

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

107

15 MAI 1990

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR

Observatoire royal de Belgique

Avenue Circulaire 3

1180 Bruxelles



BIM 107

15 mai 1990

p.

- H.-G. Wenzel and W. Zürn : Errors of the Cartwright-Tayler-Edden
1973 Tidal Potential Displayed by
Gravimetric Earth Tide Observations at
BFO Schiltach. 7559
- B. Meurers, P. Varga, and J. Mitnyik :
Results from an instrumental comparison
in Budapest - an attempt to study the
reliability of regional variations of
tidal parameters 7575
- S.M. Molodenski (traduction) :
Marées, nutation et structure interne
de la Terre 7587
(Première partie/suite au BIM n° 108).

Errors of the CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN 1973 Tidal Potential Displayed by Gravimetric Earth Tide Observations at BFO Schiltach

H.-G. Wenzel and W. Zürn, Black Forest Observatory (BFO),
Heubach 206, D-7620 WOLFACH.

Abstract

Gravity earth tide records at Black Forest Observatory (BFO) Schiltach with two different LaCoste-Romberg gravity meters equipped with electrostatic feedback have been evaluated using CARTWRIGHT, TAYLER and EDDEN 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments, showing clearly the errors of the CARTWRIGHT, TAYLER and EDDEN 1973 tidal potential in the frequency domain as well as in the time domain. It is concluded, that low noise gravimetric earth tide records should no longer be evaluated using the CARTWRIGHT, TAYLER and EDDEN 1973 tidal potential development.

1. Introduction

A harmonic development of the tide generating potential of sun and moon, complete to degree and order 2 and 3, respectively has been computed by CARTWRIGHT and TAYLER 1971. Because of computational errors, the 2nd degree potential coefficients have been revised by CARTWRIGHT and EDDEN 1973. Following the proposal of CHOJNICKI 1973, some small tidal waves neglected by CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN have been taken from DOODSON 1921. Those 505 tidal potential coefficients, known as CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN-DOODSON 1973 tidal potential development (CHOJNICKI 1973, WENZEL 1976) and abbreviated as CTED 1973 in the following, are mainly used for tidal computations up to date.

It has already been pointed out by WENZEL 1976, that the CTED 1973 tidal potential development has rms errors of about $\pm 0.4 \text{ nm/s}^2$ ($1 \text{ nm/s}^2 = 0.1 \mu\text{gal}$) and spectral error amplitudes of about 0.1 nm/s^2 at maximum for the gravity tide. These errors are mainly due to the omission of the 4th degree and order tidal potential of the moon. In those days, the accuracy of CTED 1973 tidal potential development was believed to be sufficient, because

the precision of earth tide gravity meters in combination with analogue recording was about $5 \dots 20 \text{ nm/s}^2$ in the short period tidal band (1 .. 3 cycles per day). Meanwhile, digital data recording is generally applied, a number of spring gravity meters have been improved by the implementation of electrostatic feedback systems (e.g. LARSON 1968, HARRISON and SATO 1984, SCHNÜLL et al. 1984, VAN RUYMBEKE 1989) and a number of high quality superconducting gravity meters are operating (e.g. RICHTER 1987), giving accuracies below 1 nm/s^2 in the short period tidal band. For such instruments, the errors of the CTED 1973 tidal potential development contribute considerably to the total noise level. Moreover, even very small errors in the tidal potential around 1 cycle per day (cpd) may seriously disturb the investigations of the nearly diurnal free wobble.

Fortunately, some new tidal potential developments have been published in the last years (BÜLLESFELD 1985, TAMURA 1987 and XI 1987, 1989), which all contain the 4th degree and order tidal potential of the moon and the 3rd degree and order tidal potential of the sun. For our investigation, we have used the TAMURA 1987 tidal potential development, because it is based on the best available ephemerides and enables the computation of gravity tides accurate to better than 0.1 nm/s^2 rms by the use of 1200 tidal waves only (DUCARME 1989). We will show in the following, that earth tide gravity records of high precision are capable to display the errors of the CTED 1973 tidal potential development, and that the residuals after least squares adjustment can significantly be reduced by using the TAMURA 1987 tidal potential development.

2. Comparison of Computed Gravity Tides

In order to estimate the accuracy of currently available tidal potential developments, DUCARME 1989 has compared gravity tides computed from a number of tidal potential developments with gravity tides computed by WENZEL 1978 directly from ephemerides of the moon and the sun. The error of CTED 1973 tidal potential derived gravity tides was found to $\pm 0.42 \text{ nm/s}^2$ rms consistent with WENZEL 1976. The TAMURA 1987 and the XI 1989 tidal potentials gave both differences of $\pm 0.1 \text{ nm/s}^2$ rms, although the number of used tidal waves was 1200 and 2920 for the TAMURA 1987 and XI 1989 tidal potential, respectively.

It has to be noted, that the investigation of DUCARME 1989 is affected by the truncation of the WENZEL 1978 tidal gravity values to 0.1 nm/s^2 , which was allowed in those days for the purpose of the accuracy estimation of the CTED 1973 tidal potential. Other severe sources of differences may be the different fundamental geodetic and astronomic constants and the different theories for the propagation of the gravitational field, which have been adopted in the specific computations (e.g. FRIEDRICH and ZIMMERMANN 1989).

To display the errors of CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments during the parallel recording experiment (see chapter 3), gravity tides have been computed with 1^h time interval for the year 1989 at station BFO Schiltach ($\varphi = 48.3306^{\circ}$, $\lambda = 8.3300^{\circ}$, $h = 589$ m). Gravity tides from the tidal potential complete to degree 4 for the moon and 3 for the sun using directly computed ephemerides have been generated applying a modified program of BROUCKE, ZÜRN and SLICHTER 1972 (abbreviated as BZS 1972 in the following). These values have been used as a reference, although the accuracy of BZS 1972 ephemerides is lower than the ephemerides used by TAMURA 1987. For all computed gravity tides, the same fundamental geodetic and astronomic parameters (GRS 80 and IAU 1984) have been used. For all tidal waves, a frequency independent amplitude factor of 1.160 and zero phase lag has been applied.

In Fig. 1, the gravity tides computed from CTED 1973 and from BZS 1972 are compared. We find an rms difference of ± 0.50 nm/s² and a maximum difference of 2.78 nm/s². The pattern of the differences shows large beat-like variations with time. In Fig. 2, the gravity tides computed from TAMURA 1987 tidal potential development and from BZS 1972 are compared. We can see much smaller differences compared to CTED 1973, an rms difference of ± 0.10 nm/s² and a maximum difference of 0.66 nm/s². The errors of the BZS 1972 ephemerides may contribute to the differences by ± 0.05 nm/s² rms (WENZEL 1976). The comparison of gravity tides computed from CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments in Fig. 3 shows almost the same differences as in Fig. 1, an rms difference of ± 0.47 nm/s² and a maximum difference of 2.50 nm/s². The differences between gravity tides computed from CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments may arise from differences in tidal amplitudes, phases or even frequencies. The differences between tidal gravity amplitudes from CTED 1973 and TAMURA 1987 exceeding 0.05 nm/s² are listed in Tab. 1 for the station BFO Schiltach. They are all due to new tidal waves of the TAMURA 1987 tidal potential, generated by the tidal potential of different degree and order. The maximum amplitude is 0.1 nm/s² at around 2 cpd, and the sum of all amplitudes is 11.5 nm/s². Some of the major waves located in the 1 cpd tidal band are arranged in pairs with about the same amplitude and a small frequency difference, and thus create an amplitude modulation with 0.5^a.. 6^a modulation period. This amplitude modulation is clearly seen in Fig. 3.

Table 1: Tidal gravity waves for station BFO Schiltach from TAMURA 1987 tidal potential, not contained in CTED 1973 tidal potential and exceeding 0.05 nm/s² in amplitude.

TAMURA wave no.	frequency [cpd]	degree	order	amplitude [nm/s ²]
132	0.073202	4	0	0.05184
285	0.752935	2	1	0.05160
287	0.757791	2	1	0.06225
296	0.789079	2	1	0.07126
440	0.929079	3	1	0.05001
447	0.929536	4	1	0.06747
561	1.002738	4	1	0.06471
572	1.005476	2	1	0.05160
687	1.111922	3	1	0.05107
701	1.138191	2	1	0.06061
706	1.143047	2	1	0.07618
711	1.143961	2	1	0.05406
725	1.180105	2	1	0.06307
795	1.859071	4	2	0.05919
901	1.932273	4	2	0.10195
1004	2.005476	4	2	0.06906
1073	2.078515	3	2	0.05422
1135	2.861809	4	3	0.09854
1164	2.935011	4	3	0.08623
1196	3.864547	4	4	0.05270

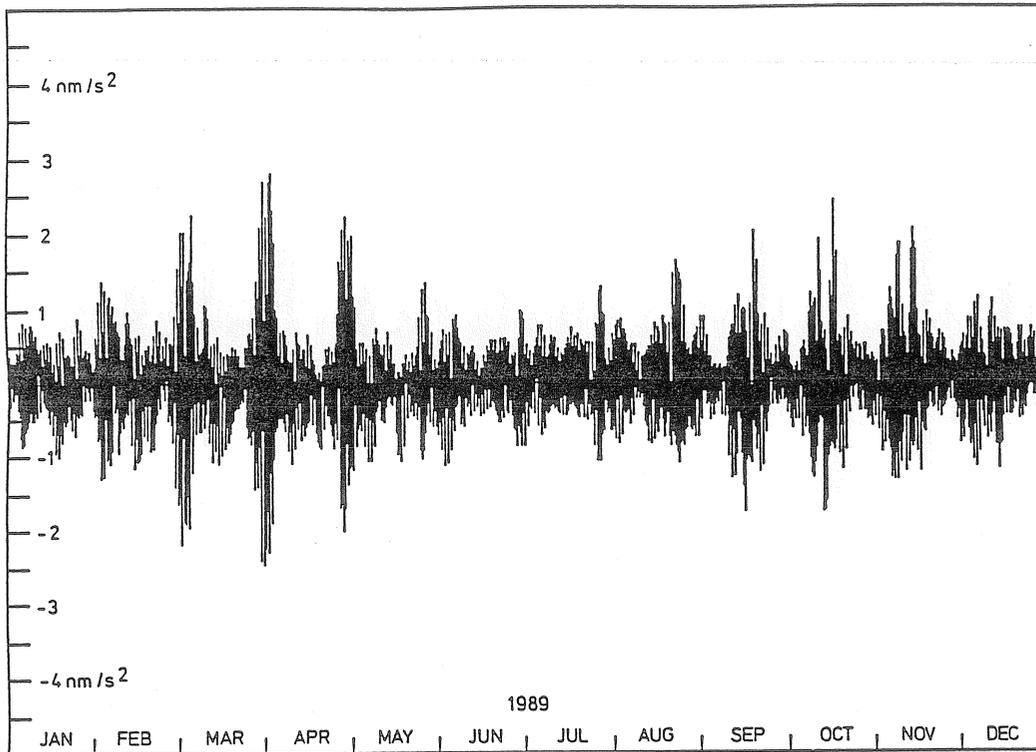


Fig. 1: Differences of gravity tides from CTED 1973 tidal potential development and BZS 1972 ephemerides at station BFO Schiltach for 1989.

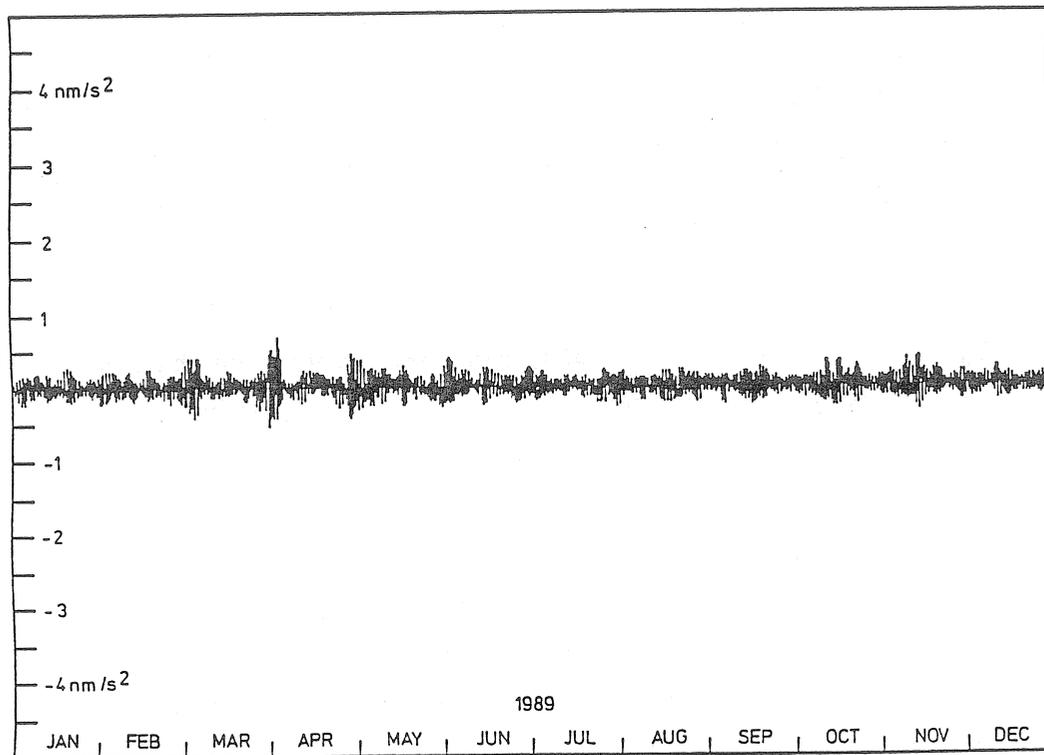


Fig. 2 : Differences of gravity tides from TAMURA 1987 tidal potential development and BZS 1972 ephemerides at station BFO Schiltach for 1989.

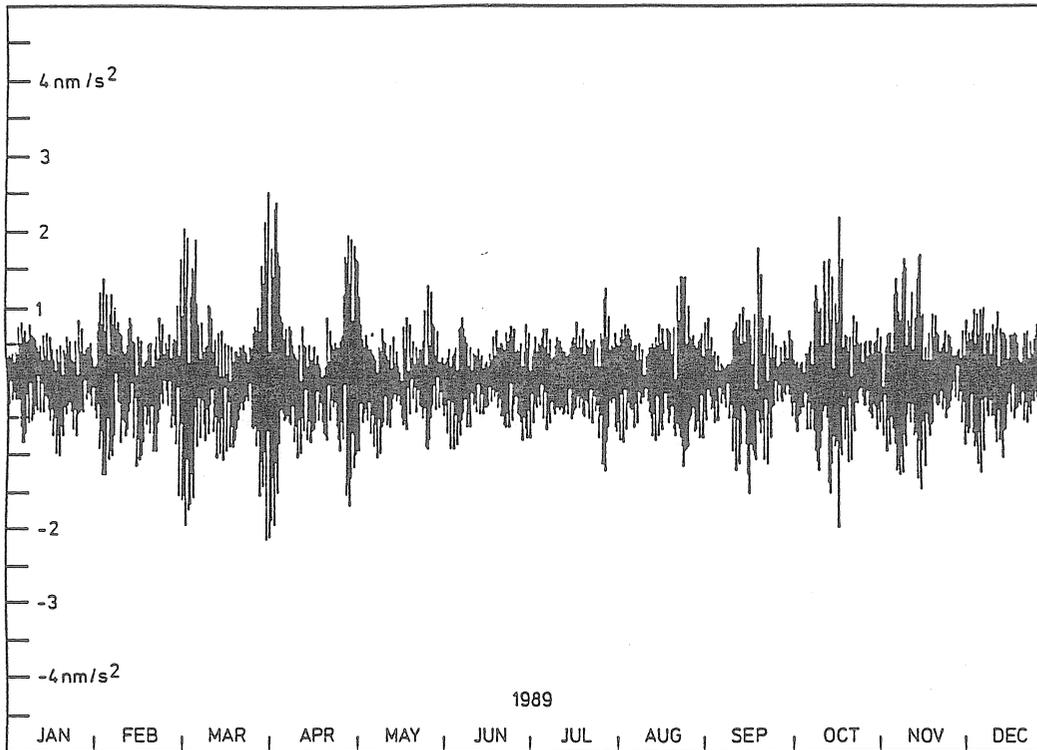


Fig. 3: Differences of gravity tides from CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments at station BFO Schiltach for 1989.

3. Gravimetric Earth Tide Observations

The LaCoste–Romberg earth tide gravity meter ET19, equipped with a WEBER–LARSON electrostatic feedback (WEBER and LARSON 1966, LARSON 1968) has been operated continuously at BFO since 1979. The gravity meter is installed in the gravimeter vault of the underground observatory behind the air lock with about 150 m rock coverage. The temperature in the gravimeter vault is stable to about $\pm 0.1^{\circ}$ C. In order to check the manufacturer calibration of ET19, a parallel recording experiment has been performed between December 1988 and April 1989, using the LaCoste–Romberg model G gravity meters G156F and G249F. Both model G gravity meters were equipped with an SRW electrostatic feedback (SCHNÜLL et al. 1984) and have been calibrated before and after the parallel recording experiment at the Hannover vertical gravimeter calibration line (KANNGIESER et al. 1983). The model G gravity meters have been installed on the floor of the electronic vault in front of the air lock with about 120 m rock coverage and about 300 meters inside the mine. The temperature in the electronic vault varies by about $\pm 1^{\circ}$ C due to the operation of an air conditioner and a number of electronic devices. The signals of the three gravity meters and of an air pressure sensor installed in front of the air lock have been recorded digitally after antialias filtering (8th order Butterworth lowpass filters with

150 s cutoff period). The filtered signals have been sampled at 5 minute intervals using a Hewlett-Packard 3421A 10 channel AD converter and a Hewlett-Packard HP41CX computer with cassette tape recorder. The resolution of the recorded signals was 0.1 nm/s^2 for the gravity meters and better than 0.1 Pascal for the air pressure. The 5 minute samples have been decimated to hourly samples by applying a 3rd degree least squares polynomial to ± 30 minutes around the full hour. A formal standard deviation of about $\pm 0.2 \text{ nm/s}^2$ for the filtered hourly gravity values and of about ± 3 Pascal for the filtered hourly pressure values has been obtained. The results of the calibration experiment will be presented in WENZEL and ZÜRN 1990.

The gravity meter G156F failed during about 2 months and will not be considered in the following. Because of a short failure of the data acquisition system at the beginning of January 1989, we will restrict the following analysis to the evaluation of the uninterrupted records of gravity meters ET19 and G249F from January 11 to April 11, 1989.

4. Data Analysis

For the two data series described in chapter 3, least squares adjustments of tidal parameters and barometric pressure coefficients have been carried out. For the tidal analysis, the program ETERNA has been applied, which uses a least squares adjustment algorithm proposed by CHOJNICKI 1973 and modified by WENZEL 1976 to perform the error estimation from the amplitude spectrum of the residuals. The program has been implemented and operated on an IBM-AT compatible personal computer. The gravitational and deformational influence of the air pressure has partially been taken into account by the adjustment of a linear regression coefficient between the highpass filtered observed gravity signals and the highpass filtered air pressure. The adjusted tidal parameters and air pressure regression coefficients will not be discussed in the following, instead we will concentrate on the residuals after least squares adjustment.

The standard deviations of the residuals after tidal analysis using both CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments are compared in Tab. 2 for both data series; significantly lower standard deviations are obtained when using the TAMURA 1987 tidal potential development. It is remarkable, that the earth tide gravity meter ET19 and the model G gravity meter G249F, operating under slightly worse environmental conditions, have about the same standard deviations of 0.72 and 0.74 nm/s^2 resp.

Table 2: Standard deviations (0.5 ... 12 cpd) in nm/s^2 of gravimetric earth tide observations with LCR-ET19 and LCR-G249F when using CTED 1973 and TAMURA 1987 tidal potential developments.

gravity meter	CTED 1973	TAMURA 1987
LCR-ET19	0.82	0.72
LCR-G249F	0.85	0.74

Investigating the residuals of both data series using the CTED 1973 (Fig. 4 and 6) and TAMURA 1987 (Fig. 5 and 7) tidal potential developments, one can see reduced residuals for both data series when using the TAMURA 1987 tidal potential development, especially around April 1st. By differencing the residuals of the same series using different tidal potentials (Fig. 8), one finds the same pattern as in the direct comparison of computed gravimetric tides (Fig. 9), but with slightly reduced amplitude (rms difference $\pm 0.43 \text{ nm/s}^2$ and $\pm 0.58 \text{ nm/s}^2$ resp.). Obviously, the errors of the CTED 1973 tidal potential have partly been absorbed in the adjusted tidal parameters.

Investigating the amplitude spectra of the residuals of both data sets, a number of spectral peaks disappear when using the TAMURA 1987 tidal potential development (Fig. 11 and 13) as compared to the CTED 1973 tidal potential development (Fig. 10 and 12). Some of those peaks are clearly associated with the new tidal waves listed in Tab. 1. Naturally, the errors of CTED 1973 will be displayed in the difference between the two spectra only if they are not absorbed in the adjusted parameters of nearby tidal waves. It has to be noted, that the errors of CTED 1973 in the 3 cpd tidal band have already been detected by SAVIN et al. 1989 using much longer records of gravity tides.

The residuals of both gravity meters when using the TAMURA 1987 tidal potential have been compared in Fig. 14. Although the gravity meters LCR-ET19 and LCR-G249F exhibit very low rms residuals of $\pm 0.72 \text{ nm/s}^2$ and $\pm 0.74 \text{ nm/s}^2$ respectively, the residuals show almost the same pattern, indicating the existence of unmodelled signals common to both instruments of about $\pm 0.6 \text{ nm/s}^2$ rms. The causes of such signals are a subject of further investigations. When differencing the residuals of both instruments (Fig. 14), the rms difference of the residuals is found to be $\pm 0.40 \text{ nm/s}^2$. The signals common to both instruments result in a correlation of + 0.85 between the residuals of LCR-ET19 and LCR-G249F (Fig. 15). A similar correlation has been found by RICHTER 1987 between the residuals of two superconducting gravity meters operated at the same site.

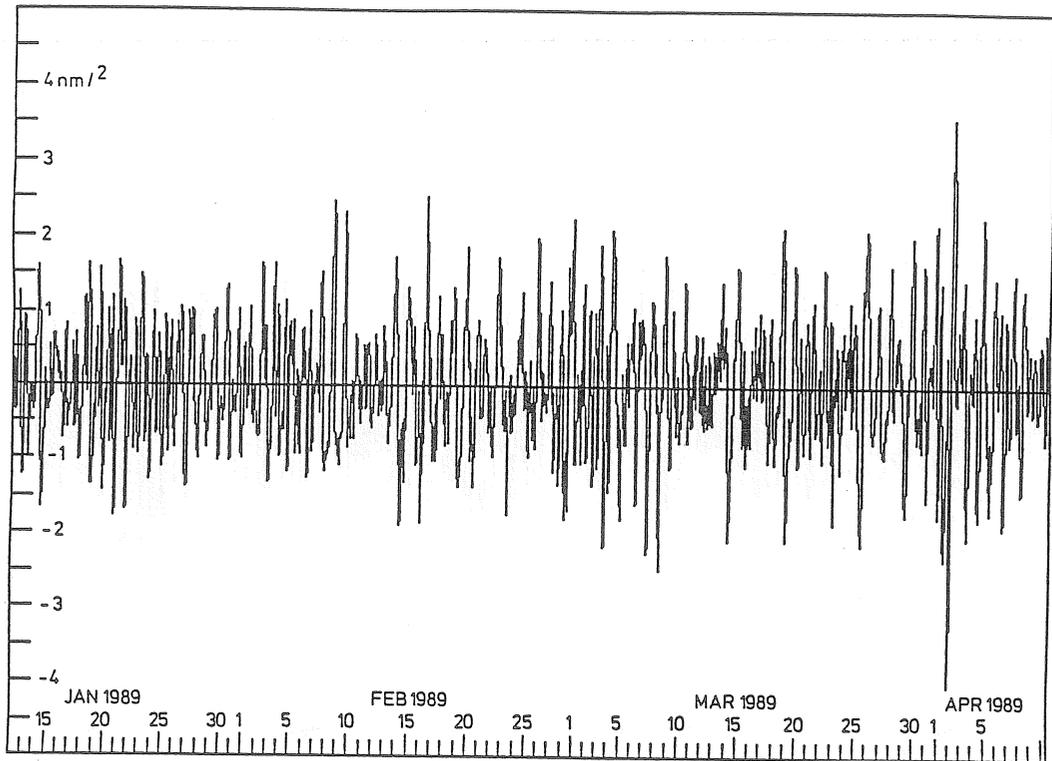


Fig. 4: Residuals of gravity meter LCR-ET19 using the CTED 1973 potential.

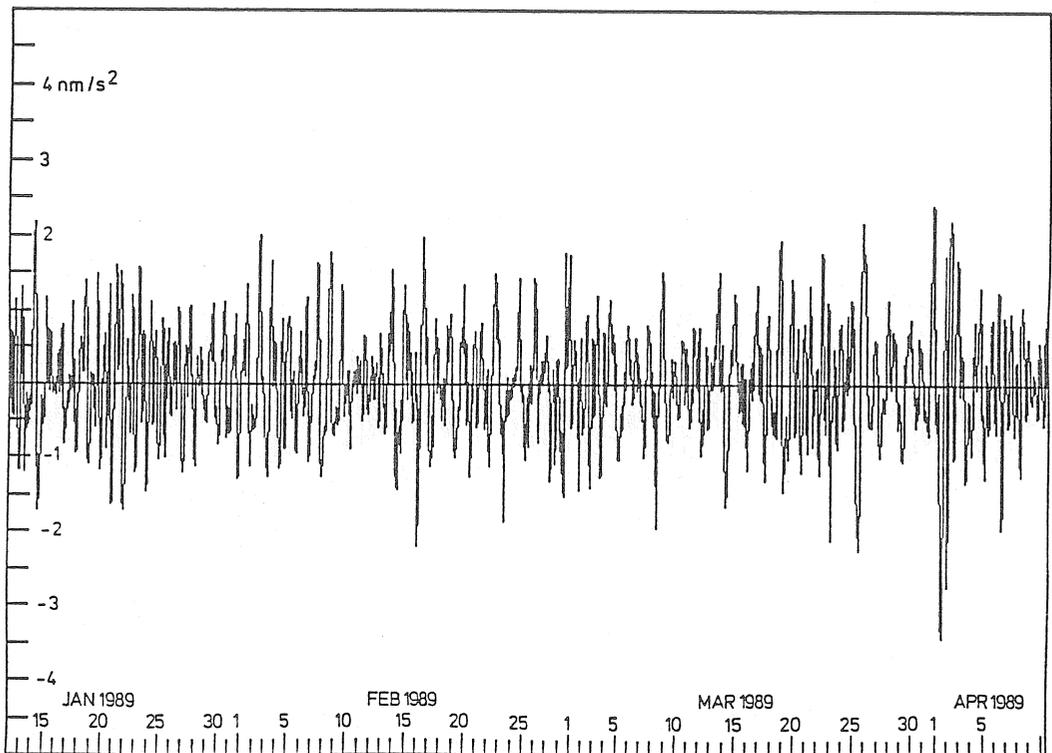


Fig. 5: Residuals of gravity meter LCR-ET19 using the TAMURA 1987 potential.

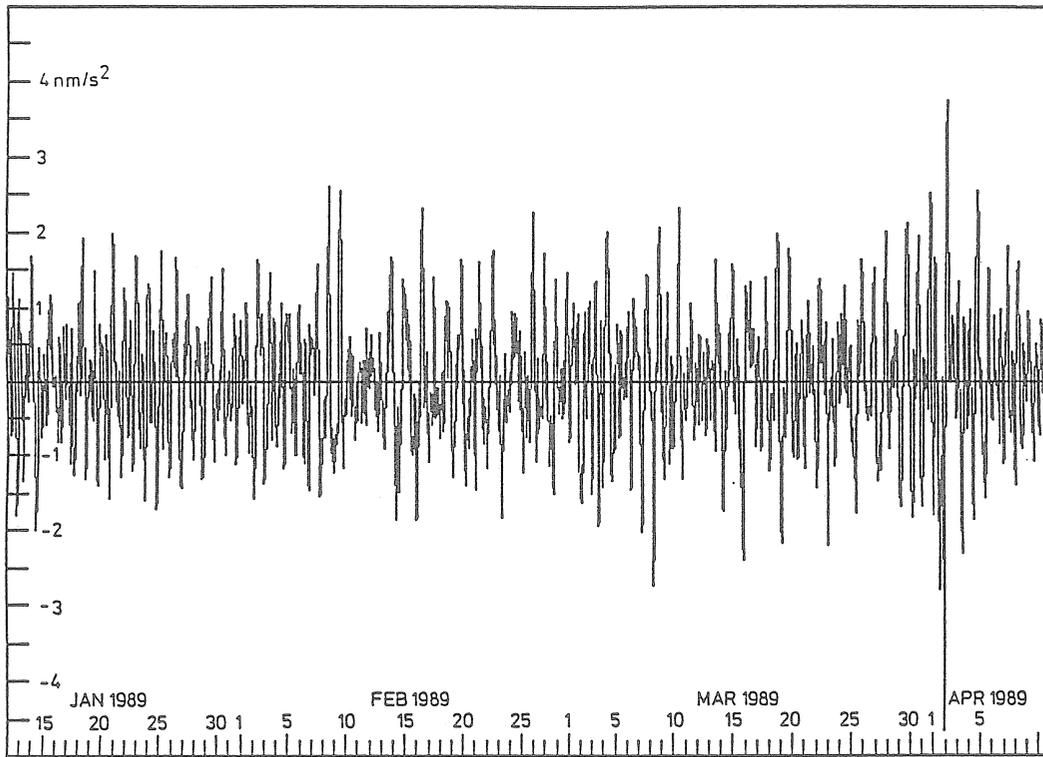


Fig. 6: Residuals of gravity meter LCR-G249F using the CTED 1973 potential.

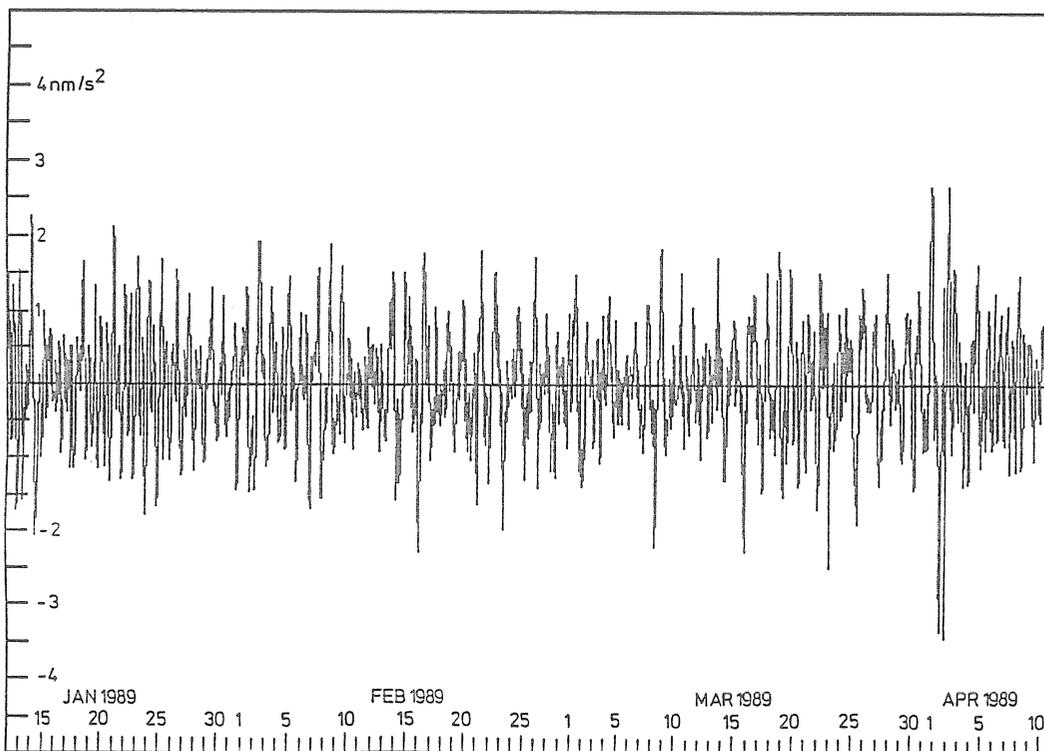


Fig. 7: Residuals of gravity meter LCR-G249F using the TAMURA 1987 potential.

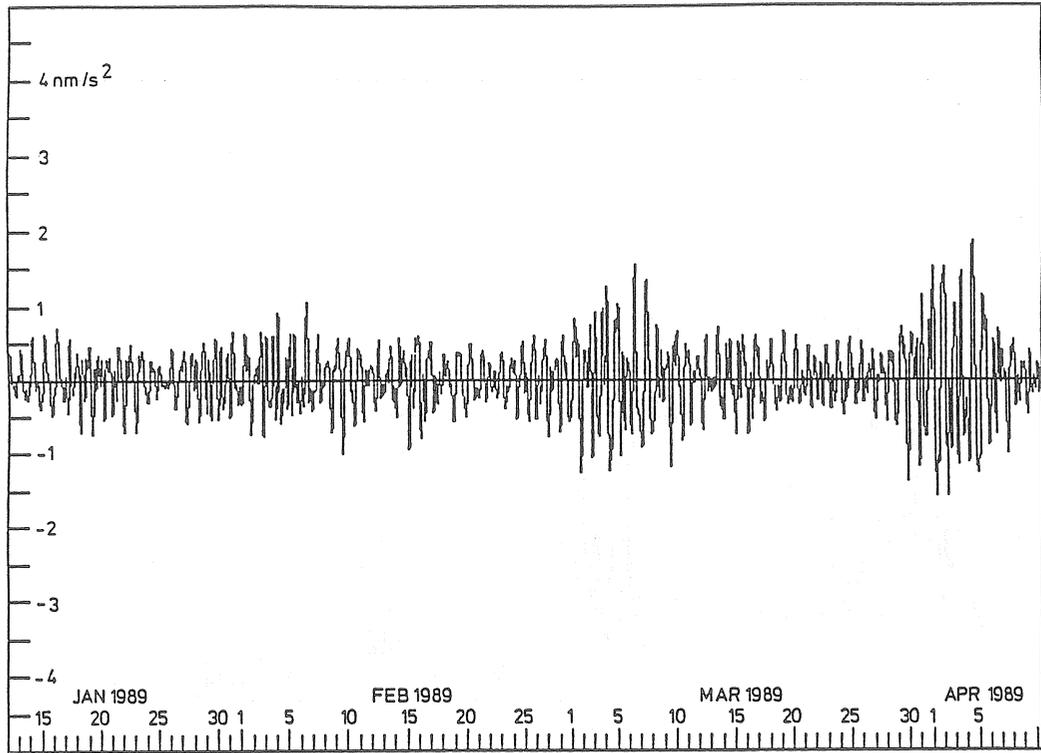


Fig. 8: Differences of residuals of gravity meter LCR-ET19 using TAMURA 1987 minus those using CTED 1973 potential.

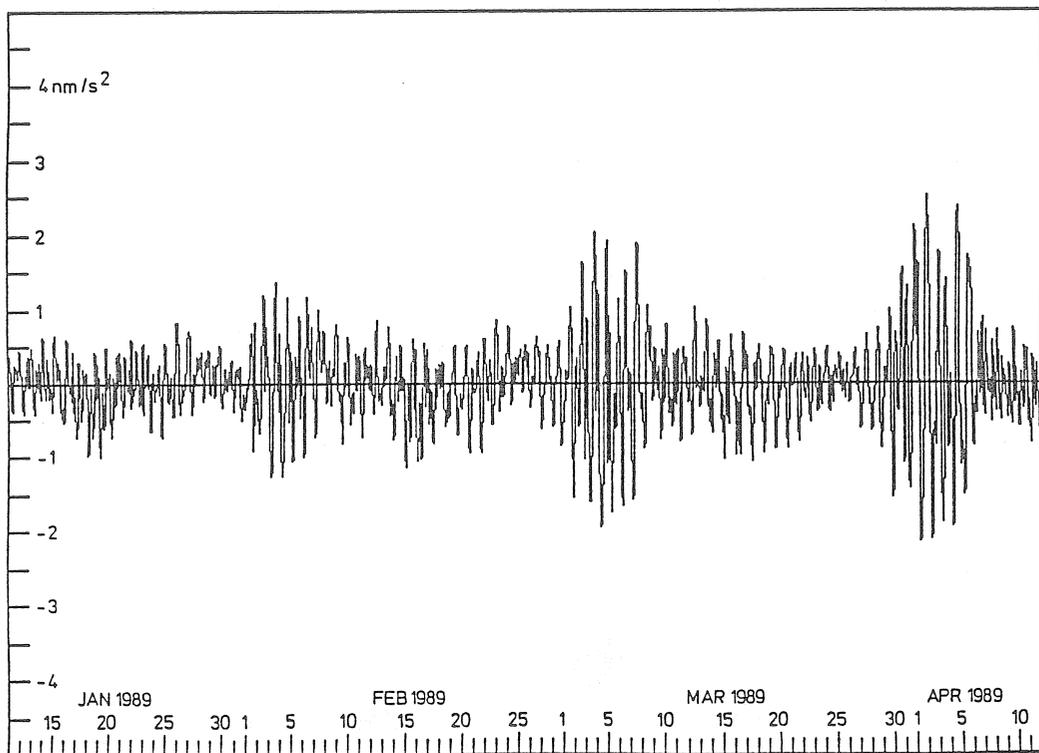


Fig. 9: Differences of computed gravity tides using TAMURA 1987 minus those using CTED 1973 potential.

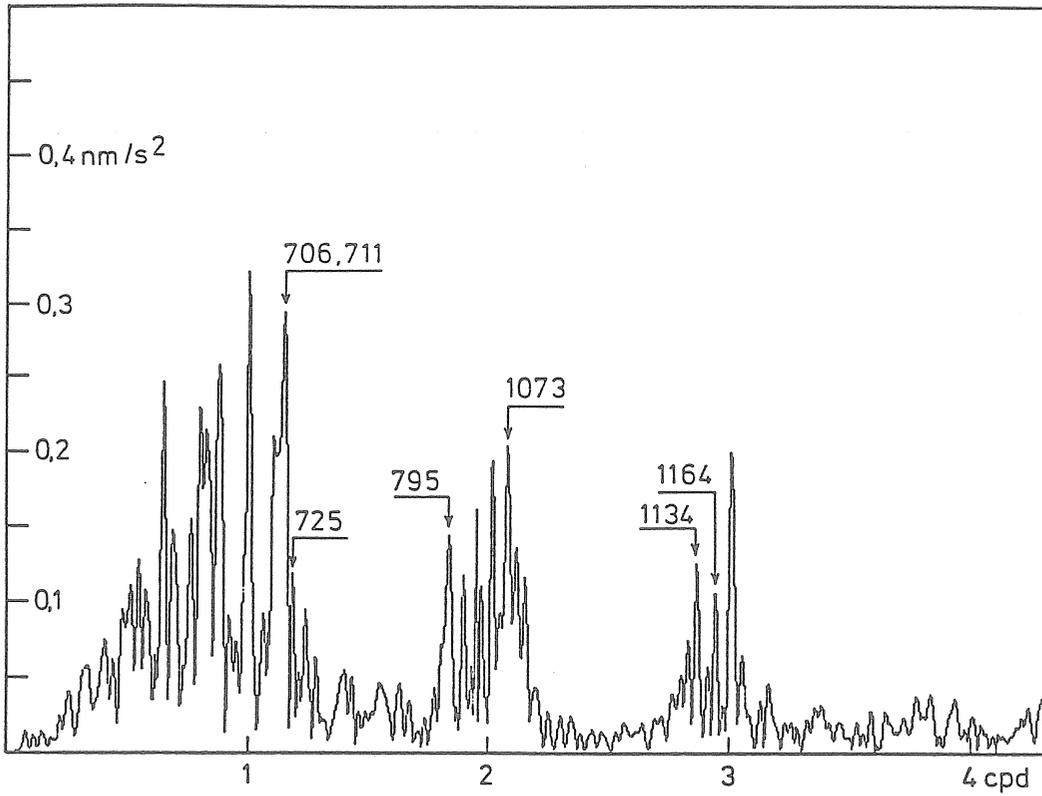


Fig. 10: Amplitude spectrum of residuals of gravity meter LCR-ET19 using CTED 1973 potential. Numbers at marked peaks refer to Tab. 1.

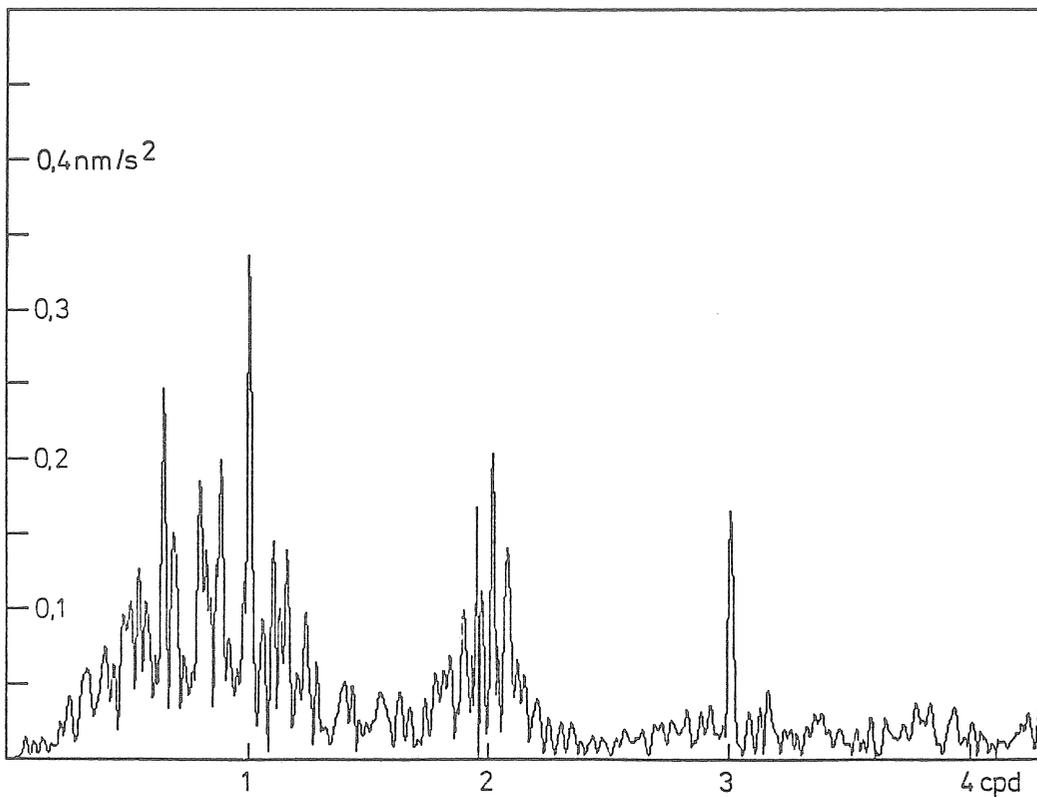


Fig. 11: Amplitude spectrum of residuals of gravity meter LCR-ET19 using TAMURA 1987 potential.

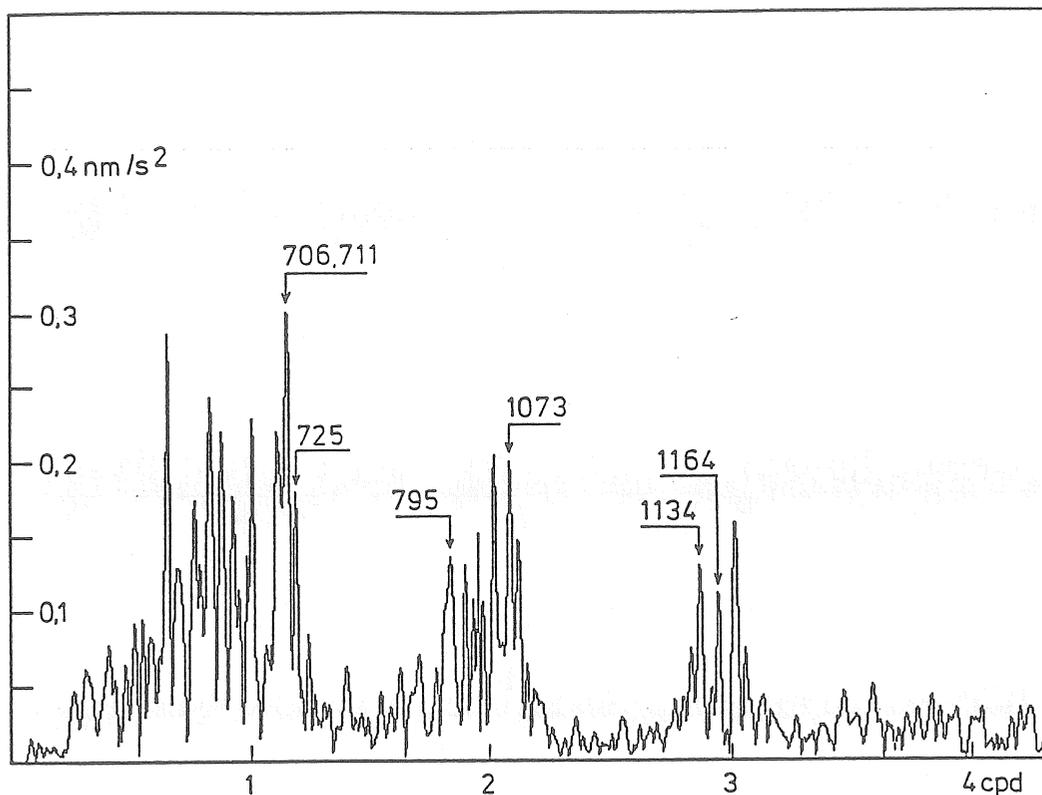


Fig. 12: Amplitude spectrum of residuals of gravity meter LCR-G249F using CTED 1973 potential. Numbers at marked peaks refer to Tab. 1.

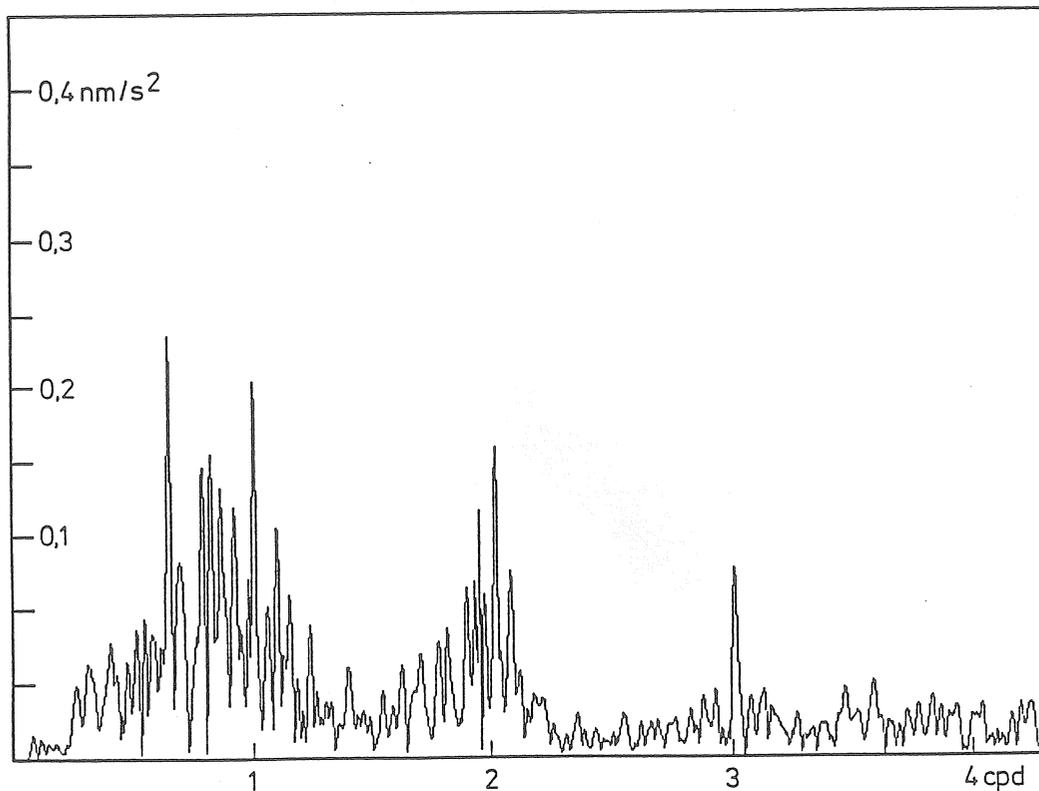


Fig. 13: Amplitude spectrum of residuals of gravity meter LCR-G249F using TAMURA 1987 potential.

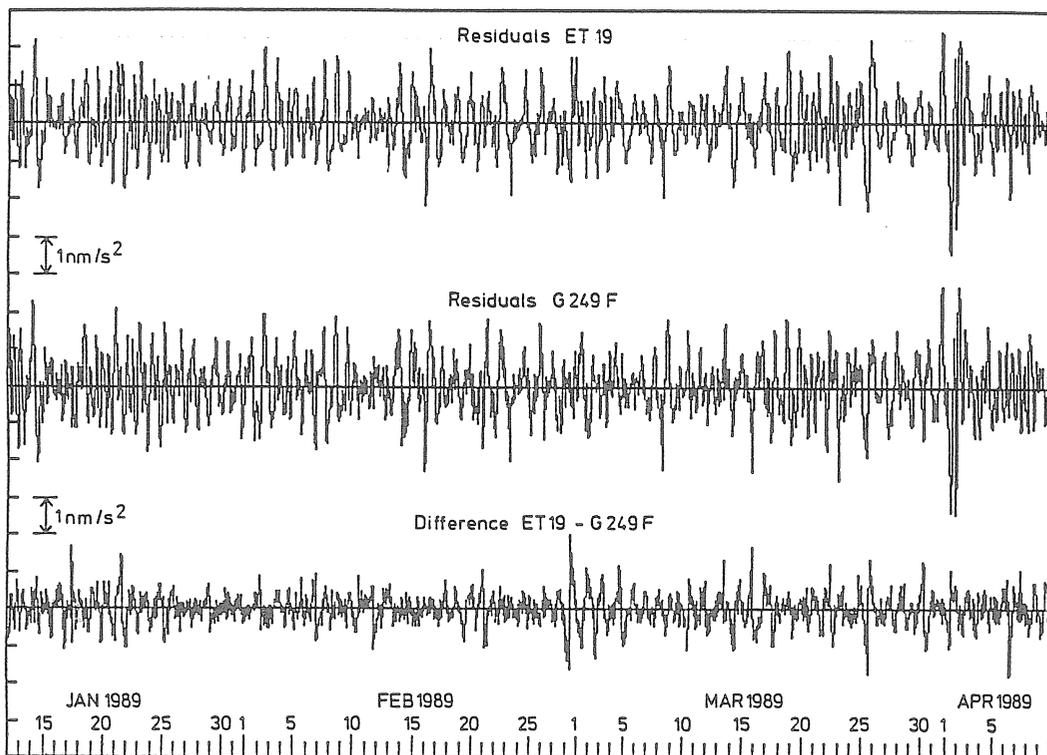


Fig. 14: Residuals of gravity meters LCR-ET19, LCR-G249F, and their difference; TAMURA 1987 tidal potential has been used.

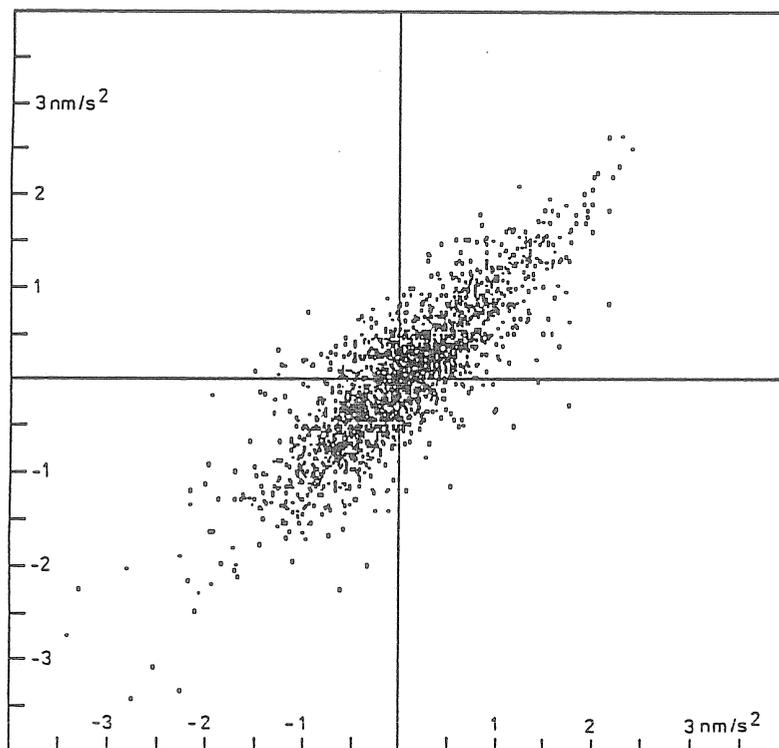


Fig. 15: Regression of residuals of gravity meters LCR-ET19 (vertical) and LCR-G249F (horizontal); TAMURA 1987 potential has been used.

5. Conclusions

The errors of CTED 1973 tidal potential development have been shown in the time domain as well as in the frequency domain, using two low noise tidal gravity series of 3 months length each, recorded at BFO Schiltach. The residuals of the earth tide analysis are significantly reduced when using the TAMURA 1987 instead of the CTED 1973 tidal potential development. It is concluded, that low noise tidal gravity observations should no longer be evaluated using the CTED 1973 tidal potential development.

Acknowledgements

The installation of the LCR model G gravimeters and the Hewlett-Packard data acquisition system by K. Lindner and H. Otto, and the maintenance of all the instruments during the parallel recording experiment by H. Otto is gratefully acknowledged. The preprocessing of the data has partly been carried out by K. Lindner, the plots have been prepared by H. Kuhn Münch.

References

- BROUCKE, R.A., W. ZÜRN and L.B. SLICHTER 1972 : Lunar Tidal Acceleration on a Rigid Earth. Geophysical Monograph 16, Flow and Fracture of Rocks (The Griggs Volume), 319–324, AGU Washington 1972.
- BÜLLESFELD, F.–J. 1985: Ein Beitrag zur harmonischen Darstellung des gezeiten-erzeugenden Potentials. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 314, München 1985.
- CARTWRIGHT, D.E. and A.C. EDDEN 1973 : Corrected Tables of Tidal Harmonics. The Geophysical Journal, Vol. 33 No. 3, Oxford 1973.
- CARTWRIGHT, D.E. and R.J. TAYLER 1971 : New Computations of the Tide Generating Potential. The Geophysical Journal, Vol. 23 No. 1, Oxford 1971.
- CHOJNICKI, T. 1973: Ein Verfahren zur Erdgezeitenanalyse in Anlehnung an das Prinzip der kleinsten Quadrate. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn No. 15, Bonn 1973.
- DOODSON, A.T. 1921 : The Harmonic Development of the Tide Generating Potential. Proceedings of the Royal Society (London), Ser. A 100, 306–328, Reprint in International Hydrographic Review Vol. 31 No. 1, Monaco 1954.
- DUCARME, B. 1989 : Tidal Potential Developments for Precise Tidal Evaluation. Bulletin d'Informations Marées Terrestres No. 104, 7338–7360, Bruxelles 1989.
- HARRISON, J.C. and T. SATO 1984 : Implementation of Electrostatic Feedback with a LaCoste–Romberg Model G Gravity Meter. Journal of Geophysical Research, Vol. 89 No. B9, 7957 – 7961, 1984.

- KANNGIESER, E., K. KUMMER, W. TORGE and H.-G. WENZEL 1983 : Das Gravimeter-Eichsystem Hannover. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover No. 120, Hannover 1983.
- LARSON, J.V. 1968 : A Cross Correlation Study of the Noise Performance of Electrostatically Controlled LaCoste and Romberg Gravimeters. Ph.D. Thesis, Maryland University, 1968.
- RICHTER, B. 1987 : Das supraleitende Gravimeter. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C No. 329, Frankfurt a.M. 1987
- SAVIN, I.V., W. SCHWAHN and T.A. RUKAVISHNIKOVA 1989 : Narrow Band Spectrum Analysis of Gravity Time Series – Comparison of Bad Homburg, Brussels and Potsdam Observations. Presented to 11th International Symposium on Earth Tides, July 31 – August 4, Helsinki 1989.
- SCHNÜLL, M., R.H. RÖDER and H.-G. WENZEL 1984 : An Improved Electronic Feedback for LaCoste–Romberg Gravity Meters. Bureau Gravimetrique International, Bulletin d'Informations Vol 55, 227–36, Toulouse 1984.
- TAMURA, Y. 1987 : A Harmonic Development of the Tide Generating Potential. Bulletin d'Informations Marées Terrestres No. 99, Bruxelles 1987.
- VAN RUYMBEKE, M. 1989 : New Developments of Feedback Electronics. Bulletin d'Informations Marées Terrestres No. 104, 7292 –7297, Bruxelles 1989.
- WEBER, J. and J.V. LARSON 1966 : Operating of LaCoste and Romberg Gravimeter at Sensitivity Approaching the Thermal Fluctuation Limits. Journal of Geophysical Research Vol 71, 6006–6009, 1966.
- WENZEL, H.-G. 1976 : Zur Genauigkeit von gravimetrischen Erdzeitenbeobachtungen. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover No. 67, Hannover 1973.
- WENZEL, H.-G. 1978 : Standard Data Sets for Comparison of Tidal Potential Developments and Analysis Methods. Presented to 1. Meeting of Working Group on Data Processing in Tidal Research, March 14–16, Bonn 1978.
- WENZEL, H.-G. and W. ZÜRN 1990 : In Situ Calibration of LaCoste–Romberg Earth Tide Gravity Meter ET19 at BFO Schiltach. Bulletin d'Informations Marées Terrestres, in preparation.
- XI QUIN WEN 1987 : A New Complete Development of the Tide–Generating Potential for the Epoch J2000.0. Bulletin d'Informations Marées Terrestres No. 99, 6766 –6812, Bruxelles 1987.
- XI QUIN WEN 1989 : The Precision of the Development of the Tidal Generating Potential and Some Explanatory Notes. Bulletin d'Informations Marées Terrestres No. 105, 7396–7404, Bruxelles 1989.

RESULTS FROM AN INSTRUMENTAL COMPARISON IN BUDAPEST — AN ATTEMPT TO STUDY THE RELIABILITY OF REGIONAL VARIATIONS OF TIDAL PARAMETERS

B. Meurers¹, P. Varga² and J. Mitnyik²

1 Introduction

To study the areal variations of gravity tidal parameters (amplitude factors δ and phase differences κ) in the Alpine-Pannonian area an instrumental intercalibration has been carried out at the Geodynamical Observatory in Budapest with the Askania gravimeter GS-11 190, BN-07 (Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary) and the LaCoste&Romberg instrument D-9 (Institute of Meteorology and Geophysics, University of Vienna) which has been equipped with an electronic feedback system SRW-D (Schnüll et al., 1984) in 1986.

The Geodynamical Observatory ($\phi = 47^\circ.55$, $\lambda = 19^\circ.01$, $H = 202$ m) in Budapest is situated in an artificial tunnel system crossing a limestone formation affected during former geological epochs by thermal and tectonical influences.

The gravimeter BN-07 was reconstructed in 1987 by M. Bonatz (Institute of Theoretical Geodesy, University of Bonn). During this work a new inner thermostat of permanent regime was installed into the equipment together with an electrostatic calibration device to keep under control the recording sensitivity. After the reconstruction in 1988 the instrumental drift became bigger but it was very regular (almost linear) during the time interval discussed in this paper. The error of the record was deminished by approximately $1 \mu\text{Gal}$ in comparison to former results. For the data of 1984-1985 standard deviations of $7.0 \mu\text{Gal}$ (D, diurnal waves) and $3.9 \mu\text{Gal}$ (SD, semidiurnal waves) respectively were obtained from Venedikov analysis whereas the data set of 1988 shows errors of $6.2 \mu\text{Gal}$ (D) and $3.2 \mu\text{Gal}$ (SD) only. Based on daily operations with the electrostatic calibration unit it can be concluded that the rms error of scale value determinations was 0.043% during the time interval between April and October 1988. No regular temporal variations could be observed. The maximum difference between individual scale values was 0.82% however. The absolute calibration of the complete recording system was performed by using a tilt platform installed by A.V. Volkov (O. Ju. Smidt Earth Physics Institute, Moscow).

¹Institute of Meteorology and Geophysics, University Vienna, Hohe Warte 38, A-1190 Wien, Austria

²Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary, POB 35, H-1440 Budapest, Hungary

The procedure of accurate tilt calibrations is described by D.G.Gridnev (1974). The accuracy of absolute calibrations carried out in this way is better than 0.1 %.

The SRW-D feedback system of the LCR D-9 has been calibrated on the vertical calibration line in Hannover (BRD) consisting of very precisely defined gravity stations (Kanngieser et al., 1983). Its calibration function is almost linear. Nonlinearities can be observed only at higher output voltage ranges. Because the tidal signal is small in comparison they do not affect the recording sensitivity. The linear part of the calibration function could be determined with an error of less than 0.05 %. The sensitivity of the feedback system has been checked periodically on a local calibration line in Vienna and additionally immediately before and after the earth tidal registrations. No significant variations could be observed which proves the sensitivity to be stable in time. Generally the deviations from the mean gravity difference of this calibration line by far were less than 0.10 % with only one exception showing a deviation of 0.16 %. The registration with the LCR D-9 in Budapest was started in November 1987 and finished at beginning of July 1988 covering an observation interval of 236 days. 5328 hourly observations could be analysed. The recording sensitivity of the complete equipment was adjusted between 1.1 and 1.4 $\mu\text{Gal}/\text{mm}$. Recorder calibrations performed periodically during the registration show a very constant recording sensitivity with a mean error of again less than 0.1 %.

2 Results of instrumental intercalibration

The observed data were analysed both by Chojnicki and Venedikov method (see the computer listing of analyses carried out in the Appendix). The earth tidal parameters are compared in Table 1. Based on these results the following conclusions can be drawn.

- The comparison gives better results (smaller differences) for the diurnal than for semidiurnal waves. This is opposite to the results of former investigations shown in the upper part of Table 2 listing the difference between amplitude factors (in %) and phase lags (in $^{\circ}$) obtained from measurements with several instruments at the respective stations (Gerstenecker, Varga, 1986). The lower part contains the corresponding results following from the analysis of the BN-07 and LCR D-9 data sets in Budapest using the Chojnicki and Venedikov method. Especially the $\Delta\delta_{S_2}$ value is too big in this case. The deviation probably is connected with external (meteorological?) sources.
- The agreement is not better if using selected parts of the records obtained during 1988 in Budapest station. This conclusion follows from the analysis procedure performed additionally for successive data sets which are defined by partly overlapping registration intervals containing 720 hourly observations (Fig. 1). The magnitude of temporal variations is small if considering the short analysis interval and therefore proves a good and consistent registration quality.

LCR D-9		GS-11 190, BN-07		Differences		
Venedikov method						
<i>n</i>	5328		4176			
	δ	$\kappa[^\circ]$	δ	$\kappa[^\circ]$	$\Delta\delta[\%]$	$\kappa[^\circ]$
O_1	1.1475	-0.118	1.1515	+0.134	+0.35	-0.25
K_1	1.1307	+0.035	1.1378	-0.071	+0.63	+0.11
M_2	1.1763	+0.843	1.1813	+0.366	+0.43	+0.48
S_2	1.1514	-0.122	1.1764	-0.451	+2.17	+0.33
Chojnicki method						
<i>n</i>	5185		3907			
	δ	$\kappa[^\circ]$	δ	$\kappa[^\circ]$	$\Delta\delta[\%]$	$\kappa[^\circ]$
O_1	1.1470	+0.030	1.1493	-0.129	+0.20	+0.16
K_1	1.1322	+0.028	1.1387	-0.036	+0.57	+0.06
M_2	1.1762	+0.830	1.1852	+0.317	+0.77	+0.51
S_2	1.1517	-0.080	1.1808	-0.184	+2.53	+0.10

Table 1: Comparison of the tidal parameters obtained from the data of LCR D-9 and ASK GS-11 190, BN-07 gravimeters *n* is the number of hourly observations used for analysis

station	O_1		K_1		M_2		S_2	
	$\Delta\delta [\%]$	$\Delta\kappa[^\circ]$						
Bidston	0.6	0.9	1.1	1.0	0.2	0.9	0.3	0.9
Hannover	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2
Potsdam	0.6	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.3	0.2
Pecny	0.2	0.4	0.2	0.7	0.1	0.1	0.3	0.5
Sofia	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.1	0.4
MEAN	0.3	0.3	0.3	0.4	0.1	0.3	0.4	0.4
Budapest								
(V)	0.4	0.3	0.6	0.1	0.4	0.5	2.2	0.3
(C)	0.2	0.2	0.6	0.1	0.8	0.5	2.5	0.1

Table 2: Results of instrumental intercalibrations (Gerstenecker, Varga, 1986) (V : Venedikov method, C: Chojnicki method)

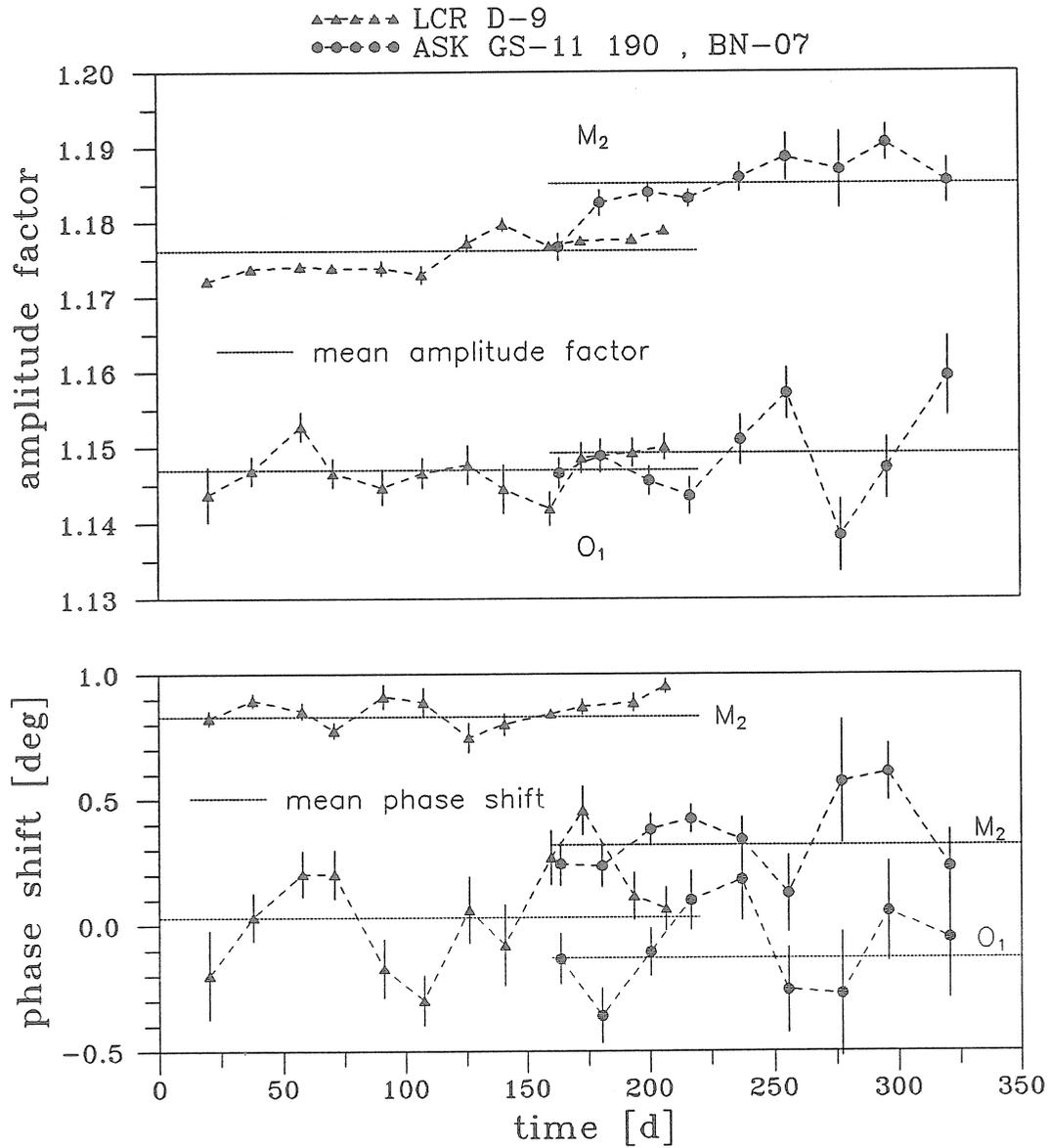


Figure 1: Temporal variations of earth tidal amplitude factors and phase differences (in degrees) obtained from partly overlapping registration intervals (720 hourly observations, Chojnicki method, r.m.s errors indicated by bars)

	LCR D-9 1987/88 (236 days)		GS-11 190 , BN-07 1988 (201 days)		GS-15 228 1984/85 (396 days)	
	δ	$\kappa[^\circ]$	δ	$\kappa[^\circ]$	$\delta[\%]$	$\kappa[^\circ]$
O_1	1.1475	-0.118	1.1515	+0.134	1.1496	+0.064
K_1	1.1307	+0.035	1.1378	-0.071	1.1362	+0.031
M_2	1.1763	+0.843	1.1813	+0.366	1.1823	+0.769
S_2	1.1514	-0.122	1.1764	-0.451	1.1855	+0.490

Table 3: Analysis results obtained from records of different instruments at the Budapest station (Venedikov method)

- Only small differences can be found between the results of the analysis methods. They can be explained by the fact that the analysed data sets are not exactly the same for both procedures.
- The observed differences cannot be explained by calibration errors but probably are due to the different response of the used equipments to external forces. The presence of significant systematical components at tidal frequency bands in the amplitude spectra of the residual curves obtained from both instruments probably supports this interpretation (Fig. 2).

It seems to be useful to compare the results of the intercalibration campaign of 1988 with the results of the Askania GS-15 228 (Technical University of Prague) obtained during 1984-1985 (time interval 396.5 days) at the Budapest station (Table 3) (Broz et al., 1990). Using the data of this last table it can be concluded that there is a good agreement between all instruments in case of the O_1 wave, while the δ_{K_1} value and the amplitude factors within the semidiurnal frequency band obtained from LCR D-9 are a bit too small. The phase differences also agree well except for the κ_{M_2} obtained from BN-07 which deviates from the results of the LCR D-9 and GS-15 228.

3 Geophysical consequences

For interpreting the results the tidal parameters have to be corrected because of the indirect effect of the oceans. For this purpose the calculations performed by Varga (1980) on the basis of global (Bogdanov-Magarik) and local (La Manche, North Sea, Irish Sea, Mediterranean Sea and Adriatic Sea) cotidal maps have been applied. According to our experience in the region studied in our work on the basis of these maps we obtain the same tidal corrections as B.Ducarme got for the data bank Bruxelles from the usually used cotidal maps of Schwiderski.

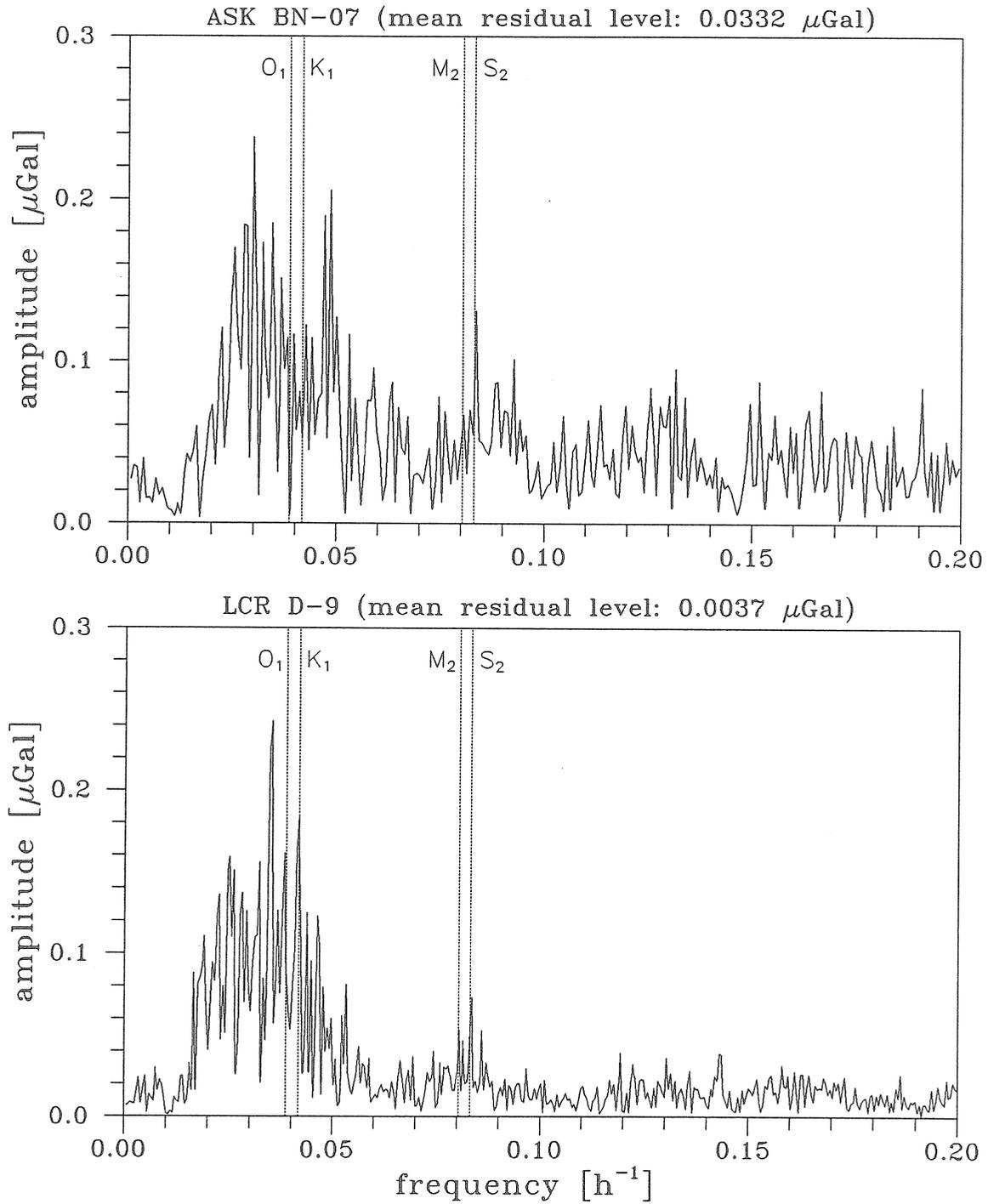


Figure 2: Amplitude spectrum of the residual curve, (Chojnicki method)

- If the mean δ_{O_1} (1.1495) of all three instruments is corrected the resulting value of 1.1553 is near to the theoretical one obtained from the PREM by Dehant and Ducarme (1987) ($\delta_{PREM} = 1.1548$) or by Varga and Denis (1988) ($\delta_{PREM} = 1.1564$). The corrected δ_{M_2} mean value of the three instruments is 1.1590. The M_2 amplitude factor of LCR D-9 leads to a more realistic value (1.1553).
- The measurements carried out in Budapest support the rheological model developed by Meurers (1987) for the LCR D-9 equipped with an electrostatic feedback system. The results obtained in Vienna and in Budapest are in good agreement after the correction due to the indirect oceanic effects (Table 4). This can be seen additionally by comparing the

station	δ_{O_1}	δ_{M_2}	κ_{O_1} [°]	κ_{M_2} [°]
Vienna	1.158	1.156	+0.16	+0.66
Budapest	1.154	1.155	-0.09	+0.23

Table 4: Comparison of the tidal parameters obtained from data of LCR D-9 in Vienna and Budapest (indirect effects corrected)

residual vector $L(M_2)$ calculated after Venedikov analysis with the loading effect derived from Schwiderski M_2 cotidal maps (Melchior, pers. comm.) (Table 5). These data show that there are no significant differences between earth tidal parameters at the stations Budapest, Graz and Vienna.

station	residue $L(M_2)$			
	Venedikov analysis		Schwiderski cotidal map	
	[μGal]	[°]	[μGal]	[°]
Budapest	0.81	47	0.97	40
Vienna	1.02	45	1.08	44
Graz	1.20	43	1.14	47

Table 5: Comparison of the residue $L(M_2)$ (LCR D-9) with oceanic load (Schwiderski cotidal map)

Acknowledgement

The authors are grateful to Mr. Hancsel (Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary) for accurate maintenance of the Budapest station during the earth tidal registrations. Partly this work was financially supported by the Austrian Research Foundation FWF, Project P5652, which is gratefully acknowledged too.

References

- [1] Dehant, V., Ducarme, B., 1987: Comparison between theoretical and observed tidal gravimetric factors. *Phys. Earth Plan. Int.*, 49, 3-4, 192-212.
- [2] Gerstenecker, C., Varga, P., 1986: On the interpretation of the gravimetric earth tidal residual vector. *Proc. Xth Int. Symp. Earth Tides. Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid, 1986.*
- [3] Gridnev, D.G., 1974: Etalonirovaniye gravimetrov Askania. In: *Vraschenije i prilivnije deformacii zemli.*, VI, 42-53, Naukova Dumka, Kiev.
- [4] Kanngieser, E., Kummer, K., Torge, W., Wenzel, H.G., 1983: *Das Gravimeter- Eichsystem Hannover. Wiss. Arb. Fachrichtung Vermessungswesen, Univ. Hannover.*
- [5] Meurers, B., 1987: Comparison of earth tidal observations in Vienna. *B.I.M.*, 100, 6942-6953.
- [6] Schnüll, M., Röder, R.H., Wenzel, H.G., 1984: An improved electronic feedback system for LaCoste&Romberg gravity meters. *B.G.I., Bull. d'Inf.*, 55, 27-36.
- [7] Broz, J., Holub, S., Szabó, Gy., Simon, Z., Varga, P., 1990: Gravimetric earth tidal parameters for station Budapest determined by joint Hungaro-Czechoslovakian measurements. *Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary, Study of the earth tides, Bulletin 9, in print.*
- [8] Varga, P., 1980: Annual report of the Loránd Eötvös Geophysical Institute of Hungary, p. 83.
- [9] Varga, P., Denis, C., 1988: A study of the variation of tidal numbers with earth structure. *Geophysical Transactions*, 34, 4, 263-282.

Results of Venedikov- and Chojnicki analysis

FINAL ADJUSTMENT

CHOJNICKI METHOD

FINAL RESULTS OF COMPUTATIONS - ESTIMATION OF ACCURACY BASED ON RESIDUAL
 0.000019871011 0 0 1000111 47.5500 -19.0166 202 1.0000 980.809132

STATION 0950 BUDAPEST VERT.COMP HUNGARY

INSTITUTE FOR METEOROLOGY AND GEOPHYSICS , UNIV. OF VIENNA
 LAT : 47.5500 N LON : 19.0166 E HEIGHT : 202 M
 GRAVIMETER : LACOSTE&ROMBERG D-9 , FEEDBACK SRW-D
 INSTALLATION : B.MEURERS
 MAINTENANCE : P.VARGA, J.MITNYIK, G.HANCSEL, B.MEURERS

LEAST SQUARE ANALYSIS IN CLASSICAL MANNER (CHOJNICKI)
 FILTRATION OF OBSERVATIONS / FILTER 51/ 833
 POTENTIAL CARTWRIGHT-EDDEN-(DOODSON) / COMPLETE EXPANSION
 COMPUTATION - INSTITUTE FOR METEOROLOGY AND GEOPHYSICS , UNIV. VIENNA - HP 1000

8711 1211-8711 17 6/8711 2113-8711 2918/8712 4 9-8712 8 7/8712 1010-88 2 9 7
 88 2 1111-88 3 521/88 3 913-88 5 31 7/88 6 312-88 7 5 7

TOTAL NUMBER OF DAYS 236 5185 READINGS

WAVE GROUP ARGUMENT	N	SYMBOL	ESTIM. AMPL.	AMPLITUDE VALUE	FACTOR R.M.S.	PHASE VALUE	DIFFERENCE R.M.S.	SUM OF AMPLIT.
105.-129.	35	SIG1	.7312	1.10431	.03610	-2.205	1.870	2.8897
133.-139.	30	Q1	5.7643	1.14326	.00715	-.494	.358	9.1776
143.-149.	26	O1	36.5962	1.14703	.00130	.030	.065	38.3081
152.-158.	22	M1	2.8265	1.14174	.01364	-.138	.685	5.8758
161.-168.	33	PSK1	38.0149	1.13219	.00089	.028	.045	67.5881
172.-177.	22	J1	2.1705	1.15021	.01794	-.006	.894	4.1171
181.-1E3.	37	OO1	2.6573	1.15455	.01939	-.070	.961	4.0419
207.-23X.	41	2N2	.7046	1.15767	.01568	1.055	.777	3.0185
243.-248.	24	N2	4.9419	1.18121	.00316	.664	.153	9.1706
252.-258.	26	M2	33.1411	1.17617	.00056	.830	.027	36.3078
262.-267.	17	L2	1.4240	1.14004	.01227	-.285	.617	2.4446
271.-2X5.	47	S2K2	20.9009	1.15168	.00114	-.080	.057	23.9231
327.-375.	17	M3	.3689	1.07860	.01951	-.694	1.036	.8274

R.M.S.ERROR M-ZERO .7477 MIKROGAL FILTR.COEFF.OF M-ZERO 1.0598

R.M.S.ERROR FOR BANDS D 2.3857 SD .9421 TD .4909

O1/K1 1.0131 1-01/1-K1 1.1123 M2/O1 1.0254

REFERENCE EPOCH 1987 10 11 0.00

FILTR.COEFF.OF R.M.S.ERROR FOR BANDS D 1.0018 SD 1.0000 TD .8662

FINAL ADJUSTMENT CHOJNICKI METHOD

FINAL RESULTS OF COMPUTATIONS - ESTIMATION OF ACCURACY BASED ON RESIDUAL
 0.00001988 4 4 0 0 1000111 47.5500 -19.0166 202 1.0000 980.808932

STATION 0950 BUDAPEST VERT.COMP HUNGARY

EÖTVÖS LORAND GEOPHYSICAL INSTITUTE OF HUNGARY
 LAT : 47.5500 N LON : 19.0166 E HEIGHT : 202 M
 GRAVIMETER : ASKANIA BN-07
 INSTALLATION: P. VARGA
 MAINTENANCE: J. MITNYIK, G. HANCSEL

LEAST SQUARE ANALYSIS IN CLASSICAL MANNER (CHOJNICKI)
 FILTRATION OF OBSERVATIONS / FILTER 51/ 833
 POTENTIAL CARTWRIGHT-EDDEN-(DOODSON) / COMPLETE EXPANSION
 COMPUTATION - INSTITUTE FOR METEOROLOGY AND GEOPHYSICS , UNIV. VIENNA - HP 1000

88 4 5 1-88 4 19 6/88 4 2313-88 4 29 4/88 5 313-88 6 28 8/88 7 1 1-88 7 622
 88 7 9 1-88 7 15 6/88 7 20 1-88 8 810/88 8 1213-88 8 23 6/88 8 2513-88 9 5 0
 88 9 8 1-88 9 2910/8810 613-8810 10 6/8810 1313-8810 2213

TOTAL NUMBER OF DAYS 200 3907 READINGS

WAVE GROUP	ESTIM.	AMPLITUDE FACTOR	PHASE DIFFERENCE	SUM OF
ARGUMENT N SYMBOL	AMPL.	VALUE R.M.S.	VALUE R.M.S.	AMPLIT.
105.-129. 35 SIG1	1.1621	1.18712 .05015	.535 2.433	2.8897
133.-139. 30 Q1	6.7880	1.17689 .01002	-.689 .486	9.1776
143.-149. 26 O1	36.2736	1.14931 .00186	-.129 .092	38.3081
152.-158. 22 M1	3.7992	1.14385 .01746	1.371 .875	5.8758
161.-168. 33 PSK1	37.3103	1.13872 .00132	-.036 .066	67.5882
172.-177. 22 J1	2.6548	1.17178 .02481	-.157 1.209	4.1171
181.-1E3. 37 O01	2.6634	1.13711 .02531	-.599 1.275	4.0419
207.-23X. 41 2N2	1.0977	1.23184 .03449	-1.477 1.605	3.0185
243.-248. 24 N2	6.0558	1.18216 .00705	.464 .342	9.1706
252.-258. 26 M2	33.1105	1.18519 .00128	.317 .062	36.3078
262.-267. 17 L2	1.2025	1.24295 .03382	-2.106 1.560	2.4446
271.-2X5. 47 S2K2	21.0446	1.18084 .00254	-.184 .123	23.9232
327.-375. 17 M3	.4328	1.07307 .05943	-3.099 3.174	.8274

R.M.S.ERROR M-ZERO 1.4207 MIKROGAL FILTR.COEFF.OF M-ZERO 1.0598

R.M.S.ERROR FOR BANDS D 2.8605 SD 1.8456 TD 1.3294

O1/K1 1.0093 1-O1/1-K1 1.0764 M2/O1 1.0312

REFERENCE EPOCH 1988 4 4 0.00

FILTR.COEFF.OF R.M.S.ERROR FOR BANDS D 1.0018 SD 1.0000 TD .8662

STATION 0950 BUDAPEST VERT.COMP HUNGARY

INSTITUTE FOR METEOROLOGY AND GEOPHYSICS , UNIV. OF VIENNA
LAT : 47.5500 N LON : 19.0166 E HEIGHT : 202 M
GRAVIMETER : LACOSTE&ROMBERG D-9 , FEEDBACK SRW-D
INSTALLATION : B.MEURERS
MAINTENANCE : P.VARGA, J.MITNYIK, G.HANCSEL, B.MEURERS

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377
G 0 871112/871116 871121/871129 8712 4/8712 6 871210/88 2 8 88 211/88 3 4
G 0 88 3 9/88 530 88 6 3/88 7 3

111
COMPOSANTE 1
1=V,2=NS,3=EW,5=HOR.STRAIN,6=VERT.STRAIN,7=T,8=P

ONDES DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 205 WAVES
SIGM01 14 2 2Q1 10 2 SIGMA1 11 1 Q1 20 4 R01 10 1 O1 16 4 TAU1 10 1 NO1 15 3
CHI1 7 0 P1 10 1 S1K1 23 5 TETA1 8 1 J1 14 4 SO1 7 1 OO1 11 2 NU1 19 3

TIME INTERVAL 236.0 DAYS 5328 READINGS 7 BLOKS EFFICIENCY .94

Table with columns: WAVE GROUP, ARGUMENT, N WAVE, ESTIMATED AMPL. R.M.S., AMPL. FACTOR, R.M.S., PHASE DIFF., R.M.S., RESIDUE AMPL., PHASE. Rows include wave groups like 133.-136. 20 Q1, 143.-145. 16 O1, etc.

ONDES SEMI DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 155 WAVES
EPS2 21 4 2N2 20 4 N2 24 5 M2 26 7 LAMB2 5 0 L2 9 3 S2 9 1 K2 12 2
ETA2 15 4 2K2 14 1

Table with columns: WAVE GROUP, ARGUMENT, N WAVE, ESTIMATED AMPL. R.M.S., AMPL. FACTOR, R.M.S., PHASE DIFF., R.M.S., RESIDUE AMPL., PHASE. Rows include wave groups like 233.-23X. 20 2N2, 243.-248. 24 N2, etc.

ONDES TER DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES
M3 17 0
327.-375. 17 M3 .50 .01 1.1053 .0243 .034 1.251 .02 1.0

STANDARD DEVIATION D 3.54 SD .78 TD .48 MICROGAL

QUALITY FACTORS : Q1= 11.3 Q2= 27.3
O1/K1 1.0148 1-O1/1-K1 1.1281 M2/O1 1.0251
CENTRAL EPOCH TJJ= 2447229.0

STATION 0950 BUDAPEST VERT.COMP HUNGARY

EÖTVÖS LORAND GEOPHYSICAL INSTITUTE OF HUNGARY
LAT : 47.5500 N LON : 19.0166 E HEIGHT : 202 M
GRAVIMETER : ASKANIA BN-07
INSTALLATION : P.VARGA
MAINTENANCE : J.MITNYIK, G.HANCSEL

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377

G 0 88 4 5/88 419 88 423/88 427 88 5 3/88 626 88 7 1/88 715 88 720/88 8 7
G 0 88 812/88 822 88 825/88 9 4 88 9 8/88 928 8810 6/8810 8 881013/881021
87

COMPOSANTE 1
1=V,2=NS,3=EW,5=HOR.STRAIN,6=VERT.STRAIN,7=T,8=P

ONDES DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 205 WAVES

SIGMQ1 14 2 2Q1 10 2 SIGMA1 11 1 Q1 20 4 RO1 10 1 O1 16 4 TAU1 10 1 NO1 15 3
CHI1 7 0 P1 10 1 S1K1 23 5 TETA1 8 1 J1 14 4 SO1 7 1 OO1 11 2 NU1 19 3

TIME INTERVAL 201.5 DAYS 4176 READINGS 10 BLOKS EFFICIENCY .86

Table with columns: WAVE GROUP, ARGUMENT, N, WAVE, ESTIMATED AMPL., R.M.S., AMPL. FACTOR, R.M.S., PHASE DIFF., R.M.S., RESIDUE AMPL., PHASE. Rows include wave groups like 133.-136. 20 Q1, 143.-145. 16 O1, etc.

ONDES SEMI DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 155 WAVES

EPS2 21 4 2N2 20 4 N2 24 5 M2 26 7 LAMB2 5 0 L2 9 3 S2 9 1 K2 12 2
ETA2 15 4 2K2 14 1

Table with columns: WAVE GROUP, ARGUMENT, N, WAVE, ESTIMATED AMPL., R.M.S., AMPL. FACTOR, R.M.S., PHASE DIFF., R.M.S., RESIDUE AMPL., PHASE. Rows include wave groups like 233.-23X. 20 2N2, 243.-248. 24 N2, etc.

ONDES TER DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES

M3 17 0
327.-375. 17 M3 .39 .08 .8624 .1762 1.203 11.538 .09 175.0

STANDARD DEVIATION D 6.19 SD 3.20 TD 3.13 MICROGAL

QUALITY FACTORS : Q1= 3.9 Q2= 8.0
O1/K1 1.0120 1-O1/1-K1 1.0995 M2/O1 1.0259
CENTRAL EPOCH TJJ= 2447356.0

Marées, nutation et structure interne de la Terre.

Molodenskii S.M.

Institut de Physique de la Terre

O.You.Schmidt

Traduction

Moscou 1984

Introduction

Depuis ces dernières années, l'étude des marées terrestres et de la rotation de la Terre joue un très grand rôle dans le programme général des recherches géodynamiques. Cela résulte en premier lieu de l'introduction de nouveaux procédés de mesures géodésiques et astronomiques (radio interférométrie à très longue base (VLBI), mesures de distance laser à la Lune, altimétrie par satellite, gravimètres ballistiques), dont la haute précision d'une part exige l'élimination très précise des déformations de marées et du mouvement de précession - nutation de l'axe de la Terre dans l'espace et d'autre part ouvre de nouvelles possibilités d'étudier la structure interne de la Terre à partir des données de marées et astronomiques. Ainsi par exemple, avec la précision des méthodes traditionnelles de mesure des latitudes de l'ordre de 0",003 à 0",005, l'amplitude de la nutation principale se détermine avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} à $3 \cdot 10^{-4}$ et l'effet dynamique du noyau liquide de la Terre avec une erreur atteignant 10 à 20 %. L'utilisation du VLBI ouvre la possibilité d'atteindre une précision des mesures d'angles de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} seconde d'arc et d'améliorer d'au moins un ordre de grandeur la précision des constantes de la nutation et les variations de la vitesse de rotation de la Terre dues aux marées. Les données sur les marées obtenues par les méthodes traditionnelles (gravimètres, clinomètres, déformographes) sont sensiblement plus précises.

L'examen détaillé des moyens actuels et des méthodes d'observations géodésiques et astronomiques se rapporte en particulier à l'étude [1,2] des méthodes traditionnelles d'observation des marées terrestres et de la nutation dans les monographies [3, 4].

Les bases de la théorie des marées terrestres et de la nutation étaient contenues dans les travaux classiques de Kelvin, Lamb, Love, Larmor, Hough, Sloudskii et Poincaré [5 à 8]. L'examen historique détaillé de ces travaux et également de travaux plus anciens et contemporains sur la théorie des marées terrestres et de la nutation de la Terre se trouvent également en [3] et [4].

Les méthodes de calcul des paramètres de marées et des constantes de la nutation proposées en [3 - 4] reposent sur une série d'hypothèses simplificatrices qui sont principalement les suivantes :

- 1) les marées dans l'enveloppe élastique sont considérées dans tous les cas dans l'approximation statique; l'effet dynamique du noyau liquide ne se calcule que pour les ondes diurnes;
- 2) l'enveloppe est supposée parfaitement élastique, et le noyau liquide parfait;
- 3) les effets liés aux hétérogénéités horizontales de l'enveloppe n'ont pas été pris en considération;
- 4) on n'a pas pris en considération l'influence de la marée océanique et de la dissipation de l'énergie des marées dans l'océan sur les nutations forcées et libres.

Jusque récemment ces hypothèses étaient justifiées par le fait que les valeurs calculées sur cette base pour les constantes de la nutation, la période chandlérienne et les variations de marées du champ gravitationnel, correspondaient, dans les limites des erreurs de mesures, aux données observées.

L'augmentation de la précision des mesures a exigé une précision correspondante de la théorie d'où il est apparu que l'analyse des effets non calculés précédemment apporte une information importante sur les propriétés mécaniques de l'intérieur de la Terre. Ainsi par exemple l'allongement de la période de Chandler provoqué par la non élasticité du manteau permet d'obtenir une méthode nouvelle et non complétée par d'autres données sur la rhéologie du manteau, dans le domaine des périodes, l'analyse de l'influence de la viscosité du noyau sur la nutation forcée introduit les limitations les plus fortes sur la viscosité du noyau; enfin les observations des marées gravimétriques, clinométriques et déformographiques permettent d'étudier aussi bien les hétérogénéités à grande échelle que locales de l'écorce et du manteau.

Une série de travaux [9 à 33] différant sensiblement aussi bien comme méthode de solutions que comme résultat ont été consacrés à la théorie des marées et de la nutation.

Dans la présente monographie on se propose de donner une introduction de la théorie des marées dynamiques dans une Terre visco-élastique avec un noyau qui ne soit pas un liquide parfait, un océan et une enveloppe faiblement non homogène latéralement.

L'introduction se base sur les résultats des travaux [22 à 33; 83 à 85] effectués à l'Institut de Physique de la Terre de l'Académie des Sciences d'URSS en 1976 à 1983.

Le chapitre I est consacré à la théorie statique des marées terrestres élastiques. Pour compléter l'exposé on y a introduit certains résultats classiques employés souvent dans la suite (relations cinématiques de Poincot, solution de Poincaré, équation des marées statiques dans une Terre à symétrie sphérique) et on a examiné également les propriétés générales de

conjugaison de l'opérateur différentiel déterminant les conditions de l'équilibre élastico-gravitationnel de la Terre, ainsi que la méthode du petit paramètre dans la théorie des marées terrestres et les rapports analytiques entre les nombres de volume et de charge de Love qui constituent une conséquence des propriétés de conjugaison. Les rapports cinématiques de Poinsoot pour un corps à deux paramètres sont généralisés sur le corps à trois paramètres différant peu d'un ellipsoïde de rotation.

Dans le chapitre II on examine la théorie dynamique des marées.

Puisque l'effet de résonance proche de la période diurne dans le noyau liquide a été étudié précédemment très en détail, on a attribué une attention particulière à l'évaluation de l'écart des marées élastiques dans l'enveloppe par rapport aux marées statiques, et également à la théorie dynamique des marées semi diurnes et à longue période dans le noyau liquide.

De pair avec les effets en relation avec l'action des forces d'inertie sur la marée dans l'enveloppe et le noyau, on a examiné l'influence directe de la nutation forcée sur les enregistrements de marées et on a fait également l'analyse de qualité des équations dynamiques de la marée polaire dans l'océan, déterminant l'influence de l'océan sur le mouvement chandlérien du pôle.

La théorie des marées et de la nutation, prenant en compte la dissipation d'énergie dans l'océan, l'enveloppe et le noyau est étudiée dans les chapitres III - IV.

Les principaux modèles rhéologiques du manteau sont examinés dans le chapitre III § I et on a tenu compte de l'influence de la viscosité sur la phase des marées terrestres.

Au § 2 du même chapitre on a obtenu la solution analytique du problème de la nutation libre et forcée du modèle de Terre avec noyau liquide homogène et enveloppe hétérogène non idéalement élastique, couverte par un océan. Le décrement d'amortissement de la nutation libre quasi diurne et les corrections à la constante étaient liés aux coefficients connus des harmoniques du second ordre dans les décompositions en fonctions sphériques de l'amplitude des ondes de marées dans l'océan réel.

On a ensuite examiné les problèmes principaux de la théorie du mouvement chandlérien du pôle pour un modèle réel de la Terre avec un noyau non homogène et compressible et une enveloppe non idéalement homogène.

La comparaison des valeurs observée et théorique de la période chandlérienne permet de mettre en évidence les propriétés non élastiques du manteau à la fréquence chandlérienne et d'estimer ainsi la dépendance du facteur de qualité du manteau en fonction de la fréquence lorsque les périodes d'oscillations varient depuis environ 1 sec (ce qui correspond aux périodes des ondes séismiques de volume) jusqu'à la période chandlérienne $T(ch) = 14$ mois. Etant donné que les corrections à $T(ch)$ dues à

la non élasticité de l'enveloppe étaient assez faibles (de l'ordre de quelques jours) la valeur théorique de T (ch) pour l'enveloppe idéalement élastique doit être calculée avec une précision relative très élevée. Les principales difficultés sont liées à la nécessité de calculer avec précision la marée polaire dans l'océan réel et de calculer avec précision aussi l'effet du noyau liquide.

Dans les § I et 2 du chapitre IV on propose une nouvelle méthode de calcul de l'effet du noyau liquide basée sur la considération du moment des forces transmis du noyau à l'enveloppe et n'exigeant pas le calcul du champ des vitesses dans tout le volume du noyau. Ensuite sur la base des données observées de la période et du décrement d'amortissement du mouvement chandlérien du pôle, et également des amplitudes des variations de marées du champ gravitationnel on a examiné le problème de la dépendance en fréquence du facteur de qualité du manteau dans le domaine des fréquences de marées et chandlérienne.

Dans les § 3 et 4 on a examiné le problème de l'influence de la viscosité du noyau sur les amplitudes et les phases de la nutation forcée, le décrement d'amortissement du mouvement chandlérien du pôle et les variations de la vitesse de rotation de la Terre dues aux marées. Sur la base de ces estimations et des résultats des observations actuelles des constantes des nutations on a obtenu des limitations quant à la valeur maximale de la viscosité du noyau liquide.

Le chapitre V est consacré à la théorie des marées pour des modèles peu différents de la sphère.

On sait que les variations de marées polaires et gravitationnelles se caractérisent par des déformations élastiques de toute la Terre prise en entier alors que les inclinaisons et les déformations dépendent des anomalies locales des modules élastiques, du relief local et de la géométrie de la cavité ou de la galerie dans la proximité immédiate du point d'observations. En conséquence la théorie des marées du champ gravitationnel se construit pour un modèle réel de la Terre radialement hétérogène autogravitant avec un noyau liquide alors que en ce qui concerne les inclinaisons et les déformations nous sommes limités partout au modèle le plus simple d'un demi-espace élastique légèrement hétérogène; pour calculer l'effet du relief de ces mêmes régions on emploie la méthode des perturbations suivant un petit paramètre égal à la tangente de l'angle d'inclinaison de l'élément de surface par rapport à l'horizon. Nous avons donné les résultats des calculs analytiques et numériques des marées du champ gravitationnel, des inclinaisons et des déformations pour une série de modèles les plus simples d'un milieu horizontalement hétérogène et on les a comparés avec les résultats des observations.

L'auteur remercie V.N. Zharkov et M.V. Kramer qui ont fourni une solution en utilisant les résultats des travaux actuels ainsi que des travaux de N.N. Pariiskii qui a pris connaissance du manuscrit et a fait une série de remarques précieuses.

Chapitre I

Rotation de la Terre avec une enveloppe solide et un noyau liquide; théorie statiques des marées.

§ I. Relations fondamentales cinématiques.

Pour étudier les marées dans l'enveloppe élastique et le noyau liquide de la Terre, le choix le plus favorable est celui d'un système de coordonnées en rotation irrégulière lié de l'une ou l'autre façon à l'enveloppe. A la suite de la solution complète des équations du mouvement cette approche permet de déterminer la projection du rayon-vecteur d'un point donné de la surface de la Terre \bar{r} , du vecteur moment cinétique \bar{M} et du vecteur vitesse angulaire de rotation du système mobile de coordonnées $\bar{\omega}$ sur ces mêmes axes mobiles.

Etant donné que les mesures astronomiques fixent les coordonnées des points d'observation par rapport aux étoiles fixes, il est nécessaire de relier les composantes des vecteurs \bar{r} , \bar{M} , $\bar{\omega}$ dans le système mobile de coordonnées aux composantes des mêmes vecteurs dans le système inertiel. Comme ces relations seront beaucoup employées dans la suite, nous en donnerons un court résumé.

1. Systèmes de coordonnées; équations des moments dans les systèmes mobiles de coordonnées.

Pour décrire la rotation du corps solide, les axes de coordonnées cartésiennes mobiles (x, y, z) sont facilement remplaçables par les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie. Dans ce cas les projections du moment de la quantité du mouvement sur les axes x, y, z ont la forme [34]

$$M = (A\omega_x, B\omega_y, C\omega_z) \quad (1.1)$$

où A, B, C sont les moments principaux d'inertie, et $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sont les projections du vecteur vitesse angulaire instantanée du corps solide sur les axes mobiles.

La substitution de (1.1) dans l'équation d'Euler [34]

$$\frac{D\bar{M}}{Dt} = \bar{M} + [\bar{\omega} \bar{M}] = \bar{L} \quad (1.2)$$

(où D/Dt est la différenciation par rapport au temps dans le système de coordonnées inertiel, le point représente la différenciation par rapport à t dans le système (x, y, z), \bar{L} est le moment des forces extérieures) donne le système des trois équations différentielles déterminant $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ en fonction des valeurs connues de \bar{L} et des conditions initiales pour $\bar{\omega}$.

Ainsi les relations (1.1) et (1.2) donnent une solution complète du problème du mouvement des vecteurs vitesse angulaire et moment cinétique du corps solide par rapport aux axes mobiles.

Puisque la notion de vitesse angulaire du corps déformé n'a pas de sens précis, nous entendrons dans la suite par $\vec{\omega}(t)$ le vecteur vitesse angulaire instantanée du système de coordonnées (x, y, z) lié de façon précise à la Terre en rotation.

Nous examinerons quelques procédés possibles de choix du système mobile de coordonnées. En tenant compte de la relation générale liant le vecteur moment cinétique \vec{M} au vecteur $\vec{\omega}$ et le champ des vitesses $V_i(x, y, z)$ de l'élément de volume $d\tau$ par rapport au système mobile de coordonnées, on obtient :

$$M_i = \sum_{k=1}^3 J_{ik} \omega_k + \iiint_{\tau} \rho [\vec{r} \cdot \vec{v}]_i d\tau \quad (1.3)$$

où $J_{ik} = - \iiint_{\tau} \rho x_i x_k d\tau$ pour $i \neq k$ (1.4)

$$J_{11} = A \quad J_{22} = B \quad J_{33} = C$$

sont les composantes du tenseur d'inertie, ρ est la densité, r est le rayon-vecteur, τ est le volume occupé par toute la Terre (en incluant l'océan). Il est évident d'utiliser les systèmes de coordonnées dans lesquels l'expression (1.3) a la forme la plus simple. On peut en particulier les déterminer par une des deux conditions :

1) soit que les axes x, y, z coïncident à tout instant avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie,

2) soit que les axes x, y, z coïncident à un certain moment initial t avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie et se meuvent ensuite de façon à ce que

$$\iiint_{\tau} \rho [\vec{r} \cdot \vec{v}] d\tau \equiv 0 \quad (1.5a)$$

Dans le premier cas on élimine des équations du mouvement (1.2) les composantes non diagonales du tenseur d'inertie et dans le second on élimine le moment de la quantité de mouvement par rapport au système de coordonnées x, y, z .

Pour calculer le mouvement de nutation de la Terre on ne se sert pas habituellement du système de coordonnées (I) puisque son mouvement est fortement perturbé par les déformations de marées et est lié de façon assez complexe avec les variations observées des latitudes astronomiques.

Dans le cas du modèle de Terre avec noyau liquide nous nous servons du système de coordonnées (x, y, z) lié à l'enveloppe et déterminé par la condition

$$\iiint_{\tau_2} \rho [\bar{\epsilon} \bar{v}] d\tau_2 = 0 \quad (1.5b)$$

où τ_2 est le volume occupé par l'enveloppe et l'océan. Dans ce système de coordonnées

$$\bar{M}_i = \sum_{k=1}^3 J_{ik} \omega_k + \iiint_{\tau_1} \rho [\bar{\epsilon} \bar{v}]_i d\tau_1 \quad (1.6)$$

où τ_1 est le volume occupé par le noyau.

Ces systèmes de coordonnées constituent un avantage important en ce que les déplacements de marées des points de la surface de la Terre relatifs sont assez petits et peuvent être calculés relativement simplement.

Les valeurs $J_{ik}(t)$ entrant en (1.6) et le champ de vitesses des courants de marées dans le noyau $v(x, y, z, t)$ sont déterminés comme solution commune des équations aux déformations élastiques de l'enveloppe et de l'hydrodynamique du noyau et seront examinés plus loin. La substitution de (1.6) dans (1.2) donne un système de trois équations dont la solution permet de déterminer, d'après les valeurs connues de $J_{ik}(t)$, $\bar{v}(\bar{r}, t)$, $\bar{L}(t)$, les projections des vecteurs \bar{M} et $\bar{\omega}$ sur les axes mobiles (x, y, z).

2. Relations cinématiques de Poinot pour le cas du corps à deux axes (pour A = B).

Nous examinerons les relations cinématiques reliant la trajectoire du vecteur $\bar{\omega}$ par rapport aux axes mobiles (x, y, z) (polhodie) avec la trajectoire du même vecteur par rapport aux axes fixes (X, Y, Z) (herpolhodie). La solution de ce problème dans la situation la plus générale a été donnée par Poinot (35). Il convient cependant de noter que dans le cas général de valeurs arbitraires A, B, C la solution des équations (1,2) est très complexe même dans le cas de la rotation libre c'est à dire pour $\bar{L} = 0$. C'est pourquoi nous utiliserons de préférence dans la suite l'hypothèse que l'ellipsoïde d'inertie de la Terre est proche d'un ellipsoïde de révolution ($|A - B| \ll |C - A|$) et également l'aspect évident du moment des forces de marées \bar{L} .

En introduisant les angles d'Euler φ, θ, ψ et après avoir désigné par $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ et par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes de ce même vecteur sur les axes (x, y, z) et (X, Y, Z) nous écrirons les relations connues entre $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ et φ, θ, ψ

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}_3 \sin \theta_3 \sin \psi_3 + \dot{\theta}_3 \cos \psi_3 ; \\ \omega_y &= \dot{\varphi}_3 \sin \theta_3 \cos \psi_3 - \dot{\theta}_3 \sin \psi_3 ; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= \dot{\varphi}_3 \cos \theta_3 + \dot{\psi}_3 ; \\ \omega_1 &= \dot{\varphi}_3 \sin \theta_3 \sin \psi_3 + \dot{\theta}_3 \cos \psi_3 ; \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}_3 \sin \theta_3 \cos \psi_3 - \dot{\theta}_3 \sin \psi_3 ; \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}_3 \cos \theta_3 + \dot{\psi}_3 . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ici θ est l'angle entre les axes z et Z , ψ est l'angle entre la ligne des noeuds et l'axe X , φ est l'angle entre la ligne des noeuds et l'axe x , la ligne des noeuds étant l'intersection des plans (X, Y) et (x, y) (voir fig. I.I.)

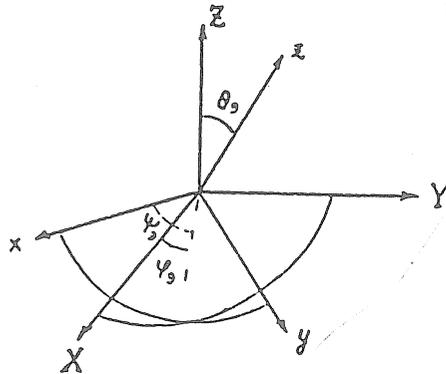


Fig.I.I.

Pour la détermination des angles d'Euler $\varphi_3, \psi_3, \theta_3$. Si les valeurs $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ sont connues par la solution des équations du mouvement (1.2) alors les rapports (1.7) permettent d'exprimer $\varphi_3, \psi_3, \theta_3$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ et (1.8) de déterminer les composantes de $\bar{\omega}$ suivant les axes fixes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ par les valeurs connues $\varphi_3, \psi_3, \theta_3$. Nous illustrerons ceci dans le cas de la nutation forcée de la Terre solide sans noyau liquide.

Après avoir écrit le potentiel générateur des marées diurnes sous la forme

$$V_e = \frac{V_e}{a^2} (X Z \cos \sigma t + y z \sin \sigma t) \quad (1.9)$$

où V_e est l'amplitude de V_e , σ la fréquence angulaire, a le rayon moyen de la Terre, nous calculerons le moment des forces appliquées par le corps générateur de marées. Nous obtiendrons :

$$\vec{L} = \iiint \rho [\vec{e} \nabla V_e] d\tau = [(C-A) \frac{V_e}{a^2} \sin \sigma t + \vec{j} (A-C) \frac{V_e}{a^2} \cos \sigma t] \quad (1.10)$$

La substitution de (1.1.) et (1.10) en (1.2) donne

$$A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z = (C - A) \frac{v_e}{a^2} \sin \sigma t ;$$

$$A\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z = (A - C) \frac{v_e}{a^2} \cos \sigma t ;$$

$$\dot{\omega}_z = 0. \tag{1.11}$$

La solution générale des équations (1.11) peut être représentée par la combinaison des solutions du système homogène correspondant et d'une solution du système non homogène.

La première a la forme

$$\omega_x = c \cos (\sigma_0 t + \varphi_0), \omega_y = c \sin (\sigma_0 t + \varphi_0), \omega_z = \text{const.} \tag{1.12}$$

où c et φ_0 sont des constantes arbitraires, et

$$\sigma_0 = \frac{C - A}{A} \omega \tag{1.13}$$

est la fréquence eulérienne du mouvement libre du pôle.

Le système non homogène (1.11) a une solution particulière qui est la suivante :

$$\omega_x = \varepsilon \omega \cos \sigma t, \omega_y = \varepsilon \omega \sin \sigma t, \omega_z = \text{const} = \omega \tag{1.14}$$

où

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = -\frac{v_e}{a^2} \frac{C - A}{\omega \sigma A + \omega^2 (A - C)} \tag{1.15}$$

est l'amplitude de la nutation forcée par rapport au système mobile de coordonnées (numériquement égale à l'angle d'ouverture du cône de polhodie en radians).

Après avoir substitué (1.14) en (1.7) nous exprimerons les angles d'Euler en utilisant les valeurs connues $\omega_x \omega_y \omega_z$

$$\theta_3 = \text{arc tg} \frac{1 + \sigma/\omega}{\varepsilon} = \text{const};$$

$$\psi_3 = \frac{\pi}{2} - \sigma t \tag{1.16}$$

$$\varphi_3 = \frac{\omega \varepsilon}{\sin \theta} t + \text{const}$$

En utilisant (1.16), nous calculerons la trajectoire du vecteur par rapport aux axes fixes (herpolhodie). La substitution de (1.16) en (1.8) donne :

$$\omega_1 = -\sigma \sin \theta_3 \sin \left(\frac{\varepsilon \omega t}{\sin \theta_3} + \text{const} \right) \quad (1.17a)$$

$$\omega_2 = -\sigma \sin \theta_3 \cos \left(\frac{\varepsilon \omega t}{\sin \theta_3} + \text{const} \right) \quad (1.17b)$$

$$\omega_3 = -\sigma \cos \theta_3 + \frac{\varepsilon \omega}{\sin \theta_3} \quad (1.17c)$$

Ces expressions montrent que la fréquence angulaire du mouvement du vecteur $\vec{\omega}$ est

$$\Omega = \frac{\varepsilon \omega}{\sin \theta_3} \quad (1.18)$$

et que l'angle d'ouverture du cône est

$$\alpha = \arcsin \frac{-\sigma \sin \theta_3}{\omega} = \arctg \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3 - \frac{\varepsilon \omega}{\sigma \sin \theta_3}} \quad (1.19)$$

Dans le cas des nutations forcée et libre de la Terre, l'angle α ne dépasse pas quelques secondes d'arc, c'est pourquoi les expressions (1.16) à (1.19) sont simplifiées. Par (1.17c) (1.18) et (1.19) nous obtiendrons

$$\varepsilon = \theta_3 \frac{\omega + \sigma}{\omega} \quad (1.20a)$$

$$\Omega = \omega + \sigma \quad (1.20b)$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\omega + \sigma} \quad (1.20c)$$

Il convient de noter que pour la déduction des rapports (1.20) on ne s'est servi que de l'hypothèse que les composantes de $\vec{\omega}$ ont la forme (1.14). Il est évident que l'égalité des facteurs pour $\cos \sigma t$ et $\sin \sigma t$ en (1.14) est nécessaire à cause de la symétrie axiale, c'est pourquoi les rapports (1.20) sont valables également pour des modèles symétriques axiaux arbitraires de la Terre déformée avec noyau liquide.

Quant aux valeurs numériques de ϵ (1.15) elles ne se rapportent qu'au cas du modèle de Terre absolument rigide sans noyau liquide.

Des formules (1.20) il résulte également que la vitesse du mouvement du vecteur $\vec{\omega}$ par rapport au système mobile de coordonnées correspond à la vitesse du mouvement du même vecteur par rapport au système fixe. Toutefois en utilisant les expressions (1.14) et (1.17) nous obtiendrons

$$\left| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right| = \left| \dot{\vec{\omega}} \right| = \left| \epsilon \omega \sigma \right|. \quad (1.21)$$

Il est aisé de s'assurer de la véracité de cette affirmation et sans l'introduction des angles d'Euler si on tient compte du rapport connu reliant les opérations de la différenciation du vecteur arbitraire \vec{A} dans les systèmes mobile et fixe de coordonnées [34] :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \dot{\vec{A}} + [\vec{\omega} \wedge \vec{A}] \quad (1.22)$$

En posant en (1.22) $\vec{A} = \vec{\omega}$, nous obtiendrons $\left| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right| = \left| \dot{\vec{\omega}} \right|$

Géométriquement ce rapport signifie que la vitesse du mouvement de l'axe instantané de rotation de la polhodie par rapport à l'herpolhodie coïncide avec la vitesse du mouvement du même axe par rapport à la polhodie c'est à dire que le roulement du cône de polhodie sur le cône d'herpolhodie se produit sans glissement.

Puisque la fréquence angulaire du mouvement de précession-nutation du vecteur $\vec{\omega}$ dans l'espace $\Omega \ll \omega$, il résulte du rapport (1.20c) que

$$\sigma_{nut} \sim -\omega \quad (1.23)$$

Après avoir substitué (1.23) en (1.20b) nous obtiendrons

$$\left| \frac{\alpha}{\epsilon} \right| \gg 1 \quad (1.24)$$

c'est-à-dire que dans le cas de la nutation forcée et de la précession l'angle d'ouverture du cône d'herpolhodie dépasse l'angle d'ouverture du cône de polhodie.

De (1.13) il résulte que dans le cas du mouvement libre d'Euler et $(C - A) \ll A$

$$|\sigma| \ll \omega \quad (1.25)$$

Après avoir substitué (1.25) en (1.20b) et (1.20c) nous obtiendrons

$$\Omega \approx \omega$$

$$\left| \frac{\alpha}{\epsilon} \right| \ll 1 \quad (1.26)$$

C'est à dire que dans la nutation d'Euler le mouvement du vecteur $\overline{\omega}$ dans l'espace se produit avec une fréquence angulaire voisine du jour stellaire et que l'angle d'ouverture du cône d'herpolhodie est sensiblement plus petit que l'angle d'ouverture du cône de polhodie.

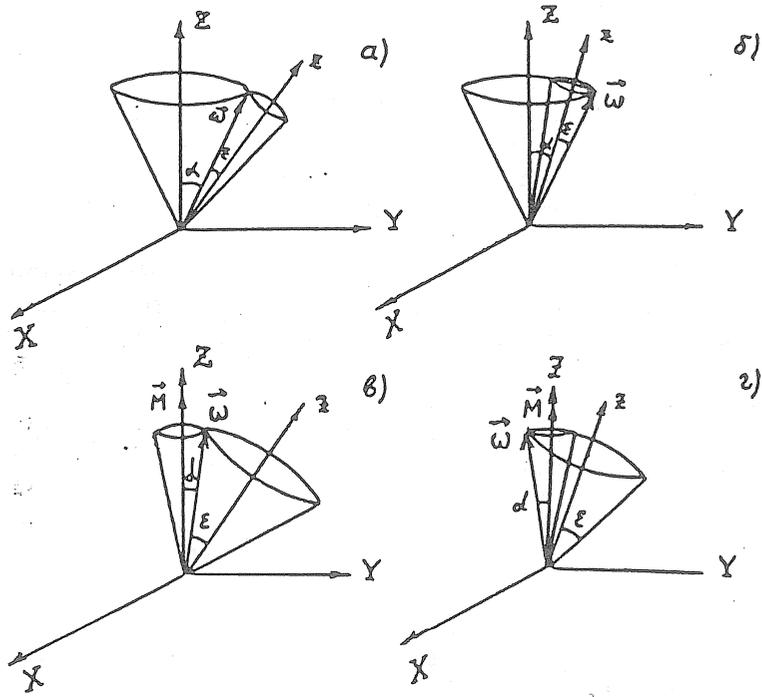
Ces rapports cinématiques sont illustrés par le graphique connu du roulement du cône de polhodie sur le cône d'herpolhodie donné sur les figures (1.2) où a) et b) correspondent au cas de la nutation forcée et de la précession

(a - $\sigma + \omega > 0$, b - $\sigma + \omega < 0$) et les figures c) et d) au mouvement libre d'Euler (de Chandler) du pôle (c - $C > A$, g - $C < A$).

Comme nous le savons lors de la nutation libre quasi diurne de la Terre réelle avec un noyau liquide $\sigma\omega - \omega$, $\sigma + \omega < 0$; en outre $C > A$.

C'est pourquoi le mouvement libre du pôle correspond aux figures b et c. Dans la nutation forcée le cas a) aussi bien que bien que le cas b) sont possibles.

Il convient de noter que les observations astrométriques enregistrent le mouvement des axes (x, y, z) dans l'espace c'est à dire les combinaisons $\alpha \pm \epsilon$. Dans le cas de la nutation libre et forcée et également de la précession, ces angles sont voisins de α ; dans le cas du mouvement de Chandler du pôle, les angles sont voisins de ϵ .



Figures 1.2.

Représentation de Poinsot du roulement du cône mobile (polhodie) sur le cône fixe (herpolhodie). L'angle d'ouverture du cône de polhodie est désigné par ϵ , et le cône d'herpolhodie par α . Les figures a, b correspondent aux cas de la nutation libre quasi diurne, de la nutation forcée et de la précession

(a - $\sigma + \omega > 0$, b - $\sigma + \omega < 0$) et les figures c, d correspondent au mouvement libre d'Euler (de Chandler) du pôle (c - $C > A$, d - $C < A$).

3. Sur les effets triaxiaux.

Comme nous le savons, la différence des moments d'inertie de la Terre B - A est assez faible :

$$|B - A| \sim \frac{1}{300} |C - A|.$$

C'est pourquoi l'approximation A = B employée plus haut est assez précise. Cependant la précision relative des déterminations actuelles des constantes des nutations est si élevée ($\sim 3 \cdot 10^{-4}$ pour la nutation principale) que l'estimation de ces effets peut représenter un intérêt certain.

Nous examinerons le problème de la cinématique de la nutation forcée d'une Terre triaxiale au moyen du développement des solutions des équations (1.2), (1.7), (1.8) suivant un petit paramètre (B - A / C - A).

En utilisant à titre d'approximation zéro de la solution celles obtenues plus haut, nous écrirons

$$\tilde{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_1 \quad \tilde{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_1 \quad \tilde{\Theta} = \Theta_0 + \Theta_1 \quad (1.27)$$

où les valeurs Ψ_0 , Ψ_1 , Θ_0 se déterminent par les formules (1.16) et Ψ_1 , Ψ_1 , Θ_1 , sont les petites corrections.

Par analogie avec (1.14), (1.15) dans le cas A \neq B nous obtiendrons

$$\omega_x = \varepsilon_1 \omega \cos \sigma t; \quad \omega_y = \varepsilon_2 \omega \sin \sigma t, \quad \omega_z = \omega = \text{const}, \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(B-C) \omega (\sigma - \omega (A-C))}{\sigma^2 (AB \sigma^2 \omega + (A-C)(B-C) \omega^3)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(A-C) \omega (\sigma - \omega (B-C))}{\sigma^2 (AB \sigma^2 \omega + (A-C)(B-C) \omega^3)} \quad (1.29)$$

Après avoir exprimé à l'aide de (1.7) $\tilde{\Psi}$ et $\tilde{\Theta}$ par ω_x, ω_y nous aurons

$$\dot{\tilde{\Psi}} \sin \tilde{\Theta} = \omega_x \sin \Psi + \omega_y \cos \Psi; \quad (1.30)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}} = \omega_x \cos \tilde{\Psi} - \omega_y \sin \tilde{\Psi}.$$

Après avoir substitué (1.27 - 1.29) en (1.30) et dans la dernière des trois composantes de (1.7) et en négligeant ensuite les termes du second ordre, nous trouverons

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 + \dot{\psi}_1 \sin \theta_0 + \dot{\varphi}_0 \theta_1 \cos \theta_0 &= \omega \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \sin(\psi_0 + \psi_1 + \sigma t) + \\ &+ \omega \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \sin(\psi_0 + \psi_1 - \sigma t); \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 = \omega \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \cos(\psi_0 + \psi_1 + \sigma t) + \omega \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos(\psi_0 + \psi_1 - \sigma t);$$

$$\dot{\psi}_1 \cos \theta_0 - \dot{\varphi}_0 \theta_1 \sin \theta_0 + \dot{\psi}_1 = 0.$$

En utilisant ensuite (1.16) et en tenant compte qu'au second ordre

$$\begin{aligned} \sin(\psi_0 + \psi_1 + \sigma t) &= \sin(\pi/2 + \psi_1) \approx 1, \\ \cos(\psi_0 + \psi_1 + \sigma t) &= \cos(\pi/2 + \psi_1) \approx -\psi_1, \end{aligned}$$

nous obtiendrons un système de trois équations linéaires différentielles pour ψ_1 , ψ_1 , θ_1

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 \sin \theta_0 + \theta_1 \omega \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \operatorname{ctg} \theta_0 &= \omega \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\sigma t; \\ \dot{\theta}_1 + \omega \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \psi_1 &= \omega \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \sin 2\sigma t; \\ \dot{\psi}_1 \cos \theta_0 - \omega \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \theta_1 + \dot{\psi}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

L'équation caractéristique du système (1.32) a la forme

$$\det \begin{vmatrix} \sin \theta_0 \lambda & 0 & \tilde{\epsilon}_0 \omega \operatorname{ctg} \theta_0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_0 \omega & \lambda \\ \lambda \cos \theta_0 & \lambda & -\tilde{\epsilon}_0 \omega \end{vmatrix} = -\lambda (\tilde{\epsilon}_0 \omega)^2 \sin \theta_0 - \lambda \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0} (\tilde{\epsilon}_0 \omega)^2 - \lambda^3 \sin \theta_0 = 0, \quad (1.33)$$

où $\tilde{\epsilon}_0 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$. Les solutions de l'équation cubique (1.33) déterminent trois valeurs propres

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm i \omega \tilde{\epsilon}_0 / \sin \theta_0 = \pm i \Omega. \quad (1.34)$$

Les solutions correspondantes, linéairement indépendantes, du système homogène sont les suivantes

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad \varphi_1 = \text{const}; \quad \psi_1 = \theta_1 \neq 0; \\
 & 2) \quad \varphi_1 = \varphi_1^c \cos \Omega t; \quad \psi_1 = \psi_1^c \cos \Omega t; \quad \theta = \theta_1^c \sin \Omega t \\
 & \quad \varphi_1^c = \psi_1^c \operatorname{ctg} \theta; \quad \theta_1^c = -\cos \theta \varphi_1^c \\
 & 3) \quad \varphi_1 = \varphi_1^s \sin \Omega t; \quad \psi_1 = \psi_1^s \sin \Omega t; \quad \theta = \theta_1^c \cos \Omega t;
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

où $\varphi_1^s = \theta_1^c \operatorname{ctg} \theta = -\psi_1^s \cos \theta.$

Il est simple de s'assurer que les formules (1.35) décrivent la variation des valeurs $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ pour une variation arbitraire infiniment petite des conditions initiales pour $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$

Elles correspondent géométriquement à la variation des angles d'Euler pour une rotation du système fixe de coordonnées (X,Y,Z) d'un angle constant suffisamment petit.

La solution partielle du système non homogène (1.32) a la forme

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \varphi_1^0 \sin 2\sigma t; \\
 \theta_1 &= \theta_1^0 \cos 2\sigma t; \\
 \psi_1 &= \psi_1^0 \sin 2\sigma t.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

où $\theta_1^0 = \omega \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2 \tilde{\varepsilon}_0} \frac{\sin \theta (\tilde{\varepsilon}_0 \omega \cos \theta + 2\sigma \sin \theta)}{\tilde{\varepsilon}_0 \omega^2 - 4\sigma^2 \sin^2 \theta};$

$$\psi_1^0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2 \tilde{\varepsilon}_0} + \frac{2\sigma}{\tilde{\varepsilon}_0 \omega} \theta_1^0; \quad \varphi_1^0 = \omega \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4\sigma \sin \theta} - \frac{\tilde{\varepsilon}_0 \omega \cos \theta}{2\sigma \sin^2 \theta} \theta_1^0.$$

En conformité avec (1.18) $\sigma \sin \theta \gg \tilde{\varepsilon}_0 a_0$, c'est pourquoi

$$\begin{aligned}
 \theta_1^0 &\approx -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \omega}{4\sigma}; \\
 \psi_1^0 &\approx 0; \\
 \varphi_1^0 &\approx \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \omega}{4\sigma \sin \theta}.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Ainsi, l'influence de la triaxialité de la Terre sur la nutation et la précession provoquées par le potentiel générateur de marée de la forme (1.9) apparaît dans des oscillations à courtes périodes (période semi-diurne) des angles $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\varphi}$

Pour évaluer ces effets nous comparerons les valeurs φ_1 et θ_1 avec les valeurs θ, φ dans l'approximation zéro. En comparant (1.37) et (1.16) nous obtiendrons

$$\left| \frac{\theta_1^{\circ}}{\theta} \right| \approx \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4\varepsilon_0} \frac{\omega + \sigma}{\omega} \quad (1.38a)$$

$$\left| \frac{\psi_1^{\circ}}{\psi} \right| \approx \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_0} \frac{\sigma}{\omega} \quad (1.38b)$$

Pour $(A - B) / A 10^{-5}$ le rapport θ_1/θ de l'ordre $2 \cdot 10^{-5}$ $(\omega + \sigma) / \omega$ déterminé par la formule (1.38a). La correction de cette valeur est sensiblement plus petite que l'erreur des observations astronomiques actuelles et par conséquent on peut la négliger. La correction à ψ n'a également pas une valeur importante car elle a un caractère oscillant et, dans une moyennisation sur un intervalle assez long, elle tend vers zéro.

Il convient de noter que certaines corrections aux constantes de nutation apparaissent également dans le résultat du calcul des termes du potentiel générateur de marée proportionnels aux harmoniques sphériques du troisième ordre. Elles ont été examinées en [4]. Cependant à cause de la petitesse du potentiel générateur de marée du troisième ordre par rapport au potentiel du second ordre et la petitesse du rapport $(A - B) / (C - A)$ ces corrections ont également une faible valeur.

Dans la suite, les effets de la triaxialité de la Terre ne seront pas calculés et en tant que rapports cinématiques fondamentaux nous utiliserons les rapports (1.7) - (1.26).

§ 2. Solution de Poincaré.

La solution exacte du problème de la rotation du corps solide ayant une cavité ellipsoïdale complètement remplie par un liquide idéal homogène et non compressible a été donnée indépendamment et presque simultanément par Hough, Sloudskii et Poincaré [8.6].

Etant donné que nous utiliserons essentiellement cette solution dans la suite, nous en donnons un court résumé.

La solution de Poincaré est basée sur la représentation du vecteur vitesse des éléments du liquide par rapport au système de coordonnées (x, y, z) se mouvant avec l'enveloppe solide sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{a} &= q_y \frac{z}{c} - q_z \frac{y}{a}; \\ \frac{v_y}{a} &= q_z \frac{x}{a} - q_x \frac{z}{c}; \\ \frac{v_z}{c} &= q_x \frac{y}{a} - q_y \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

où g_x, g_y, g_z sont des paramètres qui sont fonctions uniquement du temps et indépendants de x, y, z ; a et c sont les demi-axes de l'ellipsoïde.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.40)$$

déterminant l'interface noyau-enveloppe.

Le second membre de (1.39) représente le produit vectoriel du vecteur $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ par le vecteur de composante $x/a, y/a, z/c$. Il est évident que le champ (1.39) des vitesses (v_x, v_y, v_z) satisfait automatiquement à la condition de non compressibilité du liquide.

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.41)$$

et également à la condition aux limites résidant dans le fait que la composante de la vitesse du liquide normale à la frontière de l'ellipsoïde (1.40) devient nulle.

Après avoir appliqué à l'équation du mouvement du liquide

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right) = - \nabla P \quad (1.42)$$

(ou P est la pression - - la densité) l'opérateur rotationnel et tenant compte des relations connues d'analyse vectorielle

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \nabla) \vec{V} &= \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) - [\vec{V} \text{ rot } \vec{V}]; \\ \text{rot} [\vec{V} \vec{\xi}] &= (\vec{\xi}, \nabla) \vec{V} - (\vec{V}, \nabla) \vec{\xi} + \vec{V} \text{ div } \vec{\xi} - \vec{\xi} \text{ div } \vec{V}, \end{aligned}$$

nous obtiendrons en tenant compte de (1.41) :

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{\xi} = (\vec{\xi}, \nabla) \vec{V}, \quad (1.43)$$

$$\vec{\xi} = \text{rot } \vec{V}.$$

où

L'équation (1.43) a été obtenue en premier lieu par Herglotz [6]. Elle montre que les lignes de force du champ vectoriel $\vec{\xi}(x, y, z)$ se meuvent avec les éléments du liquide idéal incompressible (la condition exprime que les lignes de tourbillon sont gelées dans le fluide idéal).

Puisque l'opération de différenciation par rapport au temps dans les systèmes de coordonnées mobile et fixe sont liées par la relation

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \dot{\vec{m}} + [\vec{\omega} \vec{m}],$$

et le vecteur de vitesse \vec{V} s'exprimé en fonction de \vec{v} par

$$\dot{\vec{x}} + [\vec{\omega} \vec{x}] + ((\vec{v} + [\vec{\omega} \vec{z}]), \nabla) \vec{x} = (\vec{x}, \nabla) (\vec{v} + [\vec{\omega} \vec{z}]) \quad (1.44)$$

L'équation (1.43) peut également être écrite sous la forme

$$\vec{V} = \vec{v} + [\vec{\omega} \vec{z}] \quad (1.45)$$

En utilisant (1.39) et 1.44), nous obtiendrons

$$\dot{\vec{x}} = 2\vec{\omega} + \vec{x}'' \quad (1.46a)$$

où

$$\vec{x}'' = \text{rot } \vec{v} = i \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) q_x + j \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) q_y + 2k q_z \quad (1.46b)$$

Puisque q_x, q_y, q_z ne dépendent pas de x, y, z , les composantes \vec{x} ne dépendent pas non plus des coordonnées spatiales et ne sont fonction que du temps. La substitution de (1.46), (1.44) et (1.39) en (1.45) donne le système des trois équations différentielles habituelles pour les six inconnues $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t), \xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t)$

$$\dot{\xi}_x'' + 2\dot{\omega}_x - \alpha \xi_y'' \omega_z + \frac{1-\alpha}{2} \xi_y'' \xi_z'' + \omega_y \xi_z'' = 0 \quad (1.47a)$$

$$\dot{\xi}_y'' + 2\dot{\omega}_y + \alpha \xi_x'' \omega_z - \frac{1-\alpha}{2} \xi_x'' \xi_z'' - \omega_x \xi_z'' = 0 \quad (1.47b)$$

$$\dot{\xi}_z'' + 2\dot{\omega}_z + (2-\alpha)(\xi_y'' \omega_x - \xi_x'' \omega_y) = 0 \quad (1.47c)$$

où

$$\alpha = \frac{2a^2}{a^2 + c^2}$$

La substitution de (1.44) et (1.39) dans l'équation des moments du système noyau - enveloppe donne trois équations insuffisantes. En utilisant (1.6) et en tenant compte de ce que, dans le cas de l'enveloppe absolument rigide et du noyau incompressible, le tenseur d'inertie J_{ik} dans toutes les époques de temps a une forme diagonale, nous obtiendrons

$$\dot{\vec{M}} + [\vec{\omega} \vec{M}] = \vec{L}$$

$$\vec{M} = \vec{i} \left\{ A\omega_x + \frac{\tilde{A}}{2} \xi_x^{(1)} \right\} + \vec{j} \left\{ A\omega_y + \frac{\tilde{A}}{2} \xi_y^{(1)} \right\} + \vec{k} \left\{ C\omega_z + \frac{\tilde{C}}{2} \xi_z^{(1)} \right\}; \quad (1.48)$$

où

$$\tilde{A} = (1-\alpha)C_1 + \alpha A_1;$$

A_1 et C_1 sont les moments principaux d'inertie du noyau.

Les composantes de l'équation (1.48) ont la forme :

$$A\dot{\omega}_x + \frac{\tilde{A}}{2} \dot{\xi}_x^{(1)} + (C-A)\omega_y\omega_z + C_1\omega_y\xi_z^{(1)} - \frac{\tilde{A}}{2} \xi_y^{(1)}\omega_z = L_x \quad (1.49a)$$

$$A\dot{\omega}_y + \frac{\tilde{A}}{2} \dot{\xi}_y^{(1)} - (C-A)\omega_x\omega_z - C_1\omega_x\xi_z^{(1)} + \frac{\tilde{A}}{2} \xi_x^{(1)}\omega_z = L_y \quad (1.49b)$$

$$C\dot{\omega}_z + \frac{\tilde{C}}{2} \dot{\xi}_z^{(1)} + \frac{\tilde{A}}{2} (\omega_x \xi_y^{(1)} - \omega_y \xi_x^{(1)}) = L_z \quad (1.49c)$$

Dans le cas des petites variations (pour $\omega_x \ll \omega_z$ et $\omega_y \ll \omega_z$) les équations (1.47c) et (1.49c) se réduisent à

$$\omega_z = \omega = \text{const}; \quad \xi_z^{(1)} = \text{const}$$

Si on se limite à l'examen du cas où la période de rotation du noyau liquide autour de son axe coïncide avec la période de rotation de l'enveloppe alors $\xi_z = 0$. En introduisant les variables complexes

$$\tilde{\omega} = \omega_x + i\omega_y$$

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_x^{(1)} + i\xi_y^{(1)}$$

$$\tilde{L} = L_x + iL_y$$

et en posant en conformité avec (1.10)

$$L_z = 0;$$

$$\tilde{L} = i\frac{v_0}{a^2}(A-c)e^{i\sigma t}$$

nous obtiendrons au lieu de (1.47a, b) et (1.49a, b)

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 + 2\dot{\tilde{\omega}} + i\alpha \tilde{\xi}_1 \omega = 0;$$

$$\frac{\tilde{A}}{2} \dot{\tilde{\xi}}_1 + A\dot{\tilde{\omega}} - i(C-A)\tilde{\omega}\omega + i\frac{\tilde{A}}{2} \tilde{\xi}_1 \omega = \tilde{L}$$

Dans le cas d'un aplatissement faible de l'interface noyau-enveloppe l'équation caractéristique de ce système a la forme

$$\det \begin{vmatrix} \sigma + \alpha \omega & 2\sigma \\ \frac{\tilde{A}}{2} \sigma & A\sigma - (C-A)\omega_2 \end{vmatrix} \approx \quad (1.50)$$

$$\approx \sigma^2 A_2 + \sigma \omega (A_2 + A_1 e - (C-A)) - \omega^2 (C-A) (1-e) = 0$$

où $A_2 = A - A_1$ est le moment d'inertie de l'enveloppe

$$e = (a - c) / a \quad (1.51)$$

est l'aplatissement géométrique du noyau.
L'équation du second degré (1.50) a deux racines :

$$\sigma_0 = \omega \frac{C-A}{A_2} \quad (1.52)$$

et

$$\sigma_1 = -\omega \left(1 + e \frac{A}{A_2} \right) \quad (1.53)$$

En conséquence, la solution du système non homogène (1.49) a la forme

$$\tilde{\omega} = \varepsilon \omega e^{i\sigma t} \quad (1.54)$$

$$\tilde{\xi}_1 = - \frac{2\sigma}{\omega(\sigma + \omega + e\omega)} \tilde{\omega} \quad (1.55)$$

où

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}}{e + \frac{A_1}{A_2} \frac{\sigma + \omega}{\omega}} \quad (1.56)$$

est l'amplitude cherchée de la nutation forcée.

La substitution de (1.55) en (1.46b) détermine complètement les valeurs g_x , g_y , g_z et les composantes v_x , v_y , v_z avec elles par les rapports (1.39).

La formule (1.52) généralise (1.13) dans le cas de la présence du noyau liquide dans la cavité solide. Dans le cas particulier $e = 0$, la formule (1.52) donne

$$\sigma = \omega \frac{C_2 - A_2}{A_2}$$

Ce résultat a un sens évident : la cavité sphérique remplie d'un liquide idéal n'exerce pas d'influence sur la nutation libre de l'enveloppe.

Pour des petites valeurs de e la valeur σ , déterminée par (1.53) est voisine de $-\omega$. Pour cette raison, la fréquence propre de σ , s'appelle la fréquence de la nutation libre quasi diurne. La substitution de (1.53) dans (1.20b) donne la fréquence angulaire du mouvement du vecteur ω dans l'espace correspondant à cette racine.

$$\Omega = -\omega e \frac{A}{A_2} \quad (1.57)$$

Comme nous le constatons par (1.57), $\Omega = 0$ pour $e = 0$. Ce résultat a également une signification simple : si le noyau est sphérique alors un mouvement est possible dans lequel le noyau tourne comme un corps solide par rapport à un axe de rotation qui ne dépend pas de l'axe de rotation de l'enveloppe. Dans ce mouvement, les moments des quantités de mouvement du noyau et de l'enveloppe ne varient pas et par conséquent, le vecteur vitesse angulaire de l'enveloppe $\bar{\omega}$, est également le vecteur vitesse angulaire du noyau $\bar{\omega}' = \bar{\omega}/2$, et garde une direction invariable dans l'espace. Pour chaque jour stellaire, l'enveloppe et chaque élément du noyau liquide retournent dans la position de départ, c'est pourquoi dans le système de coordonnées mobile lié à l'enveloppe, ce mouvement devient comme les variations harmoniques des vecteurs $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}_N$ des éléments du noyau liquide avec une période exactement égale au jour stellaire.

Pour $e \neq 0$ le mouvement du noyau par rapport à l'enveloppe du type (1.39) s'accompagne d'un échange de moment des quantités des mouvements entre le noyau et l'enveloppe.

Enfin les vecteurs moment cinétique et vitesse angulaire de l'enveloppe décrivent dans l'espace un mouvement lent conique avec la fréquence angulaire déterminée (1.57).

Dans le cas de concordance de cette fréquence avec la fréquence des moments des forces de marées il apparaît un phénomène de résonance. Pour les valeurs déterminées (1.53), le dénominateur de l'expression (1.56) s'annule et la relation ϵ/ϵ_1 tend vers l'infini.

§ 3. Système des équations différentielles pour
la marée statique dans l'enveloppe élastique avec
noyau liquide; nombres de Love.

I. Les équations générales aux dérivées partielles.

Lors de la déduction des équations différentielles déterminant les marées et les oscillations libres de la Terre, on utilise habituellement l'hypothèse du caractère hydrostatique des tensions initiales :

$$\nabla \rho_0 - \rho \nabla V = 0 \quad \nabla V = \vec{g} \quad (1.58)$$

où V est le potentiel gravitationnel non perturbé satisfaisant à l'équation de Poisson

$$\Delta V = -4\pi G\rho \quad (1.59)$$

G est la constante de gravitation.

Suite aux petites déformations élastiques un élément du milieu se déplace du point initial déterminé par le rayon-vecteur \bar{r} , vers le point de coordonnées $\bar{r} + \bar{u}$ (où \bar{u} est le vecteur déplacement) et en outre, subit une dilatation cubique avec une variation relative de volume $\delta\tau/\tau = \text{div } \bar{u}$. Conformément à cela on peut représenter les valeurs de la densité, du potentiel V' et du tenseur des tensions σ'_{ik} pour le milieu déformé sous la forme :

$$\rho'(\bar{r}) = \rho(\bar{r} - \bar{u}) - \rho \text{div } \bar{u} = \rho(\bar{r}) - \text{div}(\rho \bar{u}), \quad (1.60a)$$

$$V'(\bar{r}) = V(\bar{r}) + R(\bar{r}); \quad (1.60b)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}(\bar{r}) = & -\rho_0(\bar{r} - \bar{u})\delta_{ik} + \sigma_{ik} + [-\rho_0(\bar{r})\eta(\bar{u}, \nabla\rho)]\delta_{ik} + \\ & + \sigma_{ik} = [-\rho_0(\bar{r}) + \rho(\bar{u}, \nabla V)]\delta_{ik} \end{aligned} \quad (1.60c)$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker, σ_{ik} est le tenseur des tensions élastiques lié au vecteur déplacement \bar{u} par la loi de Hooke

$$\sigma_{ik} = \lambda \text{div } u \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.61)$$

La substitution de (1.60) dans l'équation du mouvement et l'équation de Poisson

$$\begin{aligned} \rho(\partial^2 u / \partial t^2 + (\partial u_i / \partial t, \nabla) \partial u_i / \partial t) &= \partial \sigma_{ik} / \partial x_k + \rho' \partial V' / \partial x_i \\ \Delta V' &= -4\pi G \rho' \end{aligned}$$

(ici et dans la suite les indices répétés indiquent la sommation) donne les équations différentielles connues des variations élastiques du milieu autogravitant

$$\begin{cases} \tilde{L}(u, R) = \rho \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \nabla \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right); & (1.62a) \\ \Delta R = 4\pi G \text{div}(\rho \bar{u}), & (1.62b) \end{cases}$$

où

$$\tilde{L}(\tilde{u}, R) = \rho \nabla R - \text{div}(\rho \tilde{u}) \nabla V + \nabla(\rho(\tilde{u}, \nabla V)) + \text{div} \sigma \quad (1.63)$$

est l'opérateur différentiel, déterminant la somme des forces élastiques et gravitationnelle agissant sur l'élément de volume du milieu.

Après avoir calculé le rot des membres gauche et droit (1.58), nous obtiendrons

$$[\nabla \nabla \nabla \rho] = 0 \quad (1.64)$$

Si on ajoute à l'expression (1.63) de façon identique le terme égal à zéro

$$(\nabla \rho, \tilde{u}) \nabla V - \nabla \rho(\tilde{u}, \nabla V) = [\tilde{u} [\nabla V \nabla \rho]],$$

on peut alors écrire également la ième composante de l'opérateur \tilde{L} sous la forme

$$L_i(\tilde{u}, R) = \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (R + (\tilde{u}, \nabla V)) - \nabla \tilde{u} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

II. Equations différentielles ordinaires des marées statiques.

Dans l'approximation de la théorie statique des marées le second membre (1.62a) devient égal à zéro. Dans ce cas, les équations (1.62) se ramènent au système des six équations différentielles ordinaires par la substitution de Love

$$\tilde{u} = H(\nu) \frac{\tilde{e}}{c} Y_n^m(\theta, \varphi) + T(\nu) \text{grad} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (1.66a)$$

$$R = R(\nu) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (1.66b).$$

Dans le travail [23] on a montré qu'à la suite d'un remplacement simple des variables, le système d'équations différentielles ordinaires peut être écrit sous la forme symétrisée suivante :

$$f_1' = -\frac{2\lambda}{z(\lambda+2\mu)} f_1 + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} f_2 + \frac{1}{z(\lambda+\mu)} f_6;$$

$$f_2' = -\frac{n(n+1)}{z^2} f_1 + \frac{n(n+1)}{z^2 \mu} f_5;$$

$$f_3' = 4\pi G \rho f_1 - \frac{n+1}{z} f_3 + \frac{4\pi G}{z^2} f_4;$$

$$f_4' = (n+1)\rho z f_1 - \rho z^2 f_6 + \frac{n+1}{z} f_4;$$

$$f_5' = -(\rho z^2 V' + 2\mu z \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}) f_1 + \quad (1.67)$$

$$+ [2\mu z^2 (\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{n(n+1)})] f_2 - z^2 \rho f_3 -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} f_6;$$

$$f_6' = (4\rho z V' + 4\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}) f_1 - (\rho z^2 V' +$$

$$+ 2\mu z \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}) f_2 + (n+1)z \rho f_3 -$$

$$- 4\pi G \rho f_4 + \frac{n(n+1)}{z^2} f_5 + \frac{2\lambda}{z(\lambda+2\mu)} f_6,$$

où r est le rayon du point courant, f_1, \dots, f_6 sont fonctions de r , on désigne par une prime la différenciation par rapport à z ,

$$f_1 = H ; f_2 = T \frac{n(n+1)}{r^2} ; f_3 = R$$

$$f_4 = \frac{(n+1)zR + z^2(R' - 4\pi G \rho H)}{4\pi G} \quad (1.68)$$

f_5, f_6 sont les fonctions déterminant les forces élastiques agissant sur l'élément de surface normal au rayon

$$\sigma_{ik} \frac{x_k}{z} = f_6(z) \frac{X_i}{z^3} Y_n^m(\theta, \varphi) + \frac{f_5}{z^2} \frac{\partial}{\partial X_i} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (1.69)$$

Pour ne pas manier de grands nombres, nous utiliserons dans la suite un système d'unités dans lequel le rayon moyen de la Terre

$$a = 1 \quad (1.70a)$$

la valeur moyenne de l'accélération de la force de pesanteur à la surface de la Terre

$$g(a) = 1 \quad (1.70b)$$

et la densité moyenne de la Terre

$$\rho_{ep} = \frac{3}{4\pi a^3} \int \rho dV = 1 \quad (1.70c)$$

Dans ce système d'unités $G = 4\pi/3$; à l'unité de temps correspond la valeur de 805,46 sec, l'unité de vitesse - 7,91 km/s, l'unité du module d'élasticité et de la tension - 3,452 dynes/cm².

Les coefficients des équations (1.67) ont les propriétés de symétrie suivantes :

$$\alpha_{ik} = \alpha_{7-k, 7-i} \quad \text{pour } k > 3, i \leq 3 \text{ soit } k \leq 3, i > 3 \quad (1.71)$$

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{7-k, 7-i} \quad \text{pour } k \leq 3, i \leq 3 \text{ soit } k > 3, i > 3$$

En utilisant (1.71) il est facile d'être sûr du fait que le système déterminé (1.67) des équations

$$f'_i = \sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} f_k \quad (1.72)$$

concorde avec le système conjugué correspondant

$$\tilde{f}'_k = -\sum_{i=1}^6 \alpha_{ik} \tilde{f}_i \quad (1.73)$$

Ceci sera utilisé dans le § 4.

Dans le noyau liquide $\mu = 0$ et les équations (1.67) se ramènent à l'équation du second ordre du type de Clairaut

$$f''_3 + \frac{2}{r} f'_3 + \left(\frac{4nG\rho'}{v'} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) f_3 = 0 \quad (1.74)$$

Les conditions aux limites pour le système d'équation (1.67), (1.74) se réduisent à

1) la condition de régularité au centre de la sphère :

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_1(r) = 0 \quad (1.75)$$

2) à l'interface du noyau liquide et de l'enveloppe toutes les fonctions outre f_2 doivent rester continues;

3) à la surface de la Terre, affranchie des tensions $\sigma_{ik} \frac{x_k}{r} = 0$

ou en conformité avec (1.69)

$$f_5(a) = f_6(a) = 0; \quad (1.76a)$$

4) enfin, par la condition de continuité du produit provenant du potentiel sur la surface de la sphère il est aisé d'obtenir la condition aux limites pour f_4 en $r = a$

$$f_4(a) = \frac{(2n+1)aV_0}{4\pi G} \quad (1.76b)$$

où V_0 est la valeur de l'amplitude du potentiel générateur de marée

$$V_e = V_0 \left(\frac{r}{a} \right)^n Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (1.77)$$

Les équations (1.67) avec les conditions aux limites (1.75 - 1.77) déterminent au premier ordre les tensions de marées, les déformations et la variation du potentiel à toutes les profondeurs. Les rapports

$$h_n = \frac{f_{1n} V_e}{g a^2}; k_n = \frac{f_{3n}}{V_e} - 1; l_n = \frac{f_{2n} V_e}{g a n(n+1)} \quad (1.78)$$

s'appellent les nombres de Love (h_n , k_n) et de Shida (l_n).

Les valeurs de h_2 , k_2 et l_2 permettent de déterminer les variations de marées de l'accélération de la pesanteur, des inclinaisons et des déformations et également la période du mouvement chandlerien du pôle. La mesure de ces valeurs donnent une possibilité d'étude de la structure interne de la Terre à partir des données de marées et astrométriques.

Outre les nombres de Love déterminés par les conditions aux limites (1.75 à 1.78) on utilisera ensuite les nombres de Love de charge déterminant les déplacements de la surface de la Terre et la variation du potentiel à la suite des charges créées par la marée océanique.

Dans le cas le plus simple les couches d'eau de mer d'une densité ρ_w et d'une hauteur h , répartie proportionnellement à la fonction sphérique d'ordre n

$$\rho_w h(\theta, \varphi) = \sigma_0 Y_n^m(\theta, \varphi)$$

les déformations élastiques de la Terre sont déterminées comme précédemment par le système d'équations (1.67), quant aux conditions aux limites (1.76) elles doivent être remplacées par les suivantes

$$f_4(a) = \sigma_0 \quad f_5(a) = 0 \quad f_6(a) = -g \sigma_0 \quad (1.79)$$

Les coefficients suivants sont appelés les nombres de charge de Love d'ordre n

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n &= \frac{(2n+1)g}{4nGa} f_1(a) \\ \tilde{k}_n &= \frac{2n+1}{4nG\sigma_0 a} f_3(a) - 1 \end{aligned} \quad (1.80)$$

Ils se déterminent par l'intégration numérique du problème aux limites (1.67) (1.79) pour les répartitions réelles $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$ et $V'(r)$ dans le noyau et l'enveloppe de la Terre.

§ 4. Relation des nombres de Love avec les coefficients de charge.

Puisque le système d'équations (1.72) est du sixième ordre, pour chaque valeur de n il existe six solutions linéairement indépendantes.

Le système des solutions fondamentales à la surface de la Terre (pour $r = 1$) peut être représenté par la matrice.

$$\begin{matrix} f_i^{(1)}(I) = \\ f_i^{(2)}(I) = \\ f_i^{(3)}(I) = \\ f_i^{(4)}(I) = \\ f_i^{(5)}(I) = \\ f_i^{(6)}(I) = \end{matrix} \begin{pmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & I & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & I & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Les intégrales déterminées par les trois premières lignes de la matrice (1.81) ne satisfont pas aux conditions (1.75) (elles croissent vers le centre de la sphère, comme $r^{-(n+1)}$); quant aux valeurs b_{jk} elles sont déterminées par les conditions de décroissance des intégrales correspondantes vers le centre de la sphère.

L'intégrale $f_i^{(5)}$ détermine les déformations élastiques de la Terre en présence de tensions tangentielles à la surface; les coefficients b_{jk} pour $j, k = 1, 2, 3$ déterminent comme cela a été noté dans le § 3, les valeurs des nombres de Love et des coefficients de charge (nombres de charge de Love). Ainsi les déformations élastiques statiques de la Terre avec des conditions arbitraires sont complètement déterminées à la surface par les valeurs des neuf coefficients b_{jk} .

Ces coefficients se déterminent par les observations de marées et astrométriques et présentent ainsi le plus grand intérêt pratique.

Nous montrerons dans ce paragraphe qu'à cause de l'auto-conjugaison des équations (1.67) les neuf coefficients b_{jk} ne sont pas tous indépendants. Pour n'importe laquelle des répartitions fixes (sphériquement symétriques) $\mu(r), \lambda(r), \rho(r)$ les coefficients b_{jk} sont liés par les relations suivantes

$$b_{21} = b_{32}; \quad b_{11} = b_{33}; \quad b_{12} = b_{23} \quad (1.82)$$

Pour démontrer (1.82) nous examinerons la matrice obtenue par la transformation de la matrice des solutions fondamentales (1.81) pour toutes les valeurs de r . Les éléments de la matrice transformée $\tilde{f}_i^j(r)$ satisfont au système associé par rapport à (1.72) des équations différentielles (1.79). Par conséquent, les éléments de la matrice inverse satisfont la détermination, par les rapports

$$\sum_{i=1}^6 \tilde{f}_i^j(r) f_i^l(r) = \begin{cases} I \text{ при } j = l; \\ 0 \text{ при } j \neq l. \end{cases} \quad (1.83)$$

En différenciant (1.83) suivant r et en éliminant ensuite $f_i(r)$ à l'aide de (1.72) nous obtiendrons (1.73).

Nous utiliserons ensuite le fait que dans le système des variables $f_i(r)$ les équations (1.72) et (1.73) concordent. Pour s'en assurer il suffit d'effectuer le changement suivant dans le système des équations (1.73) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= -f_6; & \tilde{f}_2 &= -f_5; & \tilde{f}_3 &= -f_4; \\ \tilde{f}_4 &= f_3; & \tilde{f}_5 &= f_2; & \tilde{f}_6 &= f_1; \end{aligned} \tag{1.84}$$

Après avoir substitué (1.84) en (1.73) et en égalant les coefficients du système qui a été obtenu de cette façon aux coefficients du système (1.72) nous arrivons à (1.71).

En utilisant l'aspect évident de la matrice $f_i^j(r)$ (1.81) il est simple de la changer. La matrice inverse de (1.81) a la forme

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{21} & -b_{31} \\ 0 & I & 0 & -b_{12} & -b_{22} & -b_{32} \\ 0 & 0 & I & -b_{13} & -b_{23} & -b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

A cause du fait que le mineur de l'élément de la matrice (1.81) qui croît vers le centre s'obtient par la suppression de (1.81) les lignes constituées des éléments croissants vers le centre, l'élément de la matrice inverse égal au rapport du mineur correspondant au déterminant décroît comme r^n .

Par contre, l'élément de la matrice inverse correspondant à l'élément décroissant vers le centre, croît vers le centre comme $r^{-(n+1)}$. C'est pourquoi les trois premières lignes de (1.85) déterminent les trois dernières lignes régulières qui sont les solutions irrégulières du système conjugué (1.73).

Effectuons dans chaque ligne de la matrice (1.85) le remplacement défini par (1.84). Puisque les lignes de (1.85) donnent les solutions des systèmes conjugués des équations (1.73) et qu'en plus par la transformation (1.84) le système conjugué se ramène au principal, les solutions sont obtenues de cette façon et les composantes des lignes de (1.85) représentent les valeurs à la surface des différentes intégrales du système de base des équations (1.72). De cette façon nous avons les valeurs suivantes des solutions du système (1.72) à la surface :

$$\begin{aligned} i &= \begin{pmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ f_i^{(1)}(1) & -b_{31} & -b_{21} & -b_{11} & 0 & 0 & -I \\ f_i^{(2)}(1) & -b_{32} & -b_{22} & -b_{12} & 0 & -I & 0 \\ f_i^{(3)}(1) & -b_{33} & -b_{23} & -b_{13} & -I & 0 & 0 \\ f_i^{(4)}(1) & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ f_i^{(5)}(1) & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_i^{(6)}(1) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{I.86}$$

ainsi les trois premières lignes (1.86) correspondent à celles qui décroissent vers le centre et les trois lignes suivantes à celles qui croissent vers le centre des solutions.

D'autre part, le système d'équations (1.72) ne peut avoir que trois solutions linéaires indépendantes et décroissantes vers le centre de l'équation intégrale. Par conséquent, les intégrales $f_i^{(7)}$, $f_i^{(8)}$, $f_i^{(9)}$ sont combinaisons linéaires des solutions fondamentales $f_i^{(4)}$, $f_i^{(5)}$, $f_i^{(6)}$. En comparant (1.86) et (1.81) nous obtiendrons

$$\begin{array}{l} f_i^{(10)}(\tau) = f_i^{(3)}(\tau); \quad f_i^{(11)}(\tau) = f_i^{(2)}(\tau); \quad f_i^{(12)}(\tau) = f_i^{(1)}(\tau); \\ f_i^{(7)}(\tau) = -f_i^{(6)}(\tau); \quad f_i^{(8)}(\tau) = -f_i^{(5)}(\tau); \quad f_i^{(9)}(\tau) = -f_i^{(4)}(\tau). \end{array}$$

Les trois dernières relations sont équivalents (1.82).

Les relations (1.82) indiquent qu'à chaque modèle à symétrie sphérique de la Terre élastique et à chaque valeur de n correspondent six (et non neuf comme on l'a proposé plus haut) valeurs indépendantes des nombres de Love. Par les six coefficients b_{ik} on détermine complètement la solution arbitraire (correspondant aux conditions aux limites arbitraires à la surface) des équations statiques (1.72).

La substitution de (1.82) en (1.78), et (1.80) détermine la relation entre les nombres de volume et de charge de Love :

$$\tilde{k}_n = k_n - h_n \quad (1.87)$$

La relation (1.87) a été obtenue dans le travail [37] par une autre méthode (sur la base du principe des variations).

Les relations (1.82) peuvent être utilisées pour contrôler la précision réelle de l'intégration numérique des équations (1.72). Elles seront également prises en considération lors du calcul des marées statiques dans à l'intérieur d'une Terre sphériquement non symétrique dans le chapitre V.

§ 5. Les nombres de Love et les constantes de la nutation pour les modèles réels de la Terre.

Puisque les périodes de toutes les oscillations propres sont plus courtes qu'une heure, et que la résonance quasi-diurne n'apparaît que pour les déformations déterminées par les formules (1.66) pour $m = 1$, les marées terrestres semi-diurnes et zonales à longue période sont décrites avec une précision satisfaisante par la théorie statique. Pour les marées diurnes, les forces d'inertie dans le noyau liquide jouent un rôle important; par contre dans l'enveloppe on peut, en première approximation, ne pas prendre en considération ces termes.

Le calcul numérique des nombres de Love par les formules déterminées en (1.78) pour les modèles actuels de la structure de la Terre a été effectué dans les travaux [38, 39, 29]. Les résultats pour $n = 2$ sont donnés dans la table I.I.

Table 1.1.
Valeurs des nombres statiques de Love

Modèles	h_2	k_2	ℓ_2	réf
Gutenberg Gilbert - Dziewonski n° 508	0,6055	0,2986	0,0829	[38]
"	0,6130	0,3042	0,0853	[38]
n° 1066 a	0,6097	0,3009		
"				[39]
n° 1066 b	0,6093	0,3010		

On constate dans cette table que les valeurs des nombres de Love pour les modèles de Terre 1066 a et 1066 b de Gilbert et Dziewonski (déterminés au départ des données sur le temps de parcours des ondes sismiques et aux fréquences des oscillations propres de la Terre) ne diffèrent pas de plus de 0,2 %. Nous utiliserons ces valeurs ainsi que les corrections correspondantes dans la suite lors de l'examen de la rhéologie du manteau aux périodes très longues (chapitre III, IV). Nous constatons aussi par cette table que dans tous les cas la relation

$$h_2 \approx 2k_2$$

se réalise avec une bonne précision. La relation (1.88) donne la possibilité de déterminer, sur la base des seules mesures gravimétriques, les valeurs h_2 et k_2 d'après la valeur du facteur gravimétrique de marée

$$\delta = 1 + h_2 - 3/2 k_2.$$

Le problème des amplitudes de la nutation de la Terre réelle et des valeurs des nombres de Love pour les ondes diurnes a été examiné dans les travaux [40 - 42, 19.9].

Jeffreys, le premier, a attiré l'attention sur le fait que l'amplitude de la nutation principale obtenue sur base de la théorie de la rotation d'une Terre absolument rigide diffère de la valeur observée d'à peu près 0",025 en obliquité et 0",030 en longitude. Ces différences dépassent les erreurs des observations astronomiques optiques de près d'un ordre de grandeur. Si au lieu de la théorie de la nutation d'une Terre solide on utilise la théorie de Poincaré, les écarts entre les théories et les résultats des observations changent de signe et croissent en valeur absolue d'à peu près trois fois.

(jusqu'à 0".07 en obliquité et - 0".1 en longitude). La concordance de la théorie avec les observations a été obtenue par la prise en considération des déformations élastiques de l'enveloppe sous l'effet des forces de marées et de la pression agissant du côté du noyau liquide sur l'enveloppe. Cette question sera examinée en détail dans le chapitre III. Nous noterons que les difficultés principales de la théorie de la nutation de la

Terre réelle sont liées au fait que, par la substitution de Love (1.66), les équations de la marée dynamique dans le noyau liquide ne se rapportent pas au même système que le système final des équations différentielles ordinaires. Pour cette raison les déplacements de marées dans le noyau ont été représentés sous la forme

$$\bar{u} = \bar{\tau}_1 + \bar{s}_2 + \bar{\tau}_3 + \bar{s}_4 + \dots \quad (1.89)$$

où s_n sont les déformations de type sphéroïdal déterminées par les expressions (1.66), et τ_n sont les déplacements de type torsionnel d'ordre n .

La substitution de (1.89) en (1.62) donne une chaîne infinie d'équations différentielles ordinaires liées dont la solution est obtenue par troncature et remplacement du système infini par un système fini. Ainsi en [42] on a utilisé la représentation

$$\bar{u} = \bar{\tau}_1 + \bar{s}_2 \quad (1.89a)$$

en [19]

$$\bar{u} = \bar{\tau}_1 + \bar{s}_2 + \bar{\tau}_3 \quad (1.89b)$$

et en [9]

$$\bar{u} = \bar{\tau}_1 + \bar{s}_2 + \bar{\tau}_3 + \bar{s}_4 \quad (1.89c)$$

Les résultats des calculs numériques [42,19,9] sont donnés dans la table 1.2.

Table 1.2.

Valeurs des constantes des nutations pour la Terre réelle

18,6 ans 1 an 0,5 an 13,7 jours référence

en obliquité	9",2044	0",0049	0",5719	0", 972	[42]
en longitude	6",8441	0",0561	0",5232	0",0899	
en obliquité	9",1966		0",5768	0", 973	[19]
en longitude	6",8328		0",5274	0",0899	
en obliquité	9",2025	0",0054	0",5736	0", 977	[9]
en longitude	6",8416	0",0567	0",5247	0",0905	

L'insuffisance notoire des solutions [42, 19, 9] réside dans le fait que la chaîne des équations différentielles ordinaires ne renferme qu'un seul petit paramètre. C'est pourquoi le problème de la convergence de la série (1.89) et de l'importance des erreurs qui apparaissent suite au remplacement du système infini par un système fini, reste ouvert. En même temps la bonne concordance des résultats donnés dans la table 1.2. montre que les amplitudes des nutations dépendent faiblement de la forme de la représentation (1.89) et sont déterminées avec assez de précision même pour la représentation la plus simple du vecteur des déplacements dans le noyau (1.89a).

Cela est apparemment lié avec le fait que le problème de la détermination des valeurs observées (des amplitudes de la nutation forcée, de la période du mouvement de Chandler) est sensiblement plus simple que la détermination de la description complète des déplacements de marées dans le noyau. A l'interface ellipsoïdale noyau-enveloppe, les oscillations des types τ_3 , τ_5 , ne s'accompagnent pas d'un transfert de moment du noyau à l'enveloppe, c'est pourquoi pour déterminer les valeurs observées ϵ/ϵ_0 , σ_0 et σ_1 il suffit de déterminer les amplitudes et les phases des oscillations de la forme τ_1 et s_2 . On montrera plus loin que dans le cas général de l'enveloppe visco-élastique et du noyau visqueux ce problème peut être résolu sans aucune hypothèse sur le caractère des déplacements dans le noyau si l'équation utilisée dans les travaux [42, 19, 9] des moments de la Terre entière est remplacée par l'équation des moments de l'enveloppe et si l'on tient compte du transfert du moment de la quantité de mouvement du noyau à l'enveloppe. Même si cette solution ne permet pas non plus de calculer le champ des déplacements de marées dans le noyau elle donne la possibilité de déterminer toutes les valeurs observées et d'obtenir une estimation sûre des erreurs. Le fait qu'on a pu obtenir ainsi une estimation sûre des limites possibles de la variation des valeurs théoriques de la période de Chandler T_{Ch} (chap.IV, § I) a une grande importance pour estimer les propriétés rhéologiques du manteau aux longues périodes.

§ 6. Conjugaison de l'opérateur L ; application de la méthode des perturbations à la théorie des marées terrestres.

On a montré plus haut que les équations différentielles ordinaires d'équilibre gravitationnel élastique d'une planète à symétrie sphérique (1.72) ont des propriétés de conjugaison qui se manifestent dans le fait qu'à la suite du remplacement des variables (1.84) le système (1.73) conjugué à (1.72) devient en (1.72) lui-même.

Nous examinerons dans ce paragraphe les propriétés plus générales d'auto-conjugaison des équations aux dérivées partielles (1.62) ainsi que la possibilité d'appliquer la méthode du petit paramètre aux équations d'équilibre statique de la Terre.

La propriété de conjugaison de l'opérateur \bar{L} est étroitement liée avec le principe du minimum d'énergie pour l'établissement de l'équilibre statique conformément auquel dans des conditions fixées à la limite, l'énergie potentielle

$$E = \frac{1}{2} \iiint (\bar{u}, \bar{L}(\bar{u}, R)) d\tau \quad (1.90)$$

doit avoir une valeur possible minimale. En posant

$$\bar{u} = \bar{u}^{(0)} + \bar{u}^{(1)} \quad (1.91)$$

où $\bar{u}^{(0)}$ est le champ propre des déplacements et $\bar{u}^{(1)}$ est la petite variation arbitraire de $\bar{u}^{(0)}$ satisfaisant aux mêmes conditions homogènes aux limites, nous écrirons la première variation de la fonctionnelle (1.90) après avoir substitué (1.91) en (1.90). En tenant compte du fait que

$$\bar{L}(u^{(0)}, R^{(0)}) = 0 \quad (1.92)$$

et en négligeant le terme du second ordre $(u^{(1)}, \bar{L}(u^{(1)}, R^{(1)}))$ nous obtiendrons :

$$\delta E = \frac{1}{2} \iiint (\bar{u}^{(0)}, \bar{L}(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)})) d\tau \quad (1.93)$$

La conjugaison (hermitienne) de l'opérateur \bar{L} apparaît dans le fait que pour toute fonction \bar{v} arbitraire (continue, deux fois différentiable) satisfaisant aux conditions aux limites homogènes à la surface, satisfait l'égalité

$$\iiint (\vec{u}, \vec{L}(\vec{v})) d\tau = \iiint (\vec{v}, \vec{L}(\vec{u})) d\tau. \quad (1.94)$$

Il est évident que des conditions (1.94) et (1.92) il s'ensuit automatiquement l'égalité (1.93) égale zéro.

La démonstration complète de (1.94) est donnée dans les travaux [43 à 45]. Elle s'obtient par intégration de (1.94) par parties avec l'utilisation de la forme évidente de l'opérateur \vec{L} (1.63).

Dans la suite nous nous intéresserons à la valeur de l'intégrale (1.93) dans des conditions aux limites non homogènes pour $u^{(1)}$, $R^{(1)}$, ce qui correspond au cas de la variation arbitraire des conditions aux limites pour la solution de $u^{(0)}$.

Pour la solution $(u^{(0)}, R^{(0)})$ de la formule déterminée de Love (1.66) et des variations $u^{(1)}$, $R^{(1)}$ liées entre elles par l'équation de Poisson (1.62b) l'intégrale (1.93) est égale à (voir annexe I) :

$$\begin{aligned} \iiint (\vec{u}^0, \vec{L}(\vec{u}^{(1)}, R^{(1)})) d\tau = \iiint [(u_r^{(0)} \sigma_{i\kappa}^{(1)} - u_i^{(1)} \sigma_{i\kappa}^{(0)}) \frac{x_\kappa}{r} + \\ + R^{(0)} \rho^{(1)} - R^{(1)} \rho^{(0)}] d\Omega, \end{aligned} \quad (1.95)$$

où

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= \frac{1}{4\pi G} (R_{\text{ext}}^{(0)'} - R_{\text{int}}^{(0)'} - 4\pi G \rho H^{(0)}), \\ \rho^{(1)} &= \frac{1}{4\pi G} (R_{\text{ext}}^{(1)'} - R_{\text{int}}^{(1)'} - 4\pi G \rho H^{(1)}) \end{aligned} \quad (1.96)$$

sont les densités de la couche simple par lesquelles sont données les conditions aux limites pour $R^{(0)}$ et $R^{(1)}$; R_{int} est la dérivée par rapport au rayon r de la surface de la Terre pour $r = a - 0$, R_{ext} est la même dérivée mais pour $r = a + 0$; $4\pi G \rho H$ est l'attraction double de la couche simple de densité ρH ; $\sigma_{ik}^{(0)}$ et $\sigma_{ik}^{(1)}$ sont les tenseurs des tensions élastiques correspondant respectivement aux déplacements $\vec{u}^{(0)}$ et $\vec{u}^{(1)}$.

Il convient de noter que dans le cas particulier où les variations $(\vec{u}^{(1)}, R^{(1)})$, satisfont aux mêmes équations que $(u^{(0)}, R^{(0)})$ (1.92) et (1.62b), c'est à dire :

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{u}^{(1)}) &= 0; \\ \Delta R^{(1)} &= 4\pi G \operatorname{div}(\rho \vec{u}^{(1)}) \end{aligned} \quad (1.97)$$

l'intégrale de volume en (1.95) s'annule et la relation (1.95) revient au théorème de réciprocité de Betti [46] généralisé dans

le cas du corps auto-gravitationnel non homogène avec répartition hydrostatique des tensions initiales.

Le théorème de réciprocité de Betti est obtenu par (1.95) à la suite du passage à la limite $G \rightarrow 0$.

Dans ce cas les valeurs $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $P^{(0)}$, $P^{(1)}$ tendent vers zéro et l'intégrale de surface en (1.95) correspond à la différence du travail des tensions $\sigma_{ik}^{(1)}$ sur les déplacements $u_i^{(1)}$ et du travail des tensions $\sigma_{ik}^{(0)}$ sur les déplacements $u_i^{(0)}$.

Les termes $\iint R^{(0)} P^{(1)} ds$ et $\iint R^{(1)} P^{(0)} ds$ déterminent l'énergie potentielle de la couche simple de densité $P^{(1)}$ dans le champ gravitationnel de potentiel $R^{(0)}$ et de la couche de densité $P^{(0)}$ dans le champ avec le potentiel $R^{(1)}$.

On utilise pour $(u^{(0)}, R^{(0)})$ et $(u^{(1)}, R^{(1)})$ les solutions des équations homogènes (1.92), (1.97) sous la forme (1.66), (1.69) avec une solution particulière qui satisfait les conditions aux limites et qui est déterminée par n'importe laquelle des deux et trois lignes successives de la matrice (1.81) à partir de la quatrième. Substituons ces solutions en (1.95).

En réalisant l'intégration suivant les variables angulaires et tenant compte du fait que

$$\iint_S (\nabla Y_n^m, \nabla Y_n^m) ds = \frac{n(n+1)}{a^2} \iint_S (Y_n^m)^2 ds$$

nous obtiendrons pour la paire de solutions $f_1^{(4)}, f_1^{(5)}$ - la relation $b_{12} = b_{23}$; pour $f_1^{(4)}, f_1^{(6)}$ - la relation $b_{11} = b_{33}$ et pour la paire $f_1^{(5)}, f_1^{(6)}$ - la relation $b_{21} = b_{32}$ ce qui coïncide avec (1.82).

Ainsi, les rapports entre les nombres de volume et de charge de Love obéissent également au théorème de réciprocité de Betti généralisé dans le cas du milieu autogravitant non homogène avec répartition statique des tensions initiales.

2. L'application de la méthode des perturbations à la théorie des marées terrestres.

La théorie des perturbations pour les équations aux oscillations propres de la Terre a été élaborée par V.N. Zharkov, V.M. Lioubimov, Ch. L. Pekeris, Z. Alterman, Ch. Jarosch, F.A. Dahlen et d'autres dans les travaux [43 à 45]. Dans l'élaboration de la théorie des perturbations pour les équations aux déformations de marées nous aurons affaire au même opérateur \bar{L} (1.63) figurant aussi dans le problème des oscillations propres de la Terre mais le problème se pose de manière différente.

La théorie des perturbations au premier ordre pour les oscillations propres de la Terre donne la possibilité de déterminer la variation des fréquences propres sans calculer les variations correspondantes des fonctions propres. Nous nous intéresserons ensuite aux variations des solutions (des déplacements et du champ gravitationnel) à la surface de la Terre puisque ces valeurs sont mesurées par les variations dues aux marées.

Nous montrerons que les relations (1.95) permettent d'appliquer la méthode du petit paramètre à la théorie des marées terrestres.

Soit (u_0, R_0) une solution quelconque des équations (1.92) avec des conditions aux limites de la forme

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{i\kappa}^0 \frac{x_\kappa}{r} \Big|_{r=a} &= \bar{\tau}_i(\theta, \psi); \\ \rho_0^{(0)} \Big|_{r=a} &= \rho^0(\theta, \psi), \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

Les solutions perturbées $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, $R = R^{(0)} + R^{(1)}$ sont les solutions des équations

$$(\bar{L} + \delta\bar{L})(\bar{u}, R) = 0 \quad (1.99)$$

$$\Delta R = 4\pi G \operatorname{div} [(\rho_0 + \rho_1) \bar{u}]$$

avec les mêmes conditions aux limites (1.98). Par les variations $\delta \bar{L}(\bar{u}, R)$ en (1.99) nous entendrons ensuite la variation de l'opérateur \bar{L} (1.63) lors du passage des répartitions à symétrie sphérique de la densité et des modules élastiques aux répartitions sphériquement non symétriques; des valeurs réelles de modules d'élasticité aux valeurs complexes tenant compte de la rhéologie du milieu, des équations d'équilibre statique (1.92) aux équations dynamiques (1.62) etc.. Dans tous ces cas les variations de \bar{L} sont assez faibles mais les équations (1.99) ne se rapportent pas encore aux équations ordinaires.

En négligeant en (1.99) les termes du second ordre $\delta\bar{L}(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)})$ et tenant compte de (1.92), (1.62b) nous obtenons

$$\bar{L}(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)}) + \delta\bar{L}(\bar{u}^{(0)}, R^{(0)}) = 0 \quad (1.100a)$$

$$\Delta R^{(1)} = 4\pi G \operatorname{div} (\rho_0 u^{(0)} + \delta\rho \bar{u}^{(1)}) \quad (1.100b)$$

où $\delta\rho$ sont les variations de ρ .

Nous introduirons les solutions auxiliaires (\bar{u}^j, R^j) des équations non perturbées

$$L_i(\bar{u}^j, R^j) = 0$$

$$\Delta R^j = 4\pi G \operatorname{div}(\rho u^j) \quad (1.101)$$

pour des conditions aux limites non homogènes à la surface

$$\sigma_{ik}^j \frac{x_k}{r} \Big|_{z=a} = \chi_i^j(\theta, \varphi); \quad p^j \Big|_{z=a} = p_0^j(\theta, \varphi); \quad (1.102)$$

où $\chi(\theta, \varphi)$, $p_0^j(\theta, \varphi)$ sont les fonctions jusqu'à présent arbitraires de θ, φ , σ_{ik} est le tenseur des tensions correspondant aux déplacements \bar{u}^j , $P^{(j)}$ est lié à (u^j, R^j) par les relations analogues (1.96). Nous désignerons ensuite par l'indice j ($j = 1, 2, 3$) le numéro d'ordre des solutions auxiliaires (\bar{u}^j, R^j) .

Après avoir multiplié (1.100a) scalairement par \bar{u}^j et en intégrant le résultat en volume, nous trouverons

$$\iiint (\bar{u}^j \vec{L}(\bar{u}^{(j)}, R^{(j)})) d\tau = - \iiint (\bar{u}^j, \delta \vec{L}(\bar{u}^{(j)}, R^{(j)})) d\tau. \quad (1.103)$$

Le premier membre de (1.103) dans le cas des variations $(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)})$ liées par l'équation de Poisson (1.62b) se réduit à (1.95). En répétant les calculs de l'annexe I il est simple de se rendre compte que du remplacement de (1.62b) par (1.100b) la relation analogue (1.95) a la forme :

$$\begin{aligned} \iiint (\bar{u}^j \vec{L}(\bar{u}^{(j)}, R^{(j)})) d\tau = & \iiint [u_i^j \sigma_{ik}^{(j)} - u_i^{(j)} \sigma_{ik}^{(j)}] \frac{x_k}{r} + \\ & + R^j \rho^{(j)} - R^{(j)} \rho^j] ds - \iiint R^{(j)} \operatorname{div}(\delta \rho \bar{u}^j) d\tau. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Tenant compte de ce que les conditions aux limites (1.98) pour les problèmes perturbé et non perturbé concordent, nous obtenons les conditions aux limites suivantes pour σ_{ik} et $P^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{(1)} \frac{x_k}{r} \Big|_{z=a} = & (\lambda_0 \operatorname{div} \bar{u}^{(1)} \delta_{ik} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_i} \right) \frac{x_k}{r} \Big|_{z=a} \\ = & -(\delta \lambda \operatorname{div} \bar{u}^{(0)} \delta_{ik} + \delta \mu \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} \right) \frac{x_k}{r} \Big|_{z=a}; \\ \rho^{(1)} = & \delta \rho H^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

La substitution de (1.102), (1.105) en (1.104) et (1.103) donne

$$\iint_S (u_i^{(1)} \chi_i^j + R^{(1)} p_o^j) ds = F^j, \quad (1.106a)$$

où

$$F^j = \iiint_V \left\{ \vec{u}^j, \delta \vec{L}(\vec{u}^{(0)}, R^{(0)}) + \delta p(\vec{u}^0, \nabla R^j) \right\} d\vec{r} - \iint_S \left\{ \delta \lambda \operatorname{div} \vec{u}^{(0)} \delta_{ik} + \delta \mu \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \right) \right\} \cdot \frac{x_k}{r} u_i^j ds; \quad (1.106b)$$

Dans le second membre de (1.106) n'entrent que les variations connues δp , $\delta \lambda$, $\delta \mu$, $\delta \vec{L}(\vec{u}, R)$ et les fonctions $\vec{u}^{(0)}$, $R^{(0)}$, \vec{u}^j , R^j déterminées par les solutions des problèmes aux limites non perturbés (1.92) (1.98) et (1.101) (1.102). C'est pourquoi les valeurs des intégrales F^j (1.106b) peuvent être considérées comme connues.

Les relations intégrales (1.106) déterminent complètement les valeurs inconnues du vecteur déplacements $u_i^{(1)}$ et la variation du potentiel $R^{(1)}$ en n'importe quel point de la surface s par la solution des problèmes aux limites non perturbés. En effet en posant par exemple pour $j = 1$

$$\chi_i = 0 \quad (1.107)$$

$$p_o^j = p_o \delta_2(\theta - \theta_o, \varphi - \varphi_o)$$

où

$$\delta_2(\theta - \theta_o, \varphi - \varphi_o) = \frac{\delta(\theta - \theta_o) \delta(\varphi - \varphi_o)}{2\pi \theta_o}$$

est à deux dimensions, δ est la fonction de Dirac et après avoir substitué ensuite (1.107) en 1.106) nous obtiendrons

$$R^{(1)}(\theta_o, \varphi_o) = \frac{F^j}{p_o} \Big|_{j=1}$$

De façon analogue, en posant

$$\begin{aligned} \vec{\chi}^j &= \chi_o \vec{e}_r \delta_2(\theta - \theta_o, \varphi - \varphi_o), p_o^j = 0 \quad \text{pour } j = 2 \\ \vec{\chi}^j &= \chi_o \vec{e}_\theta \delta_2(\theta - \theta_o, \varphi - \varphi_o), p_o^j = 0 \quad \text{pour } j = 3 \\ \vec{\chi}^j &= \chi_o \vec{e}_\varphi \delta_2(\theta - \theta_o, \varphi - \varphi_o), p_o^j = 0 \quad \text{pour } j = 4 \end{aligned} \quad (1.108)$$

où l_r, l_θ, l_φ sont des vecteurs unitaires au point $r = \alpha$;
 $\theta_0 = \theta_0$; $\varphi = \varphi_0$ nous trouverons

$$\frac{F^j}{X_0} = \begin{cases} U_r^{(j)}(\theta_0, \varphi_0) & \text{npu } j=2 \\ U_\theta^{(j)}(\theta_0, \varphi_0) & \text{npu } j=3 \\ U_\varphi^{(j)}(\theta_0, \varphi_0) & \text{npu } j=4 \end{cases} \quad (1.109)$$

Après avoir représenté $u^{(1)}$ $H^{(1)}$ et $R^{(1)}$ en vue de la décomposition en fonctions sphériques

$$\begin{aligned} H^{(1)}(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{nm}^{(1)} Y_n^m(\theta, \varphi); \\ R^{(1)}(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{nm}^{(1)} Y_n^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.110)$$

et en utilisant comme solutions auxiliaires (\bar{u}_j, R_j) les solutions déterminées par les formules de Love du type (1.69), (1.66b) nous aurons

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,k}^j \frac{x_k}{r} &= f_6^j(r) \frac{\bar{r}}{r^3} Y_n^m(\theta, \varphi) + \frac{f_5^j}{r^2} \nabla Y_n^m(\theta, \varphi) \\ R^j &= f_3(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.111)$$

Après avoir donné les conditions aux limites sous la forme

$$f_4^j(a) = f_5^j(a) = 0; \quad f_6^j(a) = f_6^0 \text{ pour } j = 1 \quad (1.112)$$

$$f_5^j(a) = f_6^j(a) = 0; \quad f_4^j(a) = f_4^0 \text{ pour } j = 2$$

où f_4, f_6 ne s'annulent pas, nous substituerons (1.110 à 1.112) en (1.106). En intégrant le résultat en θ , et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité des fonctions sphériques nous trouverons

$$F_{nm}^j = C_{nm} \begin{cases} f_6^0 H_{nm}^{(1)} & \text{pour } j=1 \\ f_4^0 R_{nm}^{(1)} & \text{pour } j=2 \end{cases} \quad (1.113)$$

où

$$C_{nm} = \frac{2\pi \varepsilon (n+m)!}{(2n+1) (n-m)!}$$

le carré de la norme de la fonction sphérique $Y_n^m(\theta, \psi)$,

$$\varepsilon \begin{cases} 1 & \text{pour } m \neq 0 \\ 2 & \text{pour } m = 0 \end{cases}$$

Les solutions données par les conditions aux limites (1.111), (1.112) se déterminent par intégration numérique des équations différentielles ordinaires (1.67). C'est pourquoi les relations (1.113) donnent le procédé le plus simple de calcul de la composante radiale des déplacements et des variations du potentiel gravitationnel à la surface de la Terre.

Chapitre II.

Théorie dynamique des marées terrestres.

Comme on l'a noté précédemment, la théorie statique des marées dans le noyau liquide ne convient pas pour la description des marées diurnes dans le domaine de fréquences voisines de la résonance quasi-diurne. L'écart des marées à longue période, semi-diurnes et zonales par rapport aux marées statiques est sensiblement moindre et en général ne dépasse pas 1%. Cependant pour l'étude des effets assez faibles (tels que la rhéologie du manteau dans la région des fréquences des marées et chandlerienne) ces corrections peuvent avoir une valeur importante et on doit en tenir compte.

Nous examinerons dans ce chapitre la théorie dynamique des marées à longue période, semi-diurnes et diurnes dans l'enveloppe et également les marées semi-diurnes et à longue période dans le noyau liquide. La théorie des marées dynamiques diurnes dans l'enveloppe permet de préciser la théorie de la nutation libre et forcée en tenant compte de l'effet des forces d'inertie sur la marée dans l'enveloppe. On a examiné l'influence de la nutation forcée sur les résultats des observations de marées déterminée par l'effet des forces d'inertie apparaissant à cause du mouvement de précession-nutation de la Terre, directement sur les gravimètres et clinomètres. On a examiné la théorie dynamique de la marée du pôle dans l'océan réel déterminant l'influence de l'océan sur le mouvement de Chandler du pôle.

§ I. Equations de départ.

Dans le cas d'oscillations harmoniques d'assez faible amplitude, le second membre des équations dynamiques générales (1.62a) peut être linéarisé. En utilisant l'expression donnant l'accélération de l'élément de volume du milieu dans le système des coordonnées en rotation [6] nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \nabla \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}} \vec{V}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + \\ + (\ddot{\vec{u}}, \nabla) \vec{V} \approx \ddot{\vec{u}} + [\dot{\vec{\omega}} \vec{V}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + (\dot{\vec{u}}, \nabla) [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}], \end{aligned} \quad (2.1)$$

où

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega} \vec{r}].$$

Il est évident que l'approximation (2.1) convient dans les cas où

$$|\vec{u}| \ll \ell \quad (2.2)$$

où ℓ est l'échelle caractéristique de longueur pour les fonctions u_i (intervalle sur lequel les composantes u_i ont une variation importante).

Pour le champ de vitesses déterminées par la solution de Poincaré (1.39) et par la formule de Love (1.66) ℓ est de l'ordre du rayon de la Terre alors que $|\vec{u}|$ ne dépasse pas dans tous les cas quelques dizaines de mètres. C'est pourquoi la condition (2.2) dans un noyau liquide idéal et une enveloppe élastique se réalise avec une grande réserve de précision. La perturbation de la condition (2.2) peut avoir lieu uniquement pour une faible viscosité, non nulle, du noyau dans une mince couche limite entre le noyau et l'enveloppe, soit le noyau solide interne où les composantes tangentiels de u subissent une discontinuité et $\ell \rightarrow 0$. Le mouvement du liquide dans cette couche peut être turbulent et sa description mathématique est très complexe. Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'examen d'un noyau liquide idéal et nous examinerons les équations (1.62) dans l'approximation (2.1). En tenant compte que

$$(\dot{\vec{u}}, \nabla [\vec{\omega} \vec{r}]) = [\vec{\omega} \dot{\vec{u}}],$$

on peut représenter les équations (1.62) avec l'approximation (2.1) également sous la forme

$$\rho(\ddot{\vec{u}} + 2[\vec{\omega} \dot{\vec{u}}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + \vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]) - \vec{L}(\vec{u}, R) = 0, \quad (2.3)$$

où \vec{r} est le rayon vecteur, on a désigné par le signe diacritique la différenciation par rapport à t dans le système de coordonnées (x, y, z) . Le terme $\ddot{\vec{u}}$ décrit les accélérations relatives, $2[\vec{\omega} \dot{\vec{u}}]$ - l'accélération de Coriolis, $[\dot{\vec{\omega}} \vec{r}]$ - les accélérations centrifuges; $[\vec{\omega} \vec{r}]$ concerne les accélérations déterminées par le mouvement du vecteur par rapport au système de coordonnées (x, y, z) .

Après avoir déterminé le système de coordonnées par la condition (1.55) nous examinerons séparément le cas des marées zonales, diurnes et semi diurnes.

1. Dans le cas des marées zonales d'un noyau liquide idéal et d'une Terre à symétrie axiale ($A = B$) la dépendance $\vec{\omega}(t)$ se détermine par la condition de conservation du moment de la quantité du mouvement de l'enveloppe :

$$\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega + \delta\omega) \quad (2.4)$$

où

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta C}{C} \quad (2.5)$$

La substitution de (2.4) en (2.3) donne

$$\rho[\ddot{\vec{u}} + 2[\vec{\omega}\dot{\vec{u}}] - (1 + \frac{2\delta\omega}{\omega})grad\varphi_0 + \delta\dot{\omega}(-iz + jx)] - \vec{L}(\vec{u}, R) = 0, \quad (2.6)$$

où

$$\varphi_0 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (2.7)$$

est le potentiel des forces centrifuges dans le cas de la rotation à vitesse constante par rapport à l'axe z.

2. Dans le cas des marées diurnes le caractère du mouvement du vecteur $\vec{\omega}$ par rapport au système des coordonnées (x, y, z) se détermine par les rapports cinématiques du § I du chapitre I. Pour le mouvement conique du vecteur $\vec{\omega}$ suivant la polhodie décrite en (1.14)

$$[\dot{\vec{\omega}}\dot{\vec{z}}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\dot{\vec{z}}]] = -grad(\varphi_0 + \frac{\epsilon\omega}{\omega}\varphi) + \frac{2\delta}{\omega}K\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (2.8)$$

où

$$\varnothing = -\epsilon\omega^2 z (x \cos \sigma t + y \sin \sigma t) \quad (2.9)$$

La substitution de (2.8) en (2.3) donne les équations du mouvement du noyau et de l'enveloppe dans le cas des marées diurnes :

$$\rho[\ddot{\vec{u}} + 2[\vec{\omega}\dot{\vec{u}}] - grad(\varphi_0 + \frac{\epsilon\omega}{\omega}\varphi) + \frac{2\delta}{\omega}K\frac{\partial\varphi}{\partial z}] - \vec{L}(\vec{u}, R) = 0. \quad (2.10)$$

3. Enfin dans le cas des ondes semi diurnes et A = B le vecteur $\vec{\omega}$ est immobile par rapport au système de coordonnées (x, y, z) et les équations (2.3) ont la forme :

$$\rho(\ddot{\vec{u}} + 2[\vec{\omega}\dot{\vec{u}}] - grad\varphi_0) - \vec{L}(\vec{u}, R) = 0. \quad (2.11)$$

La comparaison de (2.6), (2.10) et (2.11) montre que les marées zonales, diurnes et semi diurnes peuvent être examinées ensemble, si on écrit

$$\rho \left\{ \ddot{\vec{u}} + 2[\vec{\omega} \dot{\vec{u}}] - g \text{grad} \left(\varphi_0 \left(1 + \frac{2\delta\omega}{\omega} + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right) \right) + \delta\dot{\omega} (\vec{j}_x - i\vec{j}_y) + \frac{2\sigma}{\omega} \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} - \vec{L}(\vec{u}, R) = 0 \quad (2.12)$$

et si on convient de poser $\delta = 0$ dans le cas des marées zonales et semi diurnes et $\delta\omega = 0$ pour les marées diurnes et semi diurnes.

En posant dans le noyau liquide $\mu = 0$, nous obtiendrons les équations hydrodynamiques suivantes :

$$\ddot{u} - 2\omega \dot{v} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \delta) + \gamma \delta \dot{\omega}; \quad (2.13)$$

$$\ddot{v} + 2\omega \dot{u} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \delta) - x \delta \dot{\omega};$$

$$\ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \delta \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \delta),$$

où u, v, w sont les composantes de \vec{u} suivant les axes x, y, z

$$-\psi_1 = R + (\vec{u}, \nabla \tilde{V}) + \frac{2\delta\omega}{\omega} \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi; \quad (2.14a)$$

$$\tilde{V} = V + \varphi; \quad (2.14b)$$

$$\delta = \text{div } \vec{u}. \quad (2.14c)$$

Dans le cas d'un noyau adiabatique, chimiquement homogène, la densité ne dépend que de la pression. Dans cette approximation le noyau obéit à l'équation de Adams-Williamson

$$\lambda \text{grad} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \text{grad } \tilde{V}, \quad (2.15)$$

et les équations (2.12) deviennent :

$$\ddot{u} - 2\omega \dot{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma \delta \dot{\omega}; \quad (2.16a)$$

$$\ddot{v} + 2\omega \dot{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \delta \dot{\omega}; \quad (2.16b)$$

$$\ddot{w} + 2\frac{\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.16c)$$

où

$$-\psi = R + (\vec{u}, \nabla \tilde{V}) + \frac{2\delta\omega}{\omega} \varphi_0 + \frac{\sigma^2 \omega}{\omega} \varphi + \frac{\lambda \delta^2}{\rho} \quad (2.17)$$

Pour les oscillations harmoniques de fréquence σ :

$$\ddot{u} = -\sigma^2 u, \quad \ddot{v} = -\sigma^2 v, \quad \ddot{w} = -\sigma^2 w$$

En utilisant cette circonstance nous différencierons (2.16a) et (2.16b) par rapport au temps. Nous obtiendrons :

$$-\sigma^2 \dot{u} + 2\omega \sigma^2 v = -\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x} - \sigma^2 \delta \omega y; \quad (2.18a)$$

$$-\sigma^2 \dot{v} - 2\omega \sigma^2 u = -\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} + \sigma^2 \delta \omega x. \quad (2.18b)$$

Après avoir éliminé \dot{v} des équations (2.16a) (2.18b) et \dot{u} de (2.16b) (2.18a) nous obtiendrons les expressions connues pour u, v, w en fonction de $\dot{\psi}$, ψ et par lesquelles on peut remplacer (2.16) [42]

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2)u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \delta \omega - \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} + 2\omega x \delta \omega \\ (\sigma^2 - 4\omega^2)v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \delta \omega + \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x} + 2\omega y \delta \omega \\ \sigma^2 w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant (2.19) il est facile de calculer la combinaison entrant en (1.62b)

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = \rho \text{div} \vec{u} + (\vec{u}, \nabla \rho)$$

En posant que la répartition $\rho(x, y, z)$ a une symétrie axiale par rapport à l'axe z nous aurons

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \text{div} \vec{u} = \Delta \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\omega \delta \omega; \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) (\vec{u}, \nabla \rho) &= (\nabla \rho, \nabla \psi) - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \\ &- \frac{2\omega m}{\sigma^2} \psi \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma^2 \omega} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + 2\omega \delta \omega \frac{\partial \rho}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

où $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$, m est égal à 1 pour les marées diurnes et à 2 pour les semi diurnes.

La substitution de (2.12) en (1.62b) donne le système de deux équations aux dérivées partielles par rapport aux fonctions ψ, R :

$$\begin{aligned} -\frac{V'}{4\pi G \rho'} \Delta R &= \psi \cdot R + \frac{2\delta\omega}{\omega} \mathcal{F}_0 + \frac{\delta\omega}{\omega} \mathcal{F} = \\ &= \frac{1}{\omega^2} F(\psi) - \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{4\omega^2 \delta\omega}{4\omega^2 - \sigma^2} \left(\frac{\rho V'}{\rho'} - \frac{\ell}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (2.21a)$$

où

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \left[\frac{\rho V'}{\rho'} \left(\Delta \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \psi \cdot V' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma \ell} \psi \frac{\partial V}{\partial \ell} \right] \end{aligned} \quad (2.21b)$$

(pour $m = 1$ et $\delta\omega = 0$ (2.21) concorde avec les équations (23) du travail [42].

En utilisant à nouveau (2.12), (2.21a)) la solution des équations détermine complètement les trois composantes des déplacements dans le noyau liquide et la valeur de la divergence des déplacements liée avec la pression P par la relation connue

$$p = -\lambda \operatorname{div} u$$

Les conditions de continuité des tensions de la composante normale des déplacements et également du potentiel R et de ses dérivées déterminent les conditions aux limites pour les équations (2.21).

Il convient de noter que dans le cas des ondes diurnes $4\omega^2/\sigma^2 > 1$, c'est pourquoi les équations (2.21) sont du type hyperbolique. Pour les ondes semi-diurnes $4\omega^2/\sigma^2$ peut être aussi bien plus grand que plus petit que l'unité, c'est pourquoi l'équation (2.21a) peut aussi bien être de type hyperbolique qu'elliptique.

Par la substitution de Love (1.66) les équations (2.21), (2.11) ne se réduisent pas au système des équations ordinaires. Cela est lié à la présence dans l'expression (2.3) du terme $2[u]$ levant la dégénérescence dans les variables angulaires.

Comme on l'a noté précédemment, la représentation du vecteur déplacements en série infinie (1.89) donne un système infini d'équations ordinaires couplées entre elles. Il n'est pas difficile de s'en assurer, si on tient compte que pour

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r) Y_n^m(\theta, \varphi)$$

entrant en (2.21b) l'expression $\partial^2 \psi / \partial z^2$ renferme conformément aux rapports récurrents connus, les termes aussi bien avec $Y_n^m(\theta, \varphi)$ que ceux avec $Y_{n+2}^m(\theta, \varphi)$. Les coefficients pour $Y_{n+2}^m(\theta, \varphi)$ sont du même ordre que les coefficients pour $Y_n^m(\theta, \varphi)$, c'est pourquoi la chaîne des équations différentielles ordinaires ne renferme en général pas de petits paramètres. Ceci est en relation avec le fait que les forces de Coriolis ont, dans le noyau liquide le même ordre de grandeur que les autres termes.

Nous noterons également que l'approche de la solution du problème basée sur l'utilisation des équations (2.21) diffère sensiblement de la solution de Poincaré. En fait, les formules (1.45) représentent les équations pour la valeur complète de la vitesse de l'élément du noyau (y incluant la vitesse de rotation diurne) décrites dans le système des coordonnées mobile. Avec cette approche, le terme non linéaire des équations hydrodynamiques (1.42) $(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}$ et les termes non linéaires liés des équations (1.45) ont le même ordre de grandeur que les autres termes et ne peuvent être rejetés. Quant aux équations (2.3) elles se rapportent à une petite valeur des déplacements de marées u_i par rapport au système mobile de coordonnées et parce qu'elles sont linéaires. Le système des équations ordinaires (1.47) permet d'obtenir une solution précise du problème dans le cas d'une amplitude arbitraire des oscillations et de l'aplatissement arbitraire de l'ellipsoïde (1.40) alors que les équations (2.21) ont une limitation importante (2.2) et une condition de petitesse de l'aplatissement de l'interface noyau - enveloppe. En même temps la linéarité des équations (2.21) facilite sensiblement leur analyse pour des modèles plus complexes du noyau visqueux non homogène compressible et de l'enveloppe visco élastique couverte par l'océan. Dans le § 2 du chapitre 3 on montrera que dans le cas particulier d'un noyau homogène non compressible et d'une enveloppe absolument solide la solution basée sur les équations (2.11), (2.12), (2.21) concorde avec la solution de Poincaré.

§ 2. L'écart des marées élastiques dans l'enveloppe par rapport aux marées statiques.

Comme on l'a remarqué précédemment, dans l'enveloppe élastique, les forces d'inertie liées aux accélérations relatives par les accélérations de Coriolis et la variation des forces centrifuges ne dépassent pas 1% de la valeur totale des forces élastiques et gravitationnelles.

Les forces centrifuges liées à une rotation régulière ne dépendent pas du temps et on en tient compte dans la théorie statique. La petitesse des variations des forces d'inertie permet d'appliquer aux équations (2.3) la méthode des perturbations développée dans le paragraphe 6 du chapitre I.

Après avoir noté

$$\bar{u} = \bar{u}(0) + \bar{u}(1) \quad (2.22)$$

où u^0 est la solution des équations non perturbées (statiques)

$$\bar{L}(\bar{u}^{(0)}, R^{(0)}) = 0 \quad (2.23)$$

$$\Delta R^{(0)} = 4\pi G \operatorname{div}(\rho \bar{u}^{(0)})$$

et $(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)})$ sont les petites variations de $\bar{u}^{(0)}, R^{(0)}$ déterminées par l'effet des forces d'inertie sur l'enveloppe, nous substituerons (2.22) en (2.3). En négligeant les termes du second ordre $\delta \bar{L}(\bar{u}^{(1)}, R^{(1)})$ et en tenant compte de (2.12) nous obtiendrons les équations (1.100) pour $\delta \rho = 0$ et

$$\begin{aligned} \delta \bar{L}(\bar{u}^{(1)}) = & -\rho(\ddot{u}^{(1)} + 2[\bar{\omega} \dot{\bar{u}}^{(1)}] - g \operatorname{grad}(\frac{2\delta\omega}{\omega} \varphi_0 + \frac{\delta\omega}{\omega} \varphi))_r \\ & + \delta\dot{\omega}(\bar{j}_x - \bar{i}_y)_r \frac{2\delta}{\omega} \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'expression (2.24) détermine les forces d'inertie agissant sur l'élément de volume, calculées pour les déplacements déterminés par l'approximation zéro (2.23)

Les conditions aux limites (1.98) pour les problèmes perturbé et non perturbé concordent et ont la forme :

$$\sigma_{ik}^{(0)} \frac{\chi_k}{z} \Big|_{z=a} = (\sigma_{ik}^{(0)} + \delta\sigma_{ik}^{(1)}) \frac{\chi_k}{z} \Big|_{z=a} = 0 \quad (2.25)$$

$$\rho_0 \Big|_{z=a} = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} \Big|_{z=a} = \frac{2n+1}{4\pi G} \tilde{V}_e \rho_{n_0}^{m_0}(\cos\theta) \cos(\sigma t - m_0 \varphi)$$

où

$$V_e = \tilde{V}_e \rho_{n_0}^{m_0}(\cos\theta) \cos(\sigma t - m_0 \varphi) \quad (2.26)$$

est le potentiel générateur de marées sur la sphère $r = a$, $P_n^{m_0}(\cos\theta)$ - les polynômes de Legendre ($n = 2$ pour la marée du second ordre). De (2.25) il s'ensuit que les conditions aux limites pour

$$P \Big|_{r=a} = a \quad \text{et} \quad \sigma_{ik}^{(1)} \Big|_{r=a}$$

sont homogènes et par conséquent la solution du problème aux limites (1.100) est déterminée par les relations (1.113) pour

$$F_{nm}^i = \iiint_V (\ddot{u}^i, \delta \bar{L}(\ddot{u}^i)) d\tau. \quad (2.27)$$

En intégrant (2.27) par rapport aux variables angulaires nous obtiendrons (voir annexe 2) :

$$\frac{F_{nm}^j}{c} = \delta(n, n_0) \delta(m, m_0) \cos(\sigma t - m_0 \varphi) I^j, \quad (2.28)$$

où

$$I^j = \sigma^2 I_1^j + 2 \omega \sigma m_0 I_2^j \quad (2.29a)$$

pour les ondes semi diurnes (pour $m_0 = 2$) et

$$I^j = \sigma^2 I_1^j + 2 \omega \sigma m_0 \left(I_2^j - \frac{V_0(C-A)}{a^2 \omega \sigma A} I_3^j \right) \quad (2.29b)$$

pour les ondes diurnes (pour $m_0 = 1$) :

$$I_1^j = \int_0^a \left(r^2 f_1^{(j)} f_1^{(j)} + \frac{r^4}{n(n+1)} f_2^{(j)} f_2^{(j)} \right) \rho dr; \quad (2.30)$$

$$I_2^j = \int_0^a \frac{r^2 \rho}{n(n+1)} \left(f_1^{(j)} f_2^{(j)} + f_1^{(j)} f_2^{(j)} + \frac{r^2}{n(n+1)} f_2^{(j)} f_2^{(j)} \right) dr; \quad (2.31)$$

$$I_3^j = \int_0^a \rho r^3 \left(f_1^{(j)} + 3 \frac{r^2}{n(n+1)} \right) dr; \quad (2.32)$$

les intégrales (2.30 à 2.32) sont écrites dans le système d'unités (1.70) dans lequel $a = 1$, $b = 0,546$, ρ est la densité, sans dimension, égale au rapport $\rho(r)$ à la densité moyenne de la Terre $\rho_0 = 5.517 \text{ g/cm}^3$; les valeurs f_1^j , f_2^j se déterminent à partir des conditions aux limites (1.112) pour $f_3^0 = 1$ et $f_6^0 = 1$ c'est à dire

$$f_4^j(a) = f_5^j(a) = 0, f_6^j(a) = 1 \text{ pour } j = 1 \quad (2.33a)$$

$$f_5^j(a) = f_6^j(a) = 0, f_4^j(a) = 1 \text{ pour } j = 2 \quad (2.33b)$$

dans le système d'équations différentielles (1.67).

Les rapports (2.28) ont un sens simple. Bien que par la substitution de Love (1.66) les équations des oscillations gravitationnelles classiques de la sphère en rotation ne correspondent pas aux équations ordinaires; toutefois lors d'une rotation assez lente, au premier ordre de la théorie des perturbations, les accroissements δH et δR à la surface de la Terre ont la même dépendance de θ , ψ et la même phase que la solution statique non perturbée (u_0 , R_0). Cela veut dire que l'influence des forces d'inertie aussi bien sur les marées semi diurnes que sur les marées diurnes peut être prise en considération par l'introduction de corrections effectives aux nombres de Love en θ et ψ

$$\delta h = \frac{I^j}{V_0} \quad \text{pour } j = 1$$

$$\delta k = \frac{I^j}{V_0} \quad \text{pour } j = 2$$

Dans le cas des marées zonales à longue période $m_0 = 0$ (voir annexe 2) :

$$F_{nm}^j = \cos \sigma t (\delta_{n,n_0} I_4^j + \delta_{n,0} I_5^j), \quad (2.34)$$

où
$$I_4^j = -\frac{4}{9} \frac{M_0^2 V_0}{C} R \int_0^a (2f_1^j z^3 + f_2^j z^4) \rho dz; \quad (2.35)$$

$$I_5^j = \frac{8}{9} \frac{M_0^2 V_0}{C} R \int_0^a \tilde{f}_1^j z^3 \rho dz; \quad (2.36)$$

$M a^2$ est le produit de la masse de la Terre par le carré du rayon, C est le moment d'inertie, k est le nombre de Love, $\tilde{f}^{(j)}(r) = f_2^j(r)$ pour $n = 0$.

Par (2.34) on constate que dans le cas des ondes zonales la dépendance F_{nm}^j de θ a la forme

$$F_{nm}^j = \cos \sigma t (C_1 P_2^0(\cos \theta) + C_2 P_2^0(\cos \theta))$$

et par conséquent, les corrections au nombre de Love h dépendent de la latitude.

Pour le calcul numérique des intégrales (2.29) il est important de noter que la combinaison $\omega \sigma_{m_0}$ est négative pour n'importe quel procédé de détermination de la direction positive du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ et du signe ψ .

Dans le cas des ondes diurnes cela résulte des relations cinématiques générales (1.20) et de la condition $|\Omega| \ll |\omega|$. Pour s'en assurer nous utiliserons dans le cas général le fait que la vitesse angulaire de rotation du bourrelet de marée dans l'espace est beaucoup plus petite que celle du système mobile de coordonnées.

Soit le point \bar{r}_0 de coordonnées

$$x_0 = \cos \varphi_0, \quad y_0 = \sin \varphi_0, \quad z_0 = 0 \quad (2.38)$$

qui tourne par rapport à l'axe Z de telle façon qu'il coïncide tout le temps avec le point de la valeur maximale du potentiel générateur de marées (2.26). Nous satisferons à cette condition si nous posons

$$\varphi_0 = \frac{\sigma}{m_0} t \quad (2.39)$$

Par la condition du point immobile (x_0, y_0, z_0) dans l'espace nous obtiendrons :

$$\dot{\bar{z}}_0 + [\bar{\omega} \bar{z}] \approx 0 \quad (2.40)$$

En même temps, en utilisant les expressions (2.38) (2.39) nous obtiendrons

$$(2.41)$$

Après avoir substitué (2.41) en (2.40) et réécrit le produit vectoriel suivant ses composantes, nous trouverons

d'où il résulte :

$$\frac{\sigma}{m_0} \approx -\omega \quad (2.42)$$

Nous donnons dans les tables 2.I les résultats de l'intégration numérique des équations (1.67) pour $n = 2$ et aux conditions aux limites (2.26) pour le modèle réel de la Terre N°508 de Gilbert et Dziewonski.

Table 2.1

Valeurs des fonctions $f_1^{(j)}(r)$, $f_2^{(j)}(r)$, $\xi(r)$ entrant en (2.30 à 2.32), (2.35), (2.36)

r	f_1	f_2	f_1	f_2	ξ
0,546	0,776	3,491	0,375	1,728	0,997
0,596	0,800	2,831	0,381	1,413	0,980
0,647	0,815	2,342	0,383	1,185	0,952
0,697	0,828	1,952	0,383	1,010	0,912
0,747	0,839	1,621	0,382	0,865	0,883
0,797	0,851	1,320	0,381	0,738	0,858
0,847	0,864	1,037	0,379	0,622	0,826
0,898	0,879	0,762	0,375	0,511	0,752
0,948	0,908	0,502	0,371	0,412	0,637
0,998	0,958	0,228	0,365	0,310	0,609
1,000	0,970	0,219	0,364	0,306	0,393

En comparant les conditions aux limites (2.33) et (1.76) on constate que dans le système d'unités (1.70)

$$f_i^{(1)}(z) = \frac{5}{3} V_0 f_i^{(j=2)}(z).$$

De cette façon, par la table (2.1) on détermine complètement les fonctions de $f_1(2)$, $f_2(2)$ entrant en (2.30), (2.31).

Pour $n = 0$ la solution donnée à la seconde ligne (2.33) est évidemment identiquement égale à zéro c'est pourquoi $\tilde{f}_1^{j+z} = 0$ et $I_5 = 0$ pour $j = 2$.

Quant aux valeurs I_5 pour $j = 1$ on les détermine par la solution du problème aux limites (1.67) (2.26) pour $n = 0$. Les valeurs numériques $r^3 f_1^j$ calculées pour ce même modèle N°508 de Gilbert et Dziewonski sont données dans la table 2.2.

Table 2.2.

Valeurs de la fonction $r^3 f_1^{(j=1)}(r)$ entrant en (2.36)

r	0,546	0,596	0,647	0,697	0,747
$r^3 f_1^{(j=1)}$	0,004	0,013	0,026	0,043	0,065
r	0,797	0,848	0,898	0,948	1,000
$r^3 f_1^{(j=1)}(r)$	0,095	0,133	0,185	0,266	0,388

La substitution des valeurs $f_1(r)$, $f_2(r)$ et $f_3(r)$ provenant des tables 2.1, 2.2 en (2.30 à 2.32) et (2.35 à 2.36) permet de déterminer les valeurs numériques des rapports des intégrales I_k à V_0 .

Ils sont donnés dans la table 2.3.

Table 2.3.

Rapports des intégrales I_k (2.30 à 2.32)
(2.35 à 2.36) pour V_0

j/k	1	2	3	4	5
1	0.1620	0.0615	0.238	-0.191	0.0209
2	0.0763	0.0313	0.117	-0.091	0

En utilisant (2.28), (2.34) et en tenant compte de la règle des signes (2.42) nous obtiendrons les corrections suivantes aux nombres de Love :

$\sigma =$	-2	-	0
$\delta h \cdot 10^3$	0.54	1.78	$-0.651 + 0.75/P_2 (\cos \theta)$ (2.45)
$\delta k \cdot 10^3$	0.19	0.85	-0.32/

Il convient de noter que les corrections obtenues dans la première colonne aux nombres de Love pour les ondes semi diurnes sont sensiblement plus petites que le carré du rapport de la fréquence de marée $\sigma = -2\omega$ à la fréquence de l'oscillation sphéroïdale principale ωS_2 . Cela est en relation avec le fait que la correction entrant en (2.22a) des accélérations relatives $\sigma^2 I_1$ est compensée dans une grande mesure par la correction de signe opposé tenant compte de l'effet des accélérations de Coriolis $2\omega \sigma m_0$, I_2 (l'effet total des accélérations relatives et de Coriolis est deux fois moindre que chacun des termes).

Pour les ondes diurnes les forces d'inertie déterminées par le mouvement de nutation de l'enveloppe jouent un rôle fondamental; pour les marées zonale à longue période - les variations de la force centrifuge liées avec les variations de marées de la vitesse de rotation de la Terre.

§ 3. Effet du noyau liquide pour les marées semi diurnes et à longue période.

La méthode de solution utilisée en § 2 des équations des marées élastiques dans l'enveloppe ne sera pas appliquée au noyau liquide. Cela est lié au fait que le vecteur déplacements de marées statiques \vec{u}_0 entrant en (2.27) ne se détermine pas par les équations de l'équilibre hydrostatique du noyau de façon unique. Pour s'en assurer nous écrirons les équations (2.16), (1.62b) dans l'approximation statique $\omega = \sigma = 0$. Nous obtiendrons

$$\nabla \left(R + (\vec{u}, \nabla \tilde{V}) + \frac{\lambda \rho^2}{\rho} \right) = 0; \quad (2.46)$$

$$\Delta R = 4\pi G \left(\rho \rho^2 + (\vec{u}, \nabla \rho) \right). \quad (2.47)$$

En utilisant (2.15) nous obtiendrons

$$(\vec{u}, \nabla \rho) = \frac{\rho^2}{\lambda} (\vec{u}, \nabla V),$$

et ainsi on peut représenter le second membre (2.47) sous la forme

$$\Delta R = \frac{4\pi G \rho^2}{\lambda} \left(\frac{\lambda \rho^2}{\rho} + (\vec{u}, \nabla V) \right). \quad (2.48)$$

D'autre part, de l'équation (2.46) il résulte

$$\frac{\lambda \rho^2}{\rho} + (\vec{u}, \nabla V) + R = C,$$

où C est la constante qu'on peut poser égale à zéro sans limitation. Ainsi les équations (2.46), (2.47) peuvent être remplacées par les deux suivantes :

$$\begin{cases} \Delta R + 4\pi G \frac{\rho^2}{\lambda} R = 0; & (2.49a) \\ \frac{\lambda \rho^2}{\rho} + (\vec{u}, \nabla \tilde{V}) = -R. & (2.49b) \end{cases}$$

L'équation (2.49a) détermine complètement aux conditions aux limites (1.75 à 1.77) la fonction R . On ne peut donc trouver par l'équation (2.49b) que la composante radiale (parallèle au vecteur ∇V) des déplacements des valeurs de densité égales:

$$\vec{H} = \frac{1}{\nabla V} \left(\frac{\lambda \rho^2}{\rho} + (\vec{u}, \nabla \tilde{V}) \right)$$

La composante radiale du vecteur déplacements u , comme les deux composantes u normales à ∇V ne sont pas déterminées par les équations (2.49). Cette déduction est immédiatement claire à partir des représentations énergétiques. Il est évident qu'il n'y a que les déplacements de la surface d'égalité de valeurs dans la direction ∇V qui puissent changer l'énergie potentielle du liquide; les déplacements infiniment lents soumis à la condition $H = 0$, ne changent pas l'énergie du système et par conséquent ne sont pas déterminés par les conditions d'équilibre statique univoque. C'est pourquoi les équations des marées dynamiques dans le noyau liquide exigent un examen supplémentaire.

Commençons par le modèle le plus simple d'un noyau homogène incompressible. En posant en (2.21) $\rho = 0, \lambda = \infty$, nous obtiendrons

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{\sigma^2 - 4\omega^2} (\Delta \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 4\omega \delta \omega) = 0; \quad (2.50)$$

$$\Delta R = 0. \quad (2.51)$$

L'équation (2.50) (pour $\delta \omega = 0$) a été obtenue en premier lieu par Poincaré [6 page 905] et ses solutions générales $|\sigma| > 2\omega$ sont données par Bryan [47] à l'aide de la théorie des fonctions de surface harmoniques ellipsoïdales, rapportées à la surface

$$x^2 + y^2 + (1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2}) z^2 = 1$$

Dans le cas qui nous intéresse des marées du second ordre, les équations (2.50) admettent les solutions élémentaires suivantes

$$\psi^{(0)} = [c_1^{(0)} (x^2 + y^2) + c_2^{(0)} (z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2})] \cos \sigma t \quad \text{при } m_0 = 0; \quad (2.52)$$

$$\psi^{(1)} = c^{(1)} (x z \cos \sigma t + y z \sin \sigma t) \quad \text{при } m_0 = 1; \quad (2.53)$$

$$\psi^{(2)} = c^{(2)} [(x^2 - y^2) \cos \sigma t + 2xy \sin \sigma t] \quad \text{при } m_0 = 2. \quad (2.54)$$

Dans le système de coordonnées sphériques $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ sont proportionnelles aux fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \varphi)$:

$$\psi^{(1)} = \frac{c^{(1)}}{3} r^2 P_2^1(\cos \theta) \cos(\sigma t - \varphi); \quad (2.55a)$$

$$\psi^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{5} r^2 P_2^2(\cos \theta) \cos(\sigma t - 2\varphi); \quad (2.55b)$$

$$\psi^{(0)} = r^2 [c_1^{(0)} \sin^2 \theta + c_2^{(0)} P_2^0(\cos \theta)] \cos \sigma t, \quad (2.55c)$$

où P_2^m - sont les polynômes de Legendre.

Par la substitution de (2.52) en (2.50) il est facile de constater que $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$ satisfont effectivement à (2.50) pour $\delta\omega = 0$ et ψ^0 pour

$$\delta\omega = -\left(\frac{2C_1^{(0)}}{\omega} - \frac{2\omega}{\sigma^2} C_2^{(0)}\right) \cos \sigma t. \quad (2.56)$$

La substitution de (2.52 à 2.54) et (2.56) en (2.19) donne les expressions suivantes pour les déplacements dans le noyau

$$u^{(0)} = -\frac{C_2 X \cos \sigma t}{\sigma^2} - \frac{\delta\omega}{\sigma^2} y - \frac{2\omega}{\sigma^3} C_2^{(0)} y \sin \sigma t; \quad (2.57)$$

$$v^{(0)} = -\frac{C_2 y \cos \sigma t}{\sigma^2} + \frac{\delta\omega}{\sigma^2} x + \frac{2\omega}{\sigma^3} C_2^{(0)} x \sin \sigma t; \quad (2.58)$$

$$w^{(0)} = \frac{2C_2 z}{\sigma^2} \cos \sigma t; \quad (2.59)$$

$$u^{(1)} = \frac{C^{(1)}}{\sigma(\sigma+2\omega)} z \cos \sigma t;$$

$$v^{(1)} = \frac{C^{(1)}}{\sigma(\sigma+2\omega)} z \sin \sigma t;$$

$$w^{(1)} = \frac{C^{(1)} - 2E\sigma\omega}{\sigma^2} (y \sin \sigma t + x \cos \sigma t);$$

$$\begin{Bmatrix} u^{(2)} \\ v^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sigma(\sigma+2\omega)} \left(C^{(2)} x \begin{Bmatrix} \cos \sigma t \\ \sin \sigma t \end{Bmatrix} + C y \begin{Bmatrix} \sin \sigma t \\ -\cos \sigma t \end{Bmatrix} \right);$$

$$w^{(2)} = 0.$$

Les composantes radiales correspondantes (2.57 à 2.59) des déplacements ont la forme

$$H^{(0)} = \frac{2C_2^{(0)} \cos \sigma t}{\sigma^2} \pi P_2^0(\cos \theta); \quad H^{(1)} = \left(\frac{C^{(1)}}{\sigma(\sigma+2\omega)} + \frac{C^{(1)} - 2E\sigma\omega}{\sigma^2} \right) \frac{\pi}{3} P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos(\sigma t - \psi); \quad (2.60)$$

$$H^{(2)} = \frac{2C^{(2)}}{\sigma(\sigma+2\omega)} \left[\frac{\pi}{3} P_2^{(2)}(\cos \theta) \cos(\sigma t - 2\psi) \right]; \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

On constate par ces expressions que $H^{(0)}$, $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ sont respectivement proportionnelles aux fonctions sphériques Y_2^0 , Y_2^1 et Y_2^2 .

radiale des déplacements à la limite avec l'enveloppe $H^{(1)} = 0$ et la pression sur la surface libre $p = \delta = 0$ c'est à dire la solution (2.53) satisfait effectivement aux conditions aux limites nécessaires. De (2.61) il résulte que dans ce cas $H^{(1)} = 0$ non seulement la limite de l'enveloppe avec l'océan (pour $r = a$) mais aussi pour toutes les valeurs de r . D'où il résulte que le résultat obtenu par le procédé habituellement un peu différent de Laplace [6, page 430] conformément auquel les courants de marées diurnes dans un océan de profondeur constante ne s'accompagnent pas de variations du niveau de l'océan.

Nous utiliserons les solutions analytiques (2.52 à 2.54) pour évaluer l'influence de la marée dynamique dans le noyau sur les nombres de Love pour les marées semi diurnes et à longues périodes.

I. Les marées semi diurnes.

En utilisant la solution (2.54), nous examinerons les conditions à l'interface de l'enveloppe avec le noyau pour les marées semi diurnes. En comparant (2.55) avec (2.62) nous exprimerons (2) par la composante radiale des déplacements du noyau $H^{(2)}$, entrant dans les conditions aux limites pour l'enveloppe :

$$\psi^{(2)} = \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)z}{2} H^{(2)} \quad (2.63)$$

Puisque les fonctions H , R et la composante normale des tensions

$$\sigma_{rz} = \begin{cases} \lambda \delta & \text{dans le noyau} \\ \frac{f_6(z)}{z^2} Y_n^m(\theta, \varphi) & \text{dans l'enveloppe} \end{cases} \quad (2.64)$$

sont continues à l'interface enveloppe-noyau, la relation (2.17) pour $r = b$ peut être prise comme condition aux limites pour la solution dans l'enveloppe (tenant compte de la continuité de σ_{rr}). Après avoir exprimé ψ par H à l'aide de (2.63) et après avoir substitué en (2.17) nous obtiendrons :

$$\sigma_{rz} + \rho(R + V'H + \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)z}{2} H) = 0. \quad (2.65)$$

Les deux autres conditions aux limites (pour le potentiel R et la composante tangentielle des tensions $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\varphi}$) restent inchangées :

$$\left. \begin{aligned} \frac{R'}{r} \Big|_{z=\epsilon+0} &= \gamma; \\ \sigma_{r\theta} \Big|_{z=\epsilon+0} &= \sigma_{r\varphi} \Big|_{z=\epsilon+0} = 0, \end{aligned} \right\}$$

où $\gamma = R'/R|_{r=0}$ R pour $r > b$ se détermine par l'équation de Poisson (2.49a).

Les relations (2.65) montrent que le passage aux conditions aux limites dans l'approximation statique (pour $\sigma = 0$) aux conditions correspondantes pour $\sigma \neq 0$ se réalise par le remplacement

$$V'(\delta) \rightarrow V'(\delta) + \frac{\delta(\delta + 2\omega)\delta}{2}$$

Dans le cas de la marée de période exactement semi diurne (pour $\sigma = -2\omega$) les conditions aux limites pour les problèmes aux limites dynamique et statique concordent et par conséquent l'effet du noyau liquide est rigoureusement nul.

Faisons l'estimation numérique de l'effet dynamique du noyau dû à l'écart des fréquences des ondes de marées semi diurnes par rapport à -2ω

En utilisant la décomposition de Doodson [3] pour les ondes semi diurnes principales nous trouverons

$$\frac{\sigma + 2\omega}{\sigma} = \begin{cases} -0.033 & \text{pour l'onde } M_2 \\ -0.027 \cdot 10^{-2} & \text{pour l'onde } S_2 \end{cases}$$

Le plus grand écart de $-\sigma$ à 2ω est celui de la petite onde elliptique $2N_2$, pour laquelle

$$\frac{\sigma + 2\omega}{\sigma} = -0.07$$

Conformément à cela, pour un noyau homogène :

$$\epsilon = \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)b}{2V'(b)} = \begin{cases} -1,2 \cdot 10^{-4} & \text{pour } M_2 \\ -1,0 \cdot 10^{-5} & \text{pour } S_2 \\ -2,6 \cdot 10^{-4} & \text{pour } 2N_2 \end{cases} \quad (2.66a)$$

Le changement des solutions dans l'enveloppe, déterminé par la variation des conditions aux limites (2.65), n'est pas difficile

à déterminer par intégration numérique répétée des équations (1.67) avec des conditions aux limites assez voisines. Les résultats des calculs numériques donnent

$$\frac{\delta h}{\delta \epsilon} = 0,20 \qquad \frac{\delta k}{\delta \epsilon} = 0,11 \qquad (2.66b)$$

où $\epsilon = \delta v(t)/v_0$. La substitution de (2.66a) en (2.66b) détermine l'effet dynamique du noyau liquide pour les marées semi diurnes :

pour M_2 $\delta h = -2,4 \cdot 10^{-5}$ $\delta k = -1,3 \cdot 10^{-5}$ (2.67)

pour S_2 $\delta h = -2,0 \cdot 10^{-6}$ $\delta k = -1,1 \cdot 10^{-6}$

pour $2N_2$ $\delta h = -5,2 \cdot 10^{-5}$ $\delta k = -2,9 \cdot 10^{-5}$

Les corrections (2.67) pour les ondes principales M_2 et S_2 n'atteignent que 5 et 0,5% de la correction pour l'enveloppe (2.45).

2. Les ondes à longues périodes.

Dans le cas des marées zonales à longues périodes il résulte des relations (2.54) (2.60) :

$$\frac{2 \frac{\delta \omega}{\omega} \frac{\rho_2 + \psi^{(0)}}{H^{(0)}}}{H^{(0)}} = \frac{\sigma^2 \epsilon}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{P_2^2(\cos \theta)} \right) \qquad (2.68)$$

C'est pourquoi l'analogie des conditions aux limites (2.65) pour $m = 0$ a la forme :

$$\sigma_{z2} = \rho \left[R + v'H + \frac{\sigma^2 b}{2} (H + h \cos \sigma t \sin^2 \theta) \right] = 0, \qquad (2.69)$$

où h est un facteur indépendant de θ , t dans l'expression pour H (2.61a)

$$H^0 = h \frac{P_2^0}{2} (\cos \theta) \cos \sigma t \qquad (2.70)$$

On constate par (2.69) que la perturbation des conditions aux limites pour $m = 0$ est de l'ordre de $\sigma^2 b/v'$. Puisque la variation calculée au § 2 des solutions dans l'enveloppe est de l'ordre de $\omega^2 a/v'$ et pour les ondes zonales à longues périodes $\sigma^2/\omega^2 \leq 1/200$ on peut en négliger l'effet.

A cause de la petitesse de l'effet dynamique du noyau liquide en comparaison avec l'effet dynamique de l'enveloppe, la précision

des estimations obtenue plus haut en tenant compte de la non homogénéité et de la compressibilité du noyau ne présente apparemment pas d'intérêt.

En conclusion, nous ferons la comparaison des estimations obtenues ici de l'écart des marées semi diurnes vis à vis des marées statiques avec les estimations obtenues précédemment dans le travail [45] sans tenir compte des forces de Coriolis. Pour les différents modèles de la Terre on a obtenu en [48] des corrections à h de l'ordre de 0,018 à 0,029 et pour k de 0,22 à 0,030. En comparant avec (2.45) nous verrons que le calcul des accélérations de Coriolis diminue la correction pour h de 30 à 50 fois et pour k à peu près de deux ordres.

§ 4. Influence de la nutation forcée
sur les valeurs des facteurs de marées.

Il est évident que les forces d'inertie déterminées par les nutations par les variations de marées de la vitesse de rotation et les déformations de marées exercent une action non seulement sur la marée dans le noyau et l'enveloppe mais directement sur les indications de l'appareil enregistreur.

Les forces d'inertie déterminées par les accélérations relatives et de Coriolis et également par le déplacement dans le champ des constantes des forces centrifuges ont été calculées en [49]. Nous avons noté en [28] que le mouvement de nutation de la Terre et les variations de marées de la vitesse de rotation exercent également une action sensible sur les indications des instruments enregistreurs de marées. Pour les évaluer nous écrirons les composantes radiales et tangentielles des accélérations de la surface de la Terre liées au mouvement de nutation. En utilisant (2.10) nous trouverons

$$\vec{a}_{\text{Hym}} = \left(\frac{\sigma + \omega}{\omega} \nabla \varphi + \frac{2\sigma}{\omega} \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (2.71)$$

Pour calculer l'influence de la nutation sur les indications du gravimètre nous calculerons le produit scalaire (2.71) par le rayon vecteur r. $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2\varphi/z, z \partial \varphi / \partial z = \varphi,$

$$\frac{1}{z} (\vec{z}, \vec{a}_{\text{Hym}}) = \left(-\frac{2(\sigma + \omega)}{\omega} + \frac{2\sigma}{\omega} \right) \frac{\varphi}{z} = -\frac{2\varphi}{z}.$$

Après avoir écrit ϕ sous la forme

$$\phi = -\frac{\epsilon}{g} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \omega^2 r^2 Z$$

où

$$Z = \rho_2' (\cos \theta) \cos(\sigma t - \varphi),$$

Après avoir substitué la valeur ϵ_0 provenant de (1.15) et tenant compte que les forces d'inertie se déterminent par l'accélération absolue prise avec le signe opposé, nous trouverons

$$\Delta g_{\text{nut}} = -1,90 \frac{V_0}{g} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{\sigma^2} Z. \quad (2.72)$$

L'expression (2.72) montre que l'effet de la nutation sur le gravimètre se ramène à ce que le facteur gravimétrique δ diminue de

$$\Delta \delta = -1,90 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega}{\sigma} \frac{\omega^2}{2g} = -3,28 \cdot 10^{-3} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega}{\sigma} \quad (2.73)$$

cette valeur est positive puisque, en conformité avec (1.23), $\omega/\sigma \approx -1$). Pour éliminer l'influence de la nutation forcée sur les indications du gravimètre il faut ajouter la valeur (2.73) à la valeur observée δ .

Les valeurs numériques des erreurs (2.73) pour les ondes diurnes principales sont données dans la table 2.4 (les rapports ϵ/ϵ_0 sont tirés du travail [42] pour le modèle II de la Terre).

Table 2.4.

Corrections δ_{nut} pour les ondes semi diurnes

	ω/σ	ϵ/ϵ_0	$\Delta \delta_{\text{nut}} \cdot 10^3$
$K_1 - N$	- 1,000	0,997	3,27
$K_1 + N$	- 1,000	1,003	3,29
O_1	- 1,073	1,022	3,60
OO_1	- 0,927	1,071	3,26
P_1	- 1,005	1,032	3,40
φ_1	- 0,995	1,079	3,53

Les composantes tangentielles de l'accélération a_{nut} déterminent l'effet de la nutation forcée sur le clinomètre. Le premier terme (2.71) a la même dépendance des ordonnées que la force génératrice de marées et c'est pourquoi en tous les points de la surface de la Terre on peut tenir compte de l'introduction de la constante de la correction à γ

$$\Delta\gamma_1 = \frac{2g}{V_0} \frac{\sigma\omega}{\omega} \frac{\epsilon}{g} \frac{\omega^2 a}{g} = -0,33 \cdot 10^{-2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\sigma\omega}{\omega}, \quad (2.74)$$

égale dans les directions est-ouest et nord-sud.

Puisque le rapport $|\omega + \sigma/\omega| \leq 1/14$ pour toutes les ondes diurnes, le second membre (2.71) ne contenant pas ce rapport; il dépasse sensiblement la correction (2.72).

k n'a une composante que dans la direction nord-sud égale à $-\sin \theta e_\theta$. C'est pourquoi le second terme (2.71) n'influence que les valeurs de γ dans la direction nord-sud. La correction correspondante $\Delta\gamma_2$ dépend de θ et ne dépend pas de ϕ . Elle est égale à

$$\Delta\gamma_{2c-s} = -\frac{2g}{V_0} \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\epsilon \omega^2}{3g} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} = \frac{2}{305} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta};$$

$$\Delta\gamma_{2s-s} = 0. \quad (2.75)$$

Au pôle et à l'équateur où les inclinaisons diurnes atteignent leur valeur maximale, $-\Delta\gamma$ on a des valeurs respectivement de 0 et 2/305 soit 1% de γ . Lorsqu'on tend vers la latitude $\pm 45^\circ$, le rapport peut atteindre des valeurs encore plus grandes. Les valeurs exactes de la correction $\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2$ pour les différentes ondes diurnes à différentes latitudes sont faciles à calculer à l'aide des formules (2.74) (2.75) et les valeurs ϵ/ϵ_0 , σ/ω de la table 2.4.

Enfin, pour tenir compte de l'effet direct des variations de marées de la vitesse angulaire sur les indications du gravimètre et du clinomètre nous substituerons en (2.6) et (2.7) les valeurs $\delta / \omega = -\delta$ c/c déterminées par la formule de Mac-Cullagh (A2.31). La partie radiale du vecteur obtenu de cette façon de l'accélération détermine la correction au facteur du gravimètre δ

$$\Delta\delta = 0,21 \cdot 10^{-2} \frac{\sin^2 \theta}{3/2 \sin^2 \theta - 1}. \quad (2.76)$$

Au pôle et à l'équateur où les variations à longue période de la force de pesanteur sont maxima, la correction (2.76) atteint 0 et 0,42% respectivement.

La composante tangentielle des accélérations

$$\alpha_a = 4,04 \frac{R V_0 \omega^2}{g} \cos \theta \sin \theta \vec{e}_a$$

détermine la correction au facteur clinométrique γ_{NS} , identique en tous les points de la surface de la Terre :

$$\delta\gamma_{NS} = 0,14 \cdot 10^{-2} \quad \text{ou} \quad 0,2\% \text{ de } \gamma$$

En comparant ces estimations avec la précision moyenne actuelle des mesures de marées (0,1 à 0,2% pour δ et 1% pour γ) on peut tirer la conclusion que les corrections (2.73), (2.75) (2.76) dépassent sensiblement les erreurs de mesures et que par conséquent, on doit en tenir compte lors de la réduction et de l'interprétation des mesures de marées.

§ 5. Marée polaire dans l'océan réel.

La marée polaire est la marée dans l'océan due à la variation des forces centrifuges lors du mouvement chandlerien du pôle. Puisqu'elle exerce une influence importante sur la valeur de la période chandlerienne il devient nécessaire d'en tenir compte avec la précision maximale possible.

En utilisant la condition d'équilibre hydrostatique d'une mince couche de liquide couvrant complètement toute la Terre il n'est pas difficile de démontrer que la correction déterminée par la mobilité des eaux des océans au nombre de Love k , dans l'approximation statique, est égale à

$$\delta k = \frac{\rho_w \gamma^2}{\rho_0 \left(\frac{5}{3} - \frac{\rho_w}{\rho_0} \gamma^2 \right)} = 0,0678, \quad (2.77)$$

où $\rho_w = 1,03 \text{ g/cm}^3$ est la densité de l'eau de mer, $\rho_0 = 5,517 \text{ g/cm}^3$ est la densité moyenne de la Terre, $\gamma = 1 + k - h = 0,70$; $\gamma = 1 + k - h = 1,70$, k , h , k , h sont les nombres de Love et les coefficients de charge du second ordre pour un modèle réel de la Terre sans océan.

Le calcul détaillé de δk tenant compte de la répartition réelle des terres et des mers sur la surface de la Terre a été réalisé dans le travail [39]. Il a donné pour résultat :

$$\delta k = 0,0493 \quad (2.78)$$

différant de (2.77) d'un facteur 0,727 très voisin du rapport de surface couverte par les océans, de la surface totale de la Terre

Pour évaluer l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique nous écrirons l'équation de Laplace [6]

$$\dot{v}_\theta - 2\omega v_\varphi \cos\theta + \kappa v_\theta = -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial\theta} (\xi - \bar{\xi}); \quad (2.79a)$$

$$\dot{v}_\varphi + 2\omega v_\theta \cos\theta + \kappa v_\varphi = -\frac{g}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (\xi - \bar{\xi}); \quad (2.79b)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{a \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(h v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(h v_\varphi)}{\partial\varphi} \right\}, \quad (2.79c)$$

où v_θ , v_φ sont les composantes de la vitesse suivant respectivement θ et φ , h - la profondeur de l'océan, κ - le coefficient de friction adopté, ξ - la hauteur de la marée polaire.

$$\bar{\xi} = \frac{\emptyset}{g} = \frac{\varepsilon \omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta \cos(\sigma t - \varphi)}{g} \quad (2.80)$$

est la hauteur statique de la marée polaire, \emptyset est la variation du potentiel des forces centrifuges lors du mouvement chandlerien du pôle.

Les formules (2.79a, b) représentent les équations du mouvement et (2.79c) la condition d'invariabilité du volume de l'eau lors des courants de marées.

Les équations (2.79) doivent être complétées par les conditions aux limites incluses dans le fait que, à la limite F de la terre et de la mer, la composante de la vitesse v normale à F est nulle:

$$v_n|_r = 0. \quad (2.81)$$

Dans le cas des marées diurnes et semi diurnes le problème aux limites (2.79 à 2.81) ne peut être résolu que par l'intégration numérique directe des équations à deux dimensions aux dérivées partielles (2.79) par la méthode des différences finies.

Dans le cas qui nous intéresse $\sigma/\omega \sim 1/400$ les équations générales (2.79) sont sensiblement simplifiées à cause du fait que les accélérations relatives v_θ , v_φ sont plus petites que celles de Coriolis $2\omega v_\theta \cos\theta$, $2\omega v_\varphi \cos\theta$ à peu près de trois ordres.

Le coefficient de friction appliqué⁸ dépend du fait que les courants sont laminaires ou turbulents. Le nombre de Reynolds

$$R = \rho h v / \nu$$

pour des valeurs typiques $v \sim 10^{-5}$ cm/s, $h \sim 10^5$ cm, $\nu = 2 \cdot 10^{-2}$ poise et $\rho = 1$ g/cm³ de l'ordre de 10^2 est voisin des valeurs critiques. C'est pourquoi on peut s'attendre à ce que les courants dans des mêmes régions de l'océan soient laminaires et dans d'autres turbulents.

Dans le premier cas λ ne dépend pas de v et a une valeur de l'ordre de

$$\lambda = \lambda_1 \sim \nu / \rho h^2 \sim 10^{-12} \text{ s}^{-1} \quad (2.82)$$

dans le second λ est proportionnel à v et ne dépend pas de h ; la valeur numérique de λ dans le système CGS est donnée par la formule semi empirique [50, page 300]

$$\lambda = \lambda_2 \sim 2 \cdot 10^{-3} v \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1} \quad (2.83)$$

Ces deux valeurs sont sensiblement moindres

$$\omega = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}.$$

Ainsi le premier et le dernier termes des premiers membres (2.79a, b) sont dans tous les cas de quelques ordres moindres que le second terme décrivant les accélérations de Coriolis. C'est pourquoi il est naturel de commencer par l'analyse des équations (2.79a, b) avec les petits termes abandonnés :

$$\begin{aligned} -2\omega v_\psi \cos \theta &= -\frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi - \bar{\xi}); \\ 2\omega v_\theta \cos \theta &= -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} (\xi - \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Une analyse simple de ces équations a été donnée par Jeffreys [50]. Elle réside dans ce qui suit;

De (2.84) il résulte que

$$|v_\theta, v_\psi| \sim \frac{g}{2\omega} |\xi - \bar{\xi}|. \quad (2.85)$$

Après avoir substitué (2.85) en (2.79c) nous obtiendrons

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| \sim |\sigma \xi| \sim \frac{g h}{\alpha^2 \omega} |(\xi - \bar{\xi})|$$

c'est à dire l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique

$$|\bar{\xi}| = |\xi - \bar{\xi}| \sim \frac{5}{g h} \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha^2 \omega} |\xi| \approx \frac{1}{20} |\xi| \quad (2.86)$$

pour $h = 1 \text{ Km}$. Par cette estimation il s'ensuivrait que l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique est assez faible. Cependant une analyse plus détaillée des équations (2.84), (2.79) montre que cette conclusion n'est pas tout à fait correcte. Nous le démontrerons.

Après avoir exprimé à l'aide de (2.84) V_θ , V_ψ par $\bar{\xi}$ et substitué le résultat en (2.79c) nous obtiendrons

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{g}{2 \omega \alpha^2 \sin \theta} \left\{ - \frac{\partial (h / \cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \psi} + \frac{\partial (h / \cos \theta)}{\partial \psi} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \theta} \right\} \quad (2.87)$$

Il faut noter que dans l'équation (2.87) n'entrent pas les dérivées secondes de la fonction $\bar{\xi}$ suivant θ et ψ . Si dans les formules (2.84) les termes ∇^2 , $\kappa \bar{\nabla}$ ne sont pas rejetés alors l'ordre de cette équation augmente jusqu'au second ordre.

La condition aux limites (2.81) est facile à exprimer par $\bar{\xi}$. En utilisant (2.84) nous obtiendrons

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \ell} \Big|_r = 0, \quad (2.88)$$

où $\delta/\delta \ell$ est la dérivée suivant la direction touchant le contour Γ .

La relation (2.88) montre que la différence $\xi - \bar{\xi}$ sur la ligne littorale doit conserver une valeur constante et peut être fonction uniquement du temps.

Nous examinerons quelques cas particuliers pour lesquels le problème aux limites (2.87 à 2.88) a des solutions analytiques simples.

1. Pour $h = h_0 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) provenant de l'équation (2.87) il vient

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

Puisque sur la ligne littorale $\theta = \pi/2$ la hauteur de la marée statique $\bar{\xi} = 0$, et, des conditions (2.88), (2.80) il résulte que ξ peut être une fonction arbitraire de θ , satisfaisant à la condition unique

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0$$

Nous noterons que contrairement à l'évaluation (2.86) cette solution ne tend pas vers la solution statique même dans le cas limite $\sigma \rightarrow 0$.

2. Pour $h = h_0 \cos^2 \theta$, l'équation (2.87) satisfait également une solution de la forme

$$\xi = \xi_0 \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t - \varphi)$$

où ξ_0 est indépendant de θ, φ, t de la constante. Sous cette forme ξ la différence $\xi - \bar{\xi} = 0$ et la condition aux limites (2.88)

sur la ligne littorale $\theta = \pi/2$ est également satisfaite automatiquement. La substitution de cette expression en (2.87) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\xi_0 \sigma \sin \theta \cos \theta \sin(\sigma t - \varphi) = \\ &= -\frac{g h_0}{2 \omega a^2 \sin \theta} \left(\xi_0 - \frac{\epsilon \omega^2 a^2}{g} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin(\sigma t - \varphi), \end{aligned}$$

d'où

$$\xi_0 \left(\sigma - \frac{g h_0}{2 \omega a^2} \right) = -\frac{h_0 \epsilon \omega}{2}. \quad (2.89)$$

La condition d'annulation du facteur de ξ_0 dans le premier membre de (2.89) détermine la fréquence des oscillations propres

$$\sigma_{\cos} = \frac{g h_0}{2 \omega a^2} \quad (2.90a)$$

Pour $h_0 = 1$ Km cette formule donne

$$T_{\cos} = \frac{2\pi}{\sigma_{\cos}} = 40 \text{ jours} \quad (2.90b)$$

Pour $\sigma = \sigma_{ch} = \omega/430$ découlant de (2.89) il vient

$$\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{\cos} - \sigma_{ch}} \bar{\xi} = 0,1 \bar{\xi},$$

ce qui coïncide à peu près avec (2.86).

Il n'est pas difficile de généraliser cette solution pour le cas d'une dépendance arbitraire de h en fonction de θ . Pour $h = h(\theta)$ le rapport $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ peut être cherché sous la forme

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_0(\theta) \cos(\sigma t - \varphi). \quad (2.91)$$

La substitution de cette expression en (2.87) donne

$$\tilde{\xi}_0(\theta) = - \frac{\tilde{\xi}_0 \sigma \sin \theta \cos \theta}{\sigma + \frac{g}{2\omega a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h}{\cos \theta} \right)}. \quad (2.92)$$

Cette solution satisfait automatiquement aux conditions aux limites (2.88), si on pose

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \theta} \right|_r \rightarrow \infty$$

c'est à dire qu'on considère les rives comme "escarpées".

Pour $\sigma \rightarrow 0$ déterminé par la formule (2.92) le rapport tend vers zéro pour n'importe quelles dépendances $h = h(\theta)$ à l'exclusion du cas examiné en 1 : $h = h_0 \cos \theta$.

Ces exemples montrent que le caractère de dépendance $\tilde{\xi}(\sigma)$ dépend sensiblement de la répartition des profondeurs $h(\theta)$.

3. Enfin, dans le cas d'une répartition arbitraire $h(\theta, \varphi)$ et d'une ligne littorale arbitraire Γ on peut essayer de résoudre l'équation (2.87) par la méthode générale d'intégration des équations linéaires aux dérivés partielles du premier ordre [51]. Après avoir écrit l'équation (2.87) sous la forme

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} + \quad (2.93)$$

$$+ \frac{\varepsilon \omega^2 a^2}{g} \sigma \sin^2 \theta \cos \theta (\cos \sigma t \sin \varphi - \sin \sigma t \sin \varphi) = 0,$$

où

$$\alpha = \alpha(\theta, \varphi) = \frac{g}{2\omega a^2} \frac{h}{\cos \theta}, \quad (2.94)$$

nous chercherons ses solutions stationnaires sous la forme

$$\tilde{\xi} = A(\theta, \varphi) \cos \sigma t + B(\theta, \varphi) \sin \sigma t, \quad (2.95)$$

où $A(\theta, \varphi)$, $B(\theta, \varphi)$ sont des fonctions inconnues de θ, φ .

La substitution de cette expression en (2.93) donne

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial \theta} + C = 0; \quad (2.96a)$$

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial A}{\partial \theta} + D = 0, \quad (2.96b)$$

où

$$C = C(\theta, \varphi) = -\sigma A \sin \theta - \frac{\varepsilon \omega^2 a^2}{g} \sigma \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi, \quad (2.97)$$

$$D = D(\theta, \varphi) = \sigma B \sin \theta + \frac{\varepsilon \omega^2 a^2}{g} \sigma \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi. \quad (2.98)$$

On peut envisager l'équation (2.96a) comme la condition d'orthogonalité des vecteurs de composantes cartésiennes

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}; \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}; -C \right)$$

et

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial \varphi}; \frac{\partial B}{\partial \theta}; -1 \right).$$

Puisque, ensuite,

$$dB = \frac{\partial B}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial B}{\partial \theta} d\theta,$$

le vecteur e_2 est orthogonal également au vecteur de composantes

$$\delta \vec{e}_3 = (d\varphi; d\theta; dB),$$

tangent à la surface $B(\theta, \varphi)$. Ainsi, le vecteur e_1 est perpendiculaire à la normale à la surface $B(\theta, \varphi)$ et par conséquent doit se trouver dans le plan tangent à cette surface. Les courbes déterminées par les équations

$$\frac{d\varphi}{(-\partial \alpha / \partial \theta)} = \frac{d\theta}{\partial \alpha / \partial \varphi} = \frac{dB}{(-C)} \quad (2.99a)$$

appartiennent à la surface cherchée $B = B(\theta, \varphi)$.

Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation (2.96a). Nous obtiendrons de façon tout à fait analogue que les caractéristiques de l'équation (2.96b)

$$\frac{d\varphi}{(-\partial \alpha / \partial \theta)} = \frac{d\theta}{(\partial \alpha / \partial \varphi)} = \frac{dA}{(-D)} \quad (2.96b)$$

appartiennent à la surface $A(\theta, \varphi)$.

L'ensemble des conditions (2.99a, b) donne un système de trois équations indépendantes pour les quatre différentielles $d\varphi, d\theta, dA, dB$ c'est à dire détermine la famille de courbes à un paramètre.

Des deux premières égalités (2.99a), (2.99b) il résulte

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} d\theta = 0, \quad (2.100)$$

c'est à dire que les caractéristiques coïncident avec les isolignes

$$\alpha(\theta, \varphi) = \text{const} \text{ или } \frac{h(\theta, \varphi)}{\cos \theta} = \text{const.} \quad (2.101)$$

En utilisant comme paramètre indépendant la longueur l de la courbe $\alpha = \text{const.}$ il est facile de démontrer que, par la condition (2.100), découle également

$$-\frac{d\varphi}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right)} = \frac{d\theta}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)} = \frac{dl}{a^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right) \sin \theta}, \quad (2.102)$$

où $dl = a \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}$, \vec{n} est la direction de la normale extérieure à la courbe $\alpha = \text{const.}$ De cette façon les équations des caractéristiques (2.99a, b) peuvent être également représentées sous la forme

$$\frac{dB}{C} = \frac{dA}{D} = -\frac{dl}{a^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right) \sin \theta}. \quad (2.103)$$

La théorie des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre enseigne [5] que si le contour sur lequel sont données les conditions aux limites ne constitue pas une caractéristique alors l'ensemble de toutes les caractéristiques se coupant avec Γ et satisfaisant en Γ aux conditions aux limites du problème détermine complètement les surfaces cherchées $A(\theta, \varphi)$ et $B(\theta, \varphi)$. Il n'est pas difficile cependant de constater que dans le cas que nous examinons il y a un accroissement et le contour Γ est une des caractéristiques des équations (2.96).

Par conséquent, puisque sur la ligne littorale Γ la profondeur $h = 0$, il est évident que la ligne littorale satisfait à l'équation (2.101) pour $\text{const} = 0$. A cause de cela les circonstances de la caractéristique Γ' , décrites par les équations

$$\alpha = \text{const} \neq 0,$$

n'ont pas de points communs avec le contour Γ et c'est pourquoi, pour elles, les conditions initiales exigées par (2.88) ne sont pas déterminées.

Pour obtenir des conditions insuffisantes nous utiliserons le fait que A, B sont des fonctions à un indice θ, φ c'est à dire que pour un circuit suivant le contour fermé

$$\oint_{\Gamma'} dA = 0; \quad \oint_{\Gamma'} dB = 0. \quad (2.104)$$

Tenant compte de la forme évidente des fonctions $C(\theta, \varphi), D(\theta, \varphi)$ (2.97) (2.98) nous obtiendrons

$$\begin{aligned} dB|_{r'} &= \frac{\sigma}{a^2} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n} (A + \bar{\xi}_0 \cos\psi); \\ -dA|_{r'} &= \frac{\sigma}{a^2} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n} (B + \bar{\xi}_0 \sin\psi), \end{aligned} \quad (2.105)$$

où
$$\bar{\xi}_0 = \varepsilon \omega^2 a^2 / g \sin\theta \cos\theta.$$

Les équations différentielles (2.105) déterminent les valeurs des fonctions A, B sur le contour Γ' à une constante près. Les conditions (2.104) déterminent ces constantes.

Nous noterons que dans le cas examiné plus haut de "rives escarpées" la dérivée $\delta a / \delta n|_r = 0$ et, conformément à (2.105), $\delta A = \delta B = 0$ sur le contour Γ . C'est pourquoi $A/\Gamma = \text{const}$, $B/\Gamma = \text{const}$, et la condition aux limites (2.88) est automatiquement réalisée.

Puisque σ entre en facteur dans les seconds membres de (2.105) avec des σ suffisamment petits (plus précisément, pour

$$\sigma \ll \frac{a^2 \partial\alpha/\partial n}{l} \sim \frac{300 h a \omega}{eL} \quad (2.106)$$

où l est la longueur du contour Γ' et L est l'échelle caractéristique des distances sur lesquelles la profondeur de l'océan présente une variation importante. Les fonctions $A(\theta, \dots)$, $B(\theta, \dots)$ gardent sur le contour Γ des valeurs presque constantes et sont par conséquent fonctions de α uniquement :

$$A = A(\alpha) \quad B = B(\alpha) \quad (2.107)$$

Tenant compte de cette circonstance il n'est pas difficile de trouver les valeurs numériques approximatives de A, B. Après avoir substitué (2.105) en (2.104) et considérant les valeurs A, B comme constantes sur le contour Γ ; nous obtiendrons

$$\begin{aligned} A|_{r'} &= - \frac{\oint_{r'} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n} \bar{\xi}_0 \cos\psi}{\oint_{r'} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n}}; \\ B|_{r'} &= - \frac{\oint_{r'} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n} \bar{\xi}_0 \sin\psi}{\oint_{r'} \frac{de}{\partial\alpha/\partial n}}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Nous noterons que pour $\sigma = \sigma_{ch}$, $h \sim 3 \text{ Km}$ et $l \sim L \sim a$ le rapport $300 h\omega a / \ell L \sigma \sim 50$ et par conséquent, la condition (2.106) et le rapport (2.108) se réalisent avec assez de précision.

Par les formules (2.108) on constate que dans le cas général de répartition arbitraire des profondeurs $h = h(\theta, \varphi)$

$$A \sim B \sim \int_0^{2\pi} \dots \quad (2.109)$$

c'est à dire qu'en l'absence de friction l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique est du même ordre de grandeur que la hauteur statique de la marée $\bar{\xi}$. Le cas particulier examiné précédemment $h = h(\theta)$ représente une exception de la règle générale puisque pour son contour Γ' il se détermine par la condition $\theta = \text{const.}$ et les numérateurs des seconds membres (2.108) se ramènent aux intégrales

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi; \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi,$$

s'annulant.

L'estimation (2.86) est obtenue sans tenir compte de l'accroissement des équations (2.78) et des conditions (2.104) et c'est pourquoi dans le cas général $h = h(\theta, \varphi)$ ce n'est pas correct.

La cause physique du grand écart de la hauteur de la marée polaire par rapport à la surface équipotentielle réside apparemment dans le fait que pour $\sigma \ll \omega$ et des valeurs finales à cause de l'action déterminée des forces de Coriolis, le vecteur vitesse des courants de marées \vec{v} est dirigé perpendiculairement au vecteur $\text{grad} \bar{\xi}$. Ensuite des tourbillons apparaissent dans l'océan (de façon analogue aux cyclones qui se forment dans l'atmosphère). En l'absence de friction le temps d'amortissement de ces courants est infiniment grand c'est pourquoi la marée n'est pas statique même dans le cas limite $\sigma \rightarrow 0$. De ce point de vue le cas $h = h(\theta)$ est particulier parce que pour $\partial h / \partial \varphi = 0$ il n'entre dans l'équation (2.87) que la composante φ du vecteur $\text{grad} \bar{\xi}$. Puisque les forces de Coriolis n'exercent pas d'influence sur les courants de direction ouest-est il ne se forme pas de tourbillons dans ce cas.

Examinons les conditions pour lesquelles l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique est faible. Pour cela nous tournerons vers les équations générales (2.79) qui tiennent compte des petits effets de la friction appliquée et des accélérations relatives. Pour exprimer les composantes v_θ, v_φ par ξ , nous différencions (2.79a,b) par rapport au temps et nous tiendrons compte de ce que $\ddot{v}_\theta = -\sigma^2 v_\theta$; $\ddot{v}_\varphi = \sigma^2 v_\varphi$. Nous obtenons, par suite :

$$\begin{aligned} -\sigma^2 v_\theta - 2\omega \dot{v}_\varphi \cos \theta + \dot{v}_\theta \dot{\xi} &= -\frac{g}{a} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \theta} \\ -\sigma^2 v_\varphi + 2\omega \dot{v}_\theta \cos \theta + \dot{v}_\varphi \dot{\xi} &= -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Après avoir éliminé du système des quatre équations (2.79a, b) (2.110) les valeurs \dot{v}_θ , \dot{v}_φ et tenant compte que $\alpha \ll \omega$, $\sigma \ll \omega$ nous trouverons

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1$$

où \bar{v}_0 se détermine par la formule (2.84) et

$$\bar{v}_1 = -\frac{g}{4\omega^2 \cos^2 \theta} [\alpha \text{grad} \tilde{\xi} + \text{grad} \dot{\tilde{\xi}}]$$

est la petite correction. Après avoir substitué cette expression en (2.79c) nous obtiendrons

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} = L_0(\tilde{\xi}) + L_1(\tilde{\xi}) \quad (2.111)$$

où l'opérateur

$$L_0(\tilde{\xi}) = \frac{-g}{2\omega a^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(h/\cos \theta)}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} - \frac{\partial(h/\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} \right\}$$

correspond au second membre de (2.87) et

$$L_1(\tilde{\xi}) = -\text{div}(h \bar{v}_1(\tilde{\xi})) = \frac{g}{4\omega^2} \left\{ \frac{h}{\cos^2 \theta} (\alpha \Delta \tilde{\xi} + \Delta \dot{\tilde{\xi}}) + (\nabla \tilde{\xi}, \nabla \left(\frac{h \alpha}{\cos^2 \theta} \right)) + (\nabla \dot{\tilde{\xi}}, \nabla (h/\cos^2 \theta)) \right\} \quad (2.112)$$

Tenant compte de (2.107) on peut simplifier la dernière expression. En posant $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\alpha)$ nous obtiendrons

$$\nabla \tilde{\xi} = \frac{d\tilde{\xi}}{d\alpha} \nabla \alpha; \quad \Delta \tilde{\xi} = \frac{d^2 \tilde{\xi}}{d\alpha^2} (\nabla \alpha)^2 + \frac{d\tilde{\xi}}{d\alpha} \Delta \alpha \quad (2.113)$$

et

$$L_1(\tilde{\xi}) = \frac{\alpha a^2}{2\omega \cos \theta} \left[(\nabla \alpha)^2 \left(\alpha \frac{d^2 \tilde{\xi}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \dot{\tilde{\xi}}}{d\alpha^2} \right) + \Delta \alpha \left(\alpha \frac{d\tilde{\xi}}{d\alpha} + \frac{d\dot{\tilde{\xi}}}{d\alpha} \right) \right] + \frac{a^2}{2\omega} \frac{d\tilde{\xi}}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\alpha \alpha}{\cos \theta} \right) + \frac{a^2}{2\omega} \frac{d\dot{\tilde{\xi}}}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\alpha}{\cos \theta} \right) \quad (2.114)$$

Tenant compte de $L_1(\tilde{\xi})$ les équations des caractéristiques (2.103) peuvent être représentées sous la forme

$$dA = - \frac{d\ell}{\alpha(\partial\alpha/\partial n)} (\omega + L_1^c);$$

$$dB = - \frac{d\ell}{\alpha(\partial\alpha/\partial n)} (C + L_1^s),$$

où L_1^c , L_1^s , se déterminent par la formule

$$L_1 = L_1^c \cos \sigma t + L_1^s \sin \sigma t$$

En conséquence la nécessité de l'annulation des intégrales δA , δB (2.104) se ramène aux conditions

$$\oint_{\Gamma'} \frac{d\ell}{\alpha \partial\alpha/\partial n} (\omega + L_1^c) = \oint_{\Gamma'} \frac{d\ell}{\alpha \partial\alpha/\partial n} (C + L_1^s) = 0. \quad (2.115)$$

Puisque le paramètre α est constant sur le contour Γ' , les valeurs de la fonction $\vec{z} = A \cos \sigma t + B \sin \sigma t$ intervenant en (2.114), de ses dérivées par rapport à α sont également constantes sur Γ' , on peut, après la substitution (2.114) en (2.115), les sortir du signe intégrale.

L'intégration de (2.115) suivant le contour Γ' nous permet d'obtenir le système d'équations différentielles ordinaires par rapport à $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ sous la forme :

$$\alpha_1(\alpha) \frac{d^2 A(\alpha)}{d\alpha^2} + \alpha_2(\alpha) \frac{d^2 B(\alpha)}{d\alpha^2} + \alpha_3(\alpha) \frac{dA}{d\alpha} + \alpha_4(\alpha) \frac{dB}{d\alpha} = \beta_1(\alpha) \quad (2.116)$$

$$\alpha_1(\alpha) \frac{d^2 B(\alpha)}{d\alpha^2} - \alpha_2(\alpha) \frac{d^2 A(\alpha)}{d\alpha^2} + \alpha_3(\alpha) \frac{dB}{d\alpha} - \alpha_4(\alpha) \frac{dA}{d\alpha} = \beta_2(\alpha)$$

où

$$\alpha_1(\alpha) = \alpha \oint_{\Gamma'} \frac{\alpha \partial\alpha/\partial n}{\cos \theta} d\ell; \quad (2.117)$$

$$\alpha_2(\alpha) = \sigma \alpha \oint_{\Gamma'} \frac{\partial\alpha/\partial n}{\cos \theta} d\ell;$$

$$\alpha_3(\alpha) = \alpha \oint_{\Gamma'} \frac{\alpha \Delta \alpha d\ell}{\cos \theta \partial\alpha/\partial n} + \oint_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\alpha}{\cos \theta} \right) d\ell;$$

$$\alpha_4(\alpha) = \sigma \alpha \oint_{\Gamma'} \frac{\Delta \alpha}{\cos \theta \partial\alpha/\partial n} d\ell + \sigma \oint_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\alpha}{\cos \theta} \right) d\ell;$$

$$\beta_1(\alpha) = \frac{2\omega}{\alpha^2} \oint_{\Gamma'} \frac{\partial d\ell}{\partial\alpha/\partial n \sin \theta};$$

$$\beta_2(\alpha) = \frac{2C}{\alpha^2} \oint_{\Gamma'} \frac{C d\ell}{\partial\alpha/\partial n \sin \theta}.$$

Le système d'équations différentielles ordinaires (2.116) détermine complètement les dépendances cherchées $A(\alpha)$, $B(\alpha)$. Son intégration dans le cas de courants laminaires (pour le coefficient \mathcal{K} , ne dépendant que de θ, φ et ne dépendant pas de \vec{v}) n'est pas difficile à effectuer numériquement.

Pour évaluer les ordres de grandeur de $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ il suffit de se limiter à l'analyse de qualité des équations (2.115). Dans le cas général d'une répartition arbitraire des profondeurs

$$\oint_{r'} \frac{\mathcal{D} d\ell}{\partial \alpha / \partial r \sin \theta} \neq 0; \quad \oint_{r'} \frac{C d\ell}{\partial \alpha / \partial r \sin \theta} \neq 0$$

et, par la relation (2.115)

$$|L_1^c(\tilde{\xi})| \sim |D|; \quad |L_1^s(\tilde{\xi})| \sim |C|.$$

En utilisant la forme évidente de L_1 , D , C (2.97)(2.98)(2.114) on peut écrire cette relation également sous la forme

$$\frac{\tilde{\xi}}{\xi} \sim \frac{\sigma}{\sigma + \frac{\sigma + \alpha}{L^2} - \frac{gh}{\omega^2}}. \quad (2.119)$$

Cette formule montre que, dans le cas général d'un océan avec répartition arbitraire des profondeurs, $\tilde{\xi}/\xi \ll 1$ uniquement lors de la présence d'un coefficient assez grand de la friction appliquée. En prenant pour la profondeur moyenne de l'océan $h \sim 3$ Km, $a\omega^2/g = 1/300$, nous obtiendrons

$$\frac{\tilde{\xi}}{\xi} \ll 1 \text{ pour } \alpha \gg \alpha_0 \sim \frac{\sigma L^2 \omega^2}{gh} \sim \frac{\sigma a^2 \omega^2}{gh} \sim \frac{a\sigma}{300h} \sim 10^{-6}.$$

Ainsi la marée polaire dans l'océan réel peut se décrire par la théorie statique uniquement pour $\mathcal{K} \gg \mathcal{K}_0$. En vertu de (2.82), (2.83) il peut y avoir dans la réalité un rapport inverse $\mathcal{K} \ll \mathcal{K}_0$. Il s'ensuit que la friction appliquée n'exerce pas d'influence importante sur la hauteur de la marée polaire.

Conclusions

En conclusion nous formulerons brièvement les résultats principaux de ce chapitre.

1. Pour calculer les nombres de Love avec une précision de plus de 1%, la théorie des marées statiques décrite dans le chapitre I doit être précisée par la prise en considération de l'effet des forces d'inertie sur l'enveloppe et le noyau.

La marée dynamique dans l'enveloppe peut être calculée par la méthode des perturbations suivant un petit paramètre de l'ordre de $(\sigma/\sigma_0)^2$, où σ_0 est la fréquence de l'oscillation propre sphéroïdale ${}_0S_2$, le petit paramètre correspondant dans le noyau liquide est de l'ordre du rapport de la force centrifuge à la force de pesanteur à la frontière noyau-enveloppe. Malgré la substitution de Love (1.66) les équations des oscillations gravitationnelles élastiques de la sphère en rotation régulière ne se ramènent pas à des équations ordinaires. Toutefois pour une rotation assez lente du premier ordre les théories des perturbations pour des accroissements de δu_r et δR ont, à la surface, la même dépendance des variables angulaires et la même phase que la solution (\bar{u}_r^0, R_0) statique non perturbée.

Ainsi l'influence des forces d'inertie sur les marées semi diurnes peut être calculée par l'introduction de petites corrections aux nombres de Love. Dans le cas des marées diurnes, les forces d'inertie jouent un rôle important lié au mouvement de nutation de l'enveloppe.

Cependant dans ce cas le caractère de la dépendance de δu_r et δR en fonction des variables angulaires et du temps coïncide avec la forme de dépendance de u_r^0 et R_0^0 en fonction de θ, φ, t . Les valeurs numériques des corrections aux nombres de Love pour les ondes bimensuelles, semi diurnes et diurnes et du modèle réel de la Terre No 508 de Gilbert et Dziewonski sont données dans la table (2.45).

2. On a évalué l'effet dynamique du noyau liquide pour les ondes zonales, semi diurnes et à longue période. On a montré que dans le cas d'un noyau homogène non compressible, les équations des marées dynamiques dans le noyau ont des solutions précises (2.54) - (2.56). Pour une coïncidence de la période de marée avec le demi jour sidéral, l'effet dynamique d'un noyau homogène incompressible est exactement nul à cause de la compensation des effets des accélérations relatives et de Coriolis.

Pour les ondes de marées principales, semi diurnes et zonales M_2, S_2, M_f , l'effet dynamique du noyau n'atteint pas plus de 5% de l'effet dynamique de l'enveloppe et par conséquent ne joue pas un rôle important.

3. Les forces d'inertie exercent une action non seulement sur la marée dans l'enveloppe élastique et le noyau liquide mais directement sur l'instrument. L'effet de l'action directe du mouvement de précession-nutation de la Terre sur le gravimètre et le

clinomètre dépasse sensiblement les erreurs des observations actuelles et c'est pourquoi il faut en tenir compte.

4. On a examiné la théorie dynamique de la marée polaire dans l'océan réel.

On a montré que l'écart de la marée polaire par rapport à la valeur statique ξ dépend sensiblement du caractère de répartition des profondeurs (θ, φ) , de la forme de la ligne littorale Γ et de la valeur du coefficient de friction appliquée \mathcal{K} . Ainsi, dans le cas le plus simple à symétrie axiale $h = h(\theta)$ et du contour Γ décrit par les conditions $\theta = \text{const.}$, l'écart de la marée polaire par rapport à la marée statique est très faible; dans le cas plus général $h = h(\theta, \varphi)$ et $\mathcal{K} = 0$ la fonction $\xi(\theta, \varphi, t)$ est différente de zéro même dans le cas limite où la fréquence $\sigma \rightarrow 0$; l'exigence $\mathcal{K} \gg \mathcal{K}_0$ où \mathcal{K}_0 est déterminé par la condition (2.119) est la condition nécessaire de petitesse dans le cas axialement non symétrique.

Les équations différentielles ordinaires (2.105), (2.116) déterminent $\xi(\theta, \varphi, t)$ aussi bien pour $\mathcal{K} = 0$ que pour $\mathcal{K} \neq 0$. Leur analyse de qualité montre que la friction appliquée n'exerce pas une influence importante sur la hauteur de la marée polaire; les isolignes déterminées par la formule (2.95) des amplitudes $A(\theta, \varphi)$ et $B(\theta, \varphi)$ coïncident à peu près avec les isolignes $h/\cos \theta = \text{const.}$; le calcul numérique de $A(\theta, \varphi)$ et $B(\theta, \varphi)$ dans le cas réel $\sigma = \sigma_{ch} = \omega/430$, $\mathcal{K} \ll \mathcal{K}_0$ correspond au calcul des intégrales (2.108).



