}	-14.7745	2.3×10^{-7}	$r_0/2$	$h_0/2$	7.9076	1.1×10^{-8}	-0.9994	5.1×10^{-8}
	$h_0/4$			-14.867	7.9×10^{-5}		$h_0/4$	7.919	2.3×10^{-6}	-1.006	1.9×10^{-5}
	$h_0/8$			-14.7976	4.0×10^{-6}		$h_0/8$	7.9060	4.5×10^{-8}	-1.0001	4.4×10^{-7}
				-14.7749	1.7×10^{-7}			7.9029	7.8×10^{-9}	-1.0003	4.2×10^{-8}
sep. var.		-0.00899745		-14.76770793		sep. var.		7.90165534		-1.00022970	
r_0	h_0	$l=2, k=2$		$l=2, k=4$		r_0	h_0	$l=4, k=2$		$l=4, k=4$	
	$h_0/2$	2.912	1.7×10^{-6}	-5.344	1.2×10^{-4}		$h_0/2$	15.44	4.4×10^{-4}	5.06	7.9×10^{-4}
	$h_0/4$	2.908	6.3×10^{-8}	-5.266	6.5×10^{-6}		$h_0/4$	15.23	1.2×10^{-5}	5.09	3.2×10^{-5}
	$h_0/8$	2.9083	5.1×10^{-9}	-5.2563	3.4×10^{-7}		$h_0/8$	15.184	6.5×10^{-7}	5.078	3.4×10^{-6}
$r_0/2$	$h_0/2$	2.9063	6.5×10^{-10}	-5.2535	1.7×10^{-8}	$r_0/2$	$h_0/2$	15.1733	8.1×10^{-8}	5.0737	1.8×10^{-7}
	$h_0/4$	2.907	1.2×10^{-7}	-5.2664	6.1×10^{-6}		$h_0/4$	15.209	1.9×10^{-5}	5.095	1.1×10^{-4}
	$h_0/8$	2.9062	3.5×10^{-9}	-5.2563	2.0×10^{-7}		$h_0/8$	15.1625	4.9×10^{-7}	5.072	2.4×10^{-6}
		2.9058	5.9×10^{-10}	-5.2535	1.6×10^{-8}			15.1510	2.7×10^{-8}	5.0651	1.1×10^{-7}
sep. var.		2.90569231		-5.25258396		sep. var.		15.14568611		5.06296958	

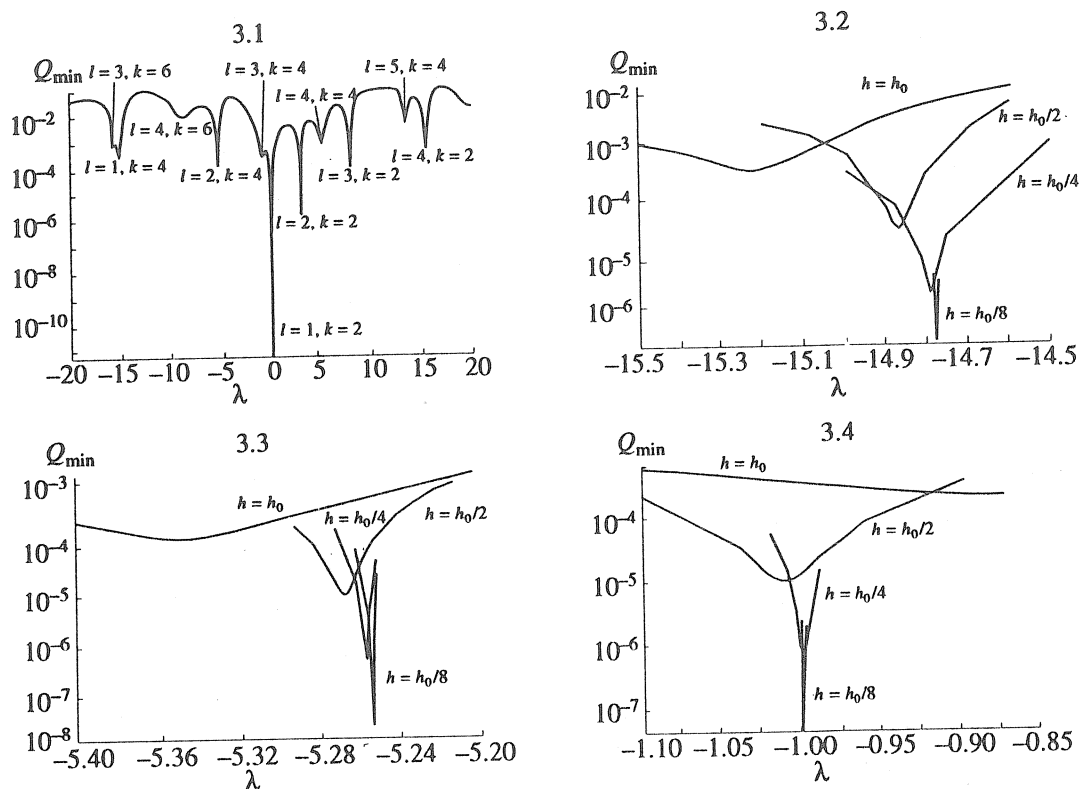


Fig. 3 Graphiques de la fonction $q_{\min}(\lambda^*)$. Fig. 3.1: Aspect général de la fonction $q_{\min}(\lambda^*)$ pour $h = h_0$, Fig. 3.2 à 3.4: graphiques de la fonction $q_{\min}(\lambda^*)$ pour les différents k près des nombres propres.

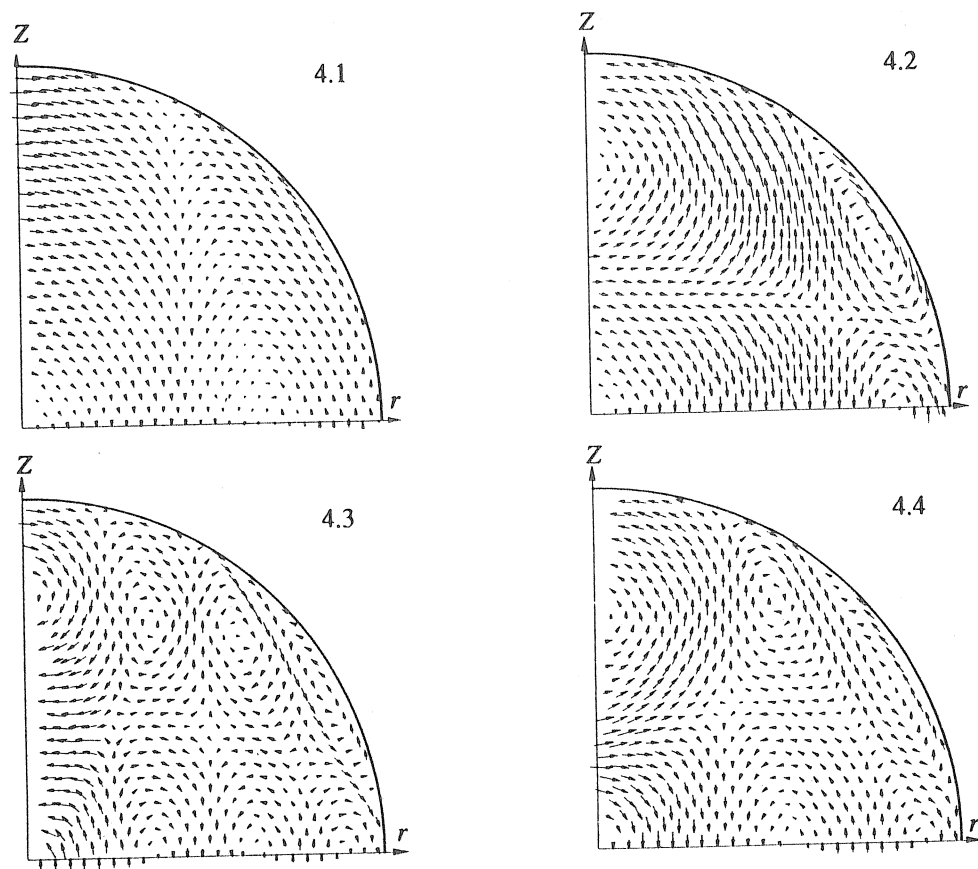


Fig. 4 Champs vectoriels de la vitesse du liquide correspondant aux fonctions propres ψ_{ik}^m : fig. 4.1 - $m = 4.1$, $l = 2$, $k = 2$; fig. 4.2. - $m = -1$, $l = 2$, $k = 4$; fig. 4.3 - $m = -1$, $l = 3$, $k = 4$; fig. 4.4 - $m = -1$, $l = 4$, $k = 4$.