

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

100

15 NOVEMBRE 1990

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR

Observatoire royal de Belgique

Avenue Circulaire 3

1180 Bruxelles

§ I. Modèles rhéologiques; influence de la viscosité de l'enveloppe sur les amplitudes et les phases des marées terrestres.

L'exposé détaillé du problème de la non élasticité de l'intérieur de la Terre est contenu dans les monographies [65, 66]. Dans la suite nous aurons besoin de certaines indications générales sur les modèles existants de la rhéologie du manteau et des relations déterminant la dépendance du module d'élasticité en fonction de la fréquence pour les milieux non idéalement élastiques.

I. Description mathématique du milieu non élastique; rapports de Kramer - Kronig.

On sait que le modèle général d'un milieu linéaire non idéalement élastique peut être obtenu par le remplacement formel de la loi de Hooke (1.61) par une relation intégrale de la forme suivante [52] :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ik}(t) = & \delta_{ik} \int_{-\infty}^t \operatorname{div} \tilde{u}(t') \tilde{\lambda}(t-t') dt' + \\ & + 2 \int_{-\infty}^t \tilde{e}_{ik}(t') \tilde{\mu}(t-t') dt', \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $\tilde{\lambda}(t-t')$, $\tilde{\mu}(t-t')$ sont des fonctions du temps déterminant la relation entre les tensions σ_{ik} à l'instant t et les déformations e_{ik} à tout instant $-\infty < t' \leq t$.

En utilisant la relation (3.1) il est facile d'exprimer les paramètres de qualité mécanique $Q_u = |\mu|/|\operatorname{Im}\mu|$, $Q_k = |k|/|\operatorname{Im}k|$ et également les parties réelles des modules $\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Re}k$ par $\mu(t-t')$

$$\tilde{k}(t-t') = \tilde{\lambda}(t-t') + \frac{2}{3} \tilde{\mu}(t-t')$$

et d'établir les liens existant entre Q_u et $\operatorname{Re}\mu$, Q_k et $\operatorname{Re}k$.

Dans la formule (3.1) la borne supérieure d'intégration peut être remplacée par $+\infty$, si l'on convient de poser

$$\tilde{\mu}(t-t') = \tilde{\lambda}(t-t') = 0 \quad \text{pour } t-t' < 0 \quad (3.2)$$

Après avoir appliqué à (3.1) la transformation de Laplace et en utilisant le théorème connu sur la transformation par repliement [53] nous obtiendrons le rapport entre les tensions et les déformations généralisant la loi de Hooke (1.61) dans le cas du milieu non élastique :

$$S_{ik}(\sigma) = \lambda(\sigma) \operatorname{div} \bar{u}(\sigma) \delta_{ik} + 2 \mu(\sigma) e_{ik}(\sigma) \quad (3.3)$$

où

$$S_{ik}(\sigma), \mu(\sigma), \lambda(\sigma), u(\sigma), e_{ik}(\sigma)$$

sont respectivement les transformées de Laplace des fonctions $\tilde{S}_{ik}(t)$, $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\lambda}(t)$, $\tilde{u}(t)$, $\tilde{\epsilon}_{ik}(t)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} \tilde{\mu}(t) dt, \\ \lambda(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} \tilde{\lambda}(t) dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

où σ est la fréquence appliquée avec les valeurs réelles et les valeurs complexes.

Les relations (3.2) garantissent la convergence des intégrales (3.4) pour $\text{Im}\sigma \geq 0$. D'après le théorème connu sur la forme analytique des transformées de Laplace [53] λ , μ sont des fonctions analytiques de σ dans le domaine d'existence c'est à dire $\text{Im}\sigma \geq 0$. Par suite, sur l'axe réel $\text{Im}\sigma = 0$ les fonctions $\text{Im}\lambda(\sigma)$, $\text{Im}\mu(\sigma)$ s'expriment par $\text{Re}\lambda(\sigma)$, $\text{Re}\mu(\sigma)$ d'après les formules de Koch [53]. Si, dans l'intégrale de Koch, on utilise comme contour d'intégration l'axe réel $\text{Im}\sigma = 0$ formé dans le demi plan supérieur de l'arc infiniment plus grand que le rayon alors les rapports entre $\text{Re}\lambda(\sigma)$, $\text{Re}\mu(\sigma)$ et $\text{Im}\lambda(\sigma)$, $\text{Im}\mu(\sigma)$ se rapportent aux formules de Kramer - Kronig [54]

$$\begin{aligned} \text{Re}\mu(\sigma) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im}\mu(\sigma')}{\sigma' - \sigma} d\sigma', \\ \text{Im}\mu(\sigma) &= -\frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Re}\mu(\sigma')}{\sigma' - \sigma} d\sigma', \end{aligned} \quad (3.5)$$

où l'on désigne par le symbole f la valeur de l'intégrale dans le sens de la valeur principale.

Des relations analogues conviennent aussi pour $\text{Re}k$, $\text{Im}k$.

Les relations (3.5) montrent que les fonctions $\text{Im}\mu(\sigma)$, $\text{Im}k(\sigma')$ déterminant la dissipation d'énergie dans le milieu non élastique sont liées de façon univoque aux fonctions $\text{Re}\mu(\sigma)$, $\text{Im}k(\sigma)$ déterminant le caractère de dépendance du module d'élasticité en fonction de la fréquence. Cela permet d'étudier les paramètres de qualité de façon indirecte en utilisant les dépendances $Q_{\mu} = |\mu|/\text{Im}\mu$, $Q_k = |k|/\text{Im}k$ soit au contraire de déterminer les dépendances $\text{Re}\mu(\sigma)$, $\text{Re}k(\sigma)$ d'après les valeurs connues $Q_{\mu}(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$. L'attention a été attirée sur l'importance de principe de cette circonstance conformément à l'étude de la structure interne de la Terre par S.Ts. Akopian, V.N. Zharkov et V.M. Lioubimov dans le travail [55].

Au cas du corps idéalement élastique correspond δ - les fonctions transformées

$$\tilde{\lambda}(t - t') = \lambda \delta(t - t'), \quad \tilde{\mu}(t - t') = \mu \delta(t - t').$$

Conformément à (3.4) dans ce cas $\text{Im}\lambda = \text{Im}\mu = 0$; $\text{Re}\lambda$ et $\text{Re}\mu$ ne dépendent pas de σ et les relations (3.3) reviennent à la loi de Hooke (1.61).

La relation (3.1) peut être évidemment modifiée en exprimant $e_{ik}(t)$ par les valeurs correspondantes $S_{ik}(t')$ aux instants antérieurs).

Après séparation sous le signe intégrale δ est le lien de la partie imaginaire, le lien de la partie de déplacement des déformations avec la partie de déplacement des tensions qui peut être représenté sous la forme

$$\tilde{e}_{ik}(t) = \frac{1}{\mu_0} \left[\tilde{S}_{ik}(t) + \int_0^t \tilde{S}_{ik}(t') \dot{\psi}(t-t') dt' \right],$$

où μ_0 est la constante de mesure des tensions, $\dot{\psi}(t)$ est la fonction de creep; on a désigné par un point diacritique la différenciation par rapport à t . Après avoir appliqué à cette relation la transformation de Fourier, nous obtiendrons

$$e_{ik}(\sigma) = \frac{1}{\mu_0} S_{ik}(\sigma) (1 + \tilde{\psi}(\sigma)), \quad (3.6)$$

où $\tilde{\psi}(\sigma)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\dot{\psi}(t)$. La formule (3.6) montre que le rapport entre les parties de déplacements $e_{ik}(\sigma)$ et $S_{ik}(\sigma)$ peut être représenté sous la forme de la loi habituelle de Hooke (3.3) si on prend

$$\mu(\sigma) = \frac{\mu_0}{1 + a(\sigma) + i b(\sigma)} \quad (3.7a)$$

où

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= \int_0^\infty \cos \sigma t \dot{\psi}(t) dt, \\ b(\sigma) &= \int_0^\infty \sin \sigma t \dot{\psi}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.7b)$$

On a une forme analogue et l'expression du module complexe de compressibilité.

2. Les modèles rhéologiques, modèles de répartition du facteur de qualité Q_μ avec la profondeur dans le manteau de la Terre.

Les dépendances $Re\mu(\sigma)$, $Im\mu(\sigma)$ déterminées par les formules (3.7) pour les différentes fonctions de creep $\dot{\psi}(t)$ ont été prises en compte dans les travaux [56 à 62]. Quelques résultats de ces calculs sont donnés dans la table 3.I.

Table 3.I.

Dépendance $Re\mu(\sigma)$, $Q\mu(\sigma)$ pour certaines fonctions les plus simples de creep.

Fonction de creep	$Re\mu(\sigma)$	$Q^{-1}\mu(\sigma)$
Maxwell $\psi(t) = \frac{t}{\tau}$	$\mu(\infty) \left(1 + \frac{t}{\sigma^2 \tau^2}\right)^{-1}$	$\frac{1}{\sigma^2} \left(1 + \frac{t}{\sigma^2 \tau^2}\right)^{-1}$
Lomnitz $\psi(t) = q \ln(1 + \alpha t)$	$\mu(\infty) \left[1 + \frac{2}{\pi Q\mu} \left(\ln \frac{\sigma}{\alpha} + 0,572\right)\right]$	$\frac{\pi}{2} q \approx \text{const}(\sigma)$ dans la gamme $10^{-10} < \frac{\sigma}{\alpha} < 10^{-3}$
exponentielle $\psi(t) = ct^n$	$\frac{Re\mu(\sigma_1)}{Re\mu(\sigma_2)} = 1 - \frac{1}{Q\mu(\sigma_1)}$ $ctg \frac{n\pi}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^n - 1\right]$	$cn \Gamma(n) \sigma^{-n}$ $\sin \frac{n\pi}{2}$

Le problème de savoir quel est le modèle rhéologique qui décrit de la meilleure façon les propriétés non élastiques des couches profondes de la Terre, peut être examiné grâce aux données sur l'amortissement des oscillations propres de la Terre. La solution de ce problème se complique par le fait que les valeurs du paramètre mécanique $Q\mu$ varient sensiblement avec la profondeur. C'est pourquoi il a fallu effectivement déterminer $Q\mu$ en tant que fonction des deux variables : σ et r . Toutefois ce problème a été résolu en première approximation. A la suite d'une série d'expériences numériques il a été montré dans le travail [56] que les modèles de la forme

$$Q\mu(\sigma, \ell) = q(\ell) \sigma^n$$

pour $|n| \geq 0.5$ ne concordent pas avec les données observées ni pour une répartition quelconque de $q(\ell)$ et par conséquent doivent être rejetés. Pour cette raison le modèle de fonction de dissipation $Q\mu(\sigma) = \text{const.}$ ne dépendant pas de la fréquence, correspondant à la fonction logarithmique de Lomnitz a obtenu la plus grande diffusion. Les modèles de répartition $Q\mu(\ell)$ qui coïncident de la meilleure façon avec les données sur l'amortissement des oscillations propres de la Terre et également des ondes de volume et de surface sont donnés sur la figure 3.I.

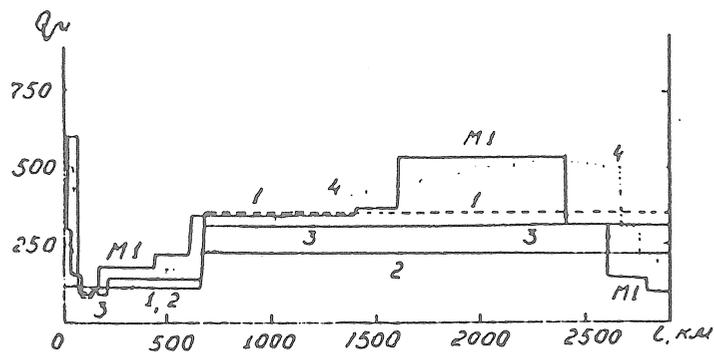


Figure 3.1.

Les différents modèles de répartition de la qualité mécanique Q_u (ℓ) dans le manteau de la Terre I - QMU provenant de [63], la formule (2), 2 - B de [64], la formule (3), 3 - PREM de [61], 4 - SL de [58], MI la répartition modifiée de [56].

Cette figure montre que les modèles actuels de la répartition de Q_u (ℓ) diffèrent très peu entre eux.

Il convient de noter que les mécanismes physiques conduisant à la fonction dissipative Q_u ne dépendant pas ou dépendant peu de la fréquence ne sont pas encore tout à fait clairs; toutefois il existe deux faits confirmant cette conclusion :

1) les expériences sur des échantillons et 2) la confirmation expérimentale de la dépendance de $Re\mu$ (δ) (3.7) correspondant à la fonction logarithmique de Lomnitz.

Les expériences sur des échantillons montrent que le paramètre Q_u dépend en réalité faiblement de la fréquence [67, 68]. Il faut cependant noter que les essais ne sont possibles qu'à des pressions et des températures sensiblement plus basses que les valeurs caractéristiques pour les parties profondes de la Terre et c'est pourquoi elles ne peuvent apporter une réponse définitive à la question.

Une confirmation plus sûre de la déduction de Q_u (σ) \approx const a été obtenue en 1975 par S.Ts. Akopian, V.N. Zharkov et V.M. Lioubimov [55, 69] qui ont attiré l'attention des premiers sur le fait que la dépendance $Re\mu$ (σ) (3.7) correspondant à la fonction logarithmique de creep de Lomnitz existe réellement.

Le calcul de cette dépendance a permis d'expliquer les absences de coordination apparaissant lors des essais de réduction simultanée des données sur les périodes des oscillations propres de la Terre et des instants de passage des ondes sismiques de volume [69].

Ainsi, le modèle Q_u (σ) = const est apparu comme très conforme dans le sens qu'il a permis d'expliquer non seulement l'amortissement observé des oscillations propres de la Terre mais aussi

les différences existantes entre les valeurs théoriques et observées de leurs périodes.

3. Influence de la viscosité de l'enveloppe sur les amplitudes et les phases des marées terrestres.

La déduction des effets de la viscosité de l'enveloppe à partir des résultats des mesures de marées et astronomiques a évidemment un intérêt particulier puisqu'elle permet d'élargir très sensiblement la gamme des périodes dans laquelle se manifeste la qualité mécanique du manteau. Laissant pour l'instant de côté le problème de l'influence de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation et le mouvement chandlérien du pôle nous examinerons les possibilités de solution des équations des déformations de marées statiques (1.62) avec des valeurs complexes des modules élastiques (3.7).

La substitution directe des modules complexes $\mu(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ dans les équations (1.67) élève leur ordre du sixième au douzième (chaque équation se subdivise en une partie réelle et une partie imaginaire). Il est évident que la solution précise de ce système est assez complexe c'est pourquoi il est naturel d'utiliser le fait de la petitesse des paramètres Q_K , $Q_\mu \leq 10^{-2}$ et de s'efforcer de résoudre le problème par la méthode des perturbations à partir de ces paramètres. Puisque dans le cas examiné ici, les variations de $\delta\lambda$, $\delta\mu$ ne sont fonctions que de r et ne dépendent pas des variables angulaires, il est facile d'exprimer la solution du problème par la fonction de Green du système des équations ordinaires (1.67).

On a montré dans le travail [23] que les expressions cherchées pour les variations des nombres de Love ont la forme

$$(\delta h, \delta k) = \frac{2n+1}{3} \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^6 \left(\sum_{i=1}^2 \delta a_{ik} f_{p,i}^j(\tau) f_k^{(j=2)}(\tau) - \sum_{i=4}^6 \delta a_{ik} f_{p,i}^j(\tau) f_k^{(j=2)}(\tau) \right) \right] d\tau, \quad (3.8)$$

où, à la valeur $j = 1$, correspond δh , et à $j = 2$ correspond δk ; les intégrales f_i se déterminent par les conditions aux limites (1.112) pour $f_4 = f_6 = 1$; δa_{ik} sont les variations des coefficients entrant dans les équations (1.67). Après avoir exprimé δa_{ik} par les variations de $\delta\kappa$, $\delta\mu$, on peut représenter cette expression également sous la forme

$$\delta k = \int_{0.546}^1 \left(\alpha_1(\tau) \frac{\delta\mu(\tau)}{\mu(\tau)} + \beta_1(\tau) \frac{\delta\kappa(\tau)}{\kappa(\tau)} \right) d\tau; \quad (3.9)$$

$$\delta h = \int_{0.546}^1 \left(\alpha_2(\tau) \frac{\delta\mu(\tau)}{\mu(\tau)} + \beta_2(\tau) \frac{\delta\kappa(\tau)}{\kappa(\tau)} \right) d\tau,$$

où $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ sont des fonctions sans dimension de r . Les graphiques de ces fonctions calculés pour le modèle de Terre n° 508 de Gilbert et Dziewonski [70] sont donnés par la figure 3.2, les valeurs numériques de ces mêmes fonctions sont données dans les tables 3.2.

La substitution des valeurs complexes μ , k en (3.9) donne les valeurs complexes des nombres de Love. Les rapports $\text{Im}h/|h|$, $\text{Im}k/|k|$ déterminés de cette façon sont égaux numériquement, en radians, au retard de phase des déplacements verticaux de la surface et des variations de marée du potentiel par rapport à la phase du potentiel générateur de marées.

Table 3.2.

Valeurs numériques des fonctions sans dimension α_1 , $(r)\alpha_2$, $(r)\beta_1$, $(r)\beta_2$ entrant en (3.9)

r	$\alpha_1(r)$	$(r)\alpha_2(r)$	$\beta_1(r)$	$(r)\beta_2(r)$
0 546	-0,893	-0,0246	-1,841	-0,0054
0 596	-0,678	-0,0040	-1,347	0,0141
0 647	-0,578	-0,0003	-1,452	-0,0078
0 697	-0,499	-0,0073	-0,964	-0,0604
0 747	-0,421	-0,0209	-0,787	-0,135
0 797	-0,338	-0,0388	-0,602	-0,230
0 848	-0,255	-0,0571	-0,425	-0,335
0 898	-0,165	-0,0638	-0,230	-0,409
0 948	-0,091	-0,0489	-0,065	-0,411
0 998	-0,070	-0,0467	-0,051	-0,451
1	-0,018	-0,0090	0,197	-0,219

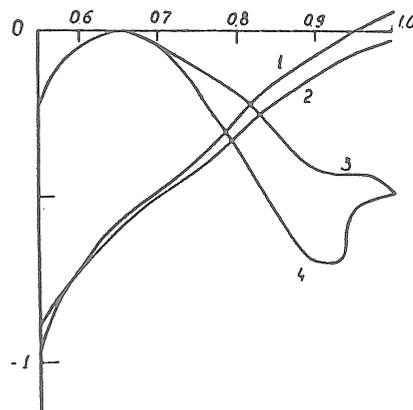


Figure 3.2. Graphique des fonctions de poids entrant en (3.9)
 1 - $0,5\alpha_1(r)$; 2 - $\alpha_1(r)$; 3 - $\beta_2(r)$; 4 - $10\beta_1(r)$

La figure montre que $Q_1(r)$, $Q_2(r)$ décroissent rapidement depuis le centre jusqu'à la surface de la Terre. Cela signifie que les corrections aux amplitudes et aux phases des marées dépendent en fait des valeurs de $\delta\mu(\sigma)$ dans le manteau inférieur; les propriétés élastiques du manteau supérieur et de l'écorce n'exercent pratiquement pas d'influence sur les nombres de Love. On constate également par la figure que le nombre de Love k ne dépend presque pas du module de compressibilité c'est à dire que le nombre k n'apporte pratiquement pas d'information sur le paramètre de qualité Q_k .

Après avoir substitué en (3.9) les répartitions $Q_\mu = \text{Im}\mu/|\mu|$ représentées sur la figure 9.1 et en supposant que Q_μ ne dépend pas de la fréquence jusqu'à des périodes de l'ordre d'un jour, nous trouverons

$$\begin{aligned} Jm k &= 0,6 - 0,8 \cdot 10^{-3}; \\ Jm h &= 1,2 - 1,6 \cdot 10^{-3}; \\ Jm l &= 0,14 - 0,20 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le retard de phase correspondant à ces valeurs des variations de marées de l'accélération de la pesanteur est

$$\varphi = \text{Im} \left(h - \frac{3}{2} k \right) \left(1 + h - \frac{3}{2} k \right) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ radian}$$

ce qui est inaccessible aux observations étant donné leur précision actuelle.

En utilisant les expressions pour $\text{Re}\mu(\sigma)$ de la seconde ligne de la table 3.1 et en supposant que le modèle initial de la Terre est construit d'après les données des ondes sismiques de volume de période voisine de 1 s, nous obtiendrons les valeurs suivantes $\text{Re } \delta k$, $\text{Re } \delta h$: $\text{Re } \delta l$.

1) marées semi diurnes :

$$\begin{aligned} \text{Re } \delta k &= (3,5 - 5,1) 10^{-3}; \quad \text{Re } \delta h = (6,9 - 10,0) 10^{-3}; \\ \text{Re } \delta l &= (1,1 - 1,6) 10^{-3}; \end{aligned}$$

2) marées diurnes :

$$\begin{aligned} \text{Re } \delta k &= (3,7 - 5,4) 10^{-3}; \quad \text{Re } \delta h = (7,4 - 10,7) 10^{-3}; \\ \text{Re } \delta l &= (1,2 - 1,7) 10^{-3}; \end{aligned}$$

3) marées bimensuelles

$$\text{Re } \delta k = (4,6 - 6,6) 10^{-3}; \text{ Re } \delta h = (9,1 - 13,1) 10^{-3};$$

$$\text{Re } \delta l = (1,4 - 2,1) 10^{-3};$$

4) période de Chandler

$$\delta k = (5,7 - 8,2) 10^{-3}$$

Les mêmes corrections pour le modèle de travail $Q_u(r)$ de la publication [56] sont les suivantes :

	0,5 jour	1 jour	14 jours	430 jours
$10^3 \delta k$	4,1	4,4	5,4	6,7
$10^3 \delta h$	7,5	8,0	9,9	
$10^3 \delta l$	1,3	1,4	1,7	

La correction correspondante au facteur gravimétrique $\delta = 1 + h - 3/2 k$ est de $1,4 \cdot 10^{-3}$.

En utilisant les valeurs des nombres de Love pour le modèle idéalement élastique de la Terre N° 1066 de Gilbert et Dziewonski (table I.1), nous obtiendrons

$$\delta = \begin{matrix} (1,1584 \text{ pour le modèle } 1066 \text{ a} \\ (1,1578 \text{ pour le modèle } 1066 \text{ b} \end{matrix}$$

et

$$\delta = 1,1592 \div 1,1598 \quad (3.11)$$

pour le modèle non élastique de la Terre.

Les mesures actuelles les plus sûres donnent [71, 72]

$$\delta = 1,160 - 1,162 \pm (0,001 \div 0,002)$$

La comparaison de ces nombres montre que l'effet de non élasticité de l'enveloppe est au seuil de la précision des mesures actuelles.

Le modèle de la fonction de dissipation $Q_u(\sigma)$ ne dépendant pas de la fréquence comme également le modèle de la dépendance exponentielle

$$Q_u(\sigma) = Q_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

pour $n/\sigma \leq 0,15$ ne s'opposent pas aux données actuelles des marées

En même temps les modèles avec $n \geq 0,2$ donnent des valeurs par trop grandes de δ et aussi doivent être rejetés. Lorsqu'on examine les valeurs possibles du paramètre n il convient de tenir compte aussi des données relatives à la période du mouvement chandlérien du pôle. Ce problème sera examiné plus loin.

4. Sur le ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre.

Dans la conclusion nous donnerons des estimations relatives au ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre, déterminé par la dissipation de l'énergie de marée dans l'enveloppe et dans l'océan. Le moment des forces de marées freinant la rotation diurne est déterminé par l'expression [73]

$$M = \frac{V_0^2 \alpha}{4\pi G} \frac{2\pi m(n+m)!}{(n-m)!} J_m k \quad (3.12)$$

Après avoir substitué en (3.10) les valeurs numériques des amplitudes des ondes principales selon la décomposition de Doodson

$$\begin{aligned} V_0 | M_2 &= 7495 \text{ cm}^2/\xi^2 ; & V_0 | O_1 &= 6595 \text{ cm}^2/\xi^2 ; \\ V_0 | mk_1 &= 6340 \text{ cm}^2/\xi^2 ; & V_0 | S_2 &= 3700 \text{ cm}^2/\xi^2 ; \\ V_0 | sk_1 &= 2942 \text{ cm}^2/\xi^2 ; & V_0 | P_1 &= 3071 \text{ cm}^2/\xi^2 ; \\ V_0 | N_2 &= 1521 \text{ cm}^2/\xi^2 ; & V_0 | Sk_1 &= 2942 \text{ cm}^2/\xi^2 , \end{aligned}$$

en posant $Imk = 0,60 \cdot 10^{-3}$ et en faisant la somme des résultats, nous trouverons

$$-\dot{\omega} = M/C = 1,59 \cdot 10^{-23} \text{ sec}^{-2}$$

qui est 35 fois plus petit que le ralentissement observé $-\dot{\omega} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ s}^{-2}$, expliqué apparemment par la dissipation de l'énergie de marée dans les mers peu profondes.

§ 2. Influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation de la Terre.

On sait que la marée océanique exerce une action importante sur la marée élastique luni-solaire et la marée polaire dans le corps de la Terre. La correction océanique au nombre de Love k est environ 10% de sa valeur pour un modèle de Terre sans océan; la correction à la période de Chandler est d'environ 30 jours. L'action réciproque de l'onde de marée océanique avec la Terre élastique agit également sur le fait que les déformations élastiques de la Terre entière diffèrent sensiblement des déformations déterminées par la théorie des marées d'une Terre sans océan. Cette différence peut se faire sentir sur les amplitudes et les phases de la nutation forcée.

D'après les estimations [74.75] l'influence du couplage électromagnétique entre le noyau et l'enveloppe sur l'amortissement du mouvement chandlerien du pôle est extrêmement faible; l'influence de la viscosité du noyau ν ne joue que pour $\nu \approx 5.10^9$ poise. Les estimations obtenues par l'examen théorique du comportement des métaux dans les conditions de pression et de température du noyau de la Terre donnent $\nu \approx 10^{-1}$ poise [76]. Cela signifie que la cause la plus probable de l'amortissement du mouvement chandlerien du pôle est la dissipation d'énergie dans le manteau visqueux et dans l'océan. Aux fréquences quasi diurnes presque toute la dissipation de l'énergie des marées luni-solaires se produit dans l'océan. C'est pourquoi on peut penser que la dissipation dans l'océan exerce une influence importante également sur l'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle.

Pour évaluer l'influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation libre et forcée de la Terre nous utiliserons le "modèle de noyau avec une particule centrale" [40], représentant une approximation assez bonne du cas du noyau réel. Ce modèle se caractérise par les conditions suivantes : 1) la graine solide est remplacée par une masse ponctuelle dont la valeur est telle que les valeurs totales de la masse et du moment d'inertie du noyau correspondent à leurs valeurs réelles; 2) le noyau liquide est supposé homogène et incompressible; 3) l'aplatissement dynamique du noyau

$$e = \frac{C_1 - A_1}{A_1} \quad (3.13)$$

(où C_1 , A_1 sont les moments principaux d'inertie du noyau) correspond à la valeur réelle $e = 2.56.10^{-3}$

Dans cette approximation l'expression générale des composantes des déplacements de marées dans le noyau se détermine par les relations (2.19) pour $\delta\omega = 0$, le potentiel de la force centrifuge $\varphi(x,y,z,t)$ du type (2.9) et le potentiel des vitesses $\psi(x,y,z,t)$ du type (2.55).

Dans le cas de la dissipation d'énergie, la phase de $\varphi(x,y,z,t)$ et $\psi(x,y,z,t)$ ne correspond pas nécessairement avec la phase du potentiel générateur de marée $V_e(x,y,z,t)$. On peut en tenir compte si on représente φ et ψ sous la forme complexe suivante :

$$\varphi = -\frac{z\omega^2}{2^2} \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(\epsilon e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (3.14a)$$

$$\psi = z^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(\psi e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (3.14b)$$

où ϵ, ψ sont des paramètres complexes arbitraires jusqu'à présent, sans dimension, et (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques.

Le potentiel gravitationnel dans le noyau est écrit sous la forme

$$V = V_0 + V_e + V_i \quad (3.15)$$

où V_0 est le potentiel non perturbé en l'absence de déformations de marées, V_e comme précédemment est le potentiel générateur de marée et $V_i = R - V_e$ est la variation du potentiel déterminée par la nouvelle répartition des masses dans le corps de la Terre suite aux déformations incompressibles de marées. Avec un noyau homogène et incompressible, le potentiel V_0 dans le noyau satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta V_0 = -4 \pi G \rho = \text{const.}$$

et V_i aussi bien que V_e est harmonique. Dans ces conditions, les valeurs V , V_e et V_i dans le noyau peuvent être représentées sous la forme

$$\begin{aligned} V_0|_{r \leq a} &= v_0^{(0)} \frac{z^2}{a^2} + v_0^{(2)} \frac{x^2 + y^2}{a^2}; \\ V_e|_{r \leq a} &= v_e \frac{e^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t - \lambda); \\ V_i|_{r \leq a} &= \frac{z^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(v_i e^{i(\sigma t - \lambda)}), \end{aligned} \quad (3.15a)$$

où $V_0^{(0)}$, $V_0^{(2)}$, V_e sont réels et V_i est le paramètre complexe dont l'argument est lié au déphasage de V_i par rapport à V_e .

La substitution de (3.15) en (2.17) détermine la variation due aux marées de la pression en un point fixe du noyau :

$$p_i = -\lambda \delta - \rho(\vec{u}, \nabla V) = \frac{z^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(\rho_i e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (3.16)$$

où

$$\rho_i = \rho \alpha^2 \left(\psi \omega^2 + \frac{v_e + v_i}{a^2} - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varepsilon \omega^2 \right). \quad (3.17)$$

Ainsi, les valeurs $\bar{\omega}$ et également u et P_1 sont déterminées dans le noyau univoquement par les trois paramètres complexes : ϵ , v_e , v_i . Les relations liant ces paramètres peuvent être obtenues à partir des équations des moments du noyau et de l'enveloppe et par les conditions aux limites sur l'interface noyau-enveloppe. Nous nous intéresserons à ces équations.

Nous utilisons les expressions pour la composante radiale des déplacements de marées de l'interface noyau-enveloppe $H(b)$ et des valeurs du potentiel $V_i(a)$ à la surface de la Terre qui sont satisfaisantes pour les modèles arbitraires de l'enveloppe visco-élastique :

$$H(b) = \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(A(b) e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (3.18)$$

$$V_i(a) = \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(v_i(a) e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (3.19)$$

où $h(b)$, $v_i(a)$ sont des paramètres complexes ne dépendant pas de θ, λ, t .

A cause des déformations de marées de l'interface noyau-enveloppe le tenseur d'inertie du noyau a des composantes non diagonales, déterminées par les expressions

$$\begin{aligned} I_{xz}^{(1)} &= -\iiint_{\tau_i} \rho xz d\tau, = \operatorname{Re}(I, e^{i\sigma t}), \\ I_{yz}^{(1)} &= -\iiint_{\tau_i} \rho yz d\tau, = \operatorname{Im}(I, e^{i\sigma t}), \\ I_{xy}^{(1)} &= -\iiint_{\tau_i} \rho xy d\tau, = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

où τ_i est le volume occupé par le noyau,

$$I, = c, \frac{h(b)}{2b} - \quad (3.21)$$

est un paramètre complexe.

La dépendance des composantes non diagonales du tenseur d'inertie de l'enveloppe avec océan $J^{(2)}$ a, en fonction du temps, une forme analogue

$$\begin{aligned} I_{xz}^{(2)} &= \operatorname{Re}(I_2 e^{i\sigma t}) \\ I_{yz}^{(2)} &= \operatorname{Im}(I_2 e^{i\sigma t}) \end{aligned}$$

Les composantes non diagonales du tenseur d'inertie de toute la Terre sont des constantes de relaxation [50] et se déterminent par les valeurs du potentiel V_i sur la surface de la Terre

$$I_1 + I_2 = -\frac{a^3}{3G} v_i(a) \quad (3.22)$$

Ainsi, les valeurs J_1, J_2 peuvent être exprimées par $h(b)$ et $v_i(a)$.

1. Equation des moments de l'enveloppe visco-élastique avec un océan.

Le moment total des forces agissant sur le système (enveloppe-océan) peut être trouvé comme la somme des moments des forces de surfaces appliquées à l'interface noyau-enveloppe et des forces gravitationnelles agissant du côté du corps générateur de marées et du noyau. Le moment des forces de surface a la forme

$$\vec{L}_1 = \iint_s [\vec{r} \vec{n}] \rho(r, \theta, \lambda) ds, \quad (3.23)$$

où s est la limite déformée de l'enveloppe avec le noyau décrite par l'équation

$$r = b (1 + e \sin^2 \theta) + H (b) \quad (3.24)$$

Après avoir substitué (3.18) en (3.24) nous obtiendrons

$$[\vec{r} \vec{n}] = -b e \sin 2\theta \vec{e}_\lambda - R_e \left((\vec{e}_\lambda \cos 2\theta + i \omega_s \theta \vec{e}_\theta) h(i) e^{i(\sigma t - \lambda)} \right) \quad (3.25)$$

où \vec{e}_λ , \vec{e}_θ sont les vecteurs unitaires orientés suivant les directions d'accroissement de λ et θ respectivement.

La pression P entrant en (3.23) se compose de la pression P_0 indépendante du temps déterminée par la condition d'équilibre hydrostatique :

$$P_0 = \rho (\varphi_0 + V) + const \quad (3.26)$$

et des variations de la pression (3.16) dues aux marées. A cause des déformations de marée de l'interface enveloppe-noyau intervenant dans (3.23) le produit $[\vec{r} \vec{n}]$ dépend du temps et la transmission du moment du noyau à l'enveloppe se réalise non seulement par la pression P_1 mais aussi par P_0 . Pour s'en assurer nous substituerons (3.16), (3.26) et (2.25) en (3.23). En se limitant à une précision relative de l'ordre de l'aplatissement, nous supposerons

$$P_1|_s = P_1|_{r=b} + \frac{2v_0^{(1)}b}{a^2} \rho H, \quad (3.27a)$$

$$P_0|_s = (P_0^{(1)} + P_0^{(2)})|_{r=b} + \frac{2v_0^{(1)}b}{a^2} \rho b e \sin^2 \theta; \quad (3.27b)$$

$$C_1 = \frac{8\pi}{15} \rho b^5. \quad (3.27c)$$

alors nous obtiendrons

$$\vec{L}_1 = -Re [(\vec{e}_y + i \vec{e}_x) \ell_1 e^{i\sigma t}], \quad (3.28a)$$

où \vec{e}_x , \vec{e}_y sont les vecteurs unitaires orientés le long des axes x, y

$$\ell_1 = C_1 \left[\frac{e}{\rho a^2} P_1 - \frac{h(\theta)}{b} \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{v_0^{(2)}}{a^2} \right) \right]. \quad (3.28b)$$

En (3.28b) le premier terme décrit le moment des forces transmises par la pression P_1 et le second terme est le moment de celles transmises par P_0 . On constate par (3.28b) que P_1 intervient avec un facteur de l'ordre de l'aplatissement équatorial du noyau alors que P_0 intervient avec un facteur de l'ordre du rapport des déplacements de marées de l'interface noyau-enveloppe vers le rayon du noyau. Même si le premier facteur est de quelques ordres plus grand que le second, $P_0 \gg P_1$ et c'est pourquoi les deux termes (3.28b) ont le même ordre de grandeur. Nous noterons éga-

lement que la partie à symétrie sphérique de la pression P_0 n'entre pas en (3.28).

Le moment des forces gravitationnelles agissant sur le système enveloppe-océan peut être pris comme la différence de moments agissant sur toute la Terre et sur le noyau. En utilisant l'expression connue pour le potentiel V_1 dans le noyau (3.15) et tenant compte de l'action des forces gravitationnelles sur la couche simple de densité $\rho_c H(\theta, \lambda, t)$ nous obtiendrons :

$$\dot{\vec{L}}_2 = \iiint_{\tau_1, \tau_2} \rho [z g_{zad} V_e] d\tau - \iiint_{\tau_1} \rho [z g_{zad} (V_e + V_i)] d\tau \quad (3.29a)$$

$$- \iint_{\Sigma} \rho_c H(\theta, \lambda, t) [z g_{zad} V_0] ds =$$

$$= -Re [(\vec{e}_y + i\vec{e}_x) e_2 e^{i\sigma t}],$$

où τ_1 est la sphère $r \leq b$, τ_2 est le volume occupé par l'enveloppe et l'océan, ρ_c est la densité du noyau

$$e_2 = \frac{C_2 - A_2}{a^2} v_e - \frac{C_1 - A_1}{a^2} v_i + 2I_1 \frac{v_0^{(2)}}{a^2}; \quad (3.29b)$$

$C_2 = C - C_1$, $A_2 = A - A_1$ sont les moments principaux d'inertie de l'enveloppe.

Dans le système de coordonnées (x, y, z) tournant avec l'enveloppe, correspondant plus précisément aux axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie de l'enveloppe à une certaine époque initiale et déterminée à toutes les époques suivantes par l'équation (1.5b), le moment total de la quantité de mouvement du système enveloppe-océan a la forme :

$$\vec{M}_2 = Re [\vec{e}_x (A_2 \omega_x + I_{xx}^{(2)} \omega_x) + \vec{e}_y (A_2 \omega_y + I_{yy}^{(2)} \omega_y)] + \vec{e}_z C_2 \omega_z. \quad (3.30)$$

Après avoir substitué (3.28 à 3.30) dans l'équation d'Euler

$$\dot{\vec{M}}_2 + [\vec{\omega} \vec{M}_2] = \vec{L}_1 + \vec{L}_2,$$

nous obtiendrons la première équation reliant les paramètres $\epsilon, \psi, v_e, I_1, I_2$.

$$\frac{\sigma + \omega}{\omega} (A_2 \epsilon + I_2) - \epsilon C_2 + \frac{C - A}{a^2 \omega^2} v_e + (C_1 - A_1) (\psi - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \epsilon) + I_1 = 0. \quad (3.31)$$

2. Equation des moments de la Terre entière.

Après avoir substitué (3.14) en (2.19) et en faisant la différenciation du résultat par rapport au temps nous déterminerons les composantes de la vitesse des éléments du noyau par rapport à

l'enveloppe. Nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{\omega^2 z}{\sigma + 2\omega} \operatorname{Re}(\psi e^{i\sigma t}); \\
 v_y &= \frac{\omega^2 z}{\sigma + 2\omega} \operatorname{Re}(\psi e^{i\sigma t}); \\
 v_z &= \frac{y}{\sigma} \operatorname{Re}[(\psi \omega^2 - 2\varepsilon \sigma \omega) e^{i\sigma t}] + \\
 &\quad + \frac{x}{\sigma} \operatorname{Re}[i(\psi \omega^2 - 2\varepsilon \sigma \omega) e^{i\sigma t}].
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

En utilisant (3.32) nous calculerons le moment de la quantité de mouvement du noyau. Nous trouverons :

$$\vec{M}_1 = C_1 \omega \vec{e}_z + \operatorname{Re}[(\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \cdot
 \tag{3.33a}$$

$$\cdot (A_1 \omega \varepsilon + I_1) e^{i\sigma t}] + \iiint_V \rho [\vec{z} \vec{v}] d\vec{r};$$

$$\iiint_V \rho [\vec{z} \vec{v}] d\vec{r} = \operatorname{Re}[\mu (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) e^{i\sigma t}],
 \tag{3.33b}$$

où

$$\mu = C_1 \left(\frac{\omega^3 \psi}{\sigma(\sigma + 2\omega)} - \varepsilon \omega \right).
 \tag{3.33c}$$

La substitution de (3.33) dans l'équation d'Euler pour la Terre entière

$$\dot{\vec{M}}_1 + \dot{\vec{M}}_2 + [\vec{\omega}, (\vec{M}_1 + \vec{M}_2)] = \frac{C-A}{a^2} v_e (\vec{e}_x \sin \sigma t - \vec{e}_y \cos \sigma t)
 \tag{3.33d}$$

donne un second rapport reliant les paramètres cherchés :

$$\frac{\sigma r \omega}{\omega} (A \varepsilon + I_1 + I_2 + \frac{\mu}{\omega}) - \varepsilon C + \frac{C-A}{a^2 \omega^2} v_e = 0.
 \tag{3.34}$$

3. Conditions aux limites à l'interface enveloppe-noyau.

La condition de la non pénétration du liquide dans l'enveloppe a la forme

$$u_n = (\vec{u}, \vec{n}_1) = H(b)$$

où \vec{n}_1 est la normale extérieure à la frontière non déformée de l'enveloppe avec le noyau

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{z}}{r} + 2e \vec{e}_z \cos \theta$$

Après avoir exprimé $H(b)$ par J_1 suivant la formule (3.21) et en utilisant l'expression pour \vec{u} (2.19) nous obtiendrons

$$(\vec{u}, \vec{n}_i) - H(b) = b \sin 2\theta \operatorname{Re} e^{i(\sigma t - \lambda)} \left[\psi \left(\frac{\omega^2(\sigma + \omega)}{\sigma^2(\sigma + 2\omega)} + \right. \right. \quad (3.35)$$

$$\left. \left. + e \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) - \varepsilon \left(\frac{\omega}{\sigma} + 2e \frac{\omega}{\sigma} \right) + \frac{I_1}{C_i} \right] = 0.$$

En faisant tendre l'expression entre crochets vers zéro, nous obtiendrons la troisième relation reliant les paramètres ψ , ε , J_1 .

Le système d'équations (3.31)(3.34)(3.35) n'est pas linéairement indépendant puisque la condition de non pénétration (35) est équivalente à l'équation des moments du noyau. Pour s'en assurer, déduisons (28) de (34). Nous obtiendrons

$$\psi \left[\frac{\omega(\sigma + \omega)}{\sigma(\sigma + 2\omega)} e \right] - \varepsilon + \frac{\sigma}{\omega} \frac{I_1}{C_i} = 0. \quad (3.36)$$

On constate aisément que pour n'importe quel rapport ω/σ les termes principaux (3.35) correspondent avec (3.36). C'est pourquoi n'importe laquelle des trois équations (3.31) (3.34) et (3.35) peut être rejetée.

Dans les équations (3.31), (3.34) et (3.35) entrent les paramètres complexes J_1 , J_2 déterminant la valeur et la phase des déformations de l'enveloppe. Dans le cas de l'enveloppe absolument rigide $J_1 = J_2 = 0$, nous obtenons aussi un système de deux équations algébriques pour les deux paramètres inconnus ε et ψ . En le résolvant nous obtiendrons l'équation pour ε coïncidant précisément avec la formule de Poincaré (1.56) et

$$\psi = - \frac{\varepsilon_0}{e + (A_1/A) (\sigma_0 \omega / \omega)}. \quad (3.37)$$

La condition d'annulation du déterminant de ce système donne deux valeurs des fréquences propres coïncidant avec (1.52), (1.53).

En utilisant (3.32) on se rend facilement compte que le paramètre sans dimension déterminé (3.37) est égal numériquement à l'angle entre ω et le vecteur général pour tout le noyau de la vitesse angulaire instantanée $\omega + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}$ en radians.

Dans le cas d'une enveloppe idéalement élastique sans océan, la phase des déformations de marées de l'enveloppe coïncide avec la phase des forces provoquant la déformation. C'est pourquoi les valeurs $h(b) I_1$ et I_2 sont réelles. Après avoir substitué les valeurs réelles I_1 , I_2 dans les équations (3.31) (3.34) (3.35) on constate aisément que les valeurs ε , ψ , σ_0 et σ_1 sont également réelles. Pour l'enveloppe visco-élastique avec océan les parties imaginaires des paramètres ε , ψ et des fréquences propres σ_{ch} et σ_1 se déterminent univoquement par les valeurs $\operatorname{Im} I_1$ et $\operatorname{Im} I_2$.

§ 3. Amortissement de la nutation libre quasi diurne et du mouvement chandlerien du pôle.

Les valeurs I_1 , I_2 entrant en (3.31) et (3.34 - 35) sont déterminées par les déformations du noyau et de l'enveloppe sous l'effet de la pression P_1 et des forces de marées $\rho \nabla V_e$ et sont déterminées par la rigidité réelle de l'enveloppe par rapport à l'action des forces de surface et de volume.

Puisque P_1 est relié à ψ par la relation (3.17), on peut représenter les valeurs I_1 et $I_1 + I_2$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{C_1} &= \lambda_1 \psi + \lambda_2 \frac{v_e}{g a}; \\ \frac{I_1 + I_2}{C} &= \lambda_3 \psi + \lambda_4 \frac{v_e}{g a}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ sont les paramètres sans dimension ne dépendant que de la structure interne de l'enveloppe et déterminant la rigidité réelle de l'enveloppe vis à vis de l'action des forces de surface et de volume; $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ est pris comme constante égale à l'accélération de la force de pesanteur à la surface de la Terre, et $a = 6371 \text{ Km}$ est le rayon moyen de la Terre. Après avoir substitué (3.36) dans n'importe lesquelles de deux des trois équations (3.31), (3.34 - 35) nous obtiendrons un système d'équations algébriques d'inconnues ϵ et ψ . En le résolvant par rapport à ϵ et en négligeant les petits termes, nous trouverons :

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{C_1}{C} \frac{1 + \alpha \lambda_2}{(e + \lambda_1) \omega / (\sigma + \omega) + A_2/A} + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \alpha \lambda_4 \right), \quad (3.39)$$

où

$$\alpha = \frac{C}{C - A} \frac{a \omega^2}{g} = 1,057.$$

La condition d'annulation du dénominateur (3.39) détermine la fréquence et le paramètre de qualité Q de la nutation libre quasi diurne :

$$\text{Re } \sigma = -\omega \left(1 + \frac{A}{A_2} (e + \text{Re } \lambda_1) \right); \quad (3.40)$$

$$Q = \frac{\text{Re } \sigma}{2 \text{Im } \sigma} = - \frac{\text{Re } \sigma}{2 \omega \frac{A}{A} \text{Im } \lambda_1}. \quad (3.41)$$

La valeur $I_1 + I_2$ est la constante de relaxation et c'est pourquoi elle est déterminée par l'harmonique du second ordre Y_2^1 dans la décomposition du potentiel gravitationnel interne. Suivant la formule de Mac Cullagh [50]

$$I_1 + I_2 = \frac{a^3}{2G} \nu_1(a) \quad (3.42)$$

En utilisant les valeurs de la fonction de Green pour $n = 2$ [23] nous obtiendrons les valeurs numériques suivantes des paramètres

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$) entrant en (3.39) - (3.41)

$$\lambda_1 = - 0,61.10^{-3} \quad (3.43a)$$

$$\lambda_2 = - 0,57 \quad (3.43b)$$

$$\lambda_4 = - 0,302$$

La substitution de ces valeurs en (3.39) donne la fréquence de la nutation libre quasi diurne d'une Terre idéalement élastique sans océan. Pour $C/C_2 = 1,12$ et $e = 2,56.10^{-3}$ nous obtiendrons :

$$\frac{\sigma + \omega}{\omega} = 2,184.10^{-3} \quad (3.44)$$

Conformément à (1.20b) cela correspond à la période du mouvement libre du vecteur ω dans l'espace

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma + \omega} = 458 \text{ jours sidéraux} \quad (3.45)$$

Le décrement d'amortissement de la nutation libre quasi diurne est déterminé par les parties imaginaires des paramètres de la rigidité de l'enveloppe vis à vis de l'action de la pression P_1 pour un modèle réel de Terre visco-élastique avec océan. Puisque dans les équations (3.31), (3.34 - 3.35) les valeurs I_2 contenant des composantes non diagonales du tenseur d'inertie de l'océan, entrent avec un facteur très faible $(\sigma + \omega) / \sigma = - 2.2 \cdot 10^{-3}$, l'amortissement du mouvement quasi diurne du pôle dû à la présence de l'océan est complètement déterminé par la phase des variations noyau-enveloppe. Le mécanisme d'amortissement se ramène à ce qui suit :

1. La pression P_1 déforme la frontière enveloppe-noyau. Les déformations élastiques se transmettent jusqu'à la limite extérieure de la Terre à la suite de quoi il se produit dans l'océan des courants dont la période est égale à la période de la résonance quasi diurne.

2. La charge formée par le déplacement des masses d'eau sur la surface de la Terre retarde en phase les déformations de la surface provoquant son déplacement. Sous l'effet de la charge il se produit des déformations élastiques de toute la Terre et de ce fait une déformation de la frontière noyau-enveloppe. L'harmonique du second ordre dans la répartition de la composante radiale des déplacements de cette frontière a la même phase que la charge provenant de l'océan et détermine les paramètres cherchés $\text{Im}\lambda_1$, $\text{Im}I$ et Q .

Le calcul numérique de cet effet pour le modèle de Terre N° 508 de Gilbert et Dziewonski [70] donne les valeurs suivantes : pour une amplitude de déplacements de la frontière du noyau $h(b) = 1\text{cm}$ l'amplitude des déplacements de la surface extérieure de la Terre

atteint 0,739 cm et des déplacements de la surface extérieure par rapport à l'équivalente $\tilde{h}(a) = 0,388$ cm. Les courants provoqués par ce déplacement dans l'océan sont équivalents à ceux qui surviennent lors de l'action du potentiel générateur de marée avec une amplitude $g\tilde{h}(a) = 380$ cm²/s² et une fréquence σ . L'harmonique du second ordre dans la décomposition de la variation correspondante du potentiel gravitationnel de l'océan est déterminé par l'expression

$$\tilde{V} = \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(\tilde{v} e^{i(\sigma t - \lambda)}),$$

Où $\tilde{V} = kgh(a)$, \tilde{k} est la correction au nombre de Love k due à la marée océanique. Le potentiel \tilde{V} est créé par une couche d'eau de densité ρ_0 et de profondeur h_0 . Après avoir exprimé $\rho_0 h_0$ par \tilde{V} , nous obtiendrons

$$\rho_0 h_0 = \frac{5}{4\pi G} \tilde{V}. \quad (3.46)$$

La pression sur la surface extérieure de la Terre créée par la couche d'eau atteint

$$\tilde{P} = \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(\tilde{p} e^{i(\sigma t - \lambda)}),$$

où

$$\tilde{p} = \rho_0 h_0 g = \frac{5}{4\pi G} \tilde{k} g^2 \tilde{h}(a).$$

La pression \tilde{P} et l'effet gravitationnel réciproque de la couche (3.46) avec la Terre provoquent une flexion élastique de la frontière noyau-manteau d'une amplitude

$$\delta H(b) = \sin\theta \cos\theta \operatorname{Re}(\delta h(b) e^{i(\sigma t - \lambda)}),$$

où

$$\delta h(b) = 0,24 \tilde{k} h(b) \quad (3.47)$$

En comparant cette expression avec (3.21) nous obtiendrons

$$\frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\delta I_1}{I_1} = \frac{\delta h(b)}{h(b)} = 0,24 \tilde{k}. \quad (3.48)$$

A l'aide des relations (3.21) (3.42) et des solutions des équations d'équilibre élastique du modèle réel de la Terre élastique pour $n = 2$ (chapitre I) il est facile de calculer les corrections aux paramètres λ_2, λ_4 dues à l'océan. Leurs valeurs sont les suivantes :

$$\delta \lambda_4 = - \frac{a^4 g}{3GC} \tilde{k} = -1,01 \tilde{k}; \quad (3.49)$$

$$\delta \lambda_2 = 0,61 \tilde{k}$$

La substitution de (3.48) en (3.40) détermine la correction à la fréquence quasi diurne due à l'action de l'océan :

$$\operatorname{Re} \frac{\delta \sigma}{\omega} = 1,6 \cdot 10^{-4} \operatorname{Re} \tilde{k}$$

La correction correspondante à la période du mouvement libre du vecteur $\tilde{\omega}$ dans l'espace est

$$\delta T = - \frac{T \omega}{\sigma + \omega} \operatorname{Re} \frac{\delta \sigma}{\omega} = 0,08 \operatorname{Re} \tilde{k} T.$$

la valeur précise $\operatorname{Re} k$ peut être trouvée à partir des cartes cotidales pour l'océan réel à la fréquence de la résonance quasi diurne.

Pour $\operatorname{Re} k \approx -0,02$ la période T diminue à peu près d'un jour. Après avoir substitué (3.48) en (3.14) nous obtiendrons

$$Q^{-1} = 3,3 \cdot 10^{-4} \operatorname{Im} \tilde{k} \quad (3.50)$$

On peut ensuite exprimer la partie imaginaire du nombre de Love \tilde{k} entrant en (3.50) par la valeur du ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre dû aux ondes de marées. La fréquence de l'onde K_1 est très voisine de la fréquence de résonance quasi diurne. C'est pourquoi on fait l'hypothèse que la valeur $\operatorname{Im} \tilde{k}$ de la fréquence K_1 est voisine de cette valeur de la fréquence de la résonance quasi diurne.

En prenant dans la formule (3.12) $V_0 = V/3 = V_0|_{\sigma K_1} + V_0|_{\tau K_1} = 9283 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$ et en utilisant la valeur donnée en [77]

$$M/k_1 = 1,8 \cdot 10^{22} \text{ dyne cm}$$

nous obtiendrons

$$\operatorname{Im} \tilde{k} = 7 \cdot 10^{-3} \quad (3.51)$$

Après avoir substitué (3.51) en (3.50) nous trouverons

$$Q = 4,3 \cdot 10^5$$

ce qui correspond à un temps d'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle :

$$\tau = 370 \text{ ans}$$

Il est facile d'évaluer aussi les valeurs $\operatorname{Im} \lambda$ pour un modèle d'enveloppe visco élastique sans océan. En utilisant la répartition $Q\mu(r)$ tirée du travail [56] et en appliquant la méthode de calcul analogue à celle qui a été utilisée au § 1 de ce chapitre, nous obtiendrons

$$\frac{\operatorname{Im} \lambda_1}{\operatorname{Re} \lambda_1} = (1 \div 2) \cdot 10^{-3} \quad (3.52)$$

ce qui correspond aux valeurs

$$Q = 5.10^5 \div 10^6 \quad (3.53)$$

et à un temps d'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle :

$$\tau = \frac{2}{|\sigma|} Q = (500 \div 1000) \text{ an} \quad (3.54)$$

Ainsi le temps d'amortissement de la nutation quasi diurne en raison de la marée dans l'océan réel est du même ordre que le temps d'amortissement dû à la viscosité de l'enveloppe.

Il convient de noter que le temps d'amortissement de la nutation libre quasi diurne τ dépasse sensiblement la durée des observations astronomiques du mouvement du pôle. C'est pourquoi on n'exclut pas la possibilité que, sur une durée très longue, l'amplitude et la phase de la nutation libre quasi diurne puissent garder certaines valeurs sûres. Cette déduction n'est pas en contradiction avec les résultats du travail [78] dans lequel, sur la base de la réduction des observations astronomiques de la latitude de Poltava de 1939 à 1963 les valeurs de la phase ($106^\circ \pm 9^\circ$) et de l'amplitude ($0",019 \pm 0",003$) de la nutation libre quasi diurne sont obtenues comme assez sûres.

Le système d'équations (3.31), (3.34) - 3.35) permet également de déterminer dans une première approximation la période et le décrement d'amortissement du mouvement de Chandler du mouvement du pôle. Toutefois il résulte de (3.36) que pour $\sigma \ll$ le rapport

$$\frac{\psi}{\epsilon} \approx \frac{2\sigma}{\omega} \ll 1 \quad (3.55)$$

En posant en (3.31) $v_e = 0$ et en négligeant ψ vis à vis de ϵ , nous obtiendrons :

$$\sigma_{cA} = \frac{C-A - \frac{I_1 + I_2}{\epsilon}}{A_2} \omega. \quad (3.56)$$

La valeur $I_1 + I_2$ entrant en (3.56) se détermine par les déformations de la Terre sous l'effet des forces centrifuges variables dans le temps. A cause de l'harmonicité des fonction xz , yz la valeur $I_1 + I_2$ est une constante de Stokes et est déterminée par le potentiel gravitationnel extérieur.

Après avoir substitué dans la formule de Mac Cullagh (3.42) l'expression pour le potentiel extérieur

$$V_i = k \phi$$

nous obtiendrons

$$I_1 + I_2 = \frac{a^5 \omega^2 k \epsilon}{36} \quad (3.57)$$

En comparant cette expression avec (3.56) nous obtiendrons finalement :

$$\sigma_{cA} = \frac{C-A}{A_2} \left(1 - \frac{k}{R_0}\right) \omega \quad (3.58)$$

où

$$k_0 = 3G \frac{C-A}{a^5 \omega^2} \approx 0,942 \quad (3.59)$$

coïncide avec le nombre de Love k pour une Terre entièrement liquide (dans le cas où l'aplatissement dynamique $C - A$ correspond à l'aplatissement hydrostatique).

Dans le cas de l'enveloppe non déformée $k = 0$, et la relation (3.58) se ramène à la formule de Poincaré (1.52) pour une frontière sphérique de l'enveloppe avec le noyau, (3.58) donne l'expression connue pour la période de Chandler d'une Terre élastique sans noyau liquide [50] :

$$\sigma_{ch} = \frac{C_2 - A_2}{A_2} \left(1 - \frac{k}{k_0} \right) \omega \quad (3.60)$$

La substitution de la partie imaginaire de k (3.10) en (3.60) détermine le facteur de qualité Q_{ch} du mouvement de Chandler du pôle :

$$Q_{ch} = \frac{Re \sigma_{ch}}{2 Im \sigma_{ch}} = \frac{k_0 - Re k}{2 Im k} = 500. \quad (3.61)$$

Ce résultat diffère sensiblement des estimations du travail [79] d'après lesquelles les valeurs Q_{ch} sont à peu près cinq fois plus élevées.

Il convient de noter que lors de la déduction de (3.61) on a utilisé l'hypothèse d'une absence de dépendance de $Im k$ et $Q^{-1}\mu(r)$ de la fréquence σ dans la gamme des périodes des ondes de volume séismiques jusqu'à 14 mois, ce qui correspond à la fonction logarithmique de creep de Lomnitz.

§4. Constantes de la nutation tenant compte de la marée océanique.

La substitution des valeurs numériques des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \delta\lambda_1$ et δ_2 (3.43), (3.48), (3.49) en (3.39) détermine les amplitudes et les phases de la nutation forcée de la Terre sans océan et avec océan. Les valeurs ϵ pour la Terre sans océan et les corrections aux valeurs de ϵ pour la marée océanique sont les suivantes

$\omega/(\sigma+\omega)$	-6800	6800	-365	365	-183	183	-13,7	13,7
$(\epsilon/\epsilon_0-1) \cdot 10^3$	-3,42	2,99	234	25,5	80,5	32,0	72,9	22,8
$\delta\epsilon \cdot 10^3 / \tilde{R}\epsilon_0$	-5,92	5,14	311	39,6	142	47	197	-4,1

où $\delta\epsilon$ est la correction pour ϵ due à la marée océanique. Les corrections aux amplitudes et aux phases de la nutation dues à l'influence de l'océan se déterminent par les produits des nombres complexes de Love pour l'océan \tilde{k} avec les éléments de la dernière ligne.

Pour $Im k \sim 7 \cdot 10^{-3}$ les corrections aux nutations ne dépassent pas 0",0003 ce qui est sensiblement moins que les erreurs de mesures.

Ainsi, l'influence de l'océan sur la phase de la nutation forcée est insignifiante.

La valeur de $\tilde{R}k$ est assez bien connue pour la marée statique. Dans le travail [42] on a obtenu $\tilde{k}/\sigma_0 = 0,0465$ à $0,0506$. Une valeur plus précise a été obtenue en [39] : $\tilde{k} = 0,0493$. Cependant la marée océanique de période quasi diurne diffère sensiblement de la marée statique, c'est pourquoi les valeurs $\tilde{R}k$ pour $\sigma \sim \omega$ sont loin des valeurs statiques. D'après les données communiquées aimablement à l'auteur par B.P. Pertsev, la décomposition de la carte cotidale de l'océan réel pour l'onde K_1 en fonctions sphériques donne un harmonique du second ordre $\tilde{R}k \sim 0,02$. En utilisant les valeurs des constantes des nutations pour la Terre solide sans noyau liquide tirées du travail [80] et en supposant $\tilde{R}k \sim 0,02$ nous obtiendrons les valeurs suivantes des amplitudes des nutations :

	Principale	Annuelle	Semi annuelle	Deux semaines
En obliquité	9",2276	-0",0001	0",5537	0",0950
en longitude	6",8709	-0",0501	0",5084	0",0882
en obliquité	9",2027	0",0051	0",5725	0",0973
en longitude	6",8398	-0",0566	0",5236	0",0900
en obliquité	9",2035	0",0049	0",5719	0",0974
en longitude	6",8409	-0",0564	0",5232	0",0901

Les valeurs dans la première paire de lignes correspondent au cas d'une Terre absolument rigide, dans la seconde paire - au cas d'une Terre élastique avec un noyau liquide et sans océan, dans la troisième paire - à la Terre élastique avec noyau liquide et océan. Les valeurs des amplitudes dans la seconde paire de lignes sont en très bonne concordance avec les résultats obtenus en [42, 19, 9]. Cela témoigne apparemment du fait que les amplitudes des nutations dépendent très faiblement de la compressibilité du noyau.

La comparaison de la seconde et de la troisième paires montre que les corrections aux amplitudes dues à l'effet de la marée océanique sur la marée terrestre élastique est de l'ordre de $0",001$. Ces corrections sont faibles en comparaison des erreurs des observations astronomiques optiques actuelle (des composantes d'environ $0",003$) mais sont grandes en comparaison avec la précision des observations radio-interférométriques.

Le calcul indépendant de l'influence de l'océan sur les constantes de nutation pour la carte cotidale Schwiderski a été fait également par Wahr et Sasao dans le travail [21] et a donné des résultats voisins.

§ 5. Sur les phénomènes de résonance dans le passé.

La formule (3.39) permet également d'évaluer l'amplitude de résonance de la nutation forcée (il y a environ 200 millions d'années) quand la fréquence de la nutation libre correspondait avec la fréquence de l'onde ψ_1 . La même évaluation, mais sans tenir compte de la viscosité de l'enveloppe et de la dissipation de l'énergie de marée dans l'océan a été faite précédemment en [16].

En posant en (3.39)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{A_2}{A} \frac{\sigma + \omega}{\omega} + \lambda_1 \right) = -\epsilon,$$

nous obtiendrons

$$\left| \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right| = \frac{A_2}{A} \frac{0,0435}{\operatorname{Im} \lambda_1} \frac{\sigma + \omega}{\omega}. \quad (3.62)$$

Si pour 200 millions d'années la valeur du ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre n'a sensiblement pas changé alors on peut se servir pour $\operatorname{Im} k$ de la valeur de (3.51). Après l'avoir substitué et (3.48) en (3.62) nous trouverons

$$\left| \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right| = 100.$$

En utilisant pour l'amplitude de l'onde ψ_1 la valeur de la décomposition de Doodson nous trouverons $(\nu_e|_{\psi_1} = 223 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2})$

$$|\epsilon| = 3 \cdot 10^{-8} \quad |\psi| = 1,5 \cdot 10^{-4} \quad (3.63)$$

L'angle d'ouverture de l'herpolodie correspondant à ces valeurs était :

$$|\epsilon_e| = \left| \epsilon \frac{\omega}{\sigma + \omega} \right| = 1,4 \cdot 10^{-5} = 7'' ,$$

ce qui est 10 fois moins que la valeur de $\epsilon_e = 75''$ [16] obtenue sans tenir compte de la dissipation d'énergie de la marée dans l'océan. L'amplitude correspondante (3.63) des variations tangentielles diurnes des couches supérieures du noyau par rapport à l'enveloppe était de

$$|b\psi| \sim 500 \text{ m} \quad (3.64)$$

Pour comparer cette valeur avec sa valeur à l'époque actuelle nous évaluerons l'amplitude des oscillations du noyau par rapport à l'enveloppe sous l'effet de l'onde K_1 liée à la précession. Après avoir substitué en (3.39) la valeur $\nu_e|_{K_1} = 27850 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ et $\sigma + \omega = 0$ nous obtiendrons

$$|\psi| = 2,16 \cdot 10^{-5}$$

$$|b\psi| = 75 \text{ m}$$

ce qui est 7 fois moins que l'amplitude lors de la résonance (3.64):

Cette estimation peut présenter un intérêt en relation avec l'hypothèse de Malkus [81] conformément à laquelle les oscillations diurnes du noyau provoquées par l'onde K_1 servent de source d'énergie pour le travail de la géodynamo. S'il en est

ainsi, l'importante croissance de l'amplitude des oscillations du noyau lors de la résonance ne pouvait se faire sentir sur le champ magnétique de la Terre il y a environ 200 millions d'années. Il est curieux de remarquer que d'après les données du travail [82] il existe dans l'histoire du champ magnétique de la Terre un intervalle unique de temps d'une durée de 50 millions d'années (de 280 à 230 millions d'années) au cours de laquelle l'orientation du dipôle magnétique de la Terre n'a jamais varié. La question se pose de savoir si ce phénomène n'est pas lié à la perturbation de résonance des oscillations quasi diurnes du noyau.

Conclusions

En conclusion nous résumerons les résultats principaux de ce chapitre :

1. L'influence de la viscosité de l'enveloppe sur les amplitudes et les phases des marées terrestres se détermine complètement par les valeurs des nombres complexes de Love. Leur calcul numérique concerne les quadratures (3.9).

2. L'influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation libre et forcée de la Terre se détermine complètement par les valeurs des paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, ayant le sens de la rigidité effective de l'enveloppe sous l'action des forces de surface et de volume réparties proportionnellement à la fonction sphérique du second ordre.

Le décrétement d'amortissement de la nutation libre quasi diurne se détermine complètement par la valeur $\text{Im} \lambda_1$. La valeur $\text{Im} \lambda_1$ est liée au ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre par l'onde K_1 et à la répartition de la fonction de dissipation $Q\mu(r)$ dans l'enveloppe. Le temps d'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle à cause de la dissipation d'énergie dans l'océan et le manteau non élastique est de l'ordre de 300 ans.

3. L'action de la marée océanique sur la marée terrestre élastique conduit à une diminution de la période de la résonance quasi diurne uniquement de 0,4 s ce qui correspond au maintien de la période du mouvement libre du vecteur ω dans l'espace à peu près d'un jour.

4. Pour la zone des répartitions admises de la fonction de dissipation $Q\mu(r)$ du travail [56] le facteur de qualité du mouvement chandlérien du pôle Q_{ch} peut être compris dans l'intervalle $Q_{ch} \sim 400$ à 600.

5. Les corrections des amplitudes et des phases de la nutation forcée dues à l'océan ne dépassent pas les erreurs des mesures astrométriques actuelles.

6. La dissipation de l'énergie de marée dans le manteau visqueux et l'océan avait une influence importante sur l'amplitude des variations du noyau par rapport à l'enveloppe il y a 200 millions d'années. Si l'estimation de la viscosité du noyau [76] est correcte alors l'amplitude des variations du noyau a dû croître à peu près d'un ordre.

Chapitre IV

Rhéologie du manteau et limite supérieure de la viscosité du noyau d'après les données des marées et astrométriques.

La comparaison des valeurs théoriques obtenues plus haut pour les paramètres de marées avec les résultats des observations permet d'obtenir certaines estimations des propriétés rhéologiques de l'enveloppe et de la viscosité du noyau dans le domaine des fréquences de marées et chandlérienne.

Nous examinerons dans ce chapitre les problèmes suivants : 1) les estimations des dépendances de fréquences $Q_{\mu}(\sigma)$, $Q_{\kappa}(\sigma)$ sur la base de la comparaison de la période et du décrétement d'amortissement du mouvement chandlérien du pôle, et également des amplitudes des variations de marées de l'accélération de la pesanteur; 2) l'estimation de la limite supérieure de la viscosité du noyau de la Terre d'après les données actuelles sur les amplitudes et les phases de la nutation forcée, de l'amortissement du mouvement chandlérien du pôle et sur la valeur des variations de marées de la vitesse de rotation de la Terre. Il est évident que pour découvrir les faibles perturbations de la période chandlérienne T_{ch} dues aux propriétés rhéologiques du manteau, il faut une estimation très sûre et précise de T_{ch} pour le modèle de Terre idéalement élastique avec une répartition réelle de la densité des modules d'élasticité dans le noyau et l'enveloppe. C'est pourquoi le § I est consacré à la généralisation des résultats du § 3.3 sur le cas du noyau compressible non homogène et l'obtention des estimations de la précision réelle des résultats. Dans le § 2 on compare ces résultats avec les observations; dans les § 3-4 on a obtenu les estimations de l'influence de la viscosité du noyau sur la nutation libre et forcée et également sur l'amplitude des variations de marées de la vitesse de rotation de la Terre. Sur la base des données astrométriques actuelles on a obtenu de nouvelles estimations de la limite supérieure de la viscosité du noyau de la Terre.

§ I. Précision de la théorie du mouvement chandlérien du pôle de la Terre élastique avec un noyau liquide non homogène.

La conclusion obtenue plus haut pour la relation (3.58) se rapportait à un modèle de noyau homogène et non compressible, c'est pourquoi la précision réelle de cette expression reste indéterminée. Les calculs de T_{ch} pour le modèle réel de la Terre ont été faits également en [42, 59]. Les résultats obtenus dans ces travaux étaient basés sur l'application de l'équation de conservation du moment de la quantité de mouvement de la Terre entière; le moment des forces agissant du côté du noyau sur l'enveloppe et l'équation des moments de l'enveloppe n'ont pas été examinés.

Puisque le moment de la quantité de mouvement de la Terre entière dépend sensiblement du champ des vitesses des éléments du noyau par rapport à l'enveloppe, une telle solution exige la détermination de l'allure complète des variations de marées du noyau par rapport à l'enveloppe déterminée par une série infinie (1.89). On a noté plus haut que ce problème, dans le cas du noyau compressible non homogène, se ramène à la solution d'une chaîne infinie d'équations différentielles ordinaires ne renfermant pas de petit paramètre. Il est évident que l'obtention de valeurs sûres de la période de Chandler sur la base de la solution de ces équations est très difficile.

On a réussi à vaincre ces difficultés si on refuse l'examen de l'équation d'Euler (3.33d) de la Terre entière et de passer à l'examen des moments des forces agissant du côté du noyau sur l'enveloppe. Nous montrerons plus loin qu'avec une erreur relative de l'ordre de 1/200 la pression P_1 dans le noyau peut être calculée dans l'approximation hydrostatique de Clairaut. Ainsi, pour déterminer le moment des forces agissant du côté du noyau sur l'enveloppe il n'est pas nécessaire de calculer la solution du problème beaucoup plus compliqué de la détermination des coefficients de la série (1.89).

En se limitant à l'approximation hydrostatique, nous écrirons la condition d'équilibre du noyau liquide sous la forme

$$\rho \nabla (\phi_0 + \phi + V) - \nabla P = 0 \quad (4.1)$$

où comme précédemment, V est le potentiel gravitationnel, $\phi_0 + \phi$ est le potentiel des forces centrifuges, P est la pression. Après avoir substitué en (4.1)

$$\rho = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t); \quad V = V_0(\vec{r}) + V_1(\vec{r}, t), \quad (4.2)$$

$$\rho = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t)$$

et tenant compte que $\rho_1 \ll \rho_0$; $V_1 \ll V_0$; $P_1 \ll P_0$, nous obtiendrons les rapports entre ρ , V et p pour les ordres zéro et premier :

$$\rho_0 \nabla (\phi_0 + V_0) - \nabla p_0 = 0,$$

$$\rho_1 \nabla (\phi_0 + V_0) + \rho_0 \nabla (\phi_1 + V_1) - \nabla p_1 = 0, \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

où $\rho_1 = -\text{div}(\rho \vec{u})$; $\rho_1 = K \text{div} \vec{u} + \rho(\vec{u}, \nabla V_0)$;

$$\Delta V_0 = -4\pi G \rho_0;$$

$$\Delta V_1 = -4\pi G \rho_1;$$

\vec{u} est le vecteur déplacements de l'élément liquide, K est le module de compression multiple.

La substitution de (4.2) en (3.23), (3.29a) donne

$$\vec{L}_1 = \iint_S \{ \rho_0 \vec{x}_1 + \rho_1 \vec{x}_0 \} ds; \quad (4.5)$$

$$\vec{L}_2 = -\iiint_{\vec{r}_1} (\rho_1 [\vec{z} \nabla V_0] + \rho_0 [\vec{z} \nabla V_1]) d\vec{r}_1 - \iint_S \rho_H [\vec{z} \nabla V_0] ds, \quad (4.6)$$

où conformément à (3.25) on a pris

$$\begin{aligned} [\vec{z} \vec{n}] &= \vec{X}_0(\theta) + \vec{X}_1(\theta, \lambda, t); \\ \vec{X}_0(\theta) &= [\vec{z} \vec{n}_0] = -\theta e \sin \theta \vec{e}_\lambda \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_1(\theta, \lambda, t) &= [\vec{z} \vec{n}_1] = \\ &= h \cos \theta \sin(\sigma t - \lambda) \vec{e}_\theta - h \cos 2\theta \cos(\sigma t - \lambda) \vec{e}_\lambda. \end{aligned}$$

Après avoir écrit l'expression sous l'intégrale dans l'intégrale de volume (4.6) par ϑ_0 et ϑ à l'aide de (4.4) et en utilisant la relation vectorielle connue

$$\iiint_{\vec{r}_1} [\vec{z} \nabla \rho_1] d\vec{r}_1 = \iint_S \rho_1 [\vec{z} \vec{n}] ds,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} L_2 &= \iiint_{\vec{r}_1} \{ \rho_0 [\vec{z} \nabla \varphi] + \rho_1 [\vec{z} \nabla \varphi_0] \} d\vec{r}_1 - \\ &- \iint_S \{ \rho_1 \vec{X}_0 + \rho_H [\vec{z} \nabla V_0] \} ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

considérant l'expression pour ϑ_0 , ϑ (2.7) (2.9) et tenant compte des composantes non-diagonales du tenseur d'inertie (3.20) nous trouverons :

$$\iiint_{\vec{r}_1} \rho_0 [\vec{z} \nabla \varphi] d\vec{r}_1 = -\varepsilon \omega^2 (C_1 - A_1) (\vec{z} \sin \sigma t - \vec{J} \cos \sigma t); \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\vec{r}_1} \rho_1 [\vec{z} \nabla \varphi_0] d\vec{r}_1 + \\ + \iint_S \rho_H [\vec{z} \nabla \varphi_0] ds = \omega^2 (\vec{z} \mathcal{I}_{yz}^{(1)} - \vec{J} \mathcal{I}_{xz}^{(1)}). \end{aligned} \quad (4.9b)$$

Après avoir substitué (4.9) en (4.8) et en faisant la somme avec (4.5) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{z} \left[-\varepsilon \omega^2 (C_1 - A_1) \sin \sigma t + \omega^2 \mathcal{I}_{yz}^{(1)} \right] + \vec{J} \left[\varepsilon \omega^2 (C_1 - A_1) \cos \sigma t - \omega^2 \mathcal{I}_{xz}^{(1)} \right] + \\ + \iint_S \{ \rho_0 \vec{X}_1 - \rho_H [\vec{z} \nabla (\varphi_0 + V_0)] \} ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

Avec une répartition à symétrie sphérique des modules élastiques et de la densité dans l'enveloppe la dépendance ρ_1 , en λ , θ , t , a la forme

$$\rho_1(z, \theta, \lambda, t) = \tilde{\rho}_1(z) \cos \theta \sin \theta \cos(\sigma t - \lambda), \quad (4.11)$$

où $\tilde{\rho}_1(r)$ est un facteur ne dépendant que de r . La substitution de (3.18) et (4.11) en (4.9b) détermine le caractère de dépendance des composantes non diagonales des tenseurs d'inertie du noyau et de l'enveloppe en fonction du temps :

$$(I_{xz})_{1,2}(t) = I_{1,2} \cos \sigma t; \quad (I_{yz})_{1,2}(t) = I_{1,2} \sin \sigma t. \quad (4.12)$$

Nous écrirons les valeurs de P_0 , ρ_0 et V_0 dans le noyau sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}; & \rho_0 &= \rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} \\ V_0 &= V_0^{(1)} + V_0^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.13a)$$

où $\rho_0^{(1)} = \tilde{\rho}_0^{(1)} \sin^2 \theta$; $\rho_0^{(2)} = \tilde{\rho}_0^{(2)} \sin^2 \theta$; $V_0^{(1)} = \tilde{V}_0^{(1)} \sin^2 \theta$

et $\rho_0^{(1)}$, $\rho_0^{(2)}$, $V_0^{(1)}$, $\tilde{\rho}_0^{(1)}$, $\tilde{\rho}_0^{(2)}$, $\tilde{V}_0^{(1)}$ sont des fonctions de r uniquement. Après avoir exprimé les valeurs P_0 et V_0 entrant en (4.10) sur la surface s par leurs valeurs sur la sphère $r = b$, nous obtiendrons:

$$\rho_0/s = (\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})|_{z=b} + \frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=b} e \cos \theta \sin^2 \theta; \quad (4.13b)$$

$$V_0/s = (V_0^{(1)} + V_0^{(2)})|_{z=b} + \frac{\partial V_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=b} e \cos \theta \sin^2 \theta.$$

En utilisant (4.7), (4.13b), (4.3) nous transformerons l'expression sous intégrale (4.10) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho_0 \tilde{\chi}_1/s &= \rho_0^{(1)}(b) \tilde{\chi}_1 + \sin^2 \theta \alpha(\theta) k(\vec{e}_\theta \cos \theta n \\ &\quad \times \sin(\sigma t - \lambda) - \vec{e}_\lambda \cos 2\theta \cos(\sigma t - \lambda)), \end{aligned} \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} [\rho_0 H \mathcal{L} z \nabla(\varphi_0 + V_0)]_s &= 2 \rho_0 H \sin \theta \cos \theta \beta(\theta) \vec{e}_\lambda = \\ &= 2 \rho_0 k \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos(\sigma t - \lambda) \beta(\theta) \vec{e}_\lambda, \end{aligned} \quad (4.14b)$$

où $\alpha = \tilde{\rho}_0^{(1)}(b) + \frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=b} e \cos \theta = \tilde{\rho}_0^{(1)}(b) + \rho_0 \frac{\partial V_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=b} e \cos \theta$;

$$\beta = \tilde{V}_0^{(1)}(b) + \frac{\omega^2}{2} b^2 + \frac{\partial V_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=b} e \cos \theta.$$

Après avoir exprimé \vec{e}_λ , \vec{e}_θ par \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} par les formules

$$\begin{aligned} \vec{e}_\lambda &= \vec{j} \cos \lambda - \vec{i} \sin \lambda; \\ \vec{e}_\theta &= -\vec{k} \sin \theta + \cos \theta (\vec{i} \cos \lambda + \vec{j} \sin \lambda), \end{aligned}$$

nous substituerons (4.14) en (4.10). En effectuant l'intégration suivant les variables angulaires et tenant compte de (4.12) nous obtiendrons

$$\vec{L} = (\vec{i} \sin \sigma t - \vec{j} \cos \sigma t) (-\varepsilon \omega^2 (C_1 - A_1) + J_1 \omega^2 - \tilde{L}), \quad (4.15a)$$

où

$$\tilde{L} = \frac{\rho_0 \kappa}{15} \delta^2 h (\alpha - \rho \beta) = \frac{\rho_0 \kappa}{15} \delta^2 h \left[\rho_0^{(2)}(\theta) - \rho_0^{(0)}(\theta) (\tilde{V}_0^{(2)}(\theta) + \frac{\omega^2 \theta^2}{2}) \right]. \quad (4.15b)$$

Nous montrerons que dans l'approximation de la théorie d'équilibre hydrostatique de Clairaut $\tilde{L} = 0$. Pour cela nous écrivons la condition d'équilibre hydrostatique du noyau en rotation uniforme. Après avoir substitué (4.13a) en (4.1) et en négligeant les termes du second ordre nous obtiendrons

$$\rho_0^{(0)} \nabla (\psi_0 + V_0^{(2)}) + \rho_0^{(2)} \nabla V_0^{(0)} - \nabla p_0^{(2)} = 0. \quad (4.16)$$

Après avoir pris rot de (4.16) nous aurons :

$$[\nabla \rho_0^{(0)} \nabla (\psi_0 + V_0^{(2)})] + [\nabla \rho_0^{(2)} \nabla V_0^{(0)}] = 0. \quad (4.17)$$

Puisque les paramètres $\rho_0^{(0)}$ et $V_0^{(0)}$ ne dépendent que de r

$$\nabla \rho_0^{(0)} = (\rho_0^{(0)})' \tilde{e}_r; \quad \nabla V_0^{(0)} = (V_0^{(0)})' \tilde{e}_r,$$

et de (4.17) il s'ensuit

$$\rho_0^{(2)} = \frac{(\rho_0^{(0)})'}{(V_0^{(0)})'} (\psi_0 + V_0^{(2)}) + f(r), \quad (4.18)$$

où $f(r)$ est une fonction arbitraire de r . La substitution de (4.18) en (4.16) donne

$$\nabla (\rho_0^{(0)} (\psi_0 + V_0^{(2)}) - \rho_0^{(2)}) - f(r) \nabla V_0^{(0)} = 0 \quad (4.19)$$

Puisque la combinaison $\rho_0^{(0)} (\psi_0 + V_0^{(2)}) - \rho_0^{(2)}$ dépend de θ comme $\sin^2 \theta$ et $f(r) \nabla V_0^{(0)}$ ne dépend pas de θ , il résulte de (4.19) que

$$f(r) = 0 \quad \rho_0^{(0)} (\psi_0 + V_0^{(2)}) - \rho_0^{(2)} = 0 \quad (4.20)$$

La comparaison de (4.20) et (4.15a) montre que $\tilde{L} = 0$. La substitution de (4.15a) et (3.30) dans l'équation d'Euler pour l'enveloppe

$$\frac{\sigma}{M_2} + [\omega \tilde{M}_2] = \tilde{L} \quad (4.21)$$

donne l'équation caractéristique pour σ_1 correspondant en précision à (3.56). Ainsi, la relation (3.58) convient aussi pour un modèle du noyau compressible radialement non homogène.

Pour évaluer la précision réelle de cette relation nous énumérerons les sources principales des erreurs et nous estimerons leurs ordres de grandeur.

I. Lors du calcul du moment des forces L on a fait les hypothèses suivantes : 1) la pression hydrostatique P_0 dans le noyau a été obtenue par l'approximation de Clairaut. Par conséquent P_0 est déterminé avec une erreur relative de l'ordre de l'aplatissement du noyau; 2) lors de l'intégration P_0 et P_1 , sur s nous sommes limités à une précision relative de l'ordre de l'aplatissement de l'interface de l'enveloppe avec le noyau; 3) dans la formule (4.4) la pression P_1 a été calculée dans l'approximation hydrostatique.

Pour évaluer la correction de δP_1 à la valeur hydrostatique $P_1/\sigma=0$ nous utiliserons le résultat de la solution analytique du problème pour le cas du noyau homogène et non compressible tirée du § 2 chap. III. La substitution de (3.55) en (3.17) donne :

$$\left| \frac{\delta P_1}{P_1/\sigma=0} \right| = \left| \frac{\varepsilon \omega \sigma}{v_i/a^2 - \varepsilon \omega^2} \right| \sim \frac{1}{400}$$

Ainsi le moment des forces \bar{L} a été calculé avec une erreur relative de l'ordre de l'aplatissement. Puisque l'action du moment L sur l'enveloppe conduit à la conservation de T_{ch} à peu près à 50 jours, l'erreur de l'ordre de l'aplatissement en \bar{L} peut amener à une erreur en T_{ch} de l'ordre de $\frac{1}{4}$ de jour.

II. La seconde source d'erreurs peut être l'effet des forces d'inertie sur la marée dans l'enveloppe. En utilisant les relations (2.28 à 2.32) et les valeurs numériques des intégrales qui y entrent, tirées des tables 2.3, il est facile de s'assurer que pour $\sigma \approx \sigma_{ch}$ et $m_0 = 1$ l'action des forces d'inertie sur la marée dans l'enveloppe ne perturbe pas le nombre de Love k de plus de 0,01%. Il est évident qu'on peut négliger cette valeur.

III. Enfin, la principale source d'erreurs est apparemment la marée polaire calculée avec insuffisamment de précision dans l'océan. A la correction (2.78) correspond l'allongement de T_{ch} :

$$\delta T_{ch} = 26,0 - 27,6 \text{ jours} \quad (4.22)$$

Ces valeurs ont été obtenues dans les travaux [39, 59] dans une approximation statique. Comme il a été noté dans le § 5 chap. 2 la légitimité de l'approximation statique pour la description de la marée polaire dans l'océan réel reste jusqu'à présent douteuse.

§. Sur la dépendance en fréquence du paramètre de qualité du manteau dans le domaine des fréquences de marées et de Chandler.

Après avoir substitué en (3.56) les valeurs numériques des paramètres relatives au modèle de Terre N° 508 de Gilbert et Dziewonski $A_2/A = 0.886$; $k = 0,301$ en posant $(C - A)/A = 1/304,5$ et en introduisant la correction (4.22), nous obtiendrons :

$$(T_{ch})_{théor.} = 422.6 \div 424.2 \text{ jours sidéraux} \quad (4.23)$$

En comparant cette valeur avec les périodes observées

$$(T_{ch})_{obs.} = 434 \div 435 \pm 1 \div 2 \text{ jours sidéraux} \quad (4.24)$$

nous obtiendrons un désaccord :

$$\Delta T_{ch} = (T_{ch})_{obs.} - (T_{ch})_{Théor.} = 10 \div 13 \text{ jours} \quad (4.25)$$

En considérant l'estimation de la précision du calcul de T_{ch} pour un modèle réel de Terre sans océan au § 1, on peut s'assurer que cette absence de coordination est déterminée soit par l'erreur dans la détermination des corrections de l'océan (4.22) soit par le fait que lors du calcul $(T_{ch})_{Théor.}$ (4.23) on a utilisé l'hypothèse d'une enveloppe idéalement élastique pour laquelle les modules d'élasticité et le nombre de Love k ne dépendent pas de la fréquence. La première possibilité nécessite un examen complémentaire; la seconde a été examinée dans les travaux [84, 60, 59, 85].

En utilisant la relation (3.9) les tables (3.2) et (3.1) et les répartitions $Q_u(r)$ établies d'après les données sur l'amortissement des oscillations propres de la Terre et données à la figure 3.1, il est facile de calculer les corrections correspondantes à k et T_{ch} dues à la dépendance du module d'élasticité de l'enveloppe en fonction de la fréquence dans la gamme des périodes de 1 sec. à T_{ch} . Dans le cas de la fonction logarithmique de creep de Lomnitz et de la répartition $Q_u(r)$ lui correspondant, dépendante de la fréquence et provenant du travail [56] de la correction à T_{ch} était de

$$\delta T_{ch} = 3.1 \text{ jours} \quad (4.26)$$

et Q_{ch} conformément à (3.61) et [83] est environ 500. Les signes de la correction (4.26) et du désaccord (4.25) concordent, cependant la valeur δT_{ch} est 4 fois plus petite que T_{ch} . En outre, la valeur $Q_{ch} \sim 500$ ne concorde pas avec les résultats des observations [87], selon lesquels

$$(Q_{ch})_{obs.} = 45 \pm 10 \quad (4.27)$$

En raison de cette divergence l'étude de la dépendance possible du paramètre Q_u en fonction de la fréquence σ dans la gamme des périodes de 1 heure à 14 mois présente un intérêt. Cette étude a été faite dans les travaux [60, 59, 85].

La voie la plus simple pour obtenir la fonction $Q_u(\sigma)$, dépendant faiblement de la fréquence, est de décrire l'ensemble phénoménologiquement des processus élastiques dans le manteau à haute température de la Terre à l'aide de la fonction de creep [65] :

$$\gamma(t) = ct^n$$

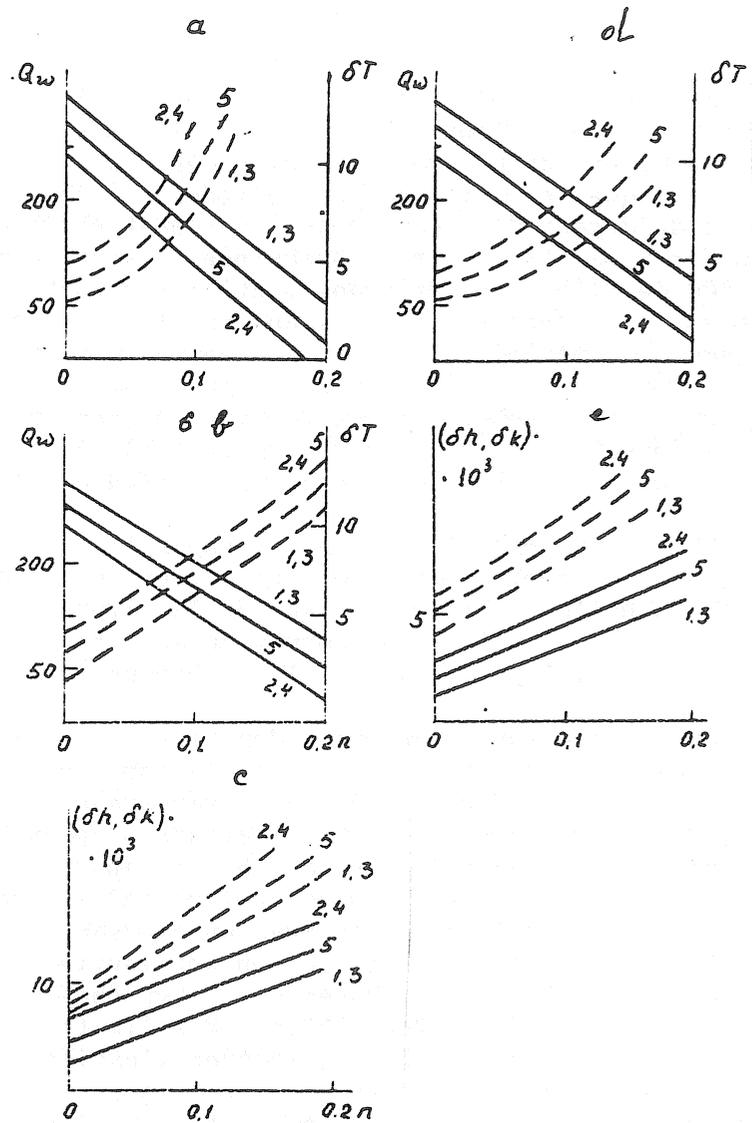


Fig. 4.1. Dépendance de Q_w , δT , k , h de n pour les différentes valeurs de τ et des différentes répartitions de $Q_u(r)$. La ligne continue représente la dépendance de $Q_{ch}(n)$, $10^{36}k(n)$, le pointillé représente $\delta T(n)$, $10^{36}h(n)$; a) $\tau = 30$ s, b) $\tau = 200$ s, c) $\tau = 600$ s, e-f $\tau = 30$ s, e) pour les marées semi diurnes f) pour les marées bi-mensuelles. Les numéros sur les courbes correspondent aux numéros de la répartition sur les figures 3.1, 5 à MI (figure 3.1).

En utilisant les valeurs $Re\mu(\sigma)$, $Q_u^{-1}(\sigma)$ de la table 3.1 correspondant à cette fonction de creep, il est facile de calculer les corrections δT_{ch} et les valeurs Q_{ch} pour les différentes valeurs de n . Pour calculer ces corrections il faut convenir à quelles valeurs des périodes $\tau = 2\pi/\sigma_2$ correspond le modèle de départ de l'enveloppe idéalement élastique. Cette question n'est pas tout à fait déterminée puisque le modèle de Terre N° 508 de Gilbert et Dziewonski utilisé plus haut est construit d'après les données relatives aux oscillations de la Terre dans la gamme des périodes de 1 s. à 1 heure et ne se rapporte pas à une fréquence fixe quelconque. En supposant $\tau = 30s$; $200s$; $600s$ et après avoir substitué les valeurs correspondantes σ_2 dans les expressions $Re\mu(\sigma)$ et $Q_u^{-1}(\sigma)$ de la table 3.1, nous obtiendrons les valeurs δT_{ch} et Q_{ch} données sur la figure 4.1.

Sur cette même figure sont données les corrections correspondantes aux nombres de Love k et h pour les marées semi diurnes et bimensuelles. La comparaison de la figure 4.1 avec (4.25), (4.27) montre que la bonne correspondance des valeurs théoriques et observées ΔT_{ch} et Q_{ch} peut être obtenues pour $n = 0,1 \div 0,2$.

Une conclusion à peu près identique a été tirée par Smith et Dalhen dans le travail [59]. Ainsi la fonction logarithmique de creep de Lomnitz décrivant de façon satisfaisante l'amortissement des ondes séismiques et des oscillations propres de la Terre dans la gamme des périodes de 1 s. à 1 heure, apparaît insatisfaisante lors de l'extension de la gamme des périodes jusqu'à 14 mois et la fonction de degré de creep avec un exposant du degré $0,1 \div 0,2$ doit être remplacée. Il faut cependant souligner encore une fois que cette conclusion est basée sur l'hypothèse de la véracité de l'estimation (4.22). Pour obtenir des limites strictes des valeurs possibles de n il faut effectuer l'estimation de l'écart de la marée polaire dans l'océan réel par rapport à la marée déterminée par les conditions de l'équilibre statique.

§. Influence de la viscosité du noyau sur la nutation libre et forcée

Jusqu'à présent on ne connaît que peu de choses sur la viscosité du noyau de la Terre. D'après l'estimation de Ya.Y.Frenkel la viscosité du métal fondu dans les conditions de pression et de température du noyau de la Terre est de l'ordre de 0.1 poise alors que la viscosité des silicates dans les mêmes conditions peut atteindre 10^{10} à 10^{13} poise [88].

L'estimation $\nu \sim 0,1$ poise a été confirmée par Gans [89] et à présent une viscosité du noyau de cet ordre de grandeur est considérée comme la plus probable. Les données sur l'amortissement des ondes sismiques longitudinales passant à travers le noyau donnent $\nu \leq 10^9$ poise [65]. La viscosité du noyau n'exerce pratiquement aucune influence [90] sur l'amortissement des oscillations propres de la Terre.

Ainsi, les estimations de la viscosité basées sur l'apport de la théorie de la constitution des métaux dans les conditions du noyau de la Terre n'ont pas été obtenues jusqu'à présent par une confirmation expérimentale.

La limitation la plus sévère sur la viscosité du noyau a été obtenue sur la base des données sur la phase de la nutation forcée dans le travail [91]. Les estimations [91] ont été basées sur l'analyse des solutions analytiques du problème de la précession de l'enveloppe avec un liquide visqueux remplissant une cavité ellipsoïdale, obtenues dans les travaux [92 à 94].

La grande sensibilité de l'amplitude et de la phase de la nutation vis à vis de la viscosité du noyau est déterminée par la grande amplitude des oscillations quasi diurnes tangentielles des couches supérieures du noyau par rapport à l'enveloppe (elle a été évaluée dans le § 5 paragraphe III) et par la faible épaisseur de la couche d'Ekman. Cela conduit à un gradient élevé des composantes tangentielles des vitesses dans le noyau à la frontière avec l'enveloppe. Le moment des forces visqueuses transmis du noyau à l'enveloppe peut atteindre une valeur importante même pour une viscosité relativement faible du noyau.

Dans ce paragraphe on a obtenu une estimation simple de l'ordre de grandeur du moment des forces du frottement L_T entre le noyau et l'enveloppe. Ensuite on a montré que l'estimation L_T employée en [91] est exagérée de $|\omega/\sigma + \omega|_{\frac{1}{2}}$ fois où ω est comme précédemment, la vitesse angulaire de la rotation diurne de la Terre et $\sigma + \omega$ est la vitesse angulaire du mouvement de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace. Pour la nutation principale et la précession $|\omega/\sigma + \omega|$ atteint respectivement 6.800 et 107 c'est pourquoi l'estimation L_T tirée de [91] est exagérée de deux ordres de grandeur pour la nutation principale et d'à peu près 3.000 fois pour la précession. En tenant compte de cette correction on a calculé la limite supérieure de la viscosité du noyau terrestre.

Pour évaluer l'ordre de la valeur L_T on peut évidemment négliger les effets de l'élasticité de l'enveloppe, de la non homogénéité du noyau liquide et se limiter à l'examen des petites perturbations de la solution de Poincaré (1.52 à 1.56) détermi-

amplitudes et des phases de la nutation forcée.

En [91] on a obtenu, sur la base des données sur la phase de la nutation principale tirées des travaux [97, 98], l'estimation de la viscosité du noyau

$$\nu \leq 10^6 \text{ poise}$$

On a remarqué là aussi qu'une plus forte limitation sur peut être obtenue par l'examen des données sur les amplitudes de la nutation forcée. En effet, si on part du fait qu'avec une précision relative actuelle de la mesure de l'amplitude de la nutation principale de l'ordre de 5.10^{-4} les divergences entre la théorie de la nutation de la Terre élastique avec noyau liquide idéal et avec les observations ne dépassant pas les erreurs des observations ϵ , c'est à dire que si on prend

$$L_T \leq 5.10^{-4} L_0 \quad (4.41)$$

alors la substitution (4.39), (4.40) en (4.41) donnera :

$$\nu \leq 2.10^3 \text{ poise} \quad (4.42)$$

Cette limitation pourrait être considérée comme la plus forte de toute celles obtenues sur la base des données d'observations.

Cependant on montrera plus loin que l'estimation (4.42) n'est pas sûre et qu'en réalité la limite supérieure de viscosité du noyau est de l'ordre de 10^7 poise.

1. Examinons d'abord le cas particulier le plus simple où la frontière enveloppe-noyau est sphérique, l'enveloppe absolument rigide, le noyau homogène et incompressible, mais la viscosité du noyau si faible que l'épaisseur de la couche d'Ekman l est beaucoup plus petite que le rayon du noyau b . Dans ce cas la transmission du moment au noyau peut se réaliser uniquement par les forces visqueuses. C'est pourquoi à cause des limites de la couche d'Ekman la masse principale du noyau se meut avec une vitesse angulaire constante par rapport à un axe immobile dans l'espace. Quant à l'enveloppe elle accomplit un mouvement de nutation sous l'effet de la force de marée avec le potentiel (1.9) en entraînant derrière elle une couche de liquide d'épaisseur l .

La solution des équations (2.3) peut être cherchée comme la somme des oscillations du type torsionnel :

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r) \left[\vec{e}_\theta \frac{\partial Y_n'}{\sin \theta \partial \varphi} - \vec{e}_\varphi \frac{\partial Y_n'}{\partial \theta} \right], \quad (4.43)$$

où $Y_n' = P_n'(\cos \theta) \sin(\sigma t - \varphi + a_n(r))$

est une fonction sphérique, P_n^m sont les polynômes associés de Legendre, e_θ e_φ sont les vecteurs unitaires orientés suivant la

direction d'accroissement respectivement de θ et φ , θ est la co-latitude, φ est la longitude, $a_n(r)$ sont des fonctions de r tenant compte de la variation de la phase des oscillations avec la profondeur. A cause de la symétrie du problème pour φ la solution ne peut dépendre que de la combinaison $\sigma t - \varphi$ c'est pourquoi les fonctions sphériques entrent en (4.43) uniquement avec $m = 1$. Pour

$$X_1(z) = (\psi\omega^2/3(\sigma+2\omega))z, a_1(z) = 0 \text{ et } X_2(z) = X_3(z) = \dots = X_n(z) = 0$$

l'expression (4.43) coïncide avec (4.28).

Pour une viscosité non nulle du noyau l'équation du mouvement (2.3) a la forme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} &= \rho (\dot{\vec{v}} + 2[\vec{\omega} \dot{\vec{v}}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{e}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{e}]]) = \\ &= \text{grad}(\rho V_e - p) + \nu \Delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Comme il a été noté plus haut la substitution de (4.43) en (4.44) donne un système continu d'équations différentielles ordinaires liées entre elles pour $X_n(r)$ dont la solution directe présente de grandes difficultés. Cependant la dépendance $X_1(r)$ peut être trouvée de façon autonome. Pour s'en assurer, nous multiplierons (4.43) vectoriellement par r et nous intégrerons le résultat suivant les variables angulaires. Nous obtiendrons :

$$\iint [\vec{e} \vec{v}] d\Omega = \frac{8\pi}{3} r^3 X_1(z) (i \cos(\sigma t + a(z)) + j \sin(\sigma t + a(z))). \quad (4.45)$$

D'autre part après avoir multiplié (4.43) vectoriellement par $\vec{r} dr$ et intégré le résultat suivant θ, φ nous obtiendrons l'équation des moments pour une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur δr :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} + \left[\vec{\omega} \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} \right] = \iint \nu [\vec{e} \Delta \vec{v}] d\Omega, \quad (4.46)$$

où
$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \iint \rho \{ [\vec{e} \vec{v}] + [\vec{e} [\vec{\omega} \vec{e}]] \} d\Omega = \frac{\partial A}{\partial z} \vec{\omega} + \iint \rho [\vec{e} \vec{v}] d\Omega, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{8\pi}{15} \rho r^5 \right) = \frac{8\pi}{3} \rho r^4; \quad (4.48)$$

A(r) et M(r) sont le moment d'inertie et le moment de la quantité de mouvement de la sphère de rayon r.

Si l'épaisseur de la couche d'Ekman $l \ll b$, alors

$$\begin{aligned} \iint \nu [\vec{e} \Delta \vec{v}] ds &\approx \iint \nu \left[\vec{e} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right] ds = \\ &= \frac{8\pi}{3} r^3 \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\chi_1(r) ((i \cos(\sigma t + a(z)) + j \sin(\sigma t + a(z))))]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Après avoir substitué (4.47) à (4.49) en (4.46) et exprimé les composantes entrant en (4.47) ω par ϵ d'après les formules (1.14) et noté $\chi_1(r) \cos(\sigma t + a(z)) = \chi_1^{(1)}$; $\chi_1(r) \sin(\sigma t + a(z)) = \chi_1^{(2)}$ nous obtiendrons les équations suivantes pour $\chi_1^{(1)}$, $\chi_1^{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi_1^{(1)} - \omega \chi_1^{(2)} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \chi_1^{(1)}}{\partial z^2} &= \epsilon \omega \sigma b \sin \sigma t; \\ \frac{\partial}{\partial t} \chi_1^{(2)} + \omega \chi_1^{(1)} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \chi_1^{(2)}}{\partial z^2} &= -\epsilon \omega \sigma b \cos \sigma t. \end{aligned} \quad (4.50)$$

La solution de ces équations avec les conditions aux limites (4.31) est de la forme :

$$\chi_1^{(1)} = \frac{\epsilon \omega \sigma b}{\sigma + \omega} \left[\cos\left(\sigma t + \frac{z-b}{l}\right) e^{-\frac{z-b}{l}} - \cos \sigma t \right] \quad (4.51a)$$

$$\chi_1^{(2)} = \frac{\epsilon \omega \sigma b}{\sigma + \omega} \left[\sin\left(\sigma t + \frac{z-b}{l}\right) e^{-\frac{z-b}{l}} - \sin \sigma t \right], \quad (4.51b)$$

où

$$l = \frac{2\nu}{\rho|\sigma + \omega|}. \quad (4.52)$$

La substitution de (4.51), (4.52) dans l'expression liant L_T avec la valeur des tensions visqueuses $\vec{\nu} \partial \vec{v} / \partial z$ à la frontière s du noyau avec l'enveloppe donne :

$$\begin{aligned} \vec{L}_T &= -\nu \iint \left[\vec{e} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] ds = \\ &= \frac{8\pi}{3} r^3 \nu \left[i \frac{\partial \chi_1^{(1)}}{\partial z} + j \frac{\partial \chi_1^{(2)}}{\partial z} \right] = \\ &= \frac{5A_1 \epsilon \omega}{b} \sqrt{\frac{\nu \omega^2}{(\sigma + \omega) \rho}} \left[i \cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\sigma t + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pour comparer (4.53) avec (4.38) (4.39) il faut exprimer les valeurs du paramètre ϵ entrant en (4.53) en fonction de ψ . Dans le cas d'une frontière sphérique de l'enveloppe avec le noyau le moment des forces de marées agissant sur le noyau est nul, mais le moment des forces de friction visqueuse ne se transmet que par une mince couche d'épaisseur d'ordre l confinant avec l'enveloppe. C'est pourquoi le vecteur vitesse angulaire instantanée de la masse principale du noyau $\omega + \kappa$ est immobile dans l'espace. Par conséquent, $|\kappa|/\omega$ détermine l'angle d'ouverture du cône d'herpolodie de l'enveloppe et conformément au théorème de Poincot sur la relation des angles des ouvertures des cônes de polhodie et d'herpolodie (1.20a)

$$\epsilon = \frac{|\kappa|}{\omega^2} |\omega + \sigma| \quad (4.54)$$

Après avoir substitué (4.29) en (4.54) et tenant compte que dans le cas de la nutation quasi diurne $\sigma \approx -\omega$, nous trouverons

$$\left| \frac{\epsilon}{\psi} \right| = \left| \frac{\sigma + \omega}{\omega} \right| \quad (4.55)$$

Nous noterons que (4.55) résulte également de la comparaison des formules de Poincaré (1.56) et (3.37) pour $e = 0$.

La substitution de (4.55) en (4.53) donne

$$\vec{L}_T = \frac{5A_1 \psi \omega}{b} \sqrt{\frac{\rho |\sigma + \omega|}{\rho}} \left(\vec{z} \cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{4}\right) + \vec{j} \sin\left(\sigma t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (4.56)$$

L'expression (4.56) diffère de (4.38) (4.39) d'un facteur de l'ordre de

$$\left(\omega / |\sigma + \omega| \right)^{1/2} = \left(\omega / \Omega \right)^{1/2}$$

où, en accord avec (1.20b), Ω est la vitesse angulaire du mouvement du vecteur ω dans l'espace. Ce facteur atteint les plus grandes valeurs dans le cas de la précession ($\omega/\Omega = 2.106$) et de la nutation principale ($\omega/\Omega_{\text{nut}} = 6.800$).

Pour une explication de l'influence si grande des forces de Coriolis sur L_T on peut donner à la formule (4.56) une explication un peu plus évidente. Pour cela nous utiliserons d'abord l'expression approximative pour L_T par la valeur des tensions visqueuses dans le noyau sur la frontière avec l'enveloppe. En supposant dans la couche $b - l \leq r \leq b$

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{|\vec{v}|}{e},$$

nous obtiendrons

$$|\vec{L}_T| = \left| \rho \int [r \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] ds \right| \sim 5A_1 \frac{\psi \omega \rho}{\rho b e} \quad (4.57)$$

D'autre part, on peut évaluer \bar{L}_T d'après la valeur du moment de la quantité de mouvement transmis de l'enveloppe à la couche sphérique liquide d'épaisseur ℓ . En supposant que cette couche se meut avec l'enveloppe, nous trouverons :

$$|\vec{L}_T| = \left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right| = \left| \dot{\vec{M}} + [\vec{\omega} \vec{M}] \right|, \quad (4.58)$$

où

$$\vec{M} \sim \frac{8\pi}{3} \rho b^4 \ell \omega (\vec{i} \epsilon \cos \sigma t + \vec{j} \epsilon \sin \sigma t + \vec{k}) \quad (4.59)$$

qui est le moment de quantité du mouvement de la couche sphérique. La substitution de (4.59) en (4.58) donne :

$$|L_T| \sim |\dot{\vec{M}}| \sim 5 A_1 \frac{\ell}{b} \omega^2 \epsilon \quad (4.60)$$

Après avoir exprimé dans cette expression ϵ par ψ à l'aide de (4.55) et en comparant le résultat avec (4.57), nous obtenons :

$$\ell_2 \sim \frac{\psi}{\rho(\sigma + \omega)} \quad (4.61)$$

ce qui, d'après l'ordre, correspond avec (4.52). La substitution de (4.61) en (4.57) soit (4.60) donne l'estimation L_T coïncidant avec (4.56) mais différant de (4.38), (4.39) d'un facteur de l'ordre de $(\omega/\sigma + \omega)^{1/2}$.

Dans le cas $\sigma = -\omega$ obtenu sans tenir compte des forces de Coriolis la relation (4.38) donne la valeur finale L_T et ℓ alors que de (4.56) il résulte que $L_T = 0$, $\ell = \infty$. Cette différence a une explication simple : pour $\sigma = -\omega$ la fréquence $\Omega = 0$ déterminée en (1.20b) et par conséquent, le vecteur vitesse angulaire de l'enveloppe comme le vecteur vitesse angulaire de la couche liquide contiguë à l'enveloppe gardent une direction invariable dans l'espace. Il est évident que dans ce cas $D M/D t = 0$ ce qui signifie aussi $L_T = 0$. Puisque pour $\sigma = -\omega$, b a une valeur finale, et L_T en accord avec (4.57) est proportionnel à $|\vec{v}|/\ell$ par la condition $\lim_{\sigma \rightarrow -\omega} L_T = 0$ s'ensuit également de

$\lim_{\sigma \rightarrow -\omega} \ell(\sigma) = \infty$, ce qui concorde avec (4.61). Dans les équations

(4.32), (4.34) ω n'entre pas c'est pourquoi il ne se présente aucune difficulté pour leurs solutions pour $\sigma = -\omega$.

2. Dans le cas d'une frontière ellipsoïdale enveloppe-noyau, la relation (4.57) reste en vigueur, cependant le lien entre ϵ et ψ se détermine non pas par (4.55) mais par les relations de Poincaré (1.56) (3.37) conformément auxquelles

$$-\frac{\epsilon}{\psi} = \ell + \frac{\sigma + \omega}{\omega}$$

Dans le cas de la précession et de la nutation principale

$$\left| \frac{\sigma + \omega}{\omega} \right| \ll \ell, \text{ c'est pourquoi}$$

$$|\epsilon| \approx \ell / \psi$$

Par analogie avec le § 1 nous examinerons le moment de la quantité de mouvement transmis du noyau à l'enveloppe. A cause de la couche "adhérente" à l'enveloppe, d'épaisseur ℓ le moment d'inertie de l'enveloppe augmente d'une valeur de l'ordre de

$$\frac{8\pi}{3} \rho b^4 \ell$$

Si ℓ ne dépend pas de θ la présence de cette couche n'exerce pas d'influence sur l'aplatissement de la frontière enveloppe-noyau et par conséquent la dépendance de ϵ de ℓ peut être estimée par la différenciation de (1.56) suivant A_1 . Après avoir désigné par $\delta\epsilon$ la correction à ϵ due à l'effet de la couche d'épaisseur ℓ , nous obtiendrons

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = - \frac{5 A_1 \ell}{b A} \frac{\sigma + \omega}{\omega e}$$

En utilisant l'expression pour le moment total L_0 (4.40) nous trouverons

$$|L_T| \sim \left| L_0 \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right| \sim \omega^2 \psi \frac{5 C_1 \ell}{b} \frac{\sigma + \omega}{\omega} \quad (4.62a)$$

En comparant (4.62a) et (4.57) nous avons

$$\ell^2 \sim \frac{\psi}{\rho(\sigma + \omega)} \quad (4.62b)$$

Après avoir substitué (4.62b) en (4.57) soit (4.62a) nous obtenons

$$|L_T| \sim 5 A_1 \psi \omega \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\psi(\sigma + \omega)}{\rho}}, \quad (4.62c)$$

ce qui coïncide avec (4.61), (4.56). Après avoir substitué (4.62c) et (4.40) en (4.41) et en supposant $A_1/A = 0,1$, $\ell = 1/400$, $b = 3.10^8 \text{cm}$, $|\sigma + \omega| = \omega/6800$ nous obtiendrons

$$\psi \leq 10^7 \text{ poise} \quad (4.63)$$

Effectivement la limite supérieure (4.63) diffère de (4.42) par un facteur de l'ordre de $\omega/|\sigma + \omega|$. Les valeurs ℓ^2 déterminées par les formules (4.62c) et (4.36) diffèrent par ce même facteur. Dans le cas de la précession, l'estimation de ℓ d'après la formule (4.36) est réduite d'à peu près 3000 fois.

En conclusion nous noterons que des formules (4.62a) (4.62b) il s'ensuit

$$\left| \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} \right| = \left| \frac{L_T}{L_0} \right| \sim \nu^{\frac{1}{2}}$$

c'est à dire que lors de l'augmentation de k fois la précision de l'observation de $\delta \epsilon / \epsilon$ la limite de la viscosité provoquant un effet sensible sur les amplitudes des nutations diminue de k^2 fois. Cette circonstance permet d'espérer qu'avec, dans un avenir proche, une brusque augmentation des observations des amplitudes des nutations il devienne possible d'avoir des limites sensiblement plus strictes de la viscosité du noyau terrestre.

3. Dans le cas de la nutation libre chandlérienne, la substitution de (3.55) en (4.57) donne

$$|L_T| \approx 10 A_1 \frac{\epsilon \sigma \nu}{\rho b \ell} \quad (4.64)$$

Le moment total des forces agissant du côté du noyau liquide sur l'enveloppe se détermine par la somme des moments (4.22) et (4.64). Après avoir remplacé dans le second membre de (4.21) \bar{L} par $\bar{L} + \bar{L}_T$, nous obtiendrons :

$$|\delta \sigma| \approx \frac{10 A_1 \sigma \nu}{\rho b \ell \omega (A - A_1)} \quad (4.65)$$

où $\delta \sigma$ est la variation de la fréquence propre due à l'effet du moment (4.64) sur l'enveloppe.

D'autre part, $\delta \sigma$ se détermine par le moment d'inertie de la couche liquide δA_1 lié à l'enveloppe par les forces de cohésion visqueuse. Pour estimer les ordres de grandeur de $\delta \sigma$, ℓ et A_1 on peut admettre que la couche de liquide d'épaisseur ℓ forme avec l'enveloppe un corps solide unique. La dépendance σ de A_1 se détermine dans cette approximation par la formule de Poincaré (1.52). En faisant la différenciation (1.52) selon A_1 et en tenant compte que $\delta A_1 = -5 A_1 \ell b$ nous obtiendrons :

$$\delta \sigma = \frac{\delta A_1 \sigma}{A - A_1} = \frac{5 A_1 \ell \sigma}{b(A - A_1)} \quad (4.66)$$

En comparant (4.65) et (4.66), nous trouverons

$$\ell \sim \sqrt{\frac{2\nu}{\rho\omega}}; \quad (4.67)$$

$$|\delta \sigma| \approx \frac{5 A_1 \sigma}{(A - A_1) b} \sqrt{\frac{2\nu}{\rho\omega}}. \quad (4.68)$$

La relation (4.68) permet d'évaluer la valeur maximale du décré-
 ment d'amortissement de la nutation de Chandler $\delta_{ch} = \pi/Q_{ch}$, dé-
 terminée par la viscosité du noyau. Il est évident que $\delta\sigma$ est
 maximale quand la phase de L_T est décalée par rapport à la phase
 de L de $\pi/2$.

Dans ce cas $\delta\sigma = \text{Im}\sigma$ et

$$Q = \frac{\text{Re } \sigma}{2 \text{Im } \sigma} = \frac{\sigma}{2|\delta\sigma|} \sim 6 \sqrt{\frac{\omega P}{2\nu}} \quad (4.69)$$

En assimilant cette valeur à $Q \sim 50$ [87] observée nous
 obtiendrons

$$\nu_0 \sim 2.10^{10} \text{ poise} \quad (4.70)$$

Pour les valeurs de ν inférieures à la limite, l'influence de la
 viscosité du noyau sur l'amortissement du mouvement chandlérien
 du pôle est insignifiante. On a tiré à peu près la même conclu-
 sion dans le travail [99]. La comparaison de (4.63) et (4.70) in-
 dique que les données sur l'amortissement du mouvement chandlé-
 rien du pôle montrent une contrainte sensiblement moins stricte
 sur la viscosité du noyau que les données sur les amplitudes de
 la nutation forcée. Toutefois, l'estimation (4.70) peut tout de
 même présenter un certain intérêt pratique puisqu'elle a été ob-
 tenue pour la période d'oscillation $T_{ch} \sim 14$ mois alors que
 (4.63) se rapporte aux périodes quasi-diurnes. De la relation
 (4.68) il s'ensuit que pour $\nu \leq 10^7$ poise l'influence de la
 viscosité du noyau sur la période chandlérienne est plus petite
 que les erreurs des observations de T_{ch} .

§ 4. Variations de marées de la vitesse de rotation de la Terre

Une certaine information indépendante sur la viscosité du
 noyau peut également être obtenue par l'analyse des variations de
 marées de la vitesse de rotation de la Terre.

Comme on le sait les composantes à longue période des marées
 luni-solaires provoquent des variations du moment d'inertie de la
 Terre par rapport à l'axe de rotation et provoquent des varia-
 tions observées de la vitesse de rotation. Si la liaison entre le
 noyau et l'enveloppe est suffisamment forte (viscosité du noyau
 élevée) alors la variation de la vitesse angulaire de la rotation
 de l'enveloppe $\delta\omega$ se détermine par l'expression :

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{\delta C}{C} \quad (4.71)$$

où δC est la variation du moment d'inertie de toute la Terre avec noyau et océan. Si la liaison est faible, les variations de marées de la rotation du noyau peuvent ne pas correspondre aux variations de la vitesse de rotation de l'enveloppe et au lieu de (4.71) on aura l'égalité

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = - \frac{\delta C_2}{C_2} \quad (4.72)$$

où δC_2 est la variation du moment d'inertie du système enveloppe-océan.

Pour calculer (4.71), (4.72) pour les modèles réels de la Terre nous montrerons que δC , δC_2 se déterminent par les valeurs des variations de marées du potentiel gravitationnel et de ses dérivées radiales sur la surface de la Terre et à la frontière noyau-enveloppe.

En utilisant la détermination δC , nous écrivons :

$$\delta C = \iiint_{\tau} \delta \rho (x^2 + y^2) d\tau + \iint_{s_0} H(a) \rho(a) (x^2 + y^2) ds_0, \quad (4.73)$$

où τ est le volume occupé par toute la Terre, $\delta \rho = - \operatorname{div} (\rho \bar{u})$ (la variation de densité due à la marée) s_0 est la surface de la Terre, $H(a)$ et $\rho(a)$ sont la composante radiale des déplacements et la densité à la surface $r = a$. Nous avons une expression analogue (avec le remplacement de τ par τ_1 , $H(a)$ par $H(b)$ et $\rho(a)$ par $\rho(b - 0)$) et pour la variation du moment d'inertie du noyau $\delta C_1 = \delta C - \delta C_2$. En utilisant l'équation de Poisson (1.59) nous exprimerons $\delta \rho$ par la variation du potentiel due à la marée:

$$\delta \rho = - \frac{\Delta R}{4\pi G} \quad (4.74)$$

Après avoir substitué (4.74) en (4.73) et en utilisant la formule de Green nous transformerons l'intégrale de volume (4.73) en intégrale de surface. Tenant compte de ce que

$$(x^2 + y^2) = 4 = \text{const.}$$

et prenant en considération que pour les déformations de marées, à cause de la conservation de la masse totale

$$\iiint R d\tau = 0$$

nous obtiendrons

$$\delta C = - \frac{1}{4\pi G} \iint_{s_0} \left((x^2 + y^2) \left(\frac{\partial R}{\partial n} \right)_{\text{ext}} - R \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2) \right) ds_0$$

où $\partial/\partial n$ est la dérivée suivant la normale extérieure et

$$\left(\frac{\partial R}{\partial n}\right)_{out} = \left(\frac{\partial R}{\partial n}\right)_{int} - 4\pi G \rho_a H_a \quad (4.75)$$

est la dérivée normale du potentiel dans l'espace extérieur. Après avoir décomposé R, H en fonctions sphériques (1.110) et tenant compte que

$$X^2 + Y^2 = -\frac{2}{3} r^2 (1 - P_2^0(\cos \theta))$$

nous obtiendrons finalement

$$\delta C = \frac{2\alpha^3}{15G} \left(L_{20}(a) - 2a R_{20}(a) \right) \quad (4.76)$$

où

$$L_{20}(r) = r^2 \left(\frac{\partial R}{\partial n}\right)_{out}$$

De façon tout à fait analogue

$$\delta C_1 = \frac{2b^3}{15G} \left(L_{20}(b) - 2b R_{20}(b) \right) \quad (4.77)$$

Le calcul numérique δC_1 et $\delta C_2 = \delta C - \delta C_1$ (4.76)(4.77)

pour le modèle N° 508 de Gilbert et Dziewonski [70] en tenant compte des déformations élastiques provoquées par la charge de marée océanique, donne les résultats suivants [100] :

$$\frac{\delta C}{C} = -2,02 (k + 0,692 \tilde{k}) \frac{v_e}{ga} \quad (4.78)$$

$$\frac{\delta C_2}{C_2} = -2,02 (0,881 k + 0,846 \tilde{k}) \frac{v_e}{ga} \quad (4.79)$$

où $k = 0,304$ à $0,308$ - les nombres de Love calculés avec une correction du module dynamique du déplacement (pour la fonction logarithmique de creep de Lomnitz) pour les périodes de 2 semaines et 1 an, $\tilde{k} \approx 0,04$ est la correction à k en tenant compte de la marée dans l'océan réel dans l'approximation statique $ag = 6,24 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2/\text{s}^2$ est la constante de normalisation v_e sont les amplitudes déterminées (2.26) des ondes zonales pour $n_0 = 2, m_0 = 0$.

Comme on le constate par (4.78), (4.79), les relations $\delta\omega/\omega$ calculées d'après les formules (4.71) et (4.72) diffèrent à peu

près de 12%.

La précision des mesures $\delta\omega/\omega$ d'après l'estimation [101] atteint 1%. Ainsi il apparaît que dans les limites des erreurs de mesures les variations observées $\delta\omega/\omega$ dues aux marées, tirées du travail [101] concordent avec les valeurs (4.72), (4.79) se rapportant au cas limite de faible viscosité du noyau.

Nous examinerons quelle limitation sur les valeurs possibles de la viscosité du noyau représentent ces données. Si on part de l'estimation de la précision des observation $\delta\omega/\omega$ tirées du travail [101] c'est à dire si on suppose que la différence des résultats obtenus à partir des formules (4.71), (4.78) soit (4.72), (4.79) 10 fois plus grandes que les erreurs de mesures de δ/ω , cela signifie que le moment d'inertie de la couche d'Ekman ne dépasse pas $1/10 C_1$, c'est à dire

$$5C_1 \frac{\ell}{b} \leq \frac{\ell}{10} C_1 \quad (4.80)$$

De l'équation des moments de la couche (4.46) il s'ensuit que pour $\delta\omega$ colinéaire avec ω , pour ℓ l'estimation (4.36) est correcte. La substitution de (4.36) en (4.80) donne

$$\nu \leq \frac{\sigma \rho b^2}{5.10^3} \quad (4.81)$$

Les valeurs σ peuvent varier de 2.10^{-7} s^{-1} (pour l'onde annuelle S_{sa}) jusqu'à 5.10^{-6} s^{-1} (pour l'onde bimensuelle Mf). Les résultats [101] se rapportent à l'onde Mf . La substitution en (4.81) de la valeur $\sigma = 5.10^{-6} \text{ s}^{-1}$ donne

$$\nu \leq 10^8 \text{ poise} \quad (4.82)$$

Cette limitation est un peu moins contraignante que (4.63).

Il convient de noter que le second membre de (4.81) est proportionnel à σ . Cela signifie que pour une précision relative égale des mesures, les variations à longue période $\delta\omega/\omega$ apportent des informations plus importantes sur la viscosité du noyau que celles à courte période. Cependant la précision des mesures actuelles des variations de marées annuelles et semi annuelles de la vitesse de la rotation de la Terre n'est pas encore assez élevée et il ne convient pas jusqu'à présent d'utiliser ces données pour estimer la limite supérieure de la viscosité du noyau.

Ainsi, de l'analyse de l'ensemble des données actuelles sur la rotation de la Terre il résulte que la viscosité du noyau ne peut dépasser $\sim 10^7$ poise.

5. Conclusions

Nous formulerons brièvement les résultats de ce chapitre.

1. La comparaison des valeurs théoriques de la période et du décrétement d'amortissement du mouvement chandlérien et également des nombres de Love pour les ondes semi-diurnes, diurnes et à longue période permet, avec les résultats des observations, d'élargir la zone des périodes T_i dans laquelle on sonde le paramètre de qualité $Q_\mu(T)$ du manteau en fonction du domaine d' $1 \text{ s} \leq T_i \leq 1 \text{ heure}$ (ce qui correspond aux périodes des ondes séismiques et des oscillations propres de la Terre) jusque $T_{ch} \approx 14 \text{ mois}$. Pour évaluer $Q_\mu(T_{ch})$ il faut un calcul très sûr des nombres de Love et de T_{ch} tenant compte de l'action d'une grande quantité de facteurs perturbateurs. Les résultats du § 1 montrent que par la formule (3.58) la valeur de T_{ch} tient compte avec une précision suffisante aussi bien de l'influence d'un noyau liquide compressible non homogène que de l'effet de l'élasticité de l'enveloppe. La déduction donnée dans le § 1 de l'expression pour T_{ch} n'utilise aucune hypothèse sur le caractère des déplacements dans le noyau et n'est pas liée à la solution du système infini d'équations différentielles ordinaires décrivant ces déplacements.
2. Apparemment la plus grande indétermination des valeurs théoriques Q_{ch} et T_{ch} est déterminée par la dissipation jusqu'à présent non prise en considération de l'énergie dans l'océan. Si la marée polaire de période 14 mois se décrit avec une précision suffisante par la théorie statique alors la valeur théorique T_{ch} (calculée pour un modèle d'enveloppe idéalement élastique) est de 10 à 11 jours plus courte que celle observée. Cette différence peut s'expliquer si on suppose que le paramètre de qualité du manteau $Q_\mu(5)$ dans la gamme des périodes de 1 heure à 14 mois dépend de σ , en σ^n pour $n = 0,1$ à $0,2$.

Avec cette dépendance de $Q_\mu(\sigma)$ la valeur observée de

$$Q_{ch} = 45 \pm 10 \text{ (§ 7)}$$

peut être complètement expliquée par la dissipation de l'énergie dans l'enveloppe. Pour la fonction logarithmique de creep de Lomnitz la correction à la période de Chandler à cause de la dépendance du module de déplacement en fonction de la fréquence n'est que de trois jours et $Q_{ch} = 500$. Les dépendances en n de δT_{ch} et Q_{ch} pour $0 \leq n \leq 0,2$ sont données sur la figure 4.1.

3. A cause de la grande amplitude des oscillations diurnes du noyau par rapport à l'enveloppe et de la faible épaisseur de la couche d'Ekman les amplitudes et la phase de nutation de la Terre sont sensibles à la valeur de la viscosité du noyau. En même temps pour calculer l'influence de la viscosité du noyau sur les amplitudes et les phases de la nutation forcée

il faut tenir compte de l'action des forces de Coriolis sur les mouvements dans le noyau liquide. Les estimations utilisées précédemment du moment des forces de friction visqueuse obtenues sans tenir compte des forces de Coriolis donnent un résultat qualitativement incertain. Le problème de la détermination de la distribution des courants de marées dans un noyau non idéalement liquide est très complexe. Cependant le moment L_T peut être trouvé de façon autonome pour la solution des équations ordinaires (4.50) aux conditions aux limites (4.51).

4. Les données actuelles sur les amplitudes de la nutation témoignent de ce que la viscosité du noyau est inférieure à 10^7 poise. Cette limitation est plus sûre que les estimations obtenues d'après les données sismiques et les données sur l'amortissement des oscillations propres de la Terre selon lesquelles elle est inférieure à 10^9 poise.

Une limitation un peu moins rigide ($\leq 10^8$ poise) résulte de l'analyse des données sur les variations de marées de la vitesse de rotation de la Terre; encore moins rigide ($\leq 2 \cdot 10^{10}$ poise) par l'analyse des données sur l'amortissement du mouvement de Chandler.

Chapitre V.

Théorie des marées pour des modèles de Terre sphérique à dissymétrie faible.

Jusqu'à présent pour calculer les déformations de marées de l'enveloppe nous avons utilisé le système d'équations (1.67) obtenu dans l'hypothèse de répartitions à symétrie sphérique de la densité et des modules d'élasticité. Pour étudier les hétérogénéités à grande échelle et locale du manteau d'après les données de marées il faut généraliser ces solutions sur le cas des modèles sphériquement non symétriques. En outre, pour étudier les données sur les inclinaisons de marées et les déformations il faut introduire des corrections qui tiennent compte du relief au voisinage du point d'observation. Nous donnerons plus bas les résultats des solutions analytique et numérique de ces problèmes, basés sur l'application de la méthode du petit paramètre.

§ 1. La représentation des amplitudes et des phases des marées terrestres suivant des décompositions en fonctions sphériques.

La relation (1.113) détermine complètement la composante radiale des déplacements et la variation du potentiel à la surface de la Terre avec des répartitions sphériques à dissymétrie faible de la densité et des modules élastiques. Pour calculer les intégrales (1.1065) entrant en (1.113) nous utiliserons la méthode appliquée dans la théorie des oscillations propres de la Terre [102 à 104] résidant dans la décomposition des paramètres $\delta\lambda(r, \theta, \psi)$, $\delta\mu(r, \theta, \psi)$, $\delta(r, \theta, \psi)$ en fonctions sphériques avec intégration successive des résultats suivant les variables angulaires.

Lors de l'introduction des hétérogénéités horizontales de la densité dans les équations de départ (1.99) il faut ajouter les petits termes tenant compte de la non hydrostaticité des tensions initiales (par exemple sous la forme de [105] c'est pourquoi le terme $\delta L(4^\circ, R^\circ)$ entrant en (1.106 δ) est composé de deux parties : 1) les variations de l'opérateur L (1.63) avec la variation de ρ et la variation correspondante V et 2) avec l'apparition de termes supplémentaires dans les équations de départ pour le calcul desquelles il faudrait introduire quelques hypothèses supplémentaires sur le caractère de la partie non hydrostatique des tensions initiales.

Puisque les hétérogénéités horizontales de la densité du manteau sont assez faibles (les valeurs relatives des anomalies gravitationnelles sont beaucoup plus petites que les erreurs relatives des observations de marées), nous nous limiterons dans la suite uniquement à l'examen des répartitions sphériquement non symétriques des modules d'élasticité.

Après avoir représenté les valeurs $F_{j_{nm}}$ entrant en (1.113) sous la forme

$$F_{nm} = F_{nm}(\delta\lambda) + F_{nm}(\delta\mu) \quad (5.1)$$

où conformément à (1.106 6),

$$F_{nm}^j(\delta\lambda) = -\iiint_{\bar{\tau}} \delta\lambda \operatorname{div} u^0 \operatorname{div} u_{nm}^j d\bar{\tau}; \quad (5.2)$$

$$F_{nm}^j(\delta\mu) = -\iiint_{\bar{\tau}} \delta\mu \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{nm}^j}{\partial x_k} d\bar{\tau}. \quad (5.3)$$

les intégrales liées aux variations $\delta\lambda$ et $\delta\mu$ respectivement, nous substituerons les décompositions $\delta\lambda$, $\delta\mu$ en fonctions sphériques

$$\delta\lambda(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p=-\ell}^{\ell} \lambda_{\ell p}(r) Y_{\ell}^p(\theta, \varphi); \quad (5.4)$$

$$\delta\mu(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p=-\ell}^{\ell} \mu_{\ell p}(r) Y_{\ell}^p(\theta, \varphi) \quad (5.5)$$

en (5.2), (5.3). En utilisant les expressions pour les déplacements \vec{u}^0 , \vec{u}^j (1.66)

$$\vec{u}^0 = \frac{r}{2} H_{n_0}^0(r) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) + T_{n_0}^{m_0}(r) \nabla Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi), \quad (5.6)$$

$$\vec{u}_{nm}^j = \frac{r}{2} H_n^j(r) Y_n^m(\theta, \varphi) + T_n^j(r) \nabla Y_n^m(\theta, \varphi); \quad (5.7)$$

il est facile de se rendre compte que

$$\operatorname{div} \vec{u}^0 = \mathcal{D}_{n_0}(r) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi); \quad (5.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_{nm}^j = \mathcal{D}_n^j(r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (5.9)$$

où
$$\mathcal{D}_n(r) = H_n'(r) + \frac{2}{r} H_n(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} T_n(r),$$

la prime désigne la dérivée par rapport à r .
Ainsi

$$F_{nm}^j(\delta\lambda) = -\sum_{\ell, p} A_{\ell p n m n_0 m_0} \int_0^a x_{n n_0}^{(n)(j)}(r) \lambda_{\ell p}(r) dr, \quad (5.10)$$

où

$$x_{nn_0}^{(1)j}(\tau) = \tau^2 \mathcal{D}_{n_0} \mathcal{D}_n^j(\tau); \quad (5.11)$$

$$A_{\ell p n m n_0 m_0} = \iint_S Y_\ell^p(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta, \varphi) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) d\Omega \quad (5.12)$$

sont les intégrales provenant des produits des trois fonctions sphériques, S est la sphère unitaire.

Il est un peu plus difficile de calculer $F_{nm}(\delta_j \lambda)$.
En utilisant la notation

$$h_n^j = H_n^j / \tau^{n+1} - n T_n^j / \tau^{n+2}; \quad t_n^j = T_n^j / \tau^n; \quad (5.13a)$$

$$h_{n_0}^j = H_{n_0}^j / \tau^{n_0+1} - n_0 T_{n_0}^j / \tau^{n_0+2}; \quad t_{n_0}^j = T_{n_0}^j / \tau^{n_0} \quad (5.13b)$$

nous obtiendrons [27]:

$$\begin{aligned} -F_{nm}^j(\delta_j \lambda) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{p=-\ell}^{\ell} A_{\ell p n m n_0 m_0}(\tau) \int_0^1 \tau^{n+n_0} f_{\ell p}(\tau) \cdot \\ &\cdot [x_{nn_0}^{(1)j}(\tau) + \frac{1}{2}(e+n+n_0+1)(n+n_0-e)x_{nn_0}^{(2)j}(\tau) + \\ &+ \frac{1}{4}(e+n+n_0-1)(e+n+n_0+1)(n+n_0-e)(n+n_0-e-2)x_{nn_0}^{(4)j}(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (5.14)$$

où

$$\begin{aligned} x_{nn_0}^{(1)j}(\tau) &= 2\tau^2 \left\{ \tau^2 h_n^j h_{n_0}^j + \tau h_n^j h_{n_0}^j + \tau h_n^j h_{n_0}^j + \right. \\ &+ n\tau h_n^j \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{\tau} \right) + n_0 \tau h_{n_0}^j \left(h_{n_0}^j + \frac{t_{n_0}^j}{\tau} \right) + \frac{n(n-1)}{\tau} h_{n_0}^j t_n^j + \\ &+ \frac{n_0(n_0-1)}{\tau} h_n^j t_{n_0}^j + 3h_n^j h_{n_0}^j + n h_{n_0}^j \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{\tau} \right) + \\ &\left. + n_0 h_n^j \left(h_{n_0}^j + \frac{t_{n_0}^j}{\tau} \right) + \frac{nn_0}{2} \left(h_{n_0}^j + \frac{t_{n_0}^j}{\tau} \right) \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{\tau} \right) \right\}; \\ x_{nn_0}^{(2)j}(\tau) &= \left\{ \left(h_{n_0}^j + \frac{t_{n_0}^j}{\tau} \right) \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{\tau} \right) \tau^2 + 2(n-1) t_n^j \left(h_{n_0}^j + \frac{t_{n_0}^j}{\tau} \right) \tau + \right. \\ &\left. + 2(n_0-1) t_{n_0}^j \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{\tau} \right) \right\}; \\ x_{nn_0}^{(4)j}(\tau) &= 2 \frac{t_n^j t_{n_0}^j}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Les intégrales entrant en (5.10), (5.15) provenant des produits des trois fonctions sphériques $A_{\ell p n m n_0 m_0}$ sont exprimées dans le cas général par 3.j sont les symboles de Vigner [106]. Dans le

cas des ondes de marées principales avec $n_0 = 2, m_0 = 0, 1, 2$ présentant ici le plus grand intérêt on peut sensiblement simplifier les expressions générales pour $A_{\ell p n m n_0 m_0}$ si on utilise les formules de récurrence

(5.16)

$$\sin \theta P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1}^{m+1}(\cos \theta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos \theta));$$

$$\cos \theta P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} ((n-m+1)P_{n+1}^m(\cos \theta) + (n+m)P_{n-1}^m(\cos \theta))$$

(dans le second membre de (5.16) on a pris $P_k = 0$ pour $r > k$) et également les relations élémentaires

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos m_1 \psi \cos m_2 \psi \cos m_3 \psi d\psi = \\ & = \frac{\pi}{2} [\delta_{m_1+m_2, m_3} + \delta_{m_1+m_3, m_2} + \delta_{m_1+m_3, -m_2} + \delta_{m_2+m_3, m_1}]; \\ & \int_0^{2\pi} \sin m_1 \psi \cos m_2 \psi \sin m_3 \psi d\psi = \\ & = \frac{\pi}{2} [\delta_{m_2+m_3, m_1} - \delta_{m_1+m_3, m_2} + \delta_{m_1+m_3, m_3} - \delta_{m_1+m_2, -m_3}]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Toutes les autres intégrales en ψ donnent zéro à cause du fait que les expressions intégrées sur l'intervalle $(0, 2\pi)$ sont des fonctions impaires de ψ .

En utilisant (5.16) (5.17) il est facile de démontrer que $A_{\ell p n m n_0 m_0} \neq 0$ seulement dans les cas où $\ell = n, n - 2$ soit $n + 2$; $p = m + m_0$ soit $p = m - m_0$. Ainsi si les hétérogénéités horizontales du manteau sont représentées par une seule harmonique sphérique, la décomposition des marées à la surface de la Terre ne renfermera pas plus de trois harmoniques dans le cas des marées zonales et pas plus de six dans le cas des marées diurnes et semi diurnes. Ceci permet d'obtenir la solution finale du problème pour les hétérogénéités horizontales données par l'indice final des harmoniques sphériques.

L'intégration de l'expression pour $A_{\ell p n m n_0 m_0}$ suivant θ se ramène au calcul des intégrales des trois types :

$$\begin{aligned} a_{nmm_0} &= \int_{-1}^1 P_2^{m_0}(x) P_n^m(x) P_n^{m+m_0}(x) dx \\ b_{nmm_0} &= \int_{-1}^1 P_2^{m_0}(x) P_n^m(x) P_{n+2}^{m+m_0}(x) dx; \\ d_{nmm_0} &= \int_{-1}^1 P_2^{m_0}(x) P_n^m(x) P_{n-2}^{m+m_0}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A l'aide de (5.16) nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
 a_{nmm_0} &= \begin{cases} \frac{3}{4n+2} \left(\frac{(n+1)^2 - m^2}{2n+3} + \frac{n^2 - m^2}{2n-1} \right) \cdot \frac{1}{2} C_n^m & \text{при } m_0=0; \\ \frac{3}{2n+1} \left(\frac{n+m}{2n-1} - \frac{n-m+1}{2n+3} \right) C_n^{m+1} & \text{при } m_0=1; \\ -\frac{6}{(2n-1)(2n+3)} C_n^{m+2} & \text{при } m_0=2; \end{cases} \\
 b_{nmm_0} &= \begin{cases} \frac{3(n-m+1)(n-m+2)}{(4n+2)(2n+3)} C_{n+2}^m & \text{при } m_0=0; \\ \frac{3}{2n+1} \frac{n-m+1}{2n+3} C_{n+2}^{m+1} & \text{при } m_0=1; \\ \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} C_{n+2}^{m+2} & \text{при } m_0=2; \end{cases} \\
 d_{nmm_0} &= \begin{cases} \frac{3(n+m)(n+m-1)}{(4n+2)(2n-1)} C_{n-2}^m & \text{при } m_0=0; \\ -\frac{3(n+m)}{4n^2-1} C_{n-2}^{m+1} & \text{при } m_0=1; \\ \frac{3}{4n^2-1} C_{n-2}^{m+2} & \text{при } m_0=2; \end{cases}
 \end{aligned}$$

où

$$C_n^m = \|P_n^m\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (5.20)$$

Il convient de noter que pour les variations à symétrie sphérique $\delta\lambda$, $\delta\mu$, et $n_0 = 2$ dans les sommes (5.10), (5.14) il ne reste que les termes pour lesquels $\ell = p = 0$. Dans ce cas

$$A_{\ell p m n_0 m_0} = C_n^m \delta_{\ell n_0} \delta_{m m_0}$$

et le facteur de $\delta\mu$ dans l'expression intégrée (5.14) se ramène à :

$$- \tau \left(X_{nn_0}^{(2)(j)}(\tau) + 10 X_{nn_0}^{(3)(j)}(\tau) + 30 X_{nn_0}^{(4)(j)}(\tau) \right)$$

En utilisant la forme évidente des coefficients des équations (1.67) entrant en (3.8) à la suite de calculs assez importants on peut s'assurer du fait que cette expression correspond au facteur

pour $\delta\mu$ en (3.8); quant au facteur pour $\delta\lambda$ il coïncide avec $-x'(j)(r)$

Afin d'utiliser les données sur les hétérogénéités horizontales dans les répartitions des vitesses des ondes sismiques, dans les relations (5.10) (5.14) il convient de passer des variables λ, μ aux variables

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Nous désignons par V_{p0}, V_{s0} les répartitions des vitesses des ondes longitudinales et transversales moyennées en fonction des variables angulaires avec la profondeur, par $\delta V_p, \delta V_s$ - les petits compléments sphériquement non symétriques, $\alpha = \delta V_p/V_{p0}, \beta = \delta V_s/V_{s0}$.

Tenant compte des expressions pour les variations de la force de pesanteur par $H_n^{m,p}, R_n^{m,p}$ nous obtiendrons finalement :

$$\begin{aligned} \Delta g(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n+1) R_n^{(1)}(t) - 2H_n^{(1)}(t)] Y_n^m(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{\ell, p} \cos \sigma t [(G_\ell^p)_{s_1}(\theta, \varphi) + (G_\ell^p)_{p_1}(\theta, \varphi)] + \\ &\quad + \sin \sigma t [(G_\ell^p)_{s_2}(\theta, \varphi) + (G_\ell^p)_{p_2}(\theta, \varphi)], \end{aligned} \quad (5.21)$$

où

$$\begin{aligned} (G_\ell^p)_{p_1}(\theta, \varphi) &= \alpha_{\ell p m_0} Y_\ell^{p-m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 y_\ell(z) \alpha_\ell^p(z) dz + \\ &\quad + \alpha_{\ell p -m_0 m_0} Y_\ell^{p-m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 y_\ell(z) \alpha_\ell^p(z) dz + \\ &\quad + \beta_{\ell p -m_0 m_0} Y_{\ell-2}^{p-m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 y_{\ell-2}(z) \alpha_\ell^p(z) dz + \\ &\quad + \beta_{\ell p m_0} Y_{\ell+2}^{p+m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 y_{\ell+2}(z) \alpha_\ell^p(z) dz + \\ &\quad + \alpha_{\ell p -m_0 m_0} Y_{\ell-2}^{p-m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 y_{\ell-2}(z) \alpha_\ell^p(z) dz + \\ &\quad + \alpha_{\ell p m_0} Y_{\ell+2}^{p+m_0}(\theta, \varphi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 y_{\ell+2}(z) \alpha_\ell^p(z) dz; \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$I(m_0, p, p \pm m_0) = \int_0^{2\pi} \cos m_0 \psi \begin{cases} \cos p \psi & \cos(p \pm m_0) \psi \\ \sin p \psi & \sin(p \pm m_0) \psi \end{cases} d\psi, \quad (5.23)$$

$$y_\ell(z) = 2(\lambda_0 + 2\mu_0) (2x_{\ell n_0}^{(1)(j=1)}(z) - (\ell+1)x_{\ell n_0}^{(1)(j=3)}(z)). \quad (5.24)$$

L'expression pour $(G_e^r)_{P_2}$ est analogue à (5.22) avec cette différence que dans la formule (5.23) $\cos m_0 \Psi$ est changé en $\sin m_0 \Psi$.
 Ensuite,

$$\begin{aligned}
 (G_e^r)_{S_1} &= a_{e, p, m_0} Y_e^{p+m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 (z_2)_e(z) \beta_e^p(z) dz + \\
 &+ a_{e, p-m_0, m_0} Y_e^{p-m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 (z_2)_e(z) \beta_e^p(z) dz + \\
 &+ b_{e-2p-m_0, m_0} Y_{e-2}^{p-m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 (z_1)_{e-2}(z) \beta_e^p(z) dz + \\
 &+ b_{e, p, m_0} Y_{e+2}^{p+m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 (z_3)_{e+2}(z) \beta_e^p(z) dz + \\
 &+ d_{e-2p+m_0, m_0} Y_{e-2}^{p+m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p+m_0) \int_0^1 (z_1)_{e-2}(z) \beta_e^p(z) dz + \\
 &+ d_{e, p, m_0} Y_{e+2}^{p-m_0}(\theta, \psi) I(m_0, p, p-m_0) \int_0^1 (z_3)_{e+2}(z) \beta_e^p(z) dz;
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
 (z_1)_e(z) &= 2\mu_0 (2x_{en_0}^{(2)(j=1)}(z) - 4x_{en_0}^{(1)(j=1)}(z) - (e+1)x_{en_0}^{(2)(j=3)}(z) + \\
 &+ 2(e+1)x_{en_0}^{(1)(j=3)}(z));
 \end{aligned}$$

$$(z_2)_e(z) = 2(2e+3)\mu_0 (2x_{en_0}^{(3)(j=1)}(z) - (e+1)x_{en_0}^{(3)(j=3)}(z)) + (z_1)_e(z);
 \tag{5.26}$$

$$(z_3)_e(z) = 4(2e+1)\mu_0 (2x_{en_0}^{(3)(j=1)}(z) - (e+1)x_{en_0}^{(3)(j=3)}(z) +$$

$$+ 4(4e^2-1)\mu_0 (2x_{en_0}^{(4)(j=1)}(z) - (e+1)x_{en_0}^{(4)(j=3)}(z)) + (z_1)_e(z).$$

(G_ℓ^V) S_2 s'obtient également par (5.23), (5.25) par le remplacement en (5.23) de $\cos m_0 \Psi$ par $\sin m_0 \Psi$. Les fonctions $(G_\ell^V) S_1$, $(G_\ell^V) S_2$ déterminent l'action, sur la marée, des hétérogénéités horizontales dans les répartitions des vitesses des ondes transversales V_s et $(G_\ell^H) p_1$, $(G_\ell^H) p_2$ des hétérogénéités des vitesses des ondes longitudinales V_p .

Pour le calcul numérique des valeurs $\Delta g(\theta, \Psi, t)$ déterminées par les formules (5.21) à (5.26) il faut tenir compte de ce qui suit:

1. Dans les formules (5.22), (5.25) entrent les fonctions sphériques $Y_\ell^{p \pm m_0}$, $Y_{\ell \pm 2}^{p \pm m_0}$, déterminées par

$$Y_{\ell, \ell \pm 2}^{p, p \pm m_0}(\theta, \Psi) = P_{\ell, \ell \pm 2}^{p, p \pm m_0}(\cos \theta) \begin{cases} \cos p, \Psi \\ \sin p, \Psi \end{cases} \quad (5.27)$$

Les indices ℓ, p en conformité avec (5.10), (5.14) couvrent toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $0 \leq p \leq \ell \leq \infty$. Le choix entre soit le cosinus, soit le sinus, dans les formules (5.23) (5.27) se détermine par les règles suivantes :

1) l'intégrale I ($m_0, p, p \pm m_0$) dans les expressions pour $(G_\ell^V) S_1$ $(G_\ell^H) p_1$ a la forme (5.23); dans les formules pour $(G_\ell^V) S_2$, $(G_\ell^H) p_2$ le premier facteur dans l'expression intégrée (5.23) doit être remplacée par $\sin m_0 \Psi$;

2) le second facteur dans l'expression intégrée (5.23) a la forme $\cos p \Psi$ dans le cas où on envisage l'effet des hétérogénéités horizontales de la forme $\alpha_\ell^h(r) P_\ell^h(\cos \theta) \cos p \Psi$; $\beta_\ell^h(r) P_\ell^h(\cos \theta) \cos p \Psi$ et $\sin p \Psi$ où les hétérogénéités ont la forme

$$\alpha_\ell^p(r) P_\ell^p(\cos \theta) \sin p \Psi; \beta_\ell^p(r) P_\ell^p(\cos \theta) \sin p \Psi;$$

3) la forme du troisième facteur en (5.23) se détermine par les règles de sélection (5.17). Si les deux premiers facteurs dans l'expression intégrée (5.23) - sont deux cosinus un ou deux sinus, alors le dernier facteur a la forme $\cos(p \pm 2) \Psi$; si un des facteurs est le cosinus, et l'autre le sinus alors le facteur suivant a la forme $\sin(p \pm m_0) \Psi$

4) en (5.27) les fonctions $Y_{\ell, \ell \pm 2}^{p \pm m_0}$ se déterminent par

$$Y_{\ell, \ell \pm 2}^{p \pm m_0}(\theta, \Psi) = P_{\ell, \ell \pm 2}^{p \pm m_0}(\cos \theta) \cos(p \pm m_0) \Psi$$

dans le cas où le troisième facteur dans l'expression intégrée est $\cos(p \pm m_0) \Psi$ et

$$Y_{\ell, \ell \pm 2}^{p \pm m_0}(\theta, \Psi) = P_{\ell, \ell \pm 2}^{p \pm m_0}(\cos \theta) \sin(p \pm m_0) \Psi,$$

quand le troisième facteur dans l'expression intégrée (5.23) est $\sin(p \pm m_0)\Psi$

2. Enfin, les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont des cas particuliers sur lesquels il faut s'arrêter en détail.

Des solutions auxiliaires (u_j, R_j) décrites par la fonction sphérique d'ordre zéro sont nécessaires pour trouver l'aplatissement dû à la marée de toutes sortes de la Terre sphériquement non symétrique et des variations de la force de pesanteur qui y sont liées. L'aplatissement divers (la variation du rayon moyen et du volume de la Terre) ne se produit que dans le cas où les décompositions des hétérogénéités horizontales de la Terre renferment des termes du second ordre. Ainsi, les termes comprenant $Y_2^0(\theta, \varphi)$ (tenant compte de l'aplatissement équatorial des surfaces des valeurs égales des paramètres) n'exercent une influence que sur les variations à longue période du rayon moyen de la Terre, les termes en $Y_2^1(\theta, \varphi)$ uniquement sur les variations diurnes et les termes en $Y_2^2(\theta, \varphi)$ uniquement pour les variations semi diurnes.

L'équation de Poisson (1.62 b) pour $n = 0$ prend la forme

$$(r^2 (R_j)')' = 4\pi G (\rho r^2 H_j)'$$

et s'intègre de façon analytique :

$$(R_j)' = 4\pi G \rho H_j + \frac{c}{r^2} \quad (5.27)$$

De la condition de régularité de la solution au centre de la sphère il résulte que $c = 0$.

Dans le système des variables (1.68 - 1.69) la condition (5.27) prend la forme

$$f_4(r) = 0 \text{ pour } n = 0 \quad (5.28)$$

Tenant compte de l'absence de déplacements tangentiels pour $n = 0$, nous obtiendrons le système d'équations du second ordre :

$$\begin{aligned} (f_1^j)' &= a_{11} f_1^j + a_{16} f_6^j; \\ (f_6^j)' &= a_{61} f_1^j + a_{66} f_6^j, \end{aligned} \quad (5.29)$$

où

$$\begin{aligned} -a_{11} = a_{66} &= \frac{2\lambda}{r(\lambda + 2\mu)}; \quad a_{16} = \frac{1}{r^2(\lambda + 2\mu)}; \\ a_{61} &= 4\rho r V' + 4\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned}$$

En normalisant la solution par la condition

$$f_6^j(1) = 1 \quad (5.30)$$

nous obtiendrons l'intégrale correspondant à la première ligne (1.112) ($j = 1$). L'intégrale correspondant à $j = 2$, perd son sens à cause de (5.28). C'est pourquoi le rapport (1.113) pour $n = 0$ ne détermine que la composante radiale des déplacements H_0 et ne détermine pas R_0 . Tenant compte de la condition de conservation de la masse totale de la Terre lors de cette déformation de marées il est facile d'obtenir la condition manquante :

$$R_0^0(1) = 0$$

Les harmoniques correspondant à $n = 1$ décrivent un transfert parallèle de la surface équipotentielle et de la surface de la Terre sous l'effet des forces des marées. Les valeurs absolues des déplacements des deux surfaces dépendent du choix du système de coordonnées et ne présentent pas d'intérêt pour l'approximation statique. Quant aux déplacements relatifs (déplacement de la surface équipotentielle par rapport à la surface de la Terre) ils exercent une action aussi bien sur le gravimètre que sur le clinomètre et c'est pourquoi il faut en tenir compte. Les harmoniques du second ordre n'apparaissent que dans le cas où les hétérogénéités horizontales renferment les termes $Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0, Y_3^1$ (dans le cas des marées zonales), $Y_1^1, Y_1^2, Y_3^0, Y_3^1, Y_3^2$ (pour les marées diurnes) et $Y_1^1, Y_2^1, Y_3^2, Y_3^3$ (pour les ondes semi diurnes)

Pour $n = 1$ les valeurs des fonctions entrant dans les intégrales (u_j, R_j) sont liées par une relation analytique dont le sens consiste en ce que la somme de toutes les forces élastiques et gravitationnelles agissant sur le milieu renfermé dans une sphère de rayon quelconque est égale à zéro. A la surface de la Terre cette relation a la forme

$$2 f_5(1) + f_6(1) + f_4(1) = 0 \quad (5.31a)$$

Il est facile de démontrer cette relation analytiquement si on exprime à l'aide de l'équation de Poisson et de la formule de Green les forces gravitationnelles agissant sur les masses à l'intérieur de la sphère par le potentiel sur la surface de la sphère et si on nivèle le résultat à la valeur des forces élastiques agissant sur la surface. Lors de l'intégration numérique des équations de l'équilibre élastique de la Terre cette relation est satisfaite automatiquement et sert pour le contrôle de l'intégration numérique.

Les intégrales (\bar{u}_j, R_j) données par les conditions aux limites (1.112) ne satisfont pas à la relation (5.31a) c'est pourquoi pour $n = 1$ les conditions (1.112) doivent être redéterminées. Si on utilise un système de coordonnées dont le centre correspond avec le centre de masse de la Terre, alors la décomposition du potentiel R_j en fonctions sphériques ne renfermera pas d'harmoniques du premier ordre et nous obtiendrons la valeur aux limites

complémentaire analogue à celle qui est utilisée pour les coefficients de charge

$$f_{j_3} (1) = 1 \quad (5.31b)$$

En l'absence de tensions tangentielles à la surface ($f_5 (I) = 0$) les conditions (5.31) ne déterminent qu'une, et non deux, comme pour $n \geq 2$, solution auxiliaire (\bar{u}_j, R_j). Après avoir substitué en (1.106) l'intégrale déterminée par les conditions aux limites on peut constater que pour $n = 1$ les coefficients H_1^m , et R_1^m , ne se déterminent pas séparément. On ne détermine que la combinaison linéaire

$$H_1^m - R_1^m$$

Cette valeur entre en (5.20) et détermine la variation de marée de l'accélération de la pesanteur et les inclinaisons décrites par les harmoniques du premier ordre.

En utilisant (5.20) et l'expression pour Δg pour le modèle sphériquement symétrique

$$\Delta g_0 = \frac{2V_0}{a} \delta P_{n_0}^{m_0} (\cos \theta) \cos(\sigma t - m_0 \varphi)$$

où $\delta = 1 + h_2 - 3/2 k_2 = 1,1582$ pour le modèle de Terre N° 508 de Gilbert et Dziewonski il est facile d'obtenir les valeurs relatives des corrections aux amplitudes $\delta_1(\theta, \varphi)$ et des déphasages $\varphi(\theta, \varphi)$ en radian des variations de marées de la pesanteur par rapport à la phase Δg_0 :

$$\delta_1(\theta, \varphi) = \frac{1}{\rho_2^{m_0}(\cos \theta)} \sum_{e,p} (G_e^p)_1(\theta, \varphi) \cos m_0 \varphi + (G_e^p)_2(\theta, \varphi) \sin m_0 \varphi, \quad (5.32a)$$

$$\varphi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\delta \rho_2^{m_0}(\cos \theta)} \sum_{e,p} (G_e^p)_2(\theta, \varphi) \cos m_0 \varphi - (G_e^p)_1(\theta, \varphi) \sin m_0 \varphi$$

Dans le cas des ondes zonales, nous obtiendrons ($m_0 = 0$):

$$\delta_1(\theta, \varphi) = \frac{2}{3 \cos^2 \theta - 1} \sum_{e,p} (G_e^p)_1(\theta, \varphi), \quad \varphi(\theta, \varphi) = 0. \quad (5.32b)$$

§ 2. Résultats des calculs de modèles sur les possibilités d'étude des hétérogénéités horizontales de grande échelle d'après les données de marées.

Les relations (5.21 à 5.26) déterminent complètement les variations de marées à la surface de la planète avec des répartitions sphériques faiblement non symétriques des modules élastiques. Le calcul numérique pour les modèles concrets des répartitions $\delta\lambda(r, \theta, \varphi)$, $\delta\mu(r, \theta, \varphi)$ se ramène au calcul des fonctions $y_{\ell}(r)$, $(Z_k)_{\ell}(r)$ entrant en (5.22) (5.25) ne dépendant que de la structure intérieure du modèle non perturbé (sphériquement symétrique) de la Terre, aux quadratures (5.22), (5.25) et au calcul des sommes (5.20). La série (5.20) se ramène à une somme finie dans les cas où les décompositions $\delta\lambda$, $\delta\mu$ (5.4 - 5.5) renferment le nombre fini de termes.

Le calcul $y_{\ell}(r)$, $(Z_k)_{\ell}(r)$ d'après les formules (5.24) (5.26) se ramène à l'intégration numérique des équations (1.67), (5.29) dans l'enveloppe et (1.74) dans le noyau aux conditions aux limites (1.112) pour $n \geq 2$, (5.30) pour $n = 0$ et (5.31) pour $n = 1$.

Nous donnons dans la table 5.1 les valeurs à la surface des fonctions f_i pour $0 \leq n \leq 47$ calculées pour le modèle N° 508 de Gilbert et Dziewonski [70]. Nous donnons pour l'ensemble dans la table 5.1 les valeurs de f_i déterminées par les conditions aux limites.

$$f_5(1) = 1, \quad f_4(1) = f_6(1) = 0$$

ce qui correspond à la présence de tensions tangentielles à la surface. Parmi les neuf valeurs de f_i nous ne donnons dans la table 5.1 que six valeurs linéairement indépendantes puisque les trois autres sont liées par leurs relations (1.82).

Les valeurs $(f_i)_n(I)$ déterminées par les conditions aux limites (5.30), (5.31) sont les suivantes

n	f_1	f_2	f_3
0	0,403		0
1	- 0,291	0.2115	1

Nous représentons sur la figure 5.1 les graphiques des fonctions $y_n(r)$ et $(Z_k)_n(r)$ pour $0 \leq n \leq 47$ déterminées par les formules (5.24), (5.26), (5.11) et (5.15).

Table 5.1.

Valeurs $(f_i)_n^{(1)}$ pour le modèle de Terre n° 508 de Gilbert et Dziewonski.

n	$f_1^{(2)}$	$f_2^{(2)}$	$f_3^{(2)}$	$f_2^{(3)}$	$f_1^{(1)}$	$f_2^{(1)}$
2	0,3643	0,3057	0,7796	6,990	0,9696	0,2185
3	0,1247	0,0778	0,4684	10,55	0,5848	-0,2903
4	0,0591	0,0697	0,3473	14,46	0,4189	-0,3322
5	0,0356	0,0708	0,2795	18,36	0,3400	-0,3186
6	0,0250	0,0672	0,2347	22,39	0,2967	-0,3198
7	0,0192	0,0617	0,2026	26,56	0,2692	-0,3365
8	0,01551	0,0560	0,1783	30,87	0,2495	-0,3609
9	0,01294	0,0507	0,1592	35,28	0,2342	-0,3897
10	0,01105	0,0460	0,1439	39,78	0,2218	-0,4205
11	0,00960	0,0417	0,1312	44,36	0,2112	-0,4525
12	0,00845	0,0379	0,1206	49,02	0,2021	-0,4852
14	0,00675	0,0314	0,1039	58,60	0,1869	-0,552
17	0,00508	0,0238	0,0860	73,66	0,1691	-0,654
21	0,00371	0,0164	0,0699	95,10	0,1510	-0,786
26	0,00266	0,0103	0,0567	124,1	0,1333	-0,932
32	0,00190	0,0060	0,0462	161,8	0,1168	-1,074
39	0,00135	0,0032	0,0380	209,6	0,1018	-1,200
47	0,00096	0,0016	0,0316	268,9	0,0886	-1,303

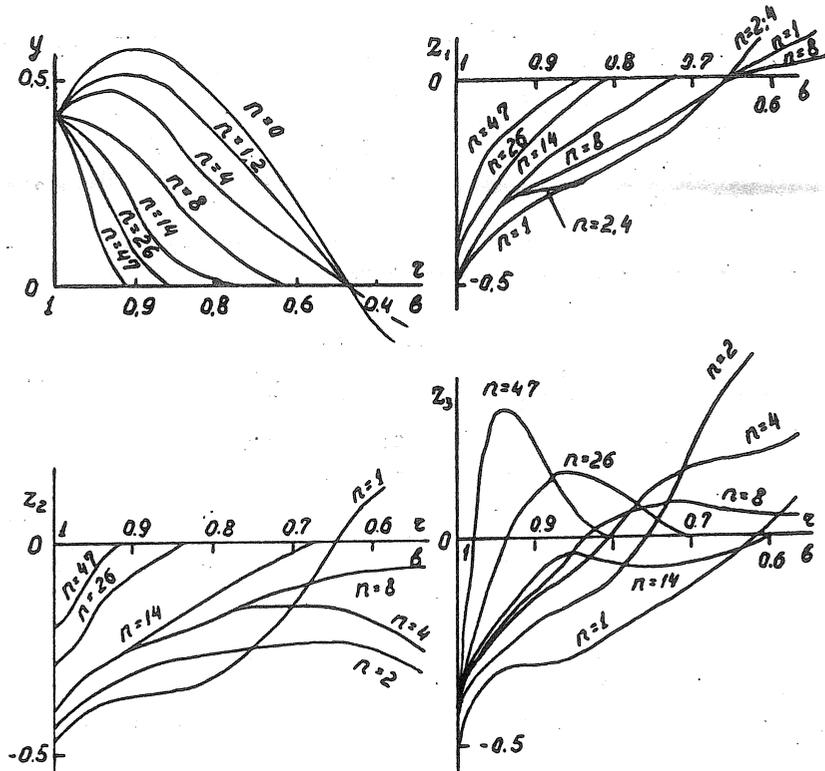


Figure 5.1.

Les graphiques des fonctions $y_n(r)$, $(Z_1)_n(r)$, $(Z_2)_n(r)$, $(Z_3)_n(r)$ entrant en (5.22), (5.25) sont calculées pour le modèle de Terre n° 508 de Gilbert et Dziewonski.

Il convient de noter que les valeurs de toutes les fonctions pondérées représentées sur la figure 5.1 à la surface et près de la surface de la Terre dépendent très faiblement de l'ordre de la fonction sphérique n . Ainsi les valeurs y_n varient à la surface régulièrement de 0,394 à 0,416 pour une variation de n de 0 à 47; les valeurs $(Z_1)_n$, $(Z_2)_n$, $(Z_3)_n$ pour $1 \leq n \leq 47$ se trouvent respectivement dans les intervalles $0,412 \leq Z_1 \leq -0,408$; $-0,411 \leq Z_2 \leq -0,321$; $-0,682 \leq Z_3 \leq -0,415$. Par suite de cette circonstance l'effet des hétérogénéités horizontales de l'écorce et du manteau supérieur dépend faiblement des profondeurs $\ell \approx a/n_{\max}$, de n et des échelles horizontales correspondantes des hétérogénéités. En même temps, les valeurs des fonctions y_n , $(Z_1)_n$, $(Z_2)_n$, $(Z_3)_n$ disparaissent brusquement aux grandes profondeurs avec la croissance de n . C'est pourquoi, aux grandes profondeurs d'une couche non homogène, l'influence des hétérogénéités d'étendue horizontale est sensiblement plus grande que l'influence des hétérogénéités locales. La valeur absolue des fonctions y_e près de la surface est du même ordre que les valeurs des fonctions Z_1 , Z_2 , Z_3 . Pour cette raison les effets des hétérogénéités horizontales des répartitions V_p et V_s sont à peu près du même ordre.

Pour évaluer l'influence des hétérogénéités d'échelles les plus importantes des modules élastiques sur les valeurs $\delta(\theta, \varphi)$ et $\lambda(\theta, \varphi)$ nous examinerons les modèles les plus simples qui tiennent compte des différences systématiques dans les vitesses V_p et V_s sous les continents et l'océan. Pour tenir compte des configurations des continents et des océans nous utilisons la décomposition de la fonction océanique

$$\Psi = \begin{cases} 1 & \text{sur les continents} \\ 0 & \text{sur la surface des océans} \end{cases}$$

en harmoniques sphériques jusqu'au huitième ordre (81 termes de décomposition) provenant du travail [107]). Pour évaluer l'influence des hétérogénéités horizontales V_p et V_s dans le manteau supérieur et inférieur nous examinerons trois modèles :

1. Sous les océans les vitesses des ondes longitudinales V_p dans la couche depuis la surface de la Terre jusqu'à la profondeur $h = 300$ km sont 5% plus petites que sous les continents; les répartitions de la densité et des vitesses V_s sont sphériquement symétriques.

2. V_s sous l'océan, dans la couche jusqu'à $h = 300$ km, est 5% plus petit que V_s sous les continents; les répartitions V_p et ρ sont sphériquement symétriques.

3. Enfin, pour évaluer l'effet des hétérogénéités de grande échelle du manteau inférieur nous examinerons le cas où V_p sous l'océan, et dans toute l'épaisseur du manteau, est de 5% plus petit que sous les continents; les répartitions V_s et ρ sont sphériquement symétriques.

Nous donnons sur les fig. 5.2 à 5.4 les isolignes des corrections au facteur δ en pourcents et des phases en degré pour les modèles 1 à 3.

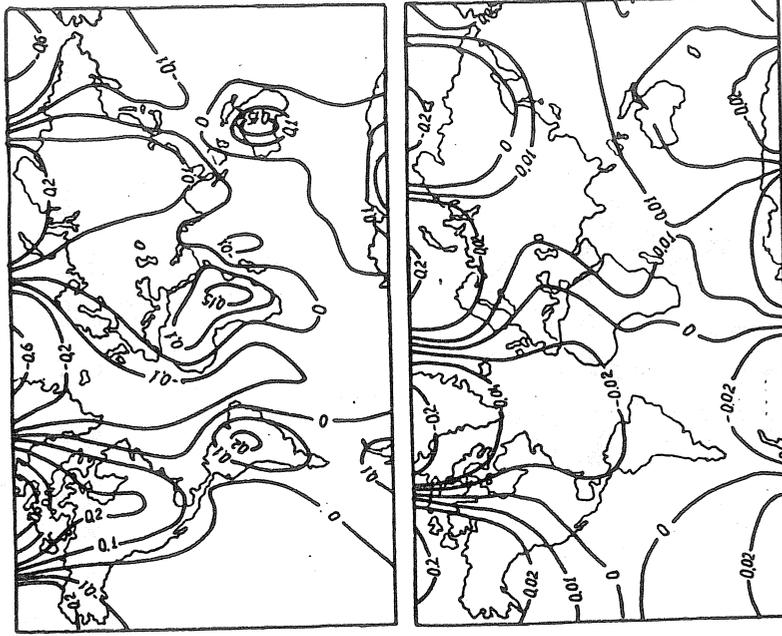


Fig. 5.3. Lignes d'égales valeurs des corrections au facteur δ en pourcents (a) et des phases en degrés (b) pour le modèle 2.

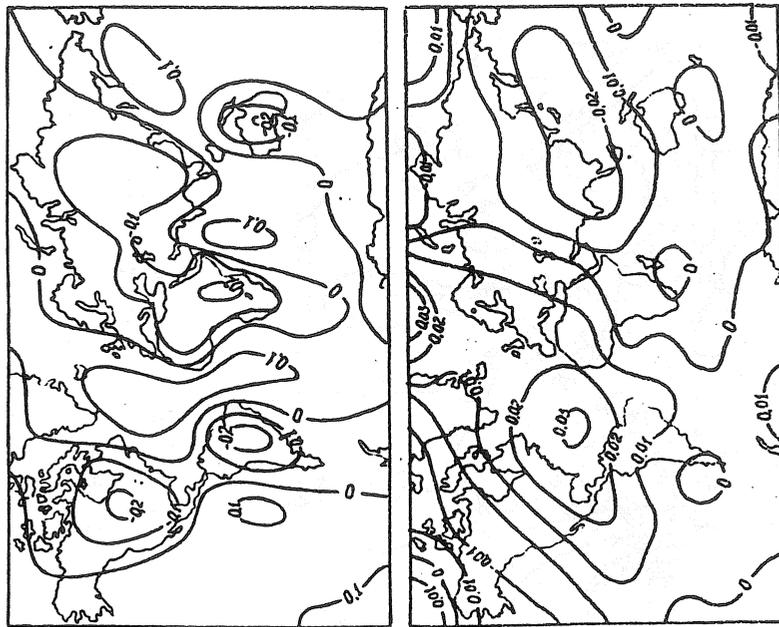


Fig. 5.2. Lignes d'égales valeurs des corrections au facteur δ en pourcents (a) et des corrections aux phases en degrés (b) pour le modèle 1.

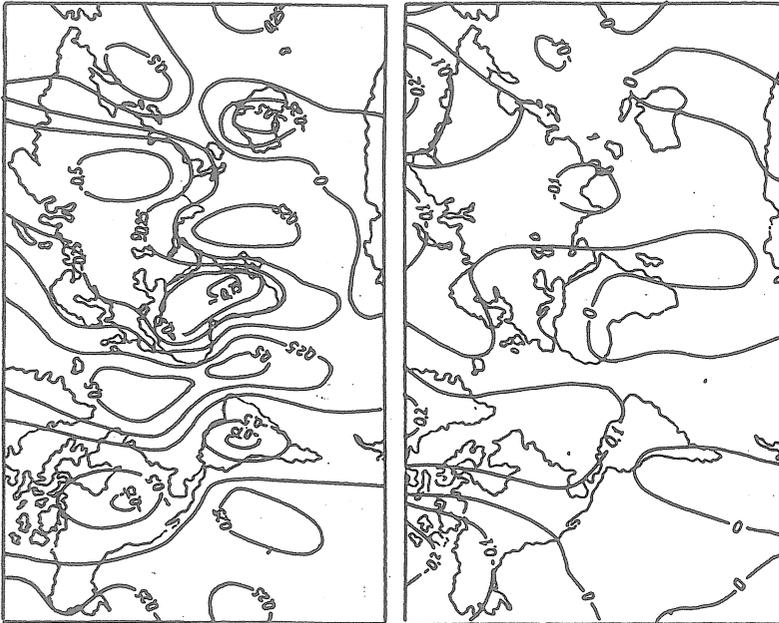


Fig. 5.4. Lignes d'égales valeurs des corrections au facteur en pourcents (a) et des phases en degrés (b) pour le modèle 3.

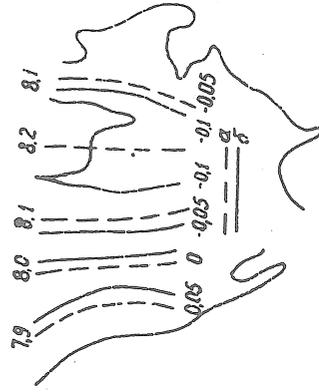


Fig. 5.5. Vitesse prise pour les ondes Vp dans le manteau jusqu'à la profondeur $h = 330$ km en km/s (a) et isolignes des corrections au facteur δ en pourcentages (b) sur le territoire de l'Amérique du Nord.

Puisque les fonctions y_n , $(Z_1)_n$, $(Z_2)_n$, $(Z_3)_n$ pour $n \leq 10$ dans l'intervalle $h = (0, 300 \text{ km})$ varient faiblement, les résultats donnés pour les modèles 1, 2 restent presque invariables dans les cas où V_p , V_s , h varient de façon arbitraire près de la surface mais de telle sorte que les produits $(\delta V_p/V_p)h$, $(\delta V_s/V_s)h$ restent constants. Pour calculer les variations arbitraires V_p , V_s , h près de la surface il faut tenir compte que la valeur de l'effet dépend linéairement (au premier ordre de la théorie des perturbations) des produits $(\delta V_p/V_p)h$, $(\delta V_s/V_s)h$.

4. A titre d'exemple des hétérogénéités ayant des dimensions horizontales relativement faibles, nous donnons un schéma quelque peu grossier de la répartition des vitesses V_p sur le territoire de l'Amérique du nord (Herrin et Tagart [108]). Sur la figure 5.5. sont données les vitesses adoptées par nous dans le manteau supérieur pour les ondes longitudinales (jusqu'à la profondeur $\sim 300 \text{ km}$) et les corrections correspondantes au facteur gravimétrique δ .

L'analyse des figures 5.2 à 5.5 permet de tirer les conclusions suivantes :

1. Aussi bien pour les valeurs h ($h = 300 \text{ km}$) relativement faibles que pour les grandes valeurs ($h = 2.900 \text{ km}$) les isolignes des corrections au facteur gravimétrique δ répètent nettement les tracés des hétérogénéités horizontales (pour les fig. 5.2 à 5.4 - les tracés des continents). Simultanément les isolignes des phases n'ont rien de commun avec les tracés des hétérogénéités horizontales.

2. La comparaison des figures 5.2, 5.3, 5.5 montre que l'effet des hétérogénéités horizontales du manteau supérieur ($h = 330 \text{ km}$) dépend faiblement des échelles horizontales des hétérogénéités. On constate sur la fig. 5.2 que le saut de $\delta V_p/V_p$ de 5% conduit à une diminution du facteur δ d'environ 0,4% dans les zones avec des valeurs exagérées de V_p ; nous constatons par la figure 5.3 que le saut de 5% de V_s conduit à une augmentation de δ d'environ 0,3% dans les zones où V_s est plus faible. Une perturbation sensible de cette règle ne s'observe que dans les régions polaires où les amplitudes des marées semi diurnes sont faibles. Pour les ondes diurnes les anomalies des facteurs de marées croissent de façon illimitée même à l'approche de l'équateur où les amplitudes des ondes diurnes sont faibles.

3. Avec l'augmentation de profondeur des hétérogénéités de 300 à 2.900 km, l'influence des hétérogénéités horizontales de grande échelle augmente d'environ 4 fois aussi bien sur les amplitudes que sur les phases des marées.

Ainsi avec une précision de mesure du facteur δ d'environ 0,2% les données de marées permettent de mettre à jour les hétérogénéités horizontales dans les répartitions V_p , V_s de moins de 2,5% dans le manteau supérieure ($h = 300 \text{ km}$) et pas moins de 0,6% dans le manteau inférieur. La précision actuelle de la mesure des

phases des marées ($\sim 0,01 - 0,2$) permet de ne mettre à jour que les grandes hétérogénéités horizontales (comme celles données par le modèle 3). La comparaison des amplitudes des marées semi diurnes données à la figure 5.5 en Amérique du Nord avec les valeurs δ [109] mesurées et corrigées de la marée océanique présente également un intérêt. Les observations de marées gravimétriques en Amérique du Nord révèlent une très grande croissance (environ 8%) du facteur δ de l'est vers ouest des E.U. Pour le modèle 4 les valeurs de δ doivent également croître vers l'ouest des E.U. mais la valeur des variations de δ n'atteint que 0,1 à 0,15%. On ne peut pas expliquer une si grande différence par l'insuffisance des données sur les hétérogénéités horizontales du manteau en Amérique du Nord (l'hétérogénéité de la limite inférieure des profondeurs jusqu'auxquelles se propagent les hétérogénéités horizontales de la vitesse V_p , par l'absence de discontinuités de vitesses pour les ondes transversales, par les anomalies de la densité du milieu). C'est pourquoi le problème de la cause des grandes anomalies du facteur δ en Amérique du Nord reste ouvert.

Bien entendu, les modèles d'hétérogénéités horizontales du manteau 1 à 3 utilisés plus haut sont très profonds et il est douteux qu'ils puissent décrire les hétérogénéités à grande échelle de la Terre réelle même dans leurs grandes lignes. Cependant ils permettent d'évaluer la précision minimale des mesures nécessaire pour découvrir les hétérogénéités horizontales du manteau à partir des données des marées. Les relations (5.21 à 5.26) et les valeurs numériques des valeurs qui y entrent, données à la figure 5.1 se ramènent au calcul des marées pour le modèle arbitraire sphérique faiblement non symétrique aux quadratures et à la sommation de séries de fonctions sphériques de la forme (5.21)

§ 3. Influence des hétérogénéités locales des modules élastiques sur les inclinaisons de marées et les déformations

Comme on sait les hétérogénéités des modules élastiques, le relief local et la géométrie de la cavité (mines) dans la proximité immédiate du site des observations exercent une grande influence sur les amplitudes et les phases des inclinaisons de marées. D'une part cela augmente sensiblement les erreurs de détermination des facteurs clinométriques et déformographiques et limite les possibilités d'étudier les hétérogénéités à grande échelle et la rhéologie du manteau d'après les données clinométriques et déformographiques; d'autre part l'étude des hétérogénéités locales (par exemple des fractures tectoniques) à proximité immédiate du point des observations est très efficace. Dans le travail [110] les estimations de l'influence des hétérogénéités locales des modules élastiques sur les inclinaisons de marées et les déformations ont été faites par intégration numérique directe des équations en produits partiels par la méthode des différences finies. On a attiré l'attention sur le fait que les variations temporelles de V_p , V_s qui s'observent parfois dans la période de préparation des tremblements de Terre [111] doivent

conduire à des variations importantes des paramètres de marées; de sorte que les observations de marées peuvent être utilisées dans certains cas aussi pour étudier les variations des modules élastiques dans le temps.

Pour obtenir des estimations analytiques simples de l'influence des hétérogénéités locales des modules élastiques sur les paramètres de marée nous nous limiterons au modèle le plus simple d'un demi espace non gravitant presque homogène avec pour modules élastiques

$$\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda(x, y, z); \quad \mu = \mu_0 + \delta\mu(x, y, z) \quad (5.32)$$

pour

$$\delta\lambda \ll \lambda_0, \quad \delta\mu \ll \mu_0.$$

Dans cette approximation les équations (1.62) se ramènent aux équations habituelles de l'équilibre élastique

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{u} = 0, \quad (5.33)$$

mais déterminées par les conditions aux limites (1.108) de la solution des équations (5.33) de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}^{(1)}}{\chi_0} = & -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \left[\frac{z}{\mu R} + \frac{1}{\lambda + \mu} \ln(z + R) \right] + \\ & + \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)R} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dans le cas de la force χ_0 dirigée suivant la normale à la surface du demi espace et

$$\begin{aligned} 4\pi\mu \frac{\vec{u}^{(2)}}{\chi_0} = & \text{grad} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{x - x_0}{R + z} - \frac{x - x_0}{R} \right] - \\ & - 2 \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x - x_0}{R + z} \right) \vec{e}_z + \frac{2}{R} \vec{e}_x \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dans le cas de la force χ_0 appliquée dans la direction \vec{e}_x . Ici x, y, z est le système de coordonnées cartésiennes, les axes x et y se trouvent dans le plan du demi espace, l'axe z est orienté suivant la profondeur du demi espace; x_0, y_0 sont les coordonnées du point de la surface auquel est appliquée la force χ_0 ; e_x et e_z sont les vecteurs orientés dans les directions des axes x et z respectivement, $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2$.

La substitution de (5.34), (5.35) en (1.107) (1.109) détermine complètement les trois composantes des déplacements de la surface pour les répartitions arbitraires $\delta\lambda(x, y, z), \delta\mu(x, y, z)$.

Dans le cas le plus simple d'incorporations de point faibles ou forts des variations $\delta\lambda$ et $\delta\mu$ ont la forme δ des fonctions. Dans ce cas les intégrales (1.107) peuvent être remplacées par les valeurs des expressions sous intégrales au point où se trouve l'incorporation. Des estimations semblables pour les déformations

provoquées par les mouvements tectoniques de l'écorce terrestre ont été faites dans le travail [112].

Faisons une estimation de l'influence de l'hétérogénéité des modules élastiques sur les amplitudes et les phases des inclinaisons de marées et des déformations pour les modèles les plus simples des répartitions $\delta\lambda(x, y, z)$, $\delta\mu(x, y, z)$.

1. Nous commencerons par l'examen du cas à deux dimensions, où les hétérogénéités sont incluses dans le parallélépipède rectangle

$$\tau : x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2; z_1 \leq z \leq z_2$$

de côtés

$$l_x = x_2 - x_1; l_y = y_2 - y_1; l_z = z_2 - z_1$$

ainsi

$$l_y \gg l_x \quad l_y \gg l_z \quad (5.36)$$

et les variations $\delta\lambda$, $\delta\mu$ ont à l'intérieur du parallélépipède une valeur constante. Cet exemple correspond au modèle le plus simple s'étendant dans la direction de l'axe y de la fracture tectonique.

En supposant que la longueur d'onde de marée non perturbée $l_x \gg l_y$ et tenant compte de (5.36) nous trouverons (voir annexe 3) :

$$\frac{\partial \delta u_z(x_0)}{\partial x_0} = A \ell_n \tau^2 \left\| + B \frac{(x-x_0)^2}{\tau^2} \right\|; \quad (5.37)$$

$$\delta e_{xx}(x_0) = C \operatorname{arctg} \frac{z}{x-x_0} \left\| + B \frac{(x-x_0)z}{\tau^2} \right\|,$$

où

$$\tau^2 = (x-x_0)^2 + z^2;$$

$$A = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \left\{ \operatorname{div} u^\circ (\mu\delta\lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu} \delta\mu - \lambda\delta\mu) - \lambda\delta\mu e_{xx}^\circ \right\};$$

$$B = -\frac{\delta\mu}{\mu\pi} \left\{ e_{xx}^\circ + \frac{\lambda}{2\mu} \operatorname{div} u^\circ \right\};$$

$$C = \frac{1}{\pi(\lambda+\mu)} \left\{ \operatorname{div} u^\circ \left(\frac{\lambda\delta\mu}{2\mu} - \delta\lambda \right) - \delta\mu e_{xx}^\circ \right\};$$

$$e_{xx}^\circ = \partial u_x^\circ / \partial x_0;$$

Le symbole II représente le résultat de la substitution double de x_1 à x_2 suivant x et de z_1 à z_2 suivant z . Ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} \ln z^2 // &= \ln((x_2 - x_0)^2 + z_2^2) + \ln((x_1 - x_0)^2 + z_1^2) - \\ &- \ln((x_1 - x_0)^2 + z_2^2) - \ln((x_2 - x_0)^2 + z_1^2) \end{aligned}$$

etc ...

2. Les expressions (5.37) sont encore plus simplifiées dans les cas limites d'une couverture semi infinie où $x_2 \rightarrow \infty$ soit $z_2 \rightarrow \infty$. Ainsi, pour $z_1 = 0$ et $z_2 \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \delta u_z}{\partial x}(x) = A \ln \frac{(x_1 - x)^2}{(x_2 - x)^2}; \quad (5.39)$$

$$\delta e_{xx} = c \Pi(x, x_1, x_2),$$

où

$$\Pi(x, x_1, x_2) = \begin{cases} \pi & \text{при } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{при } x < x_1, \text{ и } x > x_2 \end{cases}$$

Pour $z_1 = 0$ et $x_2 \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} = A \ln \frac{(x_1 - x)^2}{(x_1 - x)^2 + z_2^2} + B \frac{z_2^2}{(x_1 - x)^2 + z_2^2}; \quad (5.40)$$

$$-\delta e_{xx} = C \operatorname{arctg} \frac{z_2}{x_1 - x} + B \frac{(x_1 - x) z_2}{(x_1 - x)^2 + z_2^2}.$$

Il convient de noter que l'allure asymptotique de ces expressions est différente : pour $|x| \rightarrow \infty$ les inclinaisons alors que $\delta e_{xx} \sim x^{-1}$.

3. enfin donnons le résultat du calcul de modèle le plus simple du modèle à trois dimensions [31]. Pour $l_x \sim l_y \sim l_z$, $\delta\mu=0$ et $z_2 \rightarrow \infty$ la substitution (5.34) en (1-106) donne

$$\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \Big|_{x=y=0} = \frac{\delta \lambda \operatorname{div} u}{2\pi(\lambda + \mu)} \ln \frac{((z_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^{1/2} + y_2)((z_1^2 + x_1^2 + y_1^2)^{1/2} + y_1)}{((z_1^2 + x_2^2 + y_1^2)^{1/2} + y_1)((z_1^2 + x_1^2 + y_2^2)^{1/2} + y_2)}$$

En particulier on constate par cette expression que pour $z_1 = 0$ (dans le cas du retrait du parallélépipède à la surface) $|\partial \delta u_z / \partial x| \rightarrow \infty$ lors de l'approximation du site d'observations d'une des hauteurs du parallélépipède (pour $x_1 = y_1 = 0$ soit $x_2 = y_2 = 0$ soit $x_2 = y_1 = 0$, soit $x_1 = y_2 = 0$). Cette particularité ne disparaît pas non plus lors de la valeur finale z_2 . Au centre du parallélépipède (pour $x_1 = -x_2$; $y_1 = -y_2$) la perturbation des inclinaisons de marées (5.41) est égale à zéro.

Les valeurs e_{xx}^0 et $\text{div } u^0$ entrant en (5.38), (5.41) se déterminent par les paramètres de l'onde de marée non perturbée. Pour obtenir des valeurs relatives des erreurs pour les inclinaisons de marées et pour les déformations il faut les relier avec les paramètres non perturbés de l'onde de marée. Prenant pour les nombres de Love et de Shida les valeurs numériques

$$h = 0,6 \quad k = 0,3 \quad \ell = 0,08$$

et après avoir écrit le potentiel générateur de marée (2.26) sous la forme

$$V_e = \mathcal{K} g a S$$

où

$$S = P_2^{m_0}(\cos \theta) \cos(\sigma t - m_0 \varphi)$$

g et a sont comme précédemment les constantes habituelles de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et du rayon de la Terre, \mathcal{K} est l'amplitude extensible, nous obtiendrons [3] :

$$\text{div } u^0 = 0,48 \mathcal{K} S \quad (5.43a)$$

$$e_{xx}^0 = \cos^2 \alpha e_{\theta\theta} + \sin^2 \alpha e_{\varphi\varphi} + \sin 2\alpha e_{\theta\varphi} \quad (5.43b)$$

$$\frac{\partial u_x^0}{\partial x} = -0,7 \mathcal{K} \left(\cos \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right); \quad (5.43c)$$

où α est l'angle entre l'axe x et le méridien

$$e_{\theta\theta} = 0,6 \mathcal{K} S + 0,08 \mathcal{K} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}; \quad (5.44)$$

$$e_{\varphi\varphi} = 0,6 \mathcal{K} S + 0,08 \mathcal{K} \left(\cot \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \right);$$

$$e_{\theta\varphi} = \frac{0,08 \mathcal{K}}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial \varphi} - \cot \theta \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)$$

sont les composantes du tenseur des déformations de marée non perturbées en coordonnées sphérique. La substitution de (5.43 - 5.44) en (5.38) (5.41) détermine les corrections aux

amplitudes et aux phases des inclinaisons et des déformations de marées. La relation des corrections aux amplitudes et aux phases dépend essentiellement de α . Ainsi de (5.43b) et (5.44) il s'ensuit que pour $\alpha = 0$ la phase $\partial \delta u_z / \partial x$ correspond toujours avec la phase de $\partial u_z / \partial x$ et la phase δe_{xx} avec la phase de e_{xx}^0 ; pour $\alpha = \pi/2$ la phase de δe_{xx} correspond avec la phase e_{xx} mais la phase de $\partial \delta u_z / \partial x$ est décalée de $\pi/2$. Ainsi, pour $\alpha = \pi/2$ l'influence de la fracture orientée dans la direction de l'axe y apparaît sur les déformations de marées dans la variation des amplitudes et, sur les inclinaisons de marées, dans le décalage des phases. L'aspect caractéristique des dépendances des amplitudes et des phases des inclinaisons de marées et des déformations en fonction de x est donné sur la figure 5.6

Il convient de noter que, à cause des déformations provoquées par les charges provenant de la marée océanique, les axes principaux du tenseur des déformations e_{ik} peuvent tourner d'un certain angle constant α_0 . Cela apparaît dans le fait que tous les graphiques sur la figure 5.6 se déplacent selon l'axe des abscisses d'une même valeur α_0 . L'angle α_0 peut avoir une valeur sensible dans les zones voisines de l'océan.

Enfin, il est facile de déterminer les corrections aux inclinaisons et aux déformations de marées d'après la valeur de δe_{xx} dans les directions est - ouest et nord - sud :

$$\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \delta u_z}{\partial \varphi} = \sin \alpha \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \cos \alpha \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \quad (5.45)$$

$$\delta e_{\varphi\varphi} = \sin^2 \alpha \delta e_{xx}; \quad \delta e_{\theta\theta} = \cos^2 \alpha \delta e_{xx}.$$

En conclusion nous comparerons les expressions analytiques (5.37 à 5.40) obtenues plus haut avec les résultats des calculs numériques directs et des observations. Nous donnons sur les figures 5.7 les graphiques $\partial \delta u_z / \partial x$ et δe_{xx} pour certains modèles les plus simples des hétérogénéités des modules élastiques, déduits de [110] et calculés d'après les formules (5.37 à 5.38).

On constate sur la figure que les relations (5.37 - 5.38) décrivent de façon satisfaisante les anomalies des inclinaisons de marées et des déformations pour des variations assez grandes des modules d'élasticité (pour $\delta V_p / V_p = 0,15$ variation $\delta \lambda \sim -\lambda$

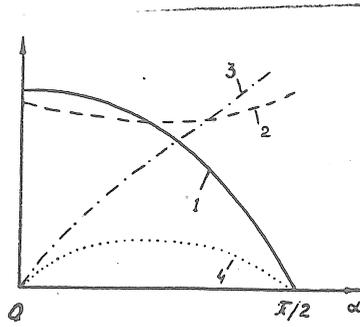


Figure 5.6

Caractère de dépendance des corrections aux amplitudes et aux phases des inclinaisons de marées et des déformations provenant de α .

1. corrections aux amplitudes des inclinaisons;
2. corrections aux amplitudes des déformations;
3. aux phases des inclinaisons;
4. aux phases des déformations.

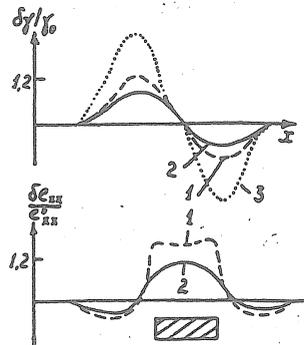


Figure 5.7

Influence des hétérogénéités des modules élastiques sur les amplitudes des inclinaisons et des déformations de marées.

1. calculée dans le travail [110] pour $\delta V_s = 0$, $\delta V_p / V_p = -0,15$, $\lambda = \mu$, $\alpha = 0$ et $\theta = 45^\circ$,
2. calculée d'après les formules (5.37 - 5.38) pour les mêmes valeurs des paramètres;
3. résultats des observations des inclinaisons de marées tirés du travail [113].

Apparemment l'un des résultats les plus sûrs des observations de l'influence d'une fracture tectonique sur les inclinaisons de marées est le résultat du travail [113] dans lequel, sur un espace de longueur de quelques mètres, on a enregistré des variations du facteur δ_{NS} de l'ordre de $0,5\gamma_{NS}$ et des déphasages de $\delta\psi_{EW}$ d'environ 15° ; quant aux anomalies de γ_{EW} et ψ_{NS} elles étaient insignifiantes. Le graphique de dépendance des valeurs observées γ_{NS} en fonction de x est donné également sur la figure 5.7. Cette figure permet de constater que le caractère de dépendances de $\gamma_{NS}(\alpha)$ correspond tout à fait aux courbes théoriques. Des relations (5.37) il résulte que les points de maximum et de minimum de la fonction $\gamma(x)$ correspondent à peu près aux valeurs $x = x_1$, et $x = x_2$. Ainsi la figure 5.7 permet d'estimer l'étendue de la fracture de Kondara dans la direction horizontale.

Nous estimerons plus loin la relation des anomalies des amplitudes et des phases dans les directions nord - sud et est - ouest. En considérant pour la simplicité que les inclinaisons dans les directions est - ouest et nord - sud ont été mesurées à la même distance de la fracture, en supposant $\theta = 52^\circ$, $\delta\mu = 0$, $\alpha = 20^\circ - 35^\circ$ (ce qui correspond à l'angle d'inclinaison de la fracture de Kondara dans la direction est - ouest) nous obtiendrons pour les ondes semi diurnes :

$$\delta\gamma_{NS} = 0; \delta\gamma_{EW} / \delta\gamma_{NS} = - 0,046 \div - 0,014;$$

$$(\delta\gamma_{NS} / \delta\psi_{EW}) \text{ théor.} = \begin{cases} 2,5 \text{ pour } \alpha = 20^\circ \\ 2,0 \text{ pour } \alpha = 25^\circ \\ 1,6 \text{ pour } \alpha = 30^\circ \\ 1,3 \text{ pour } \alpha = 35^\circ \end{cases} \quad (5.46)$$

Des résultats voisins sont obtenus aussi pour $\delta\mu \neq 0$. On constate par les relations (5.46) que les plus grandes perturbations doivent être évidemment ressenties par les composantes γ_{NS} et ψ_{EW} . Supposant en conformité avec [113] $\delta\gamma_{NS} = - 0,35$ et $\delta\psi_{EW} = - 15^\circ = - 0,27$ rad. nous obtiendrons

$$(\delta\gamma_{NS} / \delta\psi_{EW}) = 1.3$$

ce qui concorde également avec (5.46). Ainsi le caractère de la dépendance de $\delta\gamma_{NS}(x)$ et également les relations des amplitudes et des phases des inclinaisons de marées dans les directions est - ouest et nord - sud témoignent effectivement du fait que dans la proximité immédiate du point d'observations à Kondara il y a une fracture tectonique.

§4. Sur l'influence du relief.

En conclusion nous utiliserons la méthode du petit paramètre pour l'estimation de l'influence du relief des régions plates (avec des angles d'inclinaisons assez faibles de la surface sur l'horizon) sur les inclinaisons et la déformation.

En utilisant le système de coordonnées (x, y, z) , les axes X, Y , se trouvant dans le plan de la surface de la Terre et l'axe Z

dirigé verticalement vers le bas, nous écrivons les composantes de la normale extérieure à la surface de la Terre sous la forme

$$n = (n_x(x, y), n_y(x, y), -1)$$

où $|n_x(x, y)| \ll 1, |n_y(x, y)| \ll 1$ sont des petits paramètres. Nous désignerons, comme précédemment par σ_{ik}° et $\sigma_{ik}^{\circ} + \delta\sigma_{ik}$ les composantes des tensions pour les problèmes non perturbé et perturbé (correspondant aux surfaces $z = 0$ et s respectivement), nous écrivons les conditions d'absence de tensions à la surface s . En négligeant les termes de l'ordre n_x^2, n_y^2 et tenant compte que $\sigma_{xz}^{\circ} = \sigma_{yz}^{\circ} = \sigma_{zz}^{\circ} = 0$, nous trouverons :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\circ} n_x + \sigma_{xy}^{\circ} n_y - \delta\sigma_{xz} \Big|_{z=0} &= 0; \\ \sigma_{xy}^{\circ} n_x + \sigma_{yy}^{\circ} n_y - \delta\sigma_{yz} \Big|_{z=0} &= 0; \\ \delta\sigma_{zz} \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Les conditions (5.47) déterminent les valeurs $\delta\sigma_{xz}, \delta\sigma_{yz}$ par lesquelles on détermine à leur tour les variations des composantes des déplacements de marées δu_i correspondant à $\delta\sigma_{ik}$. Pour calculer δu_i nous emploierons la solution du problème de la réaction du demi espace élastique homogène sous l'effet de la force tangentielle (5.35). Le passage du cas d'une force ponctuelle à la répartition continue avec la densité

$$f_x = \sigma_{xx}^{\circ} n_x + \sigma_{xy}^{\circ} n_y;$$

$$f_y = \sigma_{xy}^{\circ} n_x + \sigma_{yy}^{\circ} n_y,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \delta u_i(x, y, z) = & - \frac{1}{\mu} \iint_{\Sigma} [f_x(x_0, y_0) \bar{u}^{(2)}(x-x_0, y-y_0, z) + \\ & + f_y(x_0, y_0) \bar{v}^{(2)}(x-x_0, y-y_0, z)] dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (5.48)$$

où $\bar{v}^{(2)}$ est la solution du problème de la réaction du semi espace homogène sous l'action de la force X_0 appliquée au point $(x_0, y_0, 0)$ et agissant dans la direction de l'axe y . Il est évident que l'expression pour v_i s'obtient par (5.35) par le remplacement des variables x et y :

$$\begin{aligned} 4\pi\mu \frac{v^{(2)}}{X_0} = & \text{grad} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{y-y_0}{R+z} - \frac{y-y_0}{R} \right] - \\ & - \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y-y_0}{R+z} \right) \bar{e}_z + \frac{2}{R} \bar{e}_y. \end{aligned} \quad (5.49)$$

La substitution de (5.35), (5.49) en (5.48) donne les expressions suivantes pour les déplacements de la surface $z = 0$:

$$\delta u_x|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[f_x(x_0, y_0) \left(\frac{\lambda+2\mu}{R} + \frac{\lambda(x-x_0)^2}{R^3} \right) + f_y(x_0, y_0) \frac{\lambda(x-x_0)(y-y_0)}{R^3} \right] dx_0 dy_0; \quad (5.50)$$

$$\delta u_y|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[f_x(x_0, y_0) \frac{\lambda(x-x_0)(y-y_0)}{R^3} + f_y(x_0, y_0) \left(\frac{\lambda+2\mu}{R} + \frac{\lambda(y-y_0)^2}{R^3} \right) \right] dx_0 dy_0;$$

$$\delta u_z|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[f_x(x_0, y_0) \frac{x-x_0}{R^2} + f_y(x_0, y_0) \frac{y-y_0}{R^2} \right] dx_0 dy_0.$$

Les produits des intégrales (5.50) suivant les paramètres x, y déterminent complètement les inclinaisons $\partial\delta u_z/\partial x, \partial\delta u_z/\partial y$ et les composantes des déformations $\delta\epsilon_{xx}, \delta\epsilon_{yy}$ pour $z = 0$. Puisque les phases des oscillations f_x, f_y ne coïncident en général pas avec les phases u_x^0, u_y^0, u_z^0 , les relations (5.50) déterminent non seulement la variation des amplitudes des déplacements de marées, des inclinaisons et des déformations mais aussi des déphasages.

Dans le cas le plus simple d'une surface s de la forme $z = z(x)$ la composante suivant la normale extérieure $n_y = 0$, et $n_x = n_x(x)$ et les expressions (5.48) sont intégrées par rapport à y :

$$\delta u_i(x, y, z) = -\frac{1}{\chi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sigma_{xx}^0 n_x \tilde{u}^{(2)}(x-x_0, z) + \sigma_{xy}^0 n_x \tilde{v}^{(2)}(x-x_0, z) \right] dx_0 \quad (5.51)$$

où

$$\tilde{u}^{(2)}(x-x_0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^{(2)}(x-x_0, y-y_0, z) dy_0; \quad (5.52)$$

$$\tilde{v}^{(2)}(x-x_0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} v^{(2)}(x-x_0, y-y_0, z) dy_0.$$

En intégrant les valeurs $\partial\tilde{u}_x^{(2)}/\partial x_0, \partial\tilde{u}_z^{(2)}/\partial x, \tilde{\epsilon}_{xz}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\partial\tilde{u}_z^{(2)}/\partial x + \partial\tilde{u}_x^{(2)}/\partial z \right]$

données dans l'annexe 3 il est facile de constater que les composantes $u_i^{(2)}(x-x_0, z)$ ont la forme :

$$\tilde{u}_x^{(2)} = \frac{X_0}{2\pi\mu} \left[\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \ln r + \frac{z^2}{r^2} \right] + \text{const}; \quad (5.53)$$

$$\tilde{u}_z^{(2)} = \frac{X_0}{2\pi\mu} \left[-\frac{(x-x_0)z}{r^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{z} \right] + \text{const.}$$

Après avoir substitué ensuite (5.49) en (5.52) nous trouverons

$$\tilde{v}_x^{(2)} = \tilde{v}_z^{(2)} = 0;$$

$$\int_{y_1}^{y_2} v^{(2)}(x-x_0, y-y_0, z) dy = \frac{X_0}{2\pi\mu} \ln(y_0-y+R)$$

En faisant tendre dans cette expression y_1 vers $-\infty$ et y_2 vers $+\infty$ et en développant $\ln(y+R)$ suivant le petit paramètre r/y , nous obtiendrons :

$$R = \sqrt{(y_0-y)^2 + z^2} \approx |y_0-y| + \frac{z^2}{2y_0};$$

$$\ln(y_0-y+R) \Big|_{y_1}^{y_2} \approx \ln(2y_2 - 2y_0) -$$

$$- \ln\left(\frac{z^2}{2y_0 \cdot y_1}\right) = - \ln z^2 + C,$$

où

$$C = \ln \frac{y_2 - y_0}{y_0 - y_1}$$

constante ne dépendant pas de x, z .

Ainsi

$$\tilde{v}_y^{(2)} = -\frac{X_0}{2\pi\mu} \ln z^2 + C. \quad (5.54)$$

La substitution de (5.53) et (5.54) en (5.51) donne :

$$\delta u_x(x, z) = \frac{\sigma_{xx}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} n_x(x_0) \left(\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} \ln((x-x_0)^2 + z^2) + \frac{z^2}{(x-x_0)^2 + z^2} \right) dx_0. \quad (5.55a)$$

$$\delta u_y(x, z) = \frac{\sigma_{xy}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} n_x(x_0) \ln((x-x_0)^2 + z^2) dx_0; \quad (5.55b)$$

$$\delta u_z(x, z) = -\frac{\sigma_{xz}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} n_x(x_0) \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{z} + \frac{z(x-x_0)}{z^2} \right) dx_0. \quad (5.55c)$$

En utilisant (5.55c) et en tenant compte que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{x-x_0}{z} = \pi \delta(x-x_0), \quad (5.56)$$

où $\delta(x-x_0) - \delta$ est la fonction de Dirac nous obtiendrons pour les inclinaisons

$$\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} = - \frac{\sigma_{xx}^0}{2(\lambda + \mu)} n_x(x) \quad (5.57)$$

De cette relation il s'ensuit que la correction due au relief aux inclinaisons de marées au point x , dépend uniquement de la valeur n_x au même point x c'est à dire de l'angle d'inclinaison de l'élément infiniment petit de la surface de la Terre sur l'horizon au point des observations. En fait, cependant puisque les observations clinométriques se font toujours dans des galeries de mine à des profondeurs z_0 de l'ordre de quelques dizaines de mètres, l'expression sous intégrale (5.56) est différente de zéro sur l'intervalle de l'ordre de $(x - z_0, x + z_0)$. C'est pourquoi par $n_x(x)$ en (5.57) il faut comprendre la tangente de l'angle d'inclinaison de la surface de la Terre sur l'horizon moyenné sur un espace de l'ordre de la profondeur de la galerie.

Pour les déformations nous obtiendrons ensuite

$$\frac{\partial \delta u_y}{\partial y} = 0; \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma_{xx}^0}{2\pi\mu} \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_x(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2+z^2} dx_0$$

On constate par cette formule que les corrections aux déformations, à l'inverse des corrections aux inclinaisons, dépendent des valeurs $n_x(x_0)$ sur tout l'intervalle infini $-\infty < x < \infty$.

En suivant [114] nous faisons l'approximation de la projection de la surface de la Terre sur le plan (y, z) brisé avec les valeurs partiellement constantes $n_x(x)$ c'est à dire, que nous poserons

$$n_x(x) = n_i \text{ pour } x_i < x < x_{i+1}$$

où n_i ($i = 1, \dots, N$) quelques valeurs constantes. En intégrant (5.58) nous obtiendrons dans ce cas

$$\frac{\partial \delta u_x(x, z)}{\partial x} \Big|_{z=0} = - \frac{\sigma_{xx}^0}{4\pi\mu} \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \sum_{i=1}^N n_i \ln \frac{(x_{i+1}-x)^2+z^2}{(x_i-x)^2+z^2} \quad (5.59)$$

De cette formule il résulte que les corrections aux déformations de marées ont des particularités logarithmiques dans les points où $n_x(x)$ a une rupture. Les particularités disparaissent à la profondeur du point d'observation $z \neq 0$. Les corrections sont maximales dans les endroits où la courbe $z(x)$ a la plus grande courbure. Le caractère général de la dépendance des corrections aux amplitudes et aux phases des inclinaisons et des déformations suivant α correspond à la figure 5.6.

On constate également par les formules (5.58, 5.59) que les valeurs relatives des corrections aux inclinaisons de marées et aux déformations sont de l'ordre de l'angle d'inclinaison des éléments de la surface de la Terre sur l'horizon n_x en radians. Avec la précision des observations clinométriques et déformographiques actuelles de l'ordre de 1% il faut tenir compte de ces corrections même dans les régions plates où les valeurs de n_x sont de l'ordre de 0,01.

Nous donnons sur la figure 5.8 les graphiques de corrections $\delta e_{xx}/e_{xx}^0$ pour $\alpha = 0$, $\theta = 60^\circ$ pour les ondes semi diurnes et le modèle le plus simple de relief.

$$n_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_1 \text{ et } x > x_2 \\ 0,1 & \text{pour } x_1 < x < x_2 \end{cases} \quad (5.60)$$

La figure montre que pour $n_x \sim 0,1$ les corrections (5.58) calculées par la méthode du petit paramètre coïncident de façon satisfaisante avec les résultats de l'intégration numérique directe des équations correspondantes aux dérivées partielles tirées du travail [114]. Le déplacement de la courbe 2 par rapport à la courbe 1 suivant l'axe des abscisses est provoqué apparemment par le fait que dans le travail [114] on a introduit pour la simplification des calculs la surface confinante solide $x = x_1$, perturbant un peu les résultats finaux.

Nous noterons que les relations (5.50) permettent d'introduire des corrections au relief de la surface de la Terre et en général des modèles bidimensionnels pour $n_x = n_x(x,y)$, $n_y = n_y(x,y)$

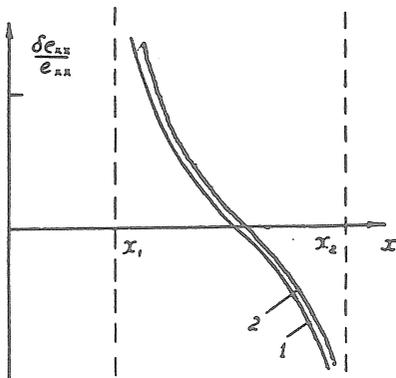


Figure 5.8

Influence du relief sur δe_{xx} pour les ondes semi diurnes pour $\alpha = 0$, $\theta = 60^\circ$ et de la dépendance $n_x(x)$ déterminés par (5.60)

1. est décalé selon les formules (5.58);
2. est pris du travail [114].

Conclusions

Les résultats principaux de ce chapitre se ramènent à ce qui suit :

1. Les relations (5.21 à 5.26) généralisent la théorie statique des marées dans le corps d'une Terre à symétrie sphérique au cas des modèles sphériques faiblement non symétriques. La solution du problème est représentée sous la forme de décomposition en fonctions sphériques. Les valeurs numériques des coefficients pour les différents harmoniques sphériques dans la décomposition $g(\theta, \lambda, t)$ (5.21) sont déterminées complètement par les valeurs des fonctions $y_n(r)$ $(z_{1.2.3})_n$ (2) présentées sur la figure 5.1.

2. Les résultats des calculs des modèles du § 2 montrent quelle est la précision de mesures de marées nécessaire pour pouvoir découvrir toutes les hétérogénéités horizontales du manteau. Parmi celles-ci en particulier les données actuelles sur les amplitudes des variations de marées du champ gravitationnel permettent de mettre en évidence des hétérogénéités horizontales des modules élastiques du manteau inférieur qui ne soient pas inférieures à 0,6% et du manteau supérieur (pour $h \sim 300$ km) qui ne soient pas inférieures à 2,5%.

3. Les inclinaisons de marées et les déformations donnent une information sur les hétérogénéités des modules élastiques. Les relations (5.37) (5.41) (5.57) et (5.58) relient les anomalies des inclinaisons de marées et des déformations avec les hétérogénéités des modules élastiques et avec les particularités du relief de la surface de la Terre près du point d'observations.

Annexe 1. Calcul de l'intégrale (1.93)

Pour calculer (1.93) nous tiendrons compte de ce que, dans la relation avec (1.92), l'intégrale

$$I = \iiint_{\tilde{\tau}} (\vec{u}^{\circ}, \vec{L}(\vec{u}^{(1)}, R^{(1)})) d\tilde{\tau}$$

peut être représentée sous la forme

$$I = \iiint_{\tilde{\tau}} [(\vec{u}^{\circ}, \vec{L}(\vec{u}^{(1)}, \vec{R}^{(1)}) - (\vec{u}^{\circ}, \vec{L}(\vec{u}^{\circ}, R^{\circ}))] d\tilde{\tau} \quad (A1.1)$$

En utilisant la forme évidente de l'opérateur L (1.65) nous écrirons

$$L_i(\vec{u}^{\circ}, R^{\circ}) = \rho \left[\frac{\partial \psi^{\circ}}{\partial x_i} - \text{div} \vec{u}^{\circ} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \sigma_{i\kappa}^{\circ}}{\partial x_{\kappa}}$$

$$L_i(\vec{u}^{(1)}, R^{(1)}) = \rho \left[\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_i} - \text{div} \vec{u}^{(1)} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \sigma_{i\kappa}^{(1)}}{\partial x_{\kappa}}$$

où

$$\psi^{(0)} = R^{\circ} + (\vec{u}^{\circ}, \nabla V), \quad \psi^{(1)} = R^{(1)} + (\vec{u}^{(1)}, \nabla V). \quad (A1.2)$$

En intégrant les deux termes (A1.1) par parties, nous obtiendrons

$$I = \iiint_{\tilde{\tau}} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} (u_i^{(1)} \sigma_{i\kappa}^{(1)} - u_i^{(1)} \sigma_{i\kappa}^{\circ}) - \sigma_{i\kappa}^{(1)} \frac{\partial u_i^{\circ}}{\partial x_{\kappa}} + \sigma_{i\kappa}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i^{(1)} \psi^{(1)} - \rho u_i^{(1)} \psi^{(0)}) - \psi^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i^{(1)}) + \psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i^{(1)}) + u_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} (\rho \vec{u}_{\kappa}^{(1)}) \frac{\partial V}{\partial x_i} - u_i^{\circ} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} (\rho \vec{u}_{\kappa}^{(1)}) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] d\tilde{\tau} = I_1 + I_2 + I_3 \quad (A1.3)$$

où

$$I_1 = \iint_S (u_i^{(1)} \sigma_{i\kappa}^{(1)} - u_i^{(1)} \sigma_{i\kappa}^{\circ}) ds_{\kappa}$$

$$I_2 = \iint_S \rho (u_{\kappa}^{(1)} \psi^{(1)} - u_{\kappa}^{(1)} \psi^{(0)}) ds_{\kappa}$$

$$I_3 = \iiint_{\tilde{\tau}} [R^{(1)} (\rho \text{div} \vec{u}^{(1)} + (\vec{u}^{(1)}, \nabla \rho) - R^{(1)} (\rho \text{div} \vec{u}^{\circ} + (\vec{u}^{\circ}, \nabla \rho))] d\tilde{\tau}.$$

En tenant compte de l'équation de Poisson (1.62b) I_3 peut être également écrit sous la forme

$$I_3 = \frac{1}{4\pi G} \iiint_{\tau} (R^{(0)} \Delta R^{(1)} - R^{(1)} \Delta R^{(0)}) d\tau$$

ou, puisque $R^{(0)}$ et $R^{(1)}$ satisfont à l'équation de Poisson dans l'espace extérieur

$$I_3 = \frac{1}{4\pi G} \iiint_{\tau + \tau_1} (R^{(0)} \Delta R^{(1)} - R^{(1)} \Delta R^{(0)}) d\tau \quad (A1.4)$$

où τ_1 est l'espace extérieur par rapport à la sphère de rayon a . En transformant (A1.4) à l'aide de la formule de Green et tenant compte qu'à la surface s

$$\delta R^{(0)} = 4\pi G(\rho H^{(0)} + \rho^{(0)}); \quad \delta R^{(1)} = 4\pi G(\rho H^{(1)} + \rho^{(1)});$$

et les fonctions $R^{(0)}$ et $R^{(1)}$ sont continues, nous trouverons

$$I_3 = \iiint_s [R^{(0)}(\rho H^{(1)} + \rho^{(1)}) - R^{(1)}(\rho H^{(0)} + \rho^{(0)})] ds \quad (A1.5)$$

En utilisant (A1.2) nous obtiendrons ensuite

$$I_2 = \iiint_s \rho [u_{\kappa}^{(0)} R^{(1)} - u_{\kappa}^{(1)} R^{(0)} + u_{\kappa}^{(0)} (\nabla V, \vec{u}^{(1)}) - u_{\kappa}^{(1)} (\nabla V, \vec{u}^{(0)})] ds_{\kappa}.$$

Tenant compte de la relation connue de l'analyse vectorielle

$$\vec{u}^{(0)} (\nabla V, \vec{u}^{(1)}) - \vec{u}^{(1)} (\nabla V, \vec{u}^{(0)}) = [\nabla V [\vec{u}^{(0)} \vec{u}^{(1)}]],$$

nous trouverons

$$I_2 = \iiint_s \rho (u_{\kappa}^{(0)} R^{(1)} - u_{\kappa}^{(1)} R^{(0)}) ds + \iiint_s (\vec{n}, [\nabla V [\vec{u}^{(0)} \vec{u}^{(1)}]]) ds \quad (A1.6)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la surface s . Puisque pour les tensions hydrostatiques initiales (1.58) la surface équipotentielle coïncide avec la surface s , le vecteur ∇V est colinéaire avec \vec{n} et le second terme (A1.6) est égal à zéro. La substitution de (A1.5) et (A1.6) en (A1.3) donne (1.95).

Annexe 2 Calcul de l'intégrale (2.27).

Pour calculer l'intégrale (2.27) nous écrivons le potentiel générateur de marées (2.26) pour $r \leq a$ sous la forme

$$V_e = \tilde{v}_e \left(\frac{r}{a}\right)^{n_0} [Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \varphi) \sin \sigma t] \quad (A2.1)$$

ou les fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \varphi)$ sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned} Y_n^m(\theta, \varphi) &= P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi, \\ Y_n^{-m}(\theta, \varphi) &= P_n^m(\cos \theta) \sin m \varphi, \end{aligned} \quad (A2.2)$$

pour les ondes principales de marées $n_0 = 2$; $m_0 = 0, 1, 2$ respectivement pour les ondes zonales, diurnes et semi diurnes.

Après avoir substitué (2.24) en (2.27) nous obtiendrons

$$F_{nm}^j = F_1^j + F_2^j + \delta(m, 0) F_3^j + \delta(m, 1) F_4^j \quad (A2.3)$$

où

$$F_1^j = \sigma^2 \iiint \rho(u^j, u^0) d\tau \quad (A2.4)$$

et

$$F_2^j = -2 \iiint \rho(u^j, [\tilde{\omega} \dot{u}^0]) d\tau \quad (A2.5)$$

sont les intégrales qui tiennent compte de l'influence des accélérations relatives et de Coriolis respectivement, et

$$F_3^j = - \iiint (\tilde{u}^j \left(\frac{2\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \tilde{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{\omega} + \omega}{\tilde{\omega}} \nabla \varphi \right)) d\tau \quad (A2.6)$$

et

$$F_4^j = \frac{2\delta\omega}{\tilde{\omega}} \iiint (\tilde{u}^j, \nabla \varphi) d\tau + \delta\omega \iiint (\tilde{u}^j, (\tilde{r}y - \tilde{r}x)) d\tau \quad (A2.7)$$

qui sont les intégrales qui tiennent compte du mouvement de nutation du vecteur $\tilde{\omega}$ et de la variation de la vitesse angulaire.

Après avoir substitué en (A2.4 à A2.7) les expressions pour \tilde{u}_j , \tilde{u}^0 sous la forme de Love (1.66a)

$$\tilde{u}^0 = H^0(r) \frac{\tilde{r}}{a} (Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \varphi) \sin \sigma t) + \quad (A2.8)$$

$$+ T_0(r) \nabla (Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \varphi) \sin \sigma t); \quad (A2.9)$$

$$\tilde{u}^j = H_n^j(r) \frac{\tilde{r}}{a} Y_n^m(\theta, \varphi) + T_n^j(r) f_2^j(r) \nabla Y_n^m(\theta, \varphi)$$

et tenant compte de la propriété d'orthogonalité des gradients des fonctions sphériques

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\nabla Y_n^m(\theta, \varphi), \nabla Y_\kappa^\ell(\theta, \varphi)) = \delta(n, \kappa) \delta(m, \ell) c n(n+1), \quad (A2.10)$$

où

$$c = \|Y_n^m\|^2,$$

nous obtenons

$$F_i^j = \sigma^2 \delta(n, n_0) [\delta(m, m_0) \cos \sigma t + \delta(m, -m_0) \sin \sigma t] I_i^j, \quad (A2.11)$$

où

$$I_i^j = c \int_0^a (z^2 H_n^0 H_n^0 + n(n+1) T^0 T_n^j) \rho dz. \quad (A2.12)$$

Pour calculer F_2 nous écrivons

$$\begin{aligned} F_2^j &= 2\omega \iiint \rho (u_x^j \dot{u}_y^0 - \dot{u}_x^0 u_y^j) d\tau = \\ &= 2\omega \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left\{ T_n^j(z) T^0(z) \left(\frac{\partial Y_n^m}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial Y_n^m}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + T_n^j(z) H^0(z) \left(\frac{x}{z} \frac{\partial Y_n^m}{\partial x} - \frac{y}{z} \frac{\partial Y_n^m}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + H_n^j(z) T^0(z) \left(\frac{x}{z} Y_n^m \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{z} Y_n^m \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\} \rho d\tau, \end{aligned} \quad (A2.13)$$

où

$$\vec{z} = Y_{n_0}^{m_0} \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0} \sin \sigma t. \quad (A2.14)$$

Après avoir écrit les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ dans le système de coordonnées sphériques nous trouverons

$$\begin{aligned} y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial Y_n^m}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial Y_n^m}{\partial y} &= \\ &= \frac{ct \sin \theta}{z^2} \left(\frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (A2.15)$$

Ainsi dans les notations (A2.2) aussi bien pour les valeurs positives que négatives de m

$$\frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} = -m Y_n^{-m}; \tag{A2.16}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -\frac{m_0}{\sigma} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

La substitution de (A2.14 à A2.16) en (A2.13) donne

$$F_2^j = F_5^j + F_6^j, \tag{A2.17}$$

où

$$F_5^j = 2\omega \iiint_V \rho T_n^j(\tau) T^0(\tau) \frac{c t_0 \theta}{r^2} (m Y_n^{-m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial t} - \sigma m_0 \xi \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta}) d\tau;$$

$$F_6^j = 2\omega \iiint_V \left\{ m T_n^j H^0 Y_n^{-m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + m_0 \sigma H_n^j T^0 Y_n^m \xi \right\} \frac{\rho}{r} d\tau.$$

F_6^j s'intègre directement suivant les variables angulaires. En tenant compte de l'orthogonalité des fonctions sphériques nous obtiendrons :

$$F_6^j = 2\omega \sigma m_0 c \delta(n, n_0) (\delta(m, m_0) \cos \sigma t + \delta(m - m_0) \sin \sigma t), \tag{A2.18}$$

$$\int_0^a r \rho (T_n^j H^0 + H_n^j T^0) dr$$

En intégrant ensuite F_5^j d'après r et φ nous aurons

$$F_6^j = -2\pi \sigma \omega m_0 \int_0^a T_n^j T^0 \rho dr \tag{A2.19}$$

$$(\delta(m, m_0) \cos \sigma t + \delta(m, -m_0) \sin \sigma t) \cdot \tilde{F}_6^j$$

où

$$\tilde{F}_6^j = \int_{-1}^1 \mu \frac{d\mu}{d\mu} (\rho_n^m(\mu) \rho_{n_0}^{m_0}(\mu)) d\mu; \tag{A2.20}$$

$$\mu = \cos \theta.$$

En intégrant ensuite (A2.20) par parties nous trouverons

$$\tilde{F}_6 = \mu P_n^m(\mu) P_{n_0}^{m_0}(\mu) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n_0}^{m_0}(\mu) d\mu \quad (A2.21)$$

Pour $m_0 \neq 0$ $P_{n_0}^{m_0}(\mu) / \mu = \pm 1$ et le premier terme (A2.21) devient nul pour $m_0 = 0$ le facteur (A2.19) avant \tilde{F}_6 . Ainsi dans tous les cas on peut poser

$$\begin{aligned} \tilde{F}_6^j &= - \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n_0}^{m_0}(\mu) d\mu = \\ &= -\delta(n, n_0) \| P_{n_0}^{m_0}(\mu) \|^2. \end{aligned} \quad (A2.22)$$

Après avoir substitué (A2.19), (A2.22) et (A2.18) en (A2.17) et tenant compte que pour $m_0 \neq 0$

$$\pi \| P_{n_0}^{m_0} \|^2 = \| Y_n^m \|^2 = c,$$

nous obtiendrons

$$F_2^j = 2\omega\sigma m_0 c \delta(n, n_0) (\delta(m, m_0) \cos \sigma t + \delta(m, -m_0) \sin \sigma t) \quad (A2.23)$$

$$\int_0^a (z T_n^j H^0 + z T_n^0 H^j + T_n^j T^0) \rho dz.$$

Après avoir substitué ensuite en (A2.7) l'expression pour \mathcal{P} (2.9) écrite sous la forme

$$\varphi = -\frac{1}{3} \varepsilon z^2 \bar{z}$$

où z est déterminé par (A2.14) pour $m_0 = 0$ et tenant compte de la propriété d'orthogonalité des gradients des fonctions sphériques (A2.10) nous trouverons :

$$\iiint (\vec{u}^j, \nabla \mathcal{P}) d\tau = \frac{-c\varepsilon\omega^2}{3} I_3, \quad (A2.24)$$

où

$$I_3 = \int_0^a (2H_n^j z + n(n+1)T_n^j) \rho z^2 dz \quad (A2.25)$$

Après avoir substitué (A2.9) en (A2.24) et tenant compte que

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = -\varepsilon\omega^2 z \sin \theta \cos(\sigma t - \varphi);$$

$$z \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{z}} = \varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (P_n^j(\cos \theta) e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} \left(\varepsilon_1 \frac{n+1}{z(2n+1)} P_{n-1}^j(\cos \theta) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon_2 \frac{n^2}{z(2n+1)} P_{n+1}^j(\cos \theta) \right)$$

où

$$\epsilon_1 = \begin{cases} \{0 \text{ pour } n = 0; 1 \\ \{1 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} \{0 \text{ pour } n = 0 \\ \{1 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

nous obtiendrons finalement

$$F_3^j = \frac{2\delta\omega\epsilon}{3} \delta(n,2) (\delta(m,1) \cos \sigma t + \delta(m,-1) \sin \sigma t) \quad (A2.26)$$

où

$$I_5^j = \int_0^a \rho r^2 (H_n^j r + 3 T_n^j) dr \quad (A2.27)$$

Nous noterons que pour toutes les ondes diurnes $\frac{\sigma + \omega}{\omega} \leq 1/14$ c'est pourquoi l'apport principal en (A2.26) porte l'intégrale I_5^j .

L'amplitude de la nutation du système relativement mobile des coordonnées ϵ entrant en (A2.26) avec une précision suffisante se détermine par l'expression (1.15) :

$$\epsilon \approx \epsilon_0 \approx -\frac{3V_0}{a^2} \frac{C-A}{\omega \sigma A} \approx 2,85 \frac{V_0}{g a^2} \quad (A2.28)$$

La substitution de (A2.28) en (A2.26) détermine complètement F_4^j .

Enfin, pour calculer F_3^j nous noterons que, dans le cas des ondes zonales à longues périodes, la relation $\delta\omega$ à $2\delta\omega/\omega$ n'est pas de plus de 1/30 c'est pourquoi on peut négliger le second terme dans la formule (A2.6) en comparaison avec le premier.

Après avoir écrit Φ_0 sous la forme

$$\Phi_0 = \frac{2\omega^2}{3} (1 - P_2^0(\cos \theta)), \quad (A2.29)$$

nous substituerons (A2.29) et (A2.9) dans (A2.6). Tenant compte de (A2.10) nous trouverons :

$$F_3^j = -\frac{2}{3} C \omega \delta\omega I_4 \delta(n, n_0) \delta(m, 0) + \frac{2\pi}{3} \omega \delta\omega \delta(n, 0) \int_0^a 2 H_0^j r^3 \rho dr \quad (A2.30)$$

On peut ensuite exprimer les valeurs $\delta\omega/\omega = -\delta C/C$ entrant en (A2.30) par V_0 et le nombre de Love k d'après la formule de Mac Cullagh [50] conformément à laquelle

On peut ensuite exprimer les valeurs $\delta / = - \delta C / C$ entrant en (A2.30) par V_0 et le nombre de Love k d'après la formule de Mac Cullagh [50] conformément à laquelle

$$\frac{\delta C}{C} = - \frac{2}{3} \frac{\sigma^3 \nu \epsilon}{c G} \quad (A2.31)$$

Après avoir substitué (A2.12), (A2.23), (A2.26), (A2.28) et (A2.30 A2.31) en (A2.3) nous obtiendrons (2.28) à (2.36).

Annexe 3 Conclusion de la relation (5.37)

Pour $l_t \gg l_y$ intervenant dans (1.106b) les facteurs $\text{div } \bar{u}_0$ et $e^{\circ}_{ik} = 1/2 (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i)$ peuvent sortir du signe intégrale.

En intégrant ensuite (1.106b) suivant y en tenant compte de (5.36) nous trouverons :

$$\begin{aligned} \delta \bar{u}^{(j)} = & \frac{\delta \lambda \text{div } \bar{u}^{\circ}}{\lambda_0} \iint_{x_1, z_1}^{x_2, z_2} \text{div } \bar{u}^{(j)} dx dz + \\ & + \frac{2 \delta \mu}{\lambda_0} \left(e^{\circ}_{xx} \iint_{x_1, z_1}^{x_2, z_2} \frac{\partial \bar{u}_x^{(j)}}{\partial x} dx dz + \right. \\ & \left. + e^{\circ}_{zz} \iint_{x_1, z_1}^{x_2, z_2} \frac{\partial \bar{u}_z^{(j)}}{\partial z} dx dz \right), \end{aligned} \quad (A3.1)$$

où on a désigné $\delta u_z(x_0)$ par $\delta u^{(1)}$ et par $\delta u^{(2)} - \delta u_x(x_0)$

$$\bar{u}^{(j)} = \int_{y_1}^{y_2} \bar{u}^{(j)} dy \approx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^{(j)} dy; \quad (A3.2)$$

$j = 1, 2$; à la valeur $j = 1$ correspond le vecteur $\bar{u}^{(1)}$ déterminé par la formule (5.34) et à $j = 2$, le vecteur $\bar{u}^{(2)}$ déterminé en (5.35).

A cause du fait que les conditions $l_t \gg l_y$ les valeurs e°_{zz} et $\text{div } \bar{u}^{\circ}$ intervenant dans (A3.1) doivent satisfaire à la condition d'absence de tension à la surface $Z = 0$ conformément à laquelle

$$\sigma^{\circ}_{zz} = \lambda \text{div } \bar{u}^{\circ} + 2 \mu e^{\circ}_{zz} = 0. \quad (A3.3)$$

Le tenseur des tensions correspondant aux déplacements (5.34), (5.35) peut être représenté sous la forme :

$$\frac{\sigma_{xx}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3z^2 x^2}{2\pi R^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{R(R+z)} \right);$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3zy^2}{2\pi R^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{R(R+z)} \right); \quad (A3.4)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3xy^2}{2\pi R^5} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(z+R) \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)};$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3xz^2}{2\pi R^5}; \quad \frac{\sigma_{yz}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3z^2 y}{2\pi R^5}; \quad \frac{\sigma_{zz}^{(1)}}{\chi_0} = -\frac{3z^3}{2\pi R^5};$$

$$\frac{\sigma_{xx}^{(2)}}{\chi_0} = -\frac{3x^3}{2\pi R^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \left(\frac{x}{R^3} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{R+z} \right) \right);$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(2)}}{\chi_0} = -\frac{3xy^2}{2\pi R^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \left(\frac{x}{R^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{x}{R+z} \right) \right);$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(2)}}{\chi_0} = -\frac{3x^2 y}{2\pi R^5} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{x}{R+z} \right);$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{x^2 y}{R^5};$$

(A3.5)

$$\sigma_{yz}^{(2)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{xy^2}{R^5};$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = -\frac{3}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5}.$$

Pour intégrer (A3.4), (A3.5) suivant y nous utiliserons la valeur de l'intégrale indéterminée

$$\int \frac{dy}{(y^2 + c)^{3/2}} = \frac{y}{c(y^2 + c)^{1/2}} \quad (A3.6)$$

Après avoir substitué en (A3.6) les limites d'intégration de y_1 et y_2 et tenant compte de (5.36) nous trouverons :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{R^3} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{R^3} = \frac{2}{r^2} \quad (A3.7)$$

où $r^2 = c = (x - x_0)^2 + z^2$. En différenciant (A3.7) suivant le paramètre r^2 , nous obtiendrons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{R^5} = \frac{4}{3r^4} \quad (A3.8)$$

Enfin après avoir représenté y^2 / R^5 sous la forme

$$\frac{y^2}{R^5} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{3R^5}$$

et tenant compte de (A3.7) nous avons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{R^5} dy = \frac{2}{3r^2} \quad (A3.9)$$

En utilisant (A3.7) à (A3.9) nous trouverons

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_{xx}^{(1)}}{\chi_0} &= -\frac{2z\chi^2}{\pi r^4}; & \frac{\tilde{\sigma}_{xx}^{(2)}}{\chi_0} &= \frac{2\chi^3}{\pi r^4}; \\ \frac{\tilde{\sigma}_{zz}^{(1)}}{\chi_0} &= -\frac{2z^3}{\pi r^4}; & \frac{\tilde{\sigma}_{zz}^{(2)}}{\chi_0} &= \frac{2\chi z^2}{\pi r^4}; \end{aligned} \quad (A3.10)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}}{\gamma_0} = -\frac{2xz^2}{\pi z^4}; \quad \frac{\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}}{\gamma_0} = \frac{2xz^2}{\pi z^4};$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{yz}^{(1)}}{\gamma_0} = -\frac{\lambda}{\pi(\lambda+\mu)} \frac{z}{z^2}; \quad \frac{\tilde{\sigma}_{yz}^{(2)}}{\gamma_0} = \frac{\lambda}{\pi(\lambda+\mu)} \frac{x}{z^2};$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{yz}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{xy}^{(2)} = \tilde{\sigma}_{yz}^{(2)} = 0,$$

où

$$\tilde{\sigma}_{i\kappa}^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{i\kappa}^{(j)} dy$$

et respectivement

$$\frac{\operatorname{div} \tilde{u}^{(1)}}{\gamma_0} = -\frac{1}{\pi(\lambda+\mu)} \frac{z}{z^2}; \quad (\text{A3.11})$$

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \tilde{u}_x^{(1)}}{\partial x} = \frac{z}{\pi \mu z^2} \left(-\frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \right);$$

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \tilde{u}_z^{(1)}}{\partial z} = \frac{z}{\pi \mu z^2} \left(-\frac{z^2}{z^2} + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \right);$$

$$\frac{1}{\gamma_0} \operatorname{div} \tilde{u}^{(2)} = \frac{x-x_0}{\pi(\lambda+\mu) z^2};$$

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \tilde{u}_x^{(2)}}{\partial x} = \frac{x-x_0}{\pi z^2 \mu} \left[-\frac{z^2}{z^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} \right];$$

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial \tilde{u}_z^{(2)}}{\partial z} = \frac{x-x_0}{\pi z^2 \mu} \left[\frac{z^2}{z^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \right];$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(j)} = \tilde{\sigma}_{yz}^{(j)} = \tilde{\sigma}_{yz}^{(j)} = 0; \quad \frac{1}{\gamma_0} \tilde{\sigma}_{xz}^{(2)} = \frac{1}{\pi \mu} \frac{(x-x_0)^2 z}{z^4}.$$

Nous substituerons (A3.11) en (A3.1) et différentierons les résultats suivant x . Puisque toutes les expressions (A3.11) ne dépendent que de la combinaison $x - x_0$, la différentiation ∂u_j suivant x_0 est équivalente à la différentiation des expressions sous intégrale (A3.1) suivant x . Ainsi, le calcul de $\partial u_j / \partial x_0$ se

ramène à l'intégration semi fictive (A3.1) suivant z .

En utilisant les valeurs des intégrales

$$\int \frac{x^3}{z^4} dz = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{x} + \frac{xz}{2z^2};$$

$$\int \frac{z^3 x}{z^4} dz = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \frac{xz}{2z^2},$$

et tenant compte de (A3.3) nous obtiendrons (5.37 - 5.38).

Bibliographie

1. Яцкив Я.С., Миронов Н.Т., Корсунь А.А., Тарадий В.К. Движение полюсов и неравномерность вращения Земли. "Итоги науки и техники", сер. "Астрономия", т. 12, ВИНТИ, М., 1976.
2. Яцкив Я.С. Нутация в системе астрономических постоянных. Киев, И.Т.Ф., "Наукова Думка", 1980.
3. Мельхиор П. Земные приливы. "Мир", М., 482 с., 1968.
4. Мельхиор П. Физика и динамика планет. "Мир", М., 1976.
5. Thomson W. Math. and Phys. Papers, v. 3; Camb. Univ. Press, 1892.
6. Лэмб Г. Гидродинамика. ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, М.-Л., 1947.
7. Дяв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.-Л., 1935.
8. Poincare H. Sur la precession des corps deformables. Bull. Astr., 27, 321 - 356, 1910.
9. Wahr J.M. The forced nutation of an elliptical, rotating elastic and oceanless earth. Geoph. Journ. Roy. astr. Soc., v. 64, 3, p. 705 - 727, 1981.
10. Smith M.L. Wobble and nutation of the Earth. Geophys. J. Roy. astr. Soc., 50, 103 - 140, 1977.
11. Wahr J.M. A normal mode expansion for the forced response of a rotating Earth. Geophys. Journ. Roy. astr. Soc., v. 64, 3, p. 651 - 675, 1981.
12. Rochester M.G. Global geodynamics in Canada 1971 - 1979. Canadian Journ. of Earth Sciences v. 16, 3, part 2, p.p. 621 - 646, 1979.
13. Melchior P., De Becker M.A. A discussion of world-wide measurements of tidal gravity with respect to oceanic interactions, lithosphere heterogeneities, Earth's flattening and inertial forces. Physics of the Earth and Planetary Interiors, v. 31, p.p. 27 - 53, 1983.

14. Zschau J. Tidal sea load tilt of the crustal and upper mantle structure. Geoph. Journ. Roy. astr. Soc., v. 44, p.p. 577 - 593, 1976.
15. Wahr J.M. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. Geoph. J. Roy. astr. Soc., v. 54, 3, p. 677 - 703, 1981.
16. Toomre A. On the "nearly diurnal wobble" of the Earth. Geoph. Journ. Roy. astr. Soc., 1974, v. 38, p.p. 335 - 348.
17. Rochester M.G., Jensen O.G., Smylie D.E. A search for the Earth's nearly diurnal free wobble. Geoph. J. Roy. astr. Soc., 36, 349 - 356, 1974.
18. Smith M.L. The scalar equations of infinitesimal elastic - gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth. Geoph. Journ. Roy. astr. Soc., 37, 491 - 526, 1974.
19. Shen P-Y., Mansinha L. Oscillation, nutation and wobble of an elliptical rotating Earth with liquid outer core. Geoph. Journ. Roy. astr. Soc., 46, 467 - 496, 1976.
20. Sasao T., Okamoto J., Sakai S. Dissipative core - mantle coupling and nutational motion of the Earth. Publ. Astr. Soc. Japan, v. 29, p.p. 83 - 105, 1977.
21. Wahr J.M., Sasao T.A. A diurnal resonance in the ocean tide and in the Earth's load response due to the resonant free "core nutation". Geoph. Journ. Roy. astr. soc., v. 64, 3, p.p. 747 - 765, 1981.
22. Молоденский С.М. Изменение чисел Лява при варьировании схемы строения Земли. Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", № 2, 1976.
23. Молоденский С.М. О функции Грина для уравнений упругих сфероидальных деформаций Земли. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № II, 1976.
24. Молоденский С.М. О связи чисел Лява с нагрузочными коэффициентами. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 3, 1977.
25. Молоденский С.М. О влиянии горизонтальных неоднородностей мантии на амплитуды приливных волн. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 2, 1977.
26. Молоденский С.М. Оценка отклонения упругих земных приливов от статических. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 12, 1978.
27. Молоденский С.М. Приливы в сферически несимметричной Земле. В сб. "Изучение земных приливов". М., "Наука", 1980.
28. Молоденский С.М. Влияние вынужденной нутации на результаты приливных измерений. В сб. "Изучение земных приливов". М., "Наука", 1980.
29. С.М. Молоденский, М.В. Крамер. Влияние крупномасштабных горизонтальных неоднородностей мантии на земные приливы. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № I, 1980.
30. Молоденский С.М. Влияние океана и вязкости оболочки на нутацию Земли. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 6, 1981.
31. Молоденский С.М. Влияние локальных неоднородностей коры и верхней мантии на приливные наклоны. В сб. "Вращение и приливные деформации Земли", вып. 13. "Наукова Думка", Киев, 1981.
32. Молоденский С.М. О верхней границе вязкости земного ядра. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 12, 1981.

33. Молоденский С.М. О локальных аномалиях амплитуд и фаз приливных наклонов и деформаций. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 7, 1983.
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., "Наука", 1965, 203с.
35. Валле-Пуссен Ш.И. Лекции по теоретической механике. И.Л., М., 1949, т.2, стр. 54 - 210.
- 36а. Федоров Е.П. О свободном движении Земли с периодом, близким к суткам - как нужно сравнивать наблюдения с теорией. "Астрон. циркуляр", № 861.1, 1975.
- 36б Ooe M., Sasao T. Polar wobble, sway and astronomical latitude/longitude observation. Publ. Intern. Lat. Observ. Mizusava, 9, 223, 1974.
37. Saito M. Relationship between tidal and load love numbers. Journ. Phys. Earth Plan. Int. v.26, 1, p.p. 13 - 16, 1978.
38. Перцев Б.П., Иванова М.В. Расчет нагрузочных чисел Лява для земной модели № 508 Гильберта и Дзивонского. В сб. "Изучение земных приливов". М., "Наука", 1980, 274 с.
39. Dahlen F.A. The passive influence of the ocean upon the rotation of the Earth. Geophys. J. Roy. astr. Soc., 45, 363 - 406, 1976.
40. Jeffreys H., Vicente R.O. The theory of nutation and the variation of latitude. Monthly Not. R. A. S., v. 117, 142 - 161, 1957.
41. Jeffreys H., Vicente R.O., The theory of nutation and the variation of latitude. The Roche model core. Monthly Not. Roy. astr. Soc., v. 117, 162 - 173, 1957.
42. Молоденский М.С., Крамер М.В.. Земные приливы и нутация Земли. Изд-во АН СССР, М., 1961, 39 стр.
43. Пекерис Х.Л., Альтерман Э., Ярош Х. Ротационные мультиплеты в спектре Земли. В сб. "Собственные колебания Земли" М., "Мир", 1964, 315 стр.
44. Жарков В.М., Любимов В.М., Оснач А.И. О теории возмущений для собственных колебаний Земли. Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", № 10, 1968.
45. Dahlen F. A. The normal modes of a rotating elliptical Earth. Geophys. Journ. Roy. astron. Soc. 16, 329 - 367, 1968.
46. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1947, 464 стр.
47. Bryan P. The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. Philos. Transact. A, CLXXX, 187, 1888.
48. Альтерман Э., Ярош Х., Пекерис Х.Л. Колебания Земли. В сб. "Собственные колебания Земли" М., "Мир", 1964, 315 стр.
49. Парийский Н.Н., Перцев Б.П. Влияние инерционных сил на наблюдаемые изменения силы тяжести и наклонов. В сб. "Изучение земных приливов". М., "Наука", 1980.
50. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. ИЛ, М., 1960, 484 стр.
51. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., "Наука", 1966, 260 с.
52. Фрейденталь Л., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. ФМ, М., 1962, 260 с.
53. Тихонов А.Н., Свешников А.Г. Введение в теорию функций комплексной переменной. М., "Наука", 1966.

54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., ФМ, 1959, 532 с.
55. Акопян С.Ц., Жарков В.Н., Любимов В.М. О динамическом модуле сдвига земных недр. Докл. АН СССР, т. 223, № I, 1975, с. 87 - 89.
56. Дорофеев В.М., Жарков В.Н. Об определении механической добротности Земли. Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", № 9, 1978, с. 55 - 73.
57. Anderson D. L., Hart R. S. Q of the Earth. Journ. Geophys. Res., 1978, v. 83, no B 12, p. 5869 - 5882.
58. Лобер Н. Заметка о глобальных моделях распределения в земной мантии. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 9, 1979.
59. Smith M. L., Dahlen P.A. The period and Q of the Chandler wobble. Geophys. Journ. Roy. astron. Soc., 1981, v. 59, p. 223 - 284.
60. Anderson D. L., Minster J. B. The frequency dependence of Q in the Earth and implications for mantle rheology and Chandler wobble. Geophys. Journ. Roy. astron. Soc., 1979, v. 58, p.p. 431 - 440.
61. Dziewonski A. M., Anderson D. L. Preliminary reference Earth model. November 1980. Preprint.
62. Акопян С.Ц., Жарков В.Н., Любимов В.М. Теория затухания крутильных колебаний Земли. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 8, 1977, с. 3 - II.
63. Sallar R. V., Dziewonski A.M. Measurements and interpretation of normal mode attenuation. Geophys. Journ. Roy. astron. Soc., 1978. V. 53, p.p. 559 - 581.
64. Sipkin S. A., Jordan T. H. Regional variations of $Q_{s.c.s.}$. Bull. Seism. Soc. Amer., 1980, v. 70, p. 1071 - 1102.
65. Жарков В.Н., Трубицын В.П. Физика планетных недр. М., "Наука", 1980, 448 с.
66. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М., "Наука", 1983, 415 с.
67. Коган С.И. Сейсмическая энергия и методы ее определения. М., "Наука", 1975.
68. Knopoff L. On the rheological models. Rev. Geophys. 1964 v. 2, p. 625.
69. Акопян С.Ц., Жарков В.Н., Любимов В.М. О поправках за динамический модуль сдвига для собственных частот Земли. Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", № 10, 1976, с. 3 - 12.
70. Gilbert F., Dziewonski A. M. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanism. Phil. Trans. Roy. Soc. A, 1975, v. 278, p. 187.
71. Перцев Б.П., Иванова М.В. Поправки за морские приливы в частоте M_2 в гравиметрические земноприливные наблюдения в Европе. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 12, 1975.
72. Парийский Н.Н., Барсенков С.М. и др. Приливные изменения силы тяжести в Талгаре по многолетним наблюдениям. В сб. "Приливные деформации Земли" М., "Наука", 1975.
73. Молоденский С.М., Крамер М.В. О механизме приливного ускорения суточного вращения земного ядра. В сб. "Вращение и приливные деформации Земли". Киев, "Наукова Думка", вып. 14, 1982, с. 50 - 52.

74. Rochester M.G. Perturbation in the Earth rotation and geomagnetic Core-Mantle coupling. *J. Geomagn. and Geoelectr.* v. 20, 4, p. 387, 1968.
75. Yatskiv Ya. S., Sasao T. Chandler wobble and viscosity of the Earth's core. *Nature*, v. 255, p. 655, 1975.
76. Gans F. Viscosity of the Earth's core. *J. Geophys. Res.* v. 77, p. 360 - 366, 1977.
77. Парийский Н.Н., Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В. О влиянии океанического прилива на вековое замедление вращения Земли. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, № 2, 1972.
78. Попов Н.А. Малые периодические члены в колебаниях широты Полтавы. Киев, "Наукова Думка", 1968.
79. Merriam J.B., Lambeck K. Comments on the Chandler wobble Q. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, v. 59, p. 281 - 286, 1979.
80. Kinoshita H. Theory of the rotation of the rigid Earth. *Celest. mech.*, 1977, v. 15, p. 277 - 326.
81. Malkus W. P. L. Precessional torques as the cause of geomagnetism. *J. Geophys. Res.*, 1963, v. 68, p. 2871 - 2883.
82. Irving E. *Paleomagnetism*. N. Y.: Wiley, 1964.
83. Жарков В.Н., Молоденский С.М. О поправках за динамический модуль сдвига для чисел Лява. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, № 5, 1977, с. 17 - 20.
84. Жарков В.Н., Молоденский С.М. Поправки за динамический модуль сдвига для чисел Лява и чандлеровского периода. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, № 6, 1979, с. 88 - 89.
85. Молоденский С.М., Жарков В.Н. О чандлеровском колебании и частотной зависимости Q_p мантии Земли. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, № 4, 1982, с. 3 - 16.
86. Яцкив Я.С., Корсунь А.А., Рыжова Л.В. О спектре координат полюса Земли за время с 1846 по 1971 г. *Астр. Ж.*, т. 49, № 6, 1311 - 1318, 1972.
87. Currie E. G. Period, Q_p and amplitude of the pole tide. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, 1975, v. 38, p. 179 - 185.
88. Френкель Я.И. Введение в теорию металлов. М.-Л., ГИИТЛ, 1950, с. 285 - 288.
89. Gans F. Viscosity of the Earth's core. *J. Geophys. Res.*, 1972, v. 77, 2, p. 360 - 366.
90. MacDonald G. J., Ness N. F. A study of the free oscillations of the Earth. *J. Geophys. Res.*, 1961, v. 66, 6, p. 1865 - 1911.
91. Toomre A. On the "nearly diurnal wobble" of the Earth. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, 1974, v. 38, p. 335 - 348.
92. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.* 1963, v. 17, 1, p. 1 - 20.
93. Roberts P. H., Stewartson K. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body, II. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1965, v. 61, p. 279 - 288.
94. Busse F. H. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *J. Fluid Mech.*, 1968, v. 33, 4, p. 739 - 751.
95. Rochester M.G., Jacobs J.A., Smylie D.E., Chong K. F. Can precession power the geomagnetic dynamo? *Geophys. J. Roy. astron. Soc.*, 1975, v. 43, p. 661 - 678.

96. Loper D.E. Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo. *Phys. Earth Planet. Int.*, 1975, II, p.p. 43 - 60.
97. Fedorov E.P. Nutation as derived from latitude observations. *Astron. J.*, 1959, v. 64, p. 81.
98. Fedorov E.P. Nutation and forced motion of the Earth's pole. N. Y.: Macmillan, 1963.
99. Yatskiv Ya. S., Sasao T. Chandler wobble and viscosity of the Earth's core. *Nature*, 1975, v.255, p. 655.
100. Молоденский С.М. Влияние вязкости ядра на приливные изменения скорости вращения Земли. В сб. Вращение и приливные деформации Земли. Киев, "Наукова Думка", вып. I4, 1982, с. 46 - 49.
101. Пильник Г.П. Астрономические наблюдения земных приливов. *Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли"*, 1970, № 3, с. 3 - 14.
102. Харков В.Н., Любимов В.М. Теория крутильных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, 1970, № 2, с. 3 - 14.
103. Харков В.Н., Любимов В.М. Теория сфероидальных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. *Изв. АН СССР, сер. Физика Земли*, 1970, № 2, с. 3 - 12.
104. Dahlen F.A. Models of the lateral heterogeneity of the Earth consistent with Eigenfrequency splitting data. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, 1976, 44, p. 77 - 105.
106. Edmonds A.R. Angular momentum in quantum mechanics. Princeton Univ. Press, 1957.
107. Lee W.H.K., Kaula W.M.A. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography. *J. Geophys. Res.*, 72, 2, p. 753 - 758, 1967.
108. Ботт М. Внутреннее строение Земли. М., "Мир", 1974.
109. Перцев Б.П. Влияние морских приливов ближних зон на земно-приливные наблюдения. *Изв. АН СССР, Физика Земли*, № I, 1976.
110. Beaumont C., Berger J. Earthquake prediction: modification of the Earth tides by dilatancy. *Geophys. Journ. Roy. astr. Soc.*, 39, 111 - 121, 1974.
- III. Мячкин В.И. Процессы подготовки землетрясений. М., "Наука", 1978, 230с.
- III2. Добровольский И.П., Зубков С.И., Мячкин В.И. Об оценке размеров зоны проявления предвестников землетрясений. В сб. "Моделирование предвестников землетрясений". М., изд. АН СССР, 1980, с.7 - 44.
- III3. Островский А.Е., Старков В.И., Старкова Э.Я. Аномалии в амплитудах и фазах приливных наклонов. В сб. "Изучение земных приливов". М., "Наука", 1980, с. 182 - 187.
114. Harrison J.C. Cavity and topographic effects in tilt and strain measurement. *Journ. Geophys. Res.*, 81, 1976, p. 319 - 328.

CALCULATION and TRANSFORMATION of POST-NEWTON
EPHEMERIDES in EINSTEINS RELATIVISTIC THEORY

Dr.-Ing. Jürgen Friedrich

Institut für Theoretische Geodäsie der Univ. Bonn
Nußallee 17, D-5300 Bonn 1

JLG - 68 meeting 5-6 November 1988

Precise ephemerides are necessary for all geodetic and geophysical applications like VLBI, LLR or gravimetry. On the basis of the FORTRAN-program "GLE2000" of SCHASTOCK, which solves the n-body problem for sun, planets and earthmoon in Post-Newton approximation according to Einsteins theory of general relativity, the ephemerides are transformed in several coordinate frames by Post-Newton transformations to gain the results published in the Astronomical Almanach. For this purpose the author enlarged the FORTRAN-program to the version "EPH2000". One use of "EPH2000" is the computation of theoretical tidal forces by ephemerides and the comparison with tidal developments, f.e. of XI with 3070 tides. This one is not precise enough for the analysis of super-conducting observations in the range of ± 10 nano Gal. Now is the question, whether it is generally possible to gain tidal developments within ± 10 nano Gal.

C O N T E N T S

	Page
1. Abstract	1
2. Basic principles of the classical and relativistic theory	2
3. Equations of motion	3
4. Equations of transformation	5
5. Results for the tidal force	6
6. References	6

2. BASIC PRINCIPLES of the CLASSICAL and RELATIVISTIC THEORY		
	classical	relativistic
COORDINATES	$az = \text{absolute time}$ $z^i = \text{spacecoordinates}$ $i = 1, 2, 3$	$x^\alpha = (x^0, ct) = \text{4-coordinat.}$ $x^0 = ct = \text{timecoordinate}$ $t = \text{coordinate-time}$ $x^i = \text{spacecoordinates} \neq z^i$ $\alpha = 0, 1, 2, 3$
METRIKTENSOR	$\Delta_{ij} = 1 \text{ for } i=j,$ $= 0 \text{ for } i \neq j,$ $= \text{constant for}$ $\text{all } z^i.$	$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ $= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ $\eta_{\alpha\beta} = +1 \text{ for } \alpha=\beta=0,$ $= -1 \text{ for } \alpha=\beta=i,$ $= 0 \text{ für } \alpha \neq \beta.$
FUNDAMENTALFORM	$ds^2 = \Delta_{ij} dz^i dz^j$ gravitation-law	$dr^2 = (cd\tau)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $\neq ds^2$ $\tau = \text{proptime, measured}$ $\text{with atomic clocks.}$ SRT = $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ART = $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ $h_{\alpha\beta} \text{ (gravitation)}$
EQUATION OF MOTION	$dm b^i =: dK_{0+G+I}^i$	$dm_0 \{ d^2 x^\alpha / d\tau^2 +$ $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (dx^\beta / d\tau)(dx^\gamma / d\tau) \}$ $=: dF^\alpha$

$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta, \gamma} + g_{\delta\gamma, \beta} + g_{\beta\gamma, \delta}) / 2 = \text{Christoffel-Symbols,}$
 $g^{\alpha\beta}$ is the invers of $g_{\alpha\beta}$, $dm_0 = \text{rest-mass, } dF^\alpha = \text{surface-forces,}$
 $d^2 x^i / dt^2 = \{ (1/c) \Gamma_{\alpha\beta}^0 (dx^i / dt) - \Gamma_{\alpha\beta}^i \} (dx^\alpha / dt)(dx^\beta / dt),$
 $= \text{differential equation for the geodetic line, when } dF^\alpha = 0.$

3. EQUATIONS of MOTION

$S_1 =$ Catalogsystem of the Fix - Stars

$$\text{4-coordinates } y^\alpha = (y^0 =: ct, y^i), \alpha \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$t = \text{TDB} = \underline{\text{Time}} \underline{\text{Dynamical}} \underline{\text{Barycentric}}.$$

Einsteins Field Equations: $R_{\alpha\beta} = (8\pi G/c^4)(T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} T)/2,$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \text{Ricci-Tensor},$$

$$T_{\alpha\beta} = \text{Energy-Momentum-Tensor}, T = g^{\gamma\delta} T_{\gamma\delta}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu + \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu - \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \text{Riemann curvature tensor}.$$

$M_a = Gm_a =$ gravity-constant \cdot mass of the a-te point-mass,

$$r_{ka} \equiv y_a^i - y_k^i, \quad v_{ka} \equiv d(y_a^i - y_k^i)/dt, \quad b_{ka} \equiv d^2(y_a^i - y_k^i)/dt^2$$

$$r_{ka} \equiv |r_{ka}|, \quad v_{ka} \equiv |v_{ka}|, \quad b_{ka} \equiv |b_{ka}|.$$

Metric-Tensor in PPN-Approximation in $S_1,$

(PPN = Parametrized Post-Newton) :

$$g_{00} = 1 - (2/c^2) \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} + (1/c^4) \left\{ 2\beta \left(\sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} \right)^2 \right. \\ \left. + (2\gamma+2) \sum_{a \neq k} M_a v_a^2 / r_{ka} + (3\gamma-2\beta+1) \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} \sum_{c \neq a} M_c / r_{ac} \right. \\ \left. + \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} \left[(r_{ka} \cdot v_a / r_{ka})^2 - \sum_{c \neq a} M_c (r_{ka} \cdot r_{ac}) / r_{ac}^3 \right] \right\},$$

$$g_{0i} = (2\gamma+2)/c^2 \sum_{a \neq k} M_a v_a / r_{ka},$$

$$g_{ij} = - \left(1 + (2/c^2)\gamma \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} \right) \Delta_{ij},$$

Equations of Motion in PPN-Approximation in S_1 :

(Einstein-Infeld-Hoffman "EIH" Equations)

$$b_k = \sum_{a \neq k} M_a r_{ka} / r_{ka}^3 \left\{ 1 + (1/c^2) \left[-2(\beta + \gamma) \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} - \sum_{c \neq a} M_c / r_{ac} \{ 2\beta - 1 - (r_{ka} \cdot r_{ac}) / r_{ac}^2 \} + \gamma v_k^2 + (1 + \gamma) v_a^2 - 2(1 + \gamma) v_k \cdot v_a - (3/2)(r_{ka} \cdot v_a / r_{ka})^2 \right] \right\} - (1/c^2) \left\{ \sum_{a \neq k} M_a \left[r_{ka} / r_{ka}^3 \cdot \{ (2 + 2\gamma) v_k - (1 + 2\gamma) v_a \} \right] (v_k - v_a) - (3 + 4\gamma) / 2 \sum_{a \neq k} M_a / r_{ka} \sum_{c \neq a} M_c r_{ac} / r_{ac}^3 \right\},$$

PPN-parameters: β = nonlinearity-parameter,
 γ = space curvature parameter,
 Einsteins Theory: $\beta = \gamma = 1$.

$$b_k = \sum_{a \neq k} M_a r_{ka} / r_{ka}^3 + \delta b_k (1/c^2),$$

$\delta b_k (1/c^2)$ = relativistic correction.

$$\text{perihelion precession: } \Delta \omega_p = 3(Gm)^{3/2} (t - t_0) / (c^2 a^{5/2} (1 - e^2)),$$

(Merkur, Venus, Erde) = (43.0, 8.6, 3.8) arc seconds in a century,

Earth satellites (Lageos, GPS) = (3.3, 0.5) arc seconds in a year.

Numerical Solution of the n-Body-Problem with the

Runge-Kutta-Nyström method of 7-th order:

t_0 = starting point,

$t_1 = t_0 + h$, h = step length,

$$y_1 = y_0 + h v_0 + h^2 \sum_{\mu=0}^{12} c_{\mu} f_{\mu},$$

$$v_1 = v_0 + h \sum_{\mu=0}^{12} d_{\mu} f_{\mu},$$

with

$$f_0 = f(t_0, y_0, v_0) \equiv b_k(t_0, y_0, v_0),$$

$$f_{\mu} = f(t_0 + \alpha_{\mu} h, y_0 + \alpha_{\mu} h v_0 + h^2 \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \gamma_{\mu\nu} f_{\nu}, v_0 + h \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \beta_{\mu\nu} f_{\nu}),$$

$c_{\mu}, d_{\mu}, \alpha_{\mu}, \beta_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu}$ = constants.

4. EQUATIONS of TRANSFORMATION

Coordinate systems:

$$S, \quad x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^\beta), \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\gamma),$$

$$\bar{S}, \quad \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\beta), \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}^\gamma),$$

Transformation matrices:

$$\Pi_\beta^\alpha \equiv \partial x^\alpha / \partial \bar{x}^\beta = \text{transformation matrix of } \bar{S} \text{ in } S,$$

$$\bar{\Pi}_\beta^\alpha \equiv \partial \bar{x}^\alpha / \partial x^\beta = \text{transformation matrix of } S \text{ in } \bar{S},$$

Equation of transformation for a 4-vector:

$$\bar{a}^\alpha = \Pi_\beta^\alpha a^\beta, \quad a^\alpha = \bar{\Pi}_\beta^\alpha \bar{a}^\beta,$$

$$\bar{a}_\alpha = \bar{\Pi}_\alpha^\beta a_\beta, \quad a_\alpha = \Pi_\alpha^\beta \bar{a}_\beta.$$

Transformation equations in PPN-approximation:

$$S \equiv S, \quad g_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}$$

$$\bar{S} \equiv S_A = \text{ellipsoidal local system in a topocentrum } \bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta},$$

$$\bar{a}^\alpha = \Pi_\beta^\alpha a^\beta, \quad \Pi_\beta^\alpha = (\Pi_\beta^\alpha)^{-1}, \quad \Pi_\beta^\alpha = (L_\mu^\alpha + G_\mu^\alpha) R_\beta^\mu,$$

$L_\beta^\alpha =$ Lorentz-transformation matrix,

$$L_0^0 = \gamma \equiv (1 - (v/c)^2)^{-1/2}, \quad v = |v^i|, \quad v^i \equiv v_i = \text{relativ velocity},$$

$$L_i^0 \equiv L_0^i = (\gamma/c)v^i, \quad L_j^i = ((\gamma-1)/v^2)v^i v_j,$$

$G_\beta^\alpha =$ transformation matrix for gravitation,

$$G_0^0 = - (1/2)h_{00}(\bar{O}), \quad G_i^0 = (1/2)L_i^0 h_{00}(\bar{O}),$$

$$G_0^i = - (1/2)L_0^i h_{00}(\bar{O}) - h_{0i}(\bar{O}), \quad G_j^i = (1/2)h_{00}(\bar{O})\Delta_{ij},$$

$R_\beta^\alpha =$ transformation matrix for rotation,

$$R_0^0 = 1, \quad R_i^0 = R_0^i = 0, \quad R_j^i = E_j^i = \text{rotation matrix of } \bar{S} \text{ in } S.$$

$$\text{Doppler effect} = \delta\nu \equiv \bar{\nu} - \nu = \bar{\nu}\{1 - \kappa + \kappa(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})\},$$

$$\text{Aberration} = \delta\mathbf{n} \equiv \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n} = [(\kappa/c)\{\bar{\mathbf{v}} + \kappa(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{n}} - (\kappa-1)\{\bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{v}}/\bar{v}^2\}] / [\kappa\{1 - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})/c\}],$$

$\nu, \bar{\nu}, \mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}} =$ frequency and direction of an electromagnetic signal in S, \bar{S} ,

$$\kappa \equiv [1 - \{(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{U})/c\}^2]^{-1/2}, \quad \mathbf{U} = \text{gravitation potential in } \bar{O}.$$

Accuracy of the relativistic DE200 ephemerides:

direction earth - moon $\pm 0.005''$, (LLR),
distance earth - moon $\pm 1. \text{ m}$,
direction baryz. - inner planets $\pm 0.005''$, (radar)
distance baryz. - inner planets $\pm 1. \text{ km}$,
direction baryz. - outer planets $\pm 0.5''$, (optical)
distance baryz. - outer planets $\pm 10^{-6} \cdot \text{d}$.

Accuracy of the classical ephemerides by Brown and Newcomb:

direction earth - moon $\pm 0.5''$, (optical),
distance earth - moon $\pm 1. \text{ km}$,
direction earth - sun $\pm 1.0''$, (optical),
distance earth - sun $\pm 200. \text{ km}$.

5. R E S U L T S f o r t h e T I D A L F O R C E

$|g_{i,T}(\text{with and without Aberration})| = \pm 5 \text{ nano Gal, (peak to peak),}$
 $|g_{i,T}(\text{relativistic - classical})| = \pm 5 \text{ nano Gal,}$
 $|g_{i,T}(\text{relativistic - XI})| = \pm 20 \text{ nano Gal,}$
 $|g_{i,T}(\text{relativistic - Büllesfeld})| = \pm 60 \text{ nano Gal.}$

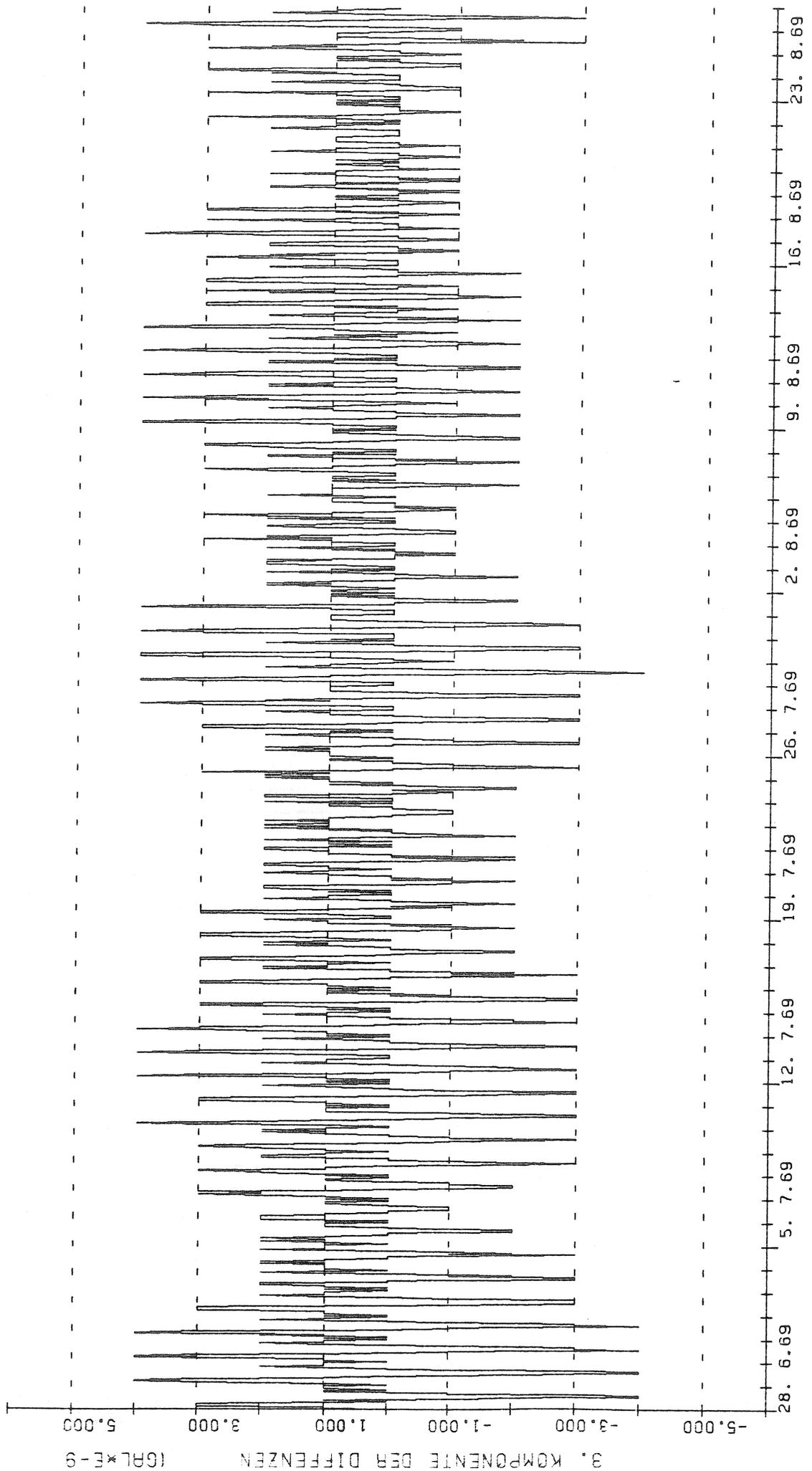
CPU-Time for tidal force computation with an IBM 3086:

(hourly values for 60 days = 1440 values),
Büllesfeld = 0.5 min, (665 tides),
XI = 2.2 min, (3070 tides),
class. ephem. = 7.0 min,
relat. ephem. = 14.3 min.

6. R E F E R E N C E S

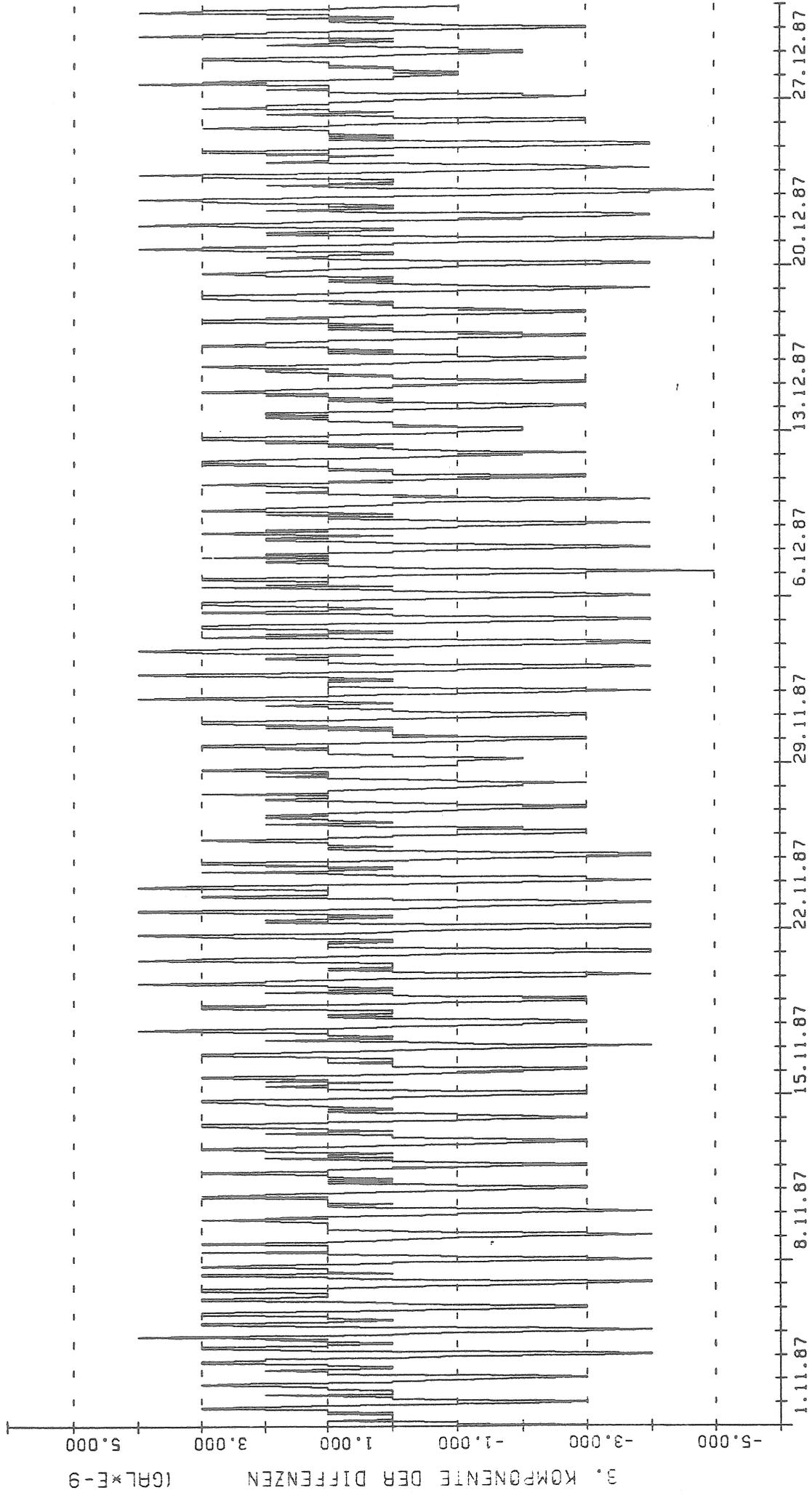
FRIEDRICH, J.: Relativistische Grundlagen geodätischer Modelle, Mitt. aus
den Geod. Inst. der Univ. Bonn, Nr. 76, Bonn 1988
NEWHALL, X. X./STANDISH, E. M./WILLIAMS, J. G.: DE102: a numerically
integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries,
Astronomy and Astrophysics, Vol. 125, 1983, S. 150-167
SCHASTOCK, J.: Drei Studien zur Dynamik des Erde-Mond-Systems, Disserta-
tion, Tübingen 1987

- BSPLOT - INSTITUT F. THEORETISCHE GEODÄSIE D. UNIVERSITÄT BONN



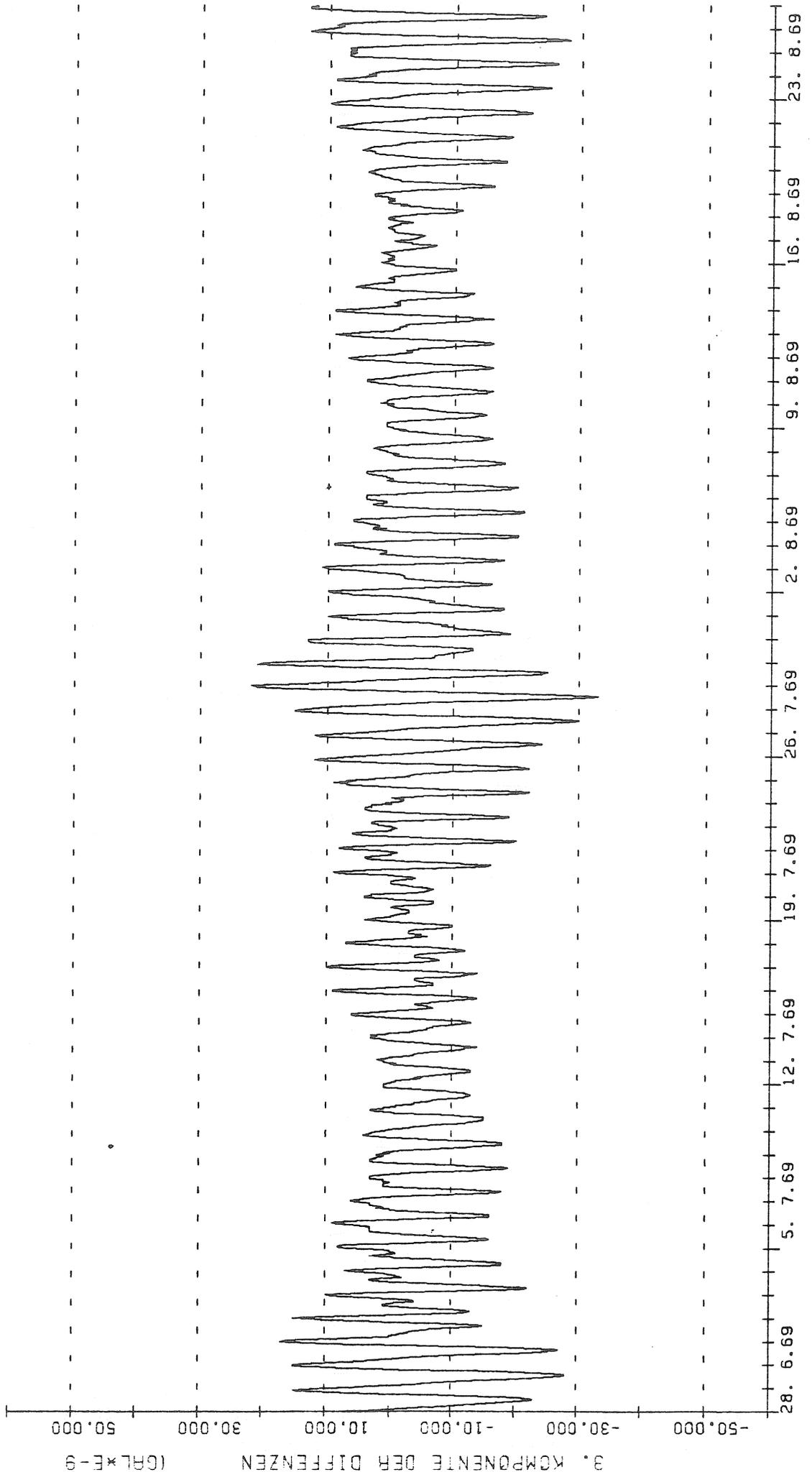
DIFFERENZEN RELAT. - KLASS. GEZ.-BESCHL.

- BSPLOT - INSTITUT F. THEORETISCHE GEODAESIE D. UNIVERSITAET BONN



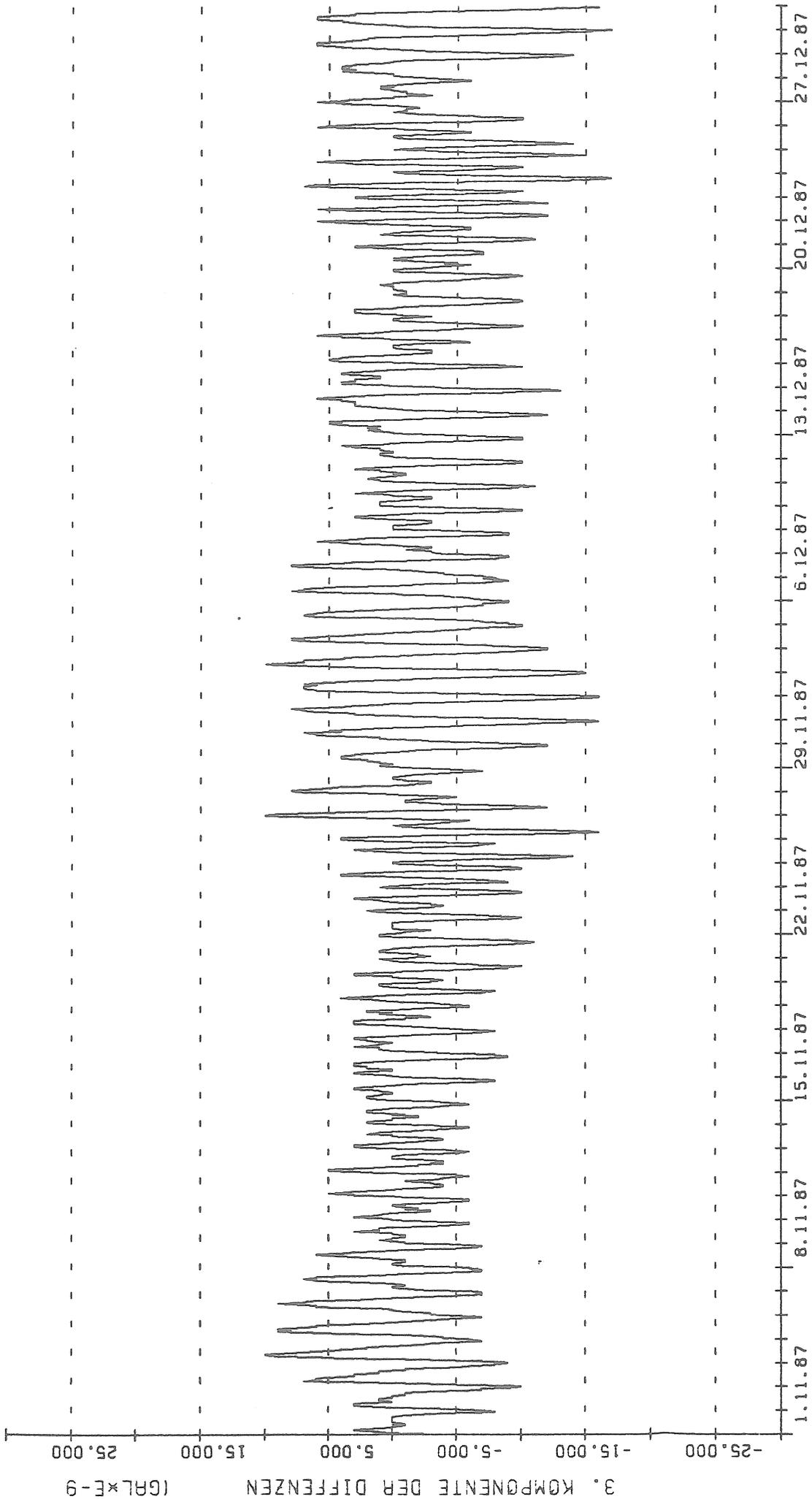
DIFFERENZEN RELAT. - KLASS. GEZ. - BESCHL.

- BS PLOT - INSTITUT F. THEORETISCHE GEODAESIE D. UNIVERSITAET BONN



DIFFERENZEN RELAT. GEZ.-BESCHL. - XI3070

- BSPLIT - INSTITUT F. THEORETISCHE GEODAESIE D. UNIVERSITÄT BONN



DIFFERENZEN RELAT. GEZ.-BESCHL. - XI3070

LOADING GREEN'S FUNCTIONS FOR A CONTINENTAL SHIELD WITH A Q-STRUCTURE FOR THE MANTLE AND DENSITY CONSTRAINTS FROM THE GEOID.

H.-G. Scherneck¹

Summary

Complex valued loading Green's functions are computed for a shield structure with thick crust and cold upper mantle. Visco-elastic rheology in the mantle is incorporated using the absorption band model for transient creep; in one example the transient creep model is combined with a steady-state (Maxwell) rheology for the case of a standard asthenosphere at long loading periods. Comparison is made with the results for an elastic structure (Farrell, 1972).

The earth model was developed for the Fennoscandian shield deriving constraints for the density structure from mean topography, geopotential and free air gravity. The elastic structure was adopted from results of FENNOLORA refraction seismic sounding.

The density constraints appear to have noticeable impact on the results in so far as an increase of the near field deformation due to less dense material in the thick crust is counterbalanced by the density increase in the sub-crustal region required to arrive simultaneously at low geoid and low topography.

In the second part of this paper a consistent approach to disk load Green's functions is pursued including disk load Kummer transforms derived by numerical integration. It turns out that the improvements with respect to the mixed point/disk load computations are negligible except in the case of strain and tilt at great load distance.

Introduction.

The computation of Green's functions for the ocean tide loading problem is recommended to adopt earth models which are representative for the structure in the region of the experiment. This recommendation is supported by the notion, that the loading Green's functions are sensitive to regional structures of crust and mantle of a certain scale size if the surface loads are situated within a distance of approximately the same scale; at greater distance than roughly - 500 km, deformation is mediated as if the planet had a laterally homogeneous structure as obtained from global reference earth models. Shallow heterogeneities below load, field point, and the region in between cause successively less impact on the load response as the distance between load and field point increases.

This property of the Green's function allows (with some restriction) to set aside a law imposed by mathematical physics: The reciprocity and spatial stationarity of Green's functions have their

¹Uppsala University, Dept. of Geophysics, Section of Geodesy, Hällby, S-755 92 Uppsala, Sweden

origin in an assumed laterally homogeneous spherical structure. They require an orthogonal system of base functions which expand the deformation field with uncoupled, spatially independent response coefficients. The device to virtually extend the regional structure to the entire globe turns out efficient. On the other hand, first attempts to incorporate perturbations of spherical symmetry on the global scale run into severe problems, e.g. Pagiatakis' (1989) treatment of the Coriolis force. There, a rotational bulge (required for consistency - was not considered. Moreover, his result of spherically symmetric (i.e. location-independent) Green's functions is implausible in the light of the symmetry break implied by rotation (which e.g. leads to free-oscillation mode splitting; Aki & Richards, 1980). Wahr & Sasao's (1981) treatment of the liquid core resonance elegantly puts the perturbations of the loading functions, confined to harmonic degree two, into the body tide response and retains the Green's function as the spherically symmetric remainder. The future of the Green's function concept will certainly benefit from the scrutiny with which we will be able to separate the effects of laterally heterogeneous structures from the laterally averaged structure and determine the significance of perturbations of spherical symmetry for the Green's functions. Crucial in this context is the devising of methods for the accurate computation of Green's functions given a regionally anomalous structure of limited size.

Interpretation of various tide observations conducted in central Scandinavia demanded to compute loading Green's functions representative for the Fennoscandian shield. Two features of this shield are distinct: Its crust is thick although it is old, and its topography is low although the thick, light crust would under normal conditions reach an elevation of at least one kilometer. Although Green's functions for oceanic crust - overlying a mantle with dramatic temperature profiles and age differences, comprising hot partial melts and cold subducting slabs - would certainly meet more excitement from the tide community, the study of the case of the old and calm crust can at least provide some clues for general order-of-magnitude statements and contribute experience with earth models.

1 Regional earth model

The basic structure below 200 km depth of the model from which the loading Green's was computed was adopted from PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). PREM includes a profile of the quality factor, Q , given at a period of 200 s. Extrapolation to tidal frequencies was based on the absorption band $Q \sim \omega^\alpha$ model of Minster & Anderson (1981; c.f. also Liu et al., 1976; Anderson & Given, 1982; Zschau, 1983, 1986). A value of 0.15 was assumed for parameter α .

The top 200 km of the structure was inferred from Fennoscandia seismic profiling (c.f. Guggisberg, 1986) and gravity field data from the Fennoscandian shield. Relations between seismic velocities and density were taken from Birch (1961) and Drake (1965). Since the loading Green's functions are aimed to be representative for a regionally averaged crust (i.e. on a 500 km scale), the study emphasises the gross features of the Fennoscandian shield. Details on smaller scale were required in the case of the "Blue Road" (Jentzsch, 1986) which transects the Caledonides. A scale size of 500 km should provide some degree of safety as regards perturbations from lateral structural gradients in the periphery.

The anomalous structure was assumed to persist within a spherical cap with a radius of 5° and to a depth of 200 km. Density profiles had to fulfill two constraints: (a) low topography (150 m) and near isostatic compensation of the shield, i.e. practically vanishing free air gravity anomaly (FAGA), is to be maintained; (b) the geoid anomaly should not exceed -10 m in the centre of the disk.

The density within the cap was reduced in a first instance by assuming a Moho depth of 45 km (Meissner et al. 1987); adjustment towards slightly increased mean crustal density was indicated by the absence of thick sedimentary layers and the existence of a thick basic part of the lower crust associated with near 7 km s^{-1} p-wave velocities (Hirschleber et al., 1975; Calgagnile & Panza, 1978; Guggisberg, 1986). The extra mass required to compensate the less dense crust was assumed to be distributed in the upper mantle thinning linearly downward, meeting normal density at 200 km depth. This appears consistent with the assumption of temperatures being less than the average by 300°K in the upper mantle. The density has to plane out at a depth of compensation as long-term ductility increases with depth. The material column below this depth of 200 km is then assumed to be internally compensated.

The temperature T of a layer depth-coincident with an average asthenosphere was consequently reduced, thus increasing the material's Q -factor according to

$$Q(T) \sim \exp \{ \alpha H / kT \},$$

where H denotes enthalpy and k Boltzmann's constant (c.f. Ranalli, 1987). A decrease for T from 1600 to 1300 K increases Q from the nominal value of 80 to approximately 200.

The constraint of low FAGA turned out uncritical for the density structure, since the horizontal extent of the disk argues for a near hydrostatic equilibrium - possible effects of stress in the mantle below 200 km left aside. The FAGA criterion becomes practically equivalent to the constraint of equilibrium topography. The low topography demands the dominating part of the counterbalancing masses to be situated in the upper mantle. If the thick Fennoscandian crust would rest above an average upper mantle, an average topography of 1500 m would result, i.e. a structure similar to the South-African Plateau. The post-glacial isostatic residual is probably responsible for the minute FAGA of the region (Balling, 1984). Fennoscandia is expected to achieve isostatic equilibrium after less than 100 m additional uplift.

The constraint from the geoid anomaly turned out more critical. The density on the mantle side of the Moho had to increase by two percent in order to achieve an anomaly of -15 m in the centre; less density left greater geoidal undulation. Smaller anomalies were difficult to accommodate as the depth of the Moho or the topographic height was to be kept. The model approached the two percent density increase linearly, starting from the PREM value at 200 km depth. A more slight profile than the assumed wedge would produce a smaller sub-Moho density increase, but this would not change the computed geoid anomaly to any significant degree.

Is a geoid low of -15 m due to density structure in the lithosphere realistic? Contributions from other sources relate to post-glacial rebound and mantle convection. Estimates of the geoid anomaly produced by the remaining post-glacial rebound are around -10 m (Mitrovica & Peltier, 1989) or below -5 m (Fjeldskaar & Cathles, 1984); uncertainties arise from whether the lower mantle rheology is

predominantly transient, or from the degree of nonadiabaticity of internal boundaries. Mantle convection below continents is able to cause anomalies of 5 m or less for high Rayleigh numbers and minimum 100 km elastic thickness of the lithosphere (Marquart & Schmeling, 1989); however, these anomalies start to become less pronounced at wavelengths of 500 km and below. Relying on the hypothesis that the gross structure of central Europe - disregarding features of less than 500 km extent - is representative for an average continent, observed geoid anomalies on profiles running south-west into the central European area may provide though limited evidence. On these profiles effects from convection beneath the North Atlantic should be minimum. Geoid anomalies possibly associated with the Fennoscandian Shield between -15 and -20 m are found (Marquart & Lelgemann, 1990). The post-glacial residual must be subtracted from this, thus indicating that -15 m might be a great though plausible value. Successive studies on the physical sources of European geoid anomalies, especially those presumed to originate in and below the asthenosphere, will be useful for further refinement of the present matter.

In summary, the structure model derived so far has been pushed to a limit, where observed gravity field anomalies are attributed to upper mantle and crustal structure in toto - with exception for post-glacial rebound related anomalies. The density profile of the upper mantle has been designed at the limit of what could be plausibly related to a low-temperature structure. The structure itself presents the relatively rare case of thick crust with low topography.

A second model was constructed in which asthenosphere rheology was assumed Maxwellian with viscosity $\eta=10^{20}$ Poise, imbedded in the Q structure of the absorption band model. This model was to cover the case that a tide period is beyond the absorption band, which is shifted towards higher frequencies as temperature comes close to the melting point (Anderson & Given, 1982).

Altogether one has to expect comparatively small effects of to the density structure with respect to the results of Jentzsch (1986) since the counterbalancing density increase in the upper mantle is reduced in north-western Scandinavia as one approaches the North Atlantic.

COMPUTATION OF GREEN'S FUNCTIONS

Complex valued Load Love numbers h'_n , nk'_n , nl'_n were computed with the program written by Zschau (c.f. Zschau, 1979; Rabbel, 1982), comprising 52 triplets in the Legendre degree interval from zero to 10,000. Subsequent computations of the loading Green's functions were based on the algorithms as described by Farrell (1972), applied separately on the real and imaginary parts. Results for different components and frequencies are given in Figs.1-7. Plotted are always the amplitudes of the complex valued Green's functions. Phases are shown for tangential displacement. Green's functions from Farrell's load Love numbers were also recomputed as a bench mark test.

RESULTS AND DISCUSSION - GEODYNAMIC ISSUES

The difference with respect to Farrell's results turns out expectedly small in the case of most components. The necking of the curves associated with the density and elasticity contrasts between crust and mantle is less pronounced in my results. The introduction of a layer of steady-state creep in the asthenosphere does not affect

the response to loading at 2500 h period significantly.

High precision measurement techniques sufficiently sensitive to ocean loading are practically available only in the case of gravity. Very long baseline radio-interferometry (VLBI) measuring displacements has recently reached the sensitivity level where ocean loading becomes important (Schuh & Möhlmann, 1989). Ocean loading computations comparing the different Green's functions (Scherneck, 1987) concluded that errors in regional and global ocean tide models are about one order of magnitude more important than loading Green's functions from reasonably different solid earth models. The significance of the latter might additionally suffer if the assessment of ocean tide error spatial autocorrelation of Scherneck (1989) turns out realistic.

The major discrepancies between Farrell's and my results (e.g. in the case of areal strain and tilt) are probably due to computational accuracy and the degree spacing between successively computed load Love numbers. The following chapters will return to this problem.

NUMERICAL CONSIDERATIONS.

The summation algorithm for the infinite sums which constitute the Green's functions applied Kummer transformation using the load Love numbers in the high degree limit, and truncation of the remaining sums to 10,000 terms. These sums were solved using Euler-Maclaurin integration in the case of small angular arguments, and Euler-van Wijngaarden transformation if the sums contained more than 13 terms of opposite sign; in other words, Farrell's suggestions were widely followed. There are some exceptions, however: Legendre polynomials were generated from their recurrence relation always; the procedure is in fact numerically stable (Wimp, 1984, p.73) and avoids problems of Gauss' asymptotic formulation with Bessel J_0 functions. At angular arguments greater than $\pi/2$, symmetry and antisymmetry for even and odd degrees around $\pi/2$ was utilized.

The termination criterion for the van Wijngaarden algorithm formulated the a priori error - using the familiar ratio criterion - relative to the combined sum, Kummer transform plus the van Wijngaarden partial sum, rather than the partial sums alone; this takes precaution for cases where both terms tend to cancel each other. The termination criterion demanded that the a priori error remained less than one part per million during eight successive computations of the partial sums.

Since Farrell did not explicitly state the size of the loading disk used to produce his tables, comparison was difficult in some cases. The bench mark test concludes that tilt results are irreproducible at the ten percent level for distances beyond 100° . The procedure that carries out the van Wijngaarden algorithm was additionally tested successfully on slowly converging alternating series like Taylor expansion of $\log(1+x)$. The precision regularly obtained was within machine precision (16 significant decimals), even when x was 1.2 (i.e. outside the convergence radius of the untransformed sum).

2 Disk integrated Kummer transforms for Green's functions

Francis & Dehant (1987) raised the question whether the Kummer transform of the point load case be combined with the results of the numeric summation of the disk load case. They pointed out the problem

of nonexistence of closed form expressions for Kummer transforms of infinite sums in the disk load case. The following paragraphs will show that the necessary terms can be computed numerically, and that the point load Kummer transforms will almost always suffice as regards accuracy.

Let $\mathcal{K}_{\text{comp}}(\vartheta)$ be the result of the Kummer transform of the infinite sums for tide component c , and let \mathcal{G}_c and \mathcal{D}_c be the point load and disk load Green's functions respectively. Let the load Love numbers approach the limits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n = h'_\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nk'_n = k'_\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nl'_n = l'_\infty$$

where $|h'_n - h'_\infty| < \epsilon$ etc. are sufficiently small. Only the contributions from deformation will be given, and the functions \mathcal{G} , \mathcal{D} and \mathcal{K} shall not include the physical prefactors. Then for gravity as an example,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{grv}}(\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2h'_n - (n+1)k'_n) P_n(\cos\vartheta) \\ &= \sum_{n=0}^N \left[2(h'_n - h'_\infty) - \frac{n+1}{n}(nk'_n - k'_\infty) \right] P_n(\cos\vartheta) + \mathcal{K}_{\text{grv}}(\vartheta) \\ \mathcal{K}_{\text{grv}}(\vartheta) &= \frac{h'_\infty}{\sin \vartheta/2} + k'_\infty \left[\frac{1}{2 \sin \vartheta/2} - \log(\sin \vartheta/2 + \sin^2 \vartheta/2) - 1 \right] \end{aligned}$$

The disk load case is obtained by distributing the loading mass over a disk with arc radius α and then expanding potential and normal stress of the disk in Legendre polynomials. As an alternative, the Green's function of the point load case can be convolved over the disk. The latter approach gives

$$\mathcal{D}_c(\vartheta) = \frac{1}{\sigma} \int_{\text{disk}} A_c(\beta') \mathcal{G}_c(\vartheta') d\sigma' \tag{1}$$

where the area of the disk is denoted by σ . Further, $A_c(\beta')$ is an eventual azimuth dependence of the loading effect, e.g. $A_{\text{tilt}} = \cos \beta'$. In the case for gravity, $A_{\text{grv}} \equiv 1$, hence

$$\mathcal{D}_{\text{grv}}(\vartheta) = \sum_{n=0}^N \left[2(h'_n - h'_\infty) - \frac{n+1}{n}(nk'_n - k'_\infty) \right] d_n(\alpha) P_n(\cos\vartheta) + \frac{1}{\sigma} \int_{\text{disk}} \mathcal{K}_{\text{grv}}(\vartheta) d\sigma'$$

An analytical expression for the integral over the Kummer transform might not be available, which was the 'worry' (in German: *Kummer*) of Francis & Dehant. However, the integral can be computed numerically.

In the disk integration of a horizontal load tide component, e.g. tilt, the azimuth angle is involved. This angle is small if the disk is small with respect to distance AND if the distance is small against $\pi - \alpha$. Moreover, the finite sums are not affected by the angle, since the d_n 's of Farrell (1972, Eq.43),

$$d_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi(1-\cos\alpha)} \int P_n(\cos\alpha') \sin\alpha' d\alpha' d\lambda' = -\frac{\text{ctg } \alpha/2 \cdot \frac{\partial P_n(\cos\alpha)}{\partial \alpha}}{n(n+1)} \quad (2)$$

expand the load potential, and the load component is obtained using local derivatives of the deformation field at the field point, e.g.

$$\delta t_\phi = \frac{1}{g} \frac{d}{rd\phi} (\psi_\phi - gu) = \frac{G \delta m}{r^2 g} \frac{\partial}{\partial \phi} \sum_{n=0}^{\infty} (k'_n - h'_n) d_n P_n(\cos\phi)$$

in the case of tilt. Thus, the disk-integrated loading effect is

$$D_t(\phi) = \sum_{n=0}^N \left[\frac{nk'_n - k'_\infty - h'_n + h'_\infty}{n} \right] d_n \frac{\partial P_n(\cos\phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{\sigma} \int_{\text{disk}} \cos\beta' \mathcal{K}_t(\phi') d\sigma'$$

with angles β' and ϕ' from spherical trigonometry,

$$\tan \beta' = \frac{\sin\lambda' \tan\alpha'}{\sin\phi - \cos\phi \cos\lambda' \tan\alpha'}$$

$$\cos \phi' = \cos\phi \cos\alpha' + \sin\phi \sin\alpha' \cos\lambda'$$

$$d\sigma' = \sin\phi' d\phi' d\lambda'$$

Azimuth functions for strain contain squared sine and cosine terms.

The azimuth functions do have an impact when distance is $\pi - \alpha \lesssim \phi < \pi$. The disk size is sometimes set into a fixed proportion to the distance between load and field point, e.g. $\alpha = \phi/30$, so that the range in which β' varies strongly during integration can be as large as 10° .

Turning to strain components, I have noticed that the sum

$$\sum l'_n \frac{\partial^2 P_n(\cos\phi)}{\partial \phi^2} \quad (3)$$

usually employed is less well behaved under the van Wijngaarden algorithm than its equivalent

$$\sum -(n+1)nl'_n P_n(\cos\phi) - \text{ctg}\phi \mathcal{G}_\phi(\phi)$$

which utilises tangential displacement (subscript ' ϕ' '). It also has a simpler Kummer transform, derived from areal strain (subscript ' as' ')

$$\mathcal{K}_{as}(\phi) = \frac{4h'_\infty + l'_\infty}{4 \sin \phi/2}$$

with Green's function

$$\mathcal{G}_{as}(\phi) = 2\mathcal{G}_r(\phi) - \sum (n+1)nl'_n P_n(\cos\phi) \quad (4)$$

Starting from (4), the other strain components were derived using the precomputed sums for the displacement Green's functions, i.e.

$$\mathcal{G}_{\phi\phi}(\phi) = \mathcal{G}_{as}(\phi) - \mathcal{G}_r(\phi) - \text{ctg}(\phi) \mathcal{G}_\phi(\phi) = \mathcal{G}_{as}(\phi) - \mathcal{G}_{\lambda\lambda}(\phi)$$

Tab.1 Loading disk Kummer transform integrands. The terms appear in the following components: radial (r) and tangential (ϑ) displacement, gravity (grv), ocean tide effective potential (otep), strain along ($\vartheta\vartheta$) and across ($\lambda\lambda$) azimuth, areal strain (as), vertical deflection (vd). Further notations: $\eta=\vartheta'/2$, $c=\cos\beta'$, $s=\sin\beta'$.

Term	Azim.fct.	Appearing in	Kummer transf. of	
$\frac{1}{2\sin\eta}$	1	r, grv, as, otep	a	
	$c^2/2$	$\vartheta\vartheta$, $\lambda\lambda$	f	$P_n, -2(n+1)P_n$
	$s^2/2$	$\vartheta\vartheta$, $\lambda\lambda$	g	
$\log(\sin\eta+\sin^2\eta)$	1	grv, otep	c	$-\frac{1}{n}P_n$
$\frac{ctg\eta(1+2\sin\eta)}{2(1+\sin\eta)}$	c	ϑ , t, vd	h	
	$\frac{c^2-s^2}{\tan\vartheta'}$	$\vartheta\vartheta$, $\lambda\lambda$	e	$-\frac{1}{n}\partial_\vartheta P_n$
$\frac{ctg\eta}{4\sin\eta}$	c	t	d	$-\partial_\vartheta P_n$

The Kummer transforms for the various sum terms are given in Tab. 1, denoted by symbols a, h ... g. The relate to the observable components according to

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{K}_r = a h_\infty \\
 \mathcal{K}_\vartheta = -h l_\infty \\
 \mathcal{K}_{grv} = 2a h_\infty - (a-c-1)k_\infty \\
 \mathcal{K}_t = -h k_\infty + d h_\infty \\
 \mathcal{K}_{otep} = -c k_\infty - a h_\infty
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 \mathcal{K}_{vd} = -h (k_\infty - h_\infty) \\
 \mathcal{K}_{\vartheta\vartheta} = a h_\infty - (f-e)l_\infty \\
 \mathcal{K}_{\lambda\lambda} = a h_\infty - (g+e)l_\infty \\
 \mathcal{K}_{as} = a (2h_\infty - l_\infty/2)
 \end{array}
 \right.
 \quad (5)$$

The terms a ... g were integrated numerically. A distance dependent disk radius of $\alpha=\min\{\vartheta/30, 5^\circ\}$ was used. The results are compared with the point load formulas in Fig.8. Displayed are the the differences between point load and disk load terms, normalized with respect to the point load terms (e.g. $|a_{disk}-a_{point}|/a_{point}$). Since the point load formula for g vanishes, f was used for scaling (i.e. g_{disk}/f_{point} is displayed). Point and disk load Green's functions with the disk factors included in the finite sums were also computed for the 24 h period model, the result shown in Figs. 9 and 10 for tilt and strain.

DISCUSSION - NUMERICAL ISSUES

Some accuracy problems appear to exist in the case of tilt beyond 160° . The curves for the Green's functions (Fig.4a) and relative difference of disk versus point load results (Fig.9a) had to be terminated at 170° as they exceeded the plot range. Not obviously systematic signals build up progressively as distance increases. In both figures are the differences additionally amplified by scaling with the Newtonian effect, which disappears as the load moves to the

antipode. For clarity, Fig.9b shows unscaled tilt Green's functions in the range between 160 and 180° with the Newtonian term included for comparison. The recomputed Farrell data and my Green's functions (Fig.4b) disagree vastly at 170° and beyond. Problems are also encountered in the reproduction of the data of Farrell (1972, Tab. A-3) for these large distances (c.f. Tab.2).

The discrepancy between point and disk load functions in Fig.9b is partly an artifact of interpolation between the suspension points (marked with arrows). Beyond 170°, however, the finite sums start to differ significantly, exceeding the effect of disk integration of the Kummer terms. Suspension points were dense in this interval. In other words, the finite sums are more and more affected by the size of the disk as distance approaches the antipode.

The Kummer terms yield always much greater values than the finite sums in the case of tilt. Only near 180° obtain these two contributions similar magnitudes. Thus the offset between Farrell's table the recomputed results, especially at 170°, arises probably in the finite sums. Particular problems with the summation algorithm were not encountered; the formal error at termination was safely below one part per million, and the array of sum terms was not exhausted. Farrell seems to have used much larger disk radii. Furthermore, the importance of the Kummer terms for tilt and the need to use relatively great disk radii for safe sum convergence argue for the numerical integration of the Kummer terms over the loading disk.

The greatest problems with the use of point load Kummer transforms are found in the strain components. Figure 8b shows the differences for e , f and g (disk load minus point load, divided by point load) to approach unity near the antipode, a consequence of the large variation of azimuth β' during integration. In absolute terms, however, strain due to a near antipodal load is mostly conveyed by the radial displacement contribution. The evaluation of the finite sums with the disk factors included does not appear problematic (Fig.10). Instead, the major discrepancies are found between Farrell's and my results, probably due to the sparse specification of load Love numbers.

The gravity, radial displacement and ocean tide effective potential Green's functions converge readily in the summation algorithms; they do not necessitate loading disks at all. Yet if disks are used, the discrepancy between point load and disk integrated Kummer terms are small (Fig. 8a, functions a , b and c), possibly becoming significant beyond 90° if large disk radii are used.

3 Conclusions

The low topography of Fennoscandia, combined with a moderate geoid anomaly along profiles parallel with the North Atlantic constrains loading Green's function variations with respect to the results of Farrell (1972). Care should be taken in studies aiming at regionally representative Green's functions not to rely on seismic wave data alone. Further improvement can be expected from studies of combined mantle and lithosphere dynamics indicative of elevated or lowered temperature and density profiles versus the entire depth of mantle on lateral scales between a few hundred to a few thousand kilometers (e.g. Schmeling, 1989). This study restricted itself to the structures within the top 200 km of the earth.

At the stage of Green's function computation, convergence problems were encountered at large load distances in the case of the tilt

component. Similar problems with strain have been avoided utilizing an alternative formulation for this component, which leads to convergence also in the absence of disk factors. Several aspects of the algorithms involved require attention, especially interpolation and accuracy of sparsely supplied load Love numbers, and the size of the loading disk.

Farrell's original suggestion for the use of disk factors to speed up numerical evaluation of the Legendre sums recommended also a process for finding the limit of the sums as the disk radius approaches zero. It was shown above that finite disks can be used together with numerically integrated Kummer transform terms. Application of this procedure is mainly indicated in the case of the tilt and strain components. Large disk radii and higher demands on accuracy may require the integrated Kummer terms for the other components primarily at load distances near 180° .

Acknowledgements

Although some years have passed since I computed the load Love numbers at Kiel University, I have not forgotten the kind supervision by Prof. J. Zschau as well as the inspiring discussions with him and his students at that time, W. Rabbel and U. Noell. I also wish to thank Prof. W. Zahel for asking me for literature reference concerning my work on the ocean loading problem; without his request this report would still be imaginary.

This work was carried out with support from the Natural Science Research Council of Sweden under grant number G-GU 4770.

References

- Aki, K. & Richards, P. G., 1980. *Quantitative Seismology, Theory and Methods, Volume I*, Freeman, San Francisco.
- Anderson, D. L. & Given, J. W., 1982. Absorption band Q model for the Earth, *J. Geophys. Res.*, 87(B5), 3839-3904.
- Balling, N., 1984. Gravity and isostasy in the Baltic Shield, in: *Proceedings of the First Workshop on the European Geotraverse*, pp. 53-68, eds. Galson, D. A. & Mueller, St., European Science Foundation, Strasbourg.
- Birch, F., 1961. The velocity of compressional waves in rocks to 10 kb, part 2, *J. Geophys. Res.*, 66, 2199
- Calcagnile, G. & Panza, G. F., 1978. Crust and upper mantle structure under the Baltic Shield and Barents Sea from the dispersion of Rayleigh waves, *Tectonophysics*, 47, 59-71.
- Drake, C., 1962, in Grant, F. S. & West, G. F., 1965. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*, p.200, McGraw-Hill, New York.
- Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference earth models, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25, 297-356.
- Farrell, W. E., 1972. Deformation of the earth by surface loads, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10, 761-797.
- Fjeldskaar, W. & Cathles, L. M., 1984. Measurement requirements for glacial uplift detection of nonadiabatic density gradients in the mantle, *J. Geophys. Res.*, 89(B12), 10,115-10,124.
- Francis, O. & Dehant, V., 1987. Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimations, *Bull. d'Inform. Merges Terr.*, 100, 6962-6986.
- Guggisberg, B. Ch., 1986. *Eine zweidimensionale refraktionsseismische*

- Interpretation der Geschwindigkeits-Tiefen-Struktur des oberen Erdmantels unter dem fennoskandischen Schild (Projekt Fennolora)*, Diss. ETH Zürich, 1975, 197 pp.
- Hirschleber, H. B., Lund, C. E., Meissner, R., Vogel, A. & Weinrebe, W., 1975. Seismic investigations along the Scandinavian "Blue Road" traverse, *J. Geophys.*, 41, 135-148.
- Jentzsch, G., 1986. *Auflastgezeiten in Fennoskandien*, Berliner Geowissenschaftliche Abhandlungen, B-13, D. Reimer, Berlin.
- Liu, H.-P., Anderson, D. L. & Kanamori, H., 1976. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 47, 42-58
- Marquart, G., 1989. Isostatic topography and crustal depth corrections for the Fennoscandian geoid, *Tectonophysics*, 169, 67-77.
- Marquart, G. & Lelgemann, D., 1990. On the interpretation of geoid anomalies in Europe with special regard to the EGT profiles, *Tectonophysics* (submitted).
- Marquart, G. & Schmeling, H., 1989. Topography and geoid undulations caused by small-scale convection beneath continental lithosphere of variable elastic thickness, *Geophys. J.*, 97, 511-527.
- Meissner, R., Wever, Th. & Flüh, E. R., 1987. The Moho in Europe - implications for crustal development, *Ann. Geophys.*, 5(B), 357-364.
- Minster, J. B. & Anderson, D. L., 1981, A model of dislocation-controlled rheology for the mantle, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 299, 319-356.
- Mitrovica, J. X. & Peltier, W. R., 1989. Pleistocene deglaciation and the global gravity field, *J. Geophys. Res.*, 94-B10, 13,651-13,672.
- Pagiatakis, S. D., 1988. Ocean tide loading on a self-gravitating, compressible, layered, anisotropic, visco-elastic and rotating earth with solid inner core and fluid outer core, *Techn. Rep.*, 139, Dept. Surveying Engineering, Univ. of New Brunswick.
- Rabbel, W., 1982. *Verformung der Erde unter atmosphärischen Auflasten*, *Dipl. Thesis, Mat.-Nat. Fak.*, Univ. Kiel.
- Ranalli, G., 1987. *Rheology of the Earth*, Allen & Unwin, Boston.
- Scherneck, H.-G., 1987. Studies of ocean loading tides at Onsala by tidal gravimetry, in *Proc. 5'th Work. Meet. Europ. VLBI f. Geod. Astron., Mitt. geod. Inst.*, 71, pp. 115-133, eds. Campbell, J. & Schuh, H., Univ. Bonn.
- Scherneck, H.-G., 1989. Propagation of random ocean tide model errors into computed ocean loading effects, *Bull. d'Inform. Mares Terr.*, 105, 7482-7484.
- Schmeling, H., 1989. Compressible convection with constant and variable viscosity: The effect on slab formation, geoid, and topography, *J. Geophys. Res.*, 12,463-12,482.
- Schuh, H. & Möhlmann, L., 1989. Ocean loading station displacements observed by VLBI, *Geophys. Res. Letters*, 16, 1105-1108.
- Wahr J. M. & Sasao, T., 1981. A diurnal resonance in the ocean tide and in the Earth's load response due to the resonant free 'core nutation', *Gephys. J. R. astr. Soc.*, 64(3), 747-766.
- Wimp, J., 1984. *Computation with Recurrence Relations*, Pitman Advanced Publishing Program, Pitman, Boston, 310pp.
- Zschau, J., 1979. *Auflastgezeiten*, *Habil. Thes.*, Mat.-Nat. Fak. Univ. Kiel, 243pp.
- Zschau, J., 1983. Rheology of the earth's mantle at tidal and Chandler wobble periods, in *Proc. Ninth Int. Symp. Earth Tides*, pp. 605-630, ed. Kuo, J. T., Schweizerbart, Stuttgart.
- Zschau, J., 1986. Tidal friction in the solid earth: Constraints from the Chandler Wobble period, in *Space Geodesy and Geodynamics*, pp. 315-344, eds. Anderson, A. J. & Cazenave, A., Academic Press, London.

Tab.2 Recomputation test of the Green's function for tilt from Farrell's load Love numbers.

ANGLE(°)	TILT		FARRELL	%
1.000E-02	-1.6296D+08 3.3751D+01	unnormalised Farrell-normalised	33.64	0.32
1.000E-01	-1.5301D+06 3.1690D+01	unnormalised Farrell-normalised	32.35	2.1
1.000E+00	-7.8519D+03 1.6262D+01		16.32	0.37
1.000E+01	-2.1357D+01 4.4233D+00		4.38	1.0
1.000E+02	2.0782D-01 -4.3044D+00		-4.31	0.13
1.100E+02	1.7701D-01 -4.4361D+00		-4.39	1.0
1.200E+02	1.4277D-01 -4.2581D+00		-4.18	1.8
1.300E+02	1.0879D-01 -3.8081D+00		-3.72	2.3
1.400E+02	7.7542D-02 -3.1478D+00		-3.14	0.25
1.500E+02	5.0023D-02 -2.3311D+00		-2.44	4.7
1.600E+02	2.7885D-02 -1.4785D+00		-1.67	13.0
1.700E+02	1.0538D-02 -6.3074D-01		-0.83	32
1.730E+02	7.1008D-03 -4.4016D-01			
1.760E+02	5.4801D-03 -3.5158D-01			
1.770E+02	3.9748D-03 -2.5792D-01			
1.780E+02	2.3992D-03 -1.5744D-01			
1.790E+02	6.9155D-04 -4.5893D-02			
1.799E+02	-9.8307D-06 6.5896D-04			

Tab.2 Recomputation test of the Green's function for tilt from Farrell's load Love numbers.

ANGLE(°)	TILT		FARRELL	%
1.000E-02	-1.6296D+08	unnormalised	33.64	0.32
	3.3751D+01	Farrell-normalised		
1.000E-01	-1.5301D+06	unnormalised	32.35	2.1
	3.1690D+01	Farrell-normalised		
1.000E+00	-7.8519D+03		16.32	0.37
	1.6262D+01			
1.000E+01	-2.1357D+01		4.38	1.0
	4.4233D+00			
1.000E+02	2.0782D-01		-4.31	0.13
	-4.3044D+00			
1.100E+02	1.7701D-01		-4.39	1.0
	-4.4361D+00			
1.200E+02	1.4277D-01		-4.18	1.8
	-4.2581D+00			
1.300E+02	1.0879D-01		-3.72	2.3
	-3.8081D+00			
1.400E+02	7.7542D-02		-3.14	0.25
	-3.1478D+00			
1.500E+02	5.0023D-02		-2.44	4.7
	-2.3311D+00			
1.600E+02	2.7885D-02		-1.67	13.0
	-1.4785D+00			
1.700E+02	1.0538D-02		-0.83	32
	-6.3074D-01			
1.730E+02	7.1008D-03			
	-4.4016D-01			
1.760E+02	5.4801D-03			
	-3.5158D-01			
1.770E+02	3.9748D-03			
	-2.5792D-01			
1.780E+02	2.3992D-03			
	-1.5744D-01			
1.790E+02	6.9155D-04			
	-4.5893D-02			
1.799E+02	-9.8307D-06			
	6.5896D-04			

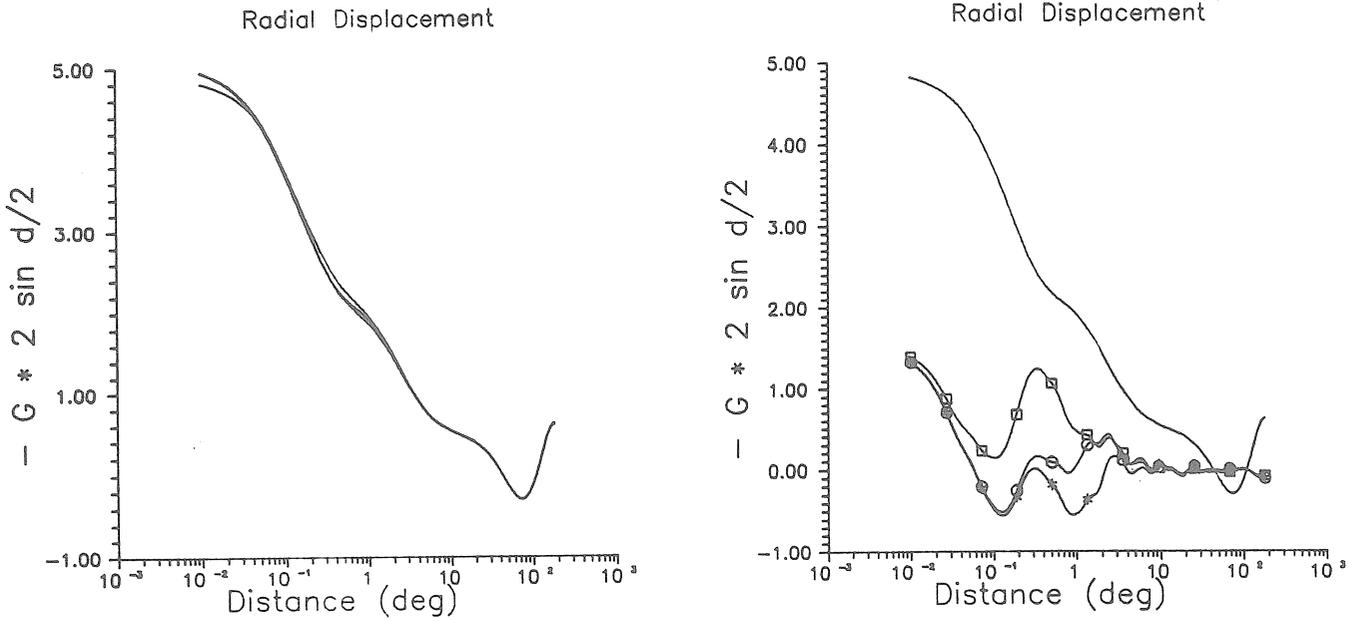


Fig. 1 Green's functions for radial displacement. Left diagramme: The influence of the thick shield structure on the loading Green's function is within ten percent. Amplitudes of complex values are displayed, normalisation is denoted in ordinate label.

Right Diagramme: Unmarked curve - Farrell (1972) (F); the other curves are differences with respect to the former, amplified by a factor of ten of the Green's functions for the thick shield with mantle Q structure (TSQ). * - 24 h period, \square - 8000 h, \circ - 2400 h with low viscosity asthenosphere (LVA).

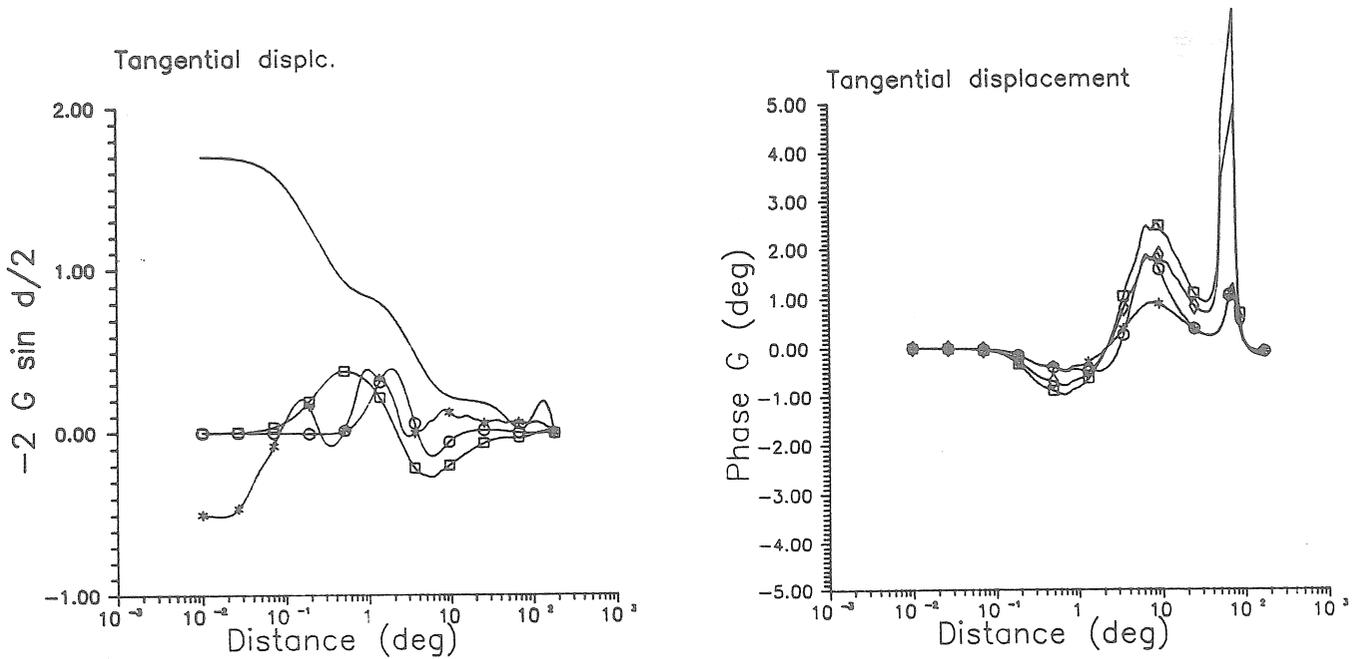


Fig. 2 Tangential displacement, c.f. Fig. 1. Left diagramme, unmarked curve: TSQ 24 h. The other curves are differences with respect to the former, amplified with 10: * - F, \square - TSQ 8000 h, \circ - TSQ-LVA 2400 h. The real part becomes near zero or crosses zero between 40° and 80° , therefore phase makes excursions to 90° .

Right diagramme: Phases of tangential displacement. Phase is zero in Farrell's elastic model. No amplification is used on the curves.

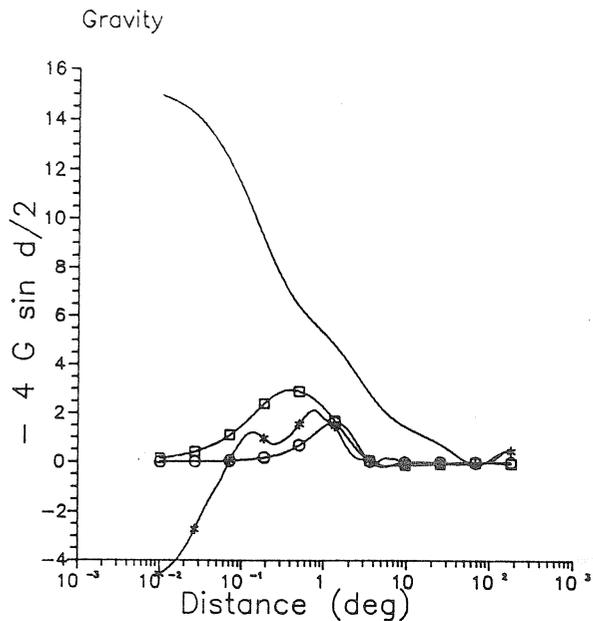


Fig. 3 Gravity, visco-elastic contribution, amplitudes. Curve markers as in Fig. 2, amplification of differences by 10.

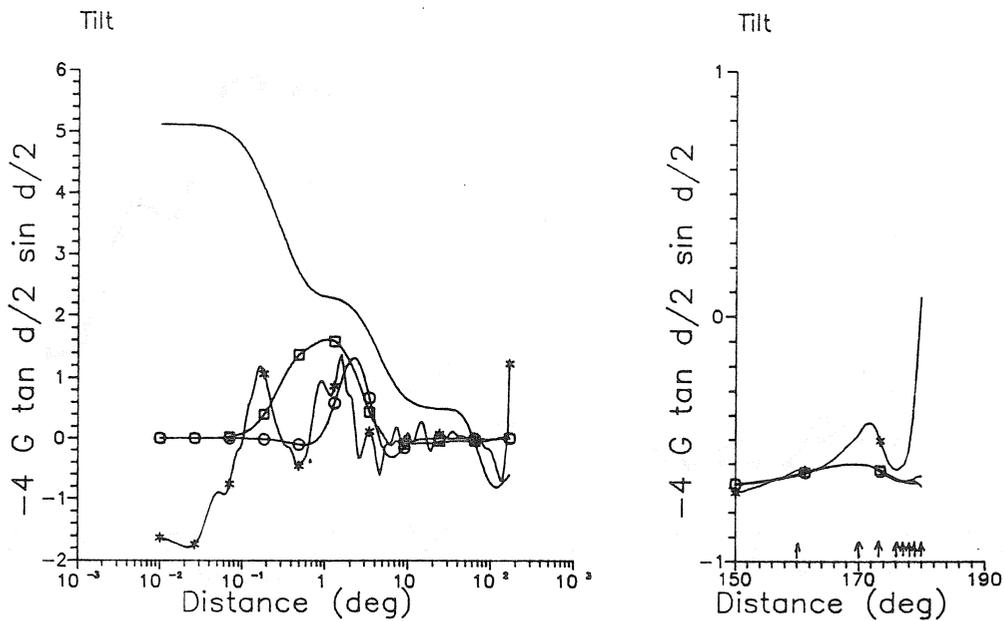


Fig. 4 Tilt, visco-elastic contribution. The curves in the left diagramme have been truncated at 170° due to the vanishing scale function. Irregularities in the difference to the recomputed Green's function of Farrell are probably due to decimal truncation of load Love numbers and their sparseness with respect to Legendre degree.

Right diagramme: The Green's functions of Farrell and of this report depart markedly from each other near 180°. They were computed from load Love numbers at the distances indicated by arrows, inbetween which the curves were interpolated using a fifth degree polynomial.

Vertical deflection

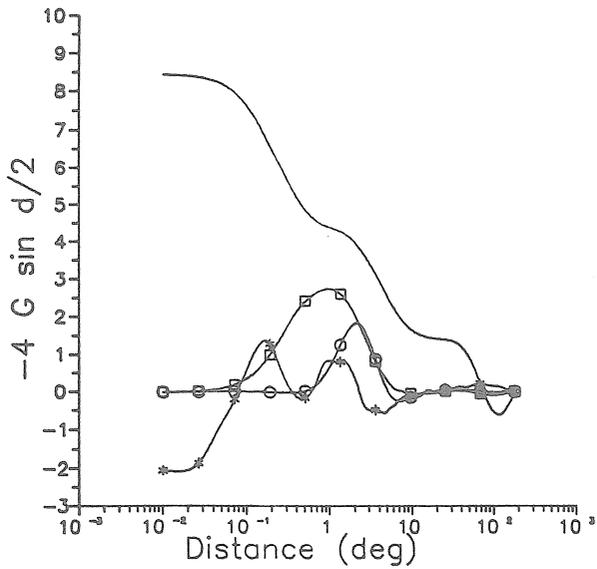


Fig. 5 Vertical (astro-geodetic) deflection, visco-elastic contribution. Curve markers as in Fig.2, amplification of differences by 10. The Newtonian effect with the present scaling is proportional $\text{ctg } \vartheta/2$.

Ocean tide eff. potential

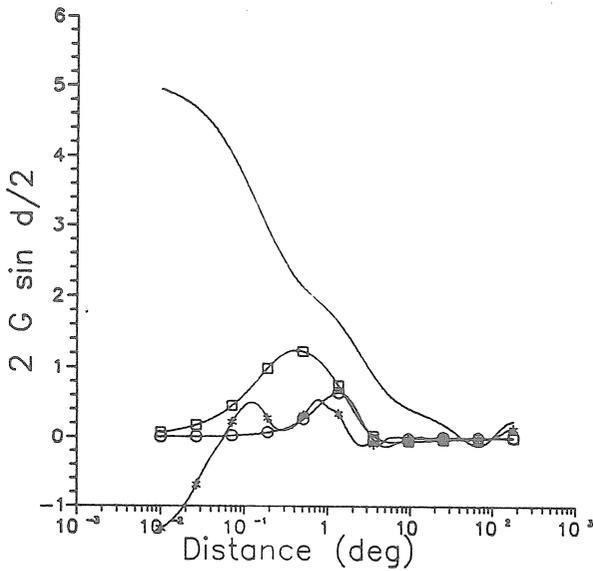


Fig. 6 Ocean tide effective potential, visco-elastic contribution. Curve markers etc. as in Fig. 2.

Strain Enn

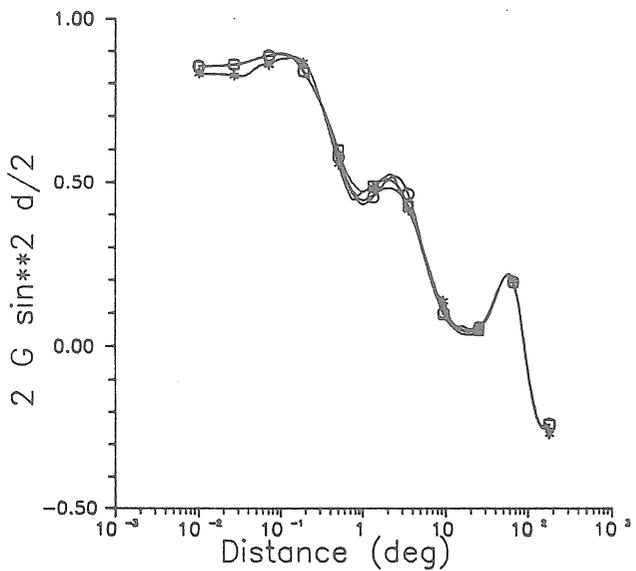


Fig. 7 Linear strain along the azimuth of load - field point. Curve markers as before; undifferenced curves, however, normalised by $4 \sin^2 \vartheta/2$.

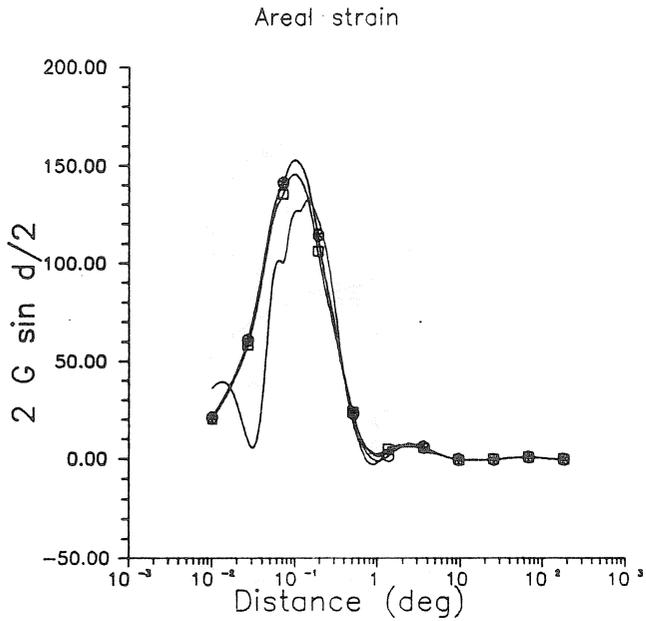


Fig. 8 Areal strain, normalised by $2 \sin \vartheta/2$ in order to enhance near-field features.

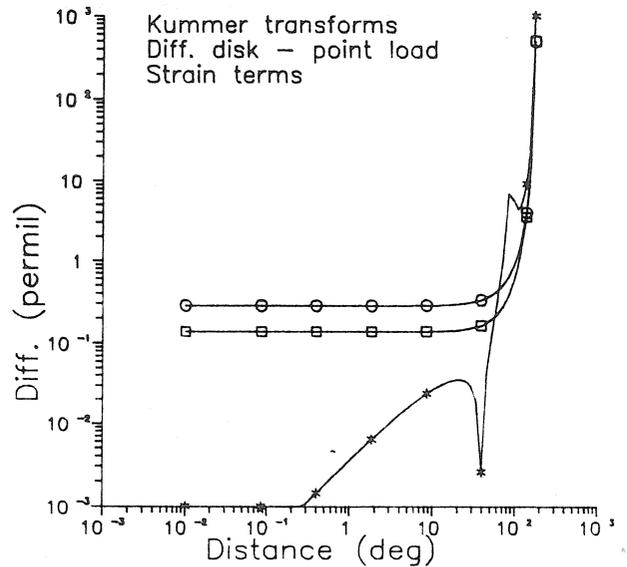
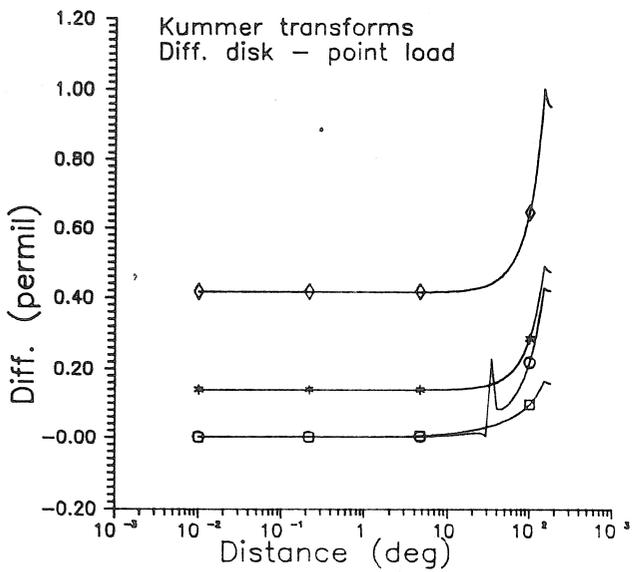
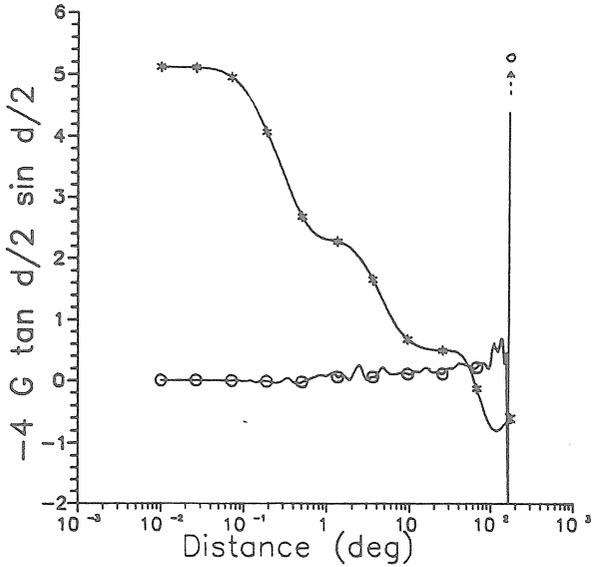


Fig. 9 Discrepancies between point load Kummer transform terms and their disk-integrated equivalents. Script symbols refer to the expressions in Tab. 1. The curves in the left diagramme represent relative effects on: * - a , \square - δ , \circ - c , \diamond - d (c.f. Tab. 1 and Eq.5), $1000 \cdot |a_{\text{disk}} - a_{\text{point}}| / a_{\text{point}}$. Term c_{point} has a zero at $\vartheta = 2 \arcsin[1/2 + \sqrt{1/e + 1/4}]$ and thus generates a peak in the relative error.

Right diagramme: The strain related functions * - a , \square - δ , \diamond - ρ . The point load function for ϑ is zero, so δ has been used for scaling. The size of the disk α depends on distance d : $\alpha = \min \{ 5^\circ, d/30 \}$.

Tilt, point vs disk load



Tilt, point vs disk load

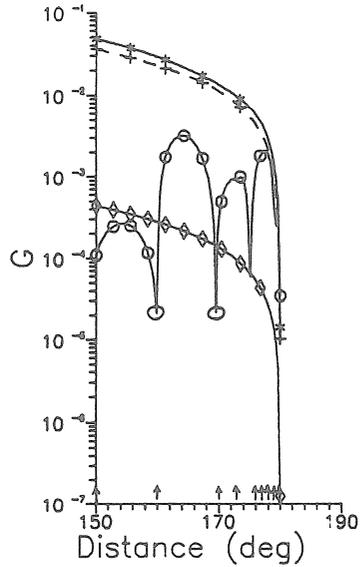


Fig. 10 Discrepancies between the Green's functions for model TSQ 24 h for tilt, computed with and without disk factors. Only the effect of the disk factors in the finite sums is shown. Left diagramme: * - Disk load case; o - difference point minus disk load, amplified with a factor of 100. The normalisation function vanishes at the antipode, amplifying the errors. Curves were truncated at 170° .

Right diagramme: The functions near 180° , unnormalised and given with their correct amplitudes. Also shown are: ◊ - effect of disk-integration of the Kummer transforms for tilt; + - - Newtonian effect for $G_m/(ga^2)=1$, which also scales the other curves.

Strain, point vs disk load

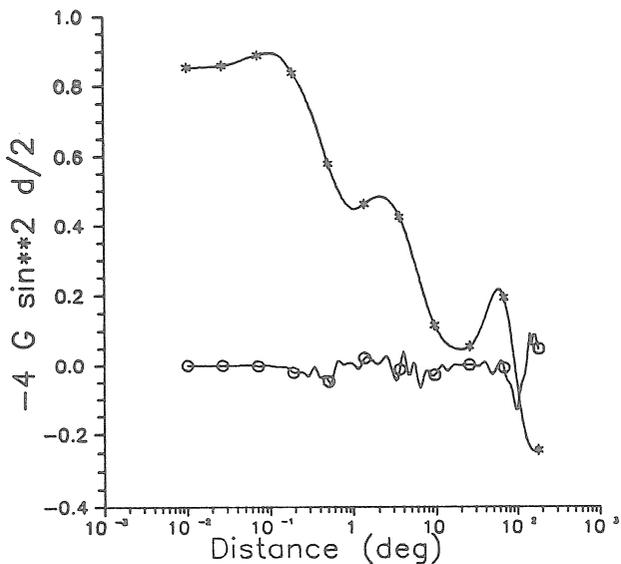


Fig. 11 Equivalent Fig.10 for strain. The full range could be drawn since the normalising function is nonzero inside $(0,\pi)$. Amplification of the difference is again by 100.

BIM 108

15 Novembre 1990

		p.
S.M. Molodenski (Traduction)	Marées, nutation et structure interne de la Terre. (Deuxième partie-suite du BIM n°107)	7665
F. Jürgen	Calculation and Transformation of Post-Newton Ephemerides in Einsteins Relativistic Theory	7765
H.G. Scherneck	Loading Green's Functions for a Continental Shield with a Q-Structure for the Mantle and Density Constraints from the Geoid.	7775

