

MAREES TERRESTRES  
BULLETIN D'INFORMATIONS

103

15 JANVIER 1989

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

*Editeur Prof. Paul MELCHIOR*  
*Observatoire royal de Belgique*  
*Avenue Circulaire 3*  
*1180 Bruxelles*



TABLE DES MATIERES

	p.
S.M. MOLODENSKII (Traduction) Allure asymptotique des solutions des équations des marées de Laplace à basses fréquences.	7196
A.D. KRIVOROS, V.G. GOLOUBITSKII, P.S. MATVEYEV, E.A. SLAVINSKAIA (Traduction) Résultats de l'analyse harmonique des observations clinométriques à la station de marée terrestre "Kirovo".	7220
M. DELCOURT-HONOREZ Determination of the in situ parameters from the observed tidal oscillations in the well-aquifer systems at the Royal Observatory of Belgium.	7228
A.M. POUGIN (Traduction) Approximation stable du signal polyharmonique de la marée terrestre.	7256
A.P. VENEDIKOV A model for the study of the effects of the air pressure on the earth tide data.	7263
A.Y. TOUGARINOV et S.S. SARDAROV (Traduction) Variations dans les flux profonds des gaz radiogènes comme conséquence des déformations élastiques de l'écorce terrestre.	7274



Allure asymptotique des solutions des équations des marées de Laplace à basses fréquences.

S.M. Molodenskii

Izvestia de l'Académie des Sciences d'URSS  
Physique de la Terre n° 1 - Moscou 1988 pp 3- 19, 1988

Résumé

On a examiné l'allure asymptotique des solutions des équations de marées de Laplace aux basses fréquences. Le problème est résolu par la méthode des perturbations pour les petits paramètres égaux aux rapports de la fréquence de marée et du coefficient de frottement à la vitesse angulaire de rotation de la Terre. On a montré que les solutions ont une instabilité qui apparaît dans le fait que les valeurs des fonctions entrant dans l'approximation zéro ne se déterminent pas par les équations de l'approximation zéro à une décimale, mais dépendent des termes de premier ordre. Etant donné cette instabilité, les méthodes d'intégration numérique directes sont inefficaces. On propose une autre méthode de solution du problème basée sur le remplacement du système initial des équations aux dérivées partielles par des équations différentielles ordinaires qui ont une solution stable. On a fait une analyse qualitative des équations obtenues. On a montré en particulier que, dans le cas d'un océan de profondeur constante couvrant toute la Terre, la solution coïncide avec la solution bien connue de Lamb. On a examiné l'influence de la forme du bassin, du relief du fond et du frottement sur l'allure asymptotique des solutions. L'écart de la surface de l'océan par rapport à la surface de niveau a une influence importante sur la valeur de la période de Chandler et sur les amplitudes des variations de la vitesse de rotation de la Terre dues aux marées. Il faut en tenir compte lors de l'élaboration de modèles rhéologiques du manteau aux basses fréquences.

\*

\*

\*

Ces dernières années, le problème de l'allure asymptotique des solutions des équations des marées de Laplace commença à attirer l'attention en relation avec le problème de la détermination des propriétés rhéologiques du manteau de la Terre aux basses fréquences [1 à 6]. Comme on l'a montré en [7 à 10] l'inélasticité du manteau conduit à un allongement important (dépassant sensiblement les erreurs d'observations) de la période de Chandler. C'est pourquoi la comparaison de la période observée à sa valeur théorique pour un modèle de Terre idéalement élastique permet d'identifier les effets du manteau inélastique et de déterminer ainsi la valeur du facteur de qualité du manteau  $Q_u$  pour les oscillations ayant la période de Chandler,  $T_1 = 1,2$  an.

On a noté en [11] que la précision actuelle des mesures des coordonnées et des paramètres d'orbite du satellite LAGEOS permet de déterminer les variations de la vitesse de rotation de la Terre dues aux marées et la valeur du nombre de Love  $k$  pour des oscillations ayant une période encore plus longue  $T_2 = 18,6$  ans. La comparaison des valeurs observées et théoriques du nombre de Love peut permettre de trouver le paramètre  $Q_\mu$  pour les oscillations de période  $T_2$ .

Pour obtenir des estimations fiables des effets d'inélasticité du manteau il faudra un calcul précis de la marée océanique dont l'influence, aussi bien sur la valeur de la période de Chandler que sur les amplitudes des variations de la vitesse de rotation dues aux marées, est très importante. En [1 à 6] on a effectué aussi bien des estimations analytiques de la valeur de la marée polaire pour les modèles les plus simples (modèle d'océan de profondeur constante sur une Terre absolument rigide [1, 2, 6]) que des calculs numériques directs pour des modèles d'océan plus complexes [6].

Il convient de noter que le calcul numérique direct des marées à longue période représente une tâche sensiblement plus complexe que les mêmes calculs dans les gammes diurne et semi diurne. Ceci est lié aux circonstances suivantes : 1) étant donné les faibles amplitudes des marées à longue période on n'a pratiquement pas la possibilité de corriger les résultats des calculs sur base d'une comparaison avec les observations; 2) comme il sera montré plus loin, les solutions des équations des marées de Laplace aux basses fréquences dépendent de termes de l'ordre du rapport de la fréquence de l'oscillation  $\sigma$  à la vitesse angulaire de la rotation de la Terre. A la limite  $\sigma/\omega \rightarrow 0$  les solutions deviennent instables c'est pourquoi des erreurs, même très petites, dans l'intégration numérique ont une influence importante sur les résultats conclus.

On a démontré en [4] que la marée polaire peut être décrite par le système final des équations différentielles ordinaires dont la solution dépend de la répartition des profondeurs et de la forme des côtes. Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de frottement et de répartition axialement-symétrique des profondeurs, l'inclinaison de la surface de l'océan par rapport à la surface équipotentielle  $\xi$  tend vers zéro; pour les modèles réels, axialement non symétriques de l'océan, en général  $\xi \neq 0$ , même dans le cas limite  $\sigma/\omega \rightarrow 0$ .

Dans le présent travail nous établissons rigoureusement les équations différentielles déterminant aussi bien les marées de première espèce que de seconde espèce (classification de Laplace) aux basses fréquences. Le problème est résolu par la méthode des perturbations pour de petits paramètres égaux aux rapports de la fréquence de la marée et du coefficient de frottement à la vitesse angulaire de rotation de la Terre. On a effectué une analyse qualitative et quantitative des équations obtenues. On a démontré en particulier que dans le cas d'un océan de profondeur constante couvrant toute la Terre, la solution de ces équations

correspond à la solution bien connue de Lamb [12, p.429]. On a examiné l'influence de la forme du bassin, du relief du fond et du frottement sur l'allure asymptotique des solutions. On a montré que l'écart de la surface de l'océan par rapport à la surface de niveau exerce une influence importante sur la valeur de la période de Chandler et sur les amplitudes des variations de la vitesse de rotation de la Terre dues aux marées. Il est nécessaire d'en tenir compte lors de la construction de modèles rhéologiques de la Terre aux basses fréquences d'après les données astrométriques et obtenues par satellites.

### 1. Equations de départ

Nous exprimerons les équations de marées de Laplace [12.p.418] sous la forme

$$\dot{v}_\theta - 2\omega v_\varphi \cos \theta - F_\theta = -\frac{g}{a} \frac{\partial (\xi - \bar{\xi})}{\partial \theta}; \quad (1')$$

$$\dot{v}_\varphi + 2\omega v_\theta \cos \theta - F_\varphi = -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial (\xi - \bar{\xi})}{\partial \varphi}; \quad (1'')$$

$$\dot{\xi} = -\text{div}_2 (vh), \quad (1''')$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  sont respectivement la colatitude et la longitude,  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$ ,  $F_\theta$ ,  $F_\varphi$  sont les composantes en  $\theta$ ,  $\varphi$  de la vitesse des courants de marées et des forces de frottement rapportées à la masse unitaire; la différenciation par rapport au temps est indiquée par un point;  $a$  est le rayon de la Terre;  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre;  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation diurne de la Terre;  $h = h(\theta, \varphi)$  la profondeur de l'océan,  $\xi$  est la hauteur de la marée,

$$\bar{\xi} = \Phi / g \quad (2)$$

est la hauteur statique de la marée,  $\Phi$  est le potentiel générateur de marée :

$$\Phi = \Phi_0 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (3')$$

dans le cas des marées luni solaires à longue période [12] et

$$\Phi = \Phi_0 \sin \theta \cos \theta \cos (\sigma t - \varphi) \quad (3'')$$

dans le cas de la marée polaire (ou des marées de deuxième espèce).

Dans les formules (3'), (3'')  $\Phi_0$  ne dépendant pas de  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $t$  constante,  $t$  est le temps,  $\sigma$  est la fréquence angulaire de la marée.

Dans (1''') la divergence à deux dimensions du vecteur  $\bar{v}h = (v_{\theta}h, v_{\varphi}h)$  exprimée en coordonnées sphériques est :

$$\operatorname{div}_2(vh) = \frac{1}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (hv_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hv_{\varphi})}{\partial \varphi} \right\}. \quad (4)$$

Les équations (1'), (1'') représentent les composantes suivant  $\theta$  et  $\varphi$  des équations du mouvement et (1''') est la condition d'incompressibilité (invariabilité du volume de l'élément liquide vis à vis des courants de marées).

Comme nous le montrerons dans le paragraphe 6 les marées polaires et à longue période peuvent être considérées comme laminaires. Dans ce cas les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse

$$F_{\theta} = -\kappa v_{\theta}; \quad F_{\varphi} = -\kappa v_{\varphi}. \quad (5')$$

où  $\kappa$  est le coefficient de frottement dont la valeur numérique, comme cela sera montré dans le paragraphe 6, est de l'ordre de

$$\kappa \sim 10^{-8} \text{ s}^{-1} \quad (5'')$$

Les équations (1) doivent être complétées par les conditions aux limites exprimant qu'à la limite  $r_0$  du littoral et de la mer, la composante de la vitesse  $v$  normale à  $r_0$  est nulle :

$$v_n |_{r_0} = 0 \quad (6)$$

Il est facile de ramener le système (1') - (1''') à une équation scalaire par rapport à la hauteur de la marée. Pour cela nous exprimerons à l'aide de (1'), (1'')  $v_{\theta}$  et  $v_{\varphi}$

$$\text{par } \tilde{\zeta} = \zeta - \bar{\zeta}$$

Après avoir écrit  $v_{\theta}$  et  $v_{\varphi}$  sous forme complexe  $v_{\theta} \sim \exp(i\sigma t)$ ,  $v_{\varphi} \sim \exp(i\sigma t)$  et après avoir remplacé  $v_{\theta}$ ,  $v_{\varphi}$  respectivement par  $i\sigma v_{\theta}$  et  $i\sigma v_{\varphi}$  nous obtiendrons

$$v_{\varphi} = \frac{g}{a} \frac{2\omega \cos \theta \partial \tilde{\zeta} / \partial \theta - (i\sigma + \kappa / \sin \theta) \partial \tilde{\zeta} / \partial \varphi}{4\omega^2 \cos^2 \theta + (i\sigma + \kappa)^2}; \quad (7)$$

$$v_{\theta} = -\frac{g}{a} \frac{(2\omega \cos \theta / \sin \theta) \partial \tilde{\zeta} / \partial \varphi + (i\sigma + \kappa) \partial \tilde{\zeta} / \partial \theta}{4\omega^2 \cos^2 \theta + (i\sigma + \kappa)^2}$$

La substitution de ces expressions en (1''') donne une équation aux dérivées partielles du second ordre par rapport à  $\tilde{\zeta}(\theta, \varphi)$  équivalente au système (1).

La valeur déterminée (5'') pour  $\alpha$  est de quatre ordres plus petite que la vitesse angulaire de rotation  $\omega = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; le rapport  $\sigma/\omega$  pour les marées polaires et de 19 ans est respectivement égal à  $2 \cdot 10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . C'est pourquoi les solutions des équations (1) peuvent être trouvées avec les conditions aux limites (6) sous forme d'une série de puissances des petits paramètres  $\sigma/\omega$ ,  $\alpha/\omega$ .

Il semblerait qu'avec de si faibles valeurs de ces paramètres, les termes qui les contiennent seront écartés. Cependant il n'en est pas ainsi en réalité. Lorsque  $\sigma = \alpha = 0$  l'ordre des équations (1) diminue du second au premier ordre avec de petits coefficients pour les dérivées d'ordre élevé.

La théorie générale des équations différentielles enseigne que les solutions de ces systèmes dépendent sensiblement des valeurs des petits paramètres en ce qu'elles présenteront une instabilité. On montrera plus loin que pour  $\sigma = \alpha = 0$  les solutions des équations ne sont pas déterminées d'une façon unique. Si les solutions sont représentées sous forme d'une série de puissances des petits paramètres  $\sigma/\omega$ ,  $\alpha/\omega$  et si on ne garde ensuite que les termes linéaires les équations aux dérivées partielles (1) peuvent alors être ramenées à des équations ordinaires ayant une solution unique et ne subissant pas d'instabilité. Etant donné le caractère instable des solutions des équations (1), les méthodes d'intégration numérique directe ne sont pas efficaces alors que l'intégration des systèmes d'équations ordinaires ne présente pas de difficultés de calcul essentielles.

## 2. Représentation des solutions par décompositions suivant $\sigma/\omega$ , $\alpha/\omega$ .

Après avoir décomposé (7) en puissances de  $\sigma/\omega$ ,  $\alpha/\omega$  et en ne retenant ensuite que les termes linéaires nous aurons

$$v = v^{(0)} + v^{(1)}, \quad (8)$$

$$\text{où} \quad v_{\varphi}^{(0)} = \frac{g}{2a\omega \cos \theta} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \theta}; \quad (9')$$

$$v_{\theta}^{(0)} = -\frac{g}{2a\omega \cos \theta \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \varphi} \quad (9'')$$

sont les termes d'ordre zéro, et

$$v^{(1)} = -\frac{g}{4\omega^2 \cos^2 \theta} (\alpha + i\sigma) \nabla_{\tilde{\zeta}}^2 \quad (10)$$

sont les termes du premier ordre.

La substitution de ces valeurs en (1''') donne

$$L_0(\tilde{\xi}) + L_1(\tilde{\xi}) = i\sigma\tilde{\xi}, \quad (11)$$

où

$$L_0(\tilde{\xi}) = -\operatorname{div}_2(hv^{(0)}(\tilde{\xi})) = \frac{g}{2\omega a^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(h/\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial(h/\cos \theta)}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} \right); \quad (12)$$

$$L_1(\tilde{\xi}) = -i\sigma\tilde{\xi} - \operatorname{div}_2(hv^{(1)}(\tilde{\xi})) = -i\sigma\tilde{\xi} + \frac{g}{4\omega^2} \left[ \frac{h(\kappa+i\sigma)}{\cos^2 \theta} \Delta \tilde{\xi} + \left( \nabla \tilde{\xi}, \nabla \left( \frac{h(\kappa+i\sigma)}{\cos^2 \theta} \right) \right) \right]. \quad (13)$$

Le problème aux limites (11), (6) est une équation non homogène aux dérivées partielles du second ordre avec des conditions aux limites homogènes. La formule (13) montre que pour  $\sigma = 0$  et  $\kappa = 0$  l'opérateur  $L_1(\tilde{\xi}) = 0$  et l'ordre de l'équation (11) diminue du second au premier ordre. En outre, le second membre de (11) a un petit facteur  $\sigma$ . Si on le prend égal à zéro on obtiendra une équation homogène avec des conditions aux limites homogènes dont la solution n'est pas déterminée d'une façon unique. Puisqu'on ne connaissait précédemment rien sur l'allure asymptotique du rapport  $\tilde{\xi}/\xi$  aux basses fréquences, le second terme de (11) ne peut être généralement rejeté même pour  $\sigma \rightarrow 0$ . C'est pourquoi il est normal de commencer par l'analyse de l'équation (11) dans l'approximation  $L_1(\tilde{\xi}) = 0$  en considérant le facteur  $\sigma$  entrant dans le second membre (11) comme petit mais non nul.

### 3. Approximation $L_1(\tilde{\xi}) = 0$

Dans cette approximation (11) passe dans l'équation non homogène du premier ordre

$$L_0(\tilde{\xi}) = i\sigma\tilde{\xi} \quad (14)$$

L'équation homogène correspondante (14) se ramène à la condition

$$L_0(\tilde{\xi}) = 0 \quad (15')$$

ou

$$[\nabla(h/\cos \theta), \nabla \tilde{\xi}] = 0. \quad (15'')$$

La relation (15'') montre qu'en l'absence de forces extérieures génératrices de marées et pour  $\sigma = \kappa = 0$  les vecteurs  $\nabla \tilde{\xi}$  et  $\nabla(h/\cos \theta)$  sont colinéaires c'est à dire que les isolignes  $\tilde{\xi} = \text{constante}$  coïncident avec les isolignes  $h/\cos \theta = \text{constante}$ .

Pour  $\sigma = \kappa = 0$  les relations entre  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$  et  $\tilde{\xi}$  sont relatives aux formules (9) qui montrent que le vecteur  $v = (v_\theta, v_\varphi)$  est perpendiculaire à  $\nabla \tilde{\xi}$  et par conséquent les isolignes  $\tilde{\xi} = \text{constante}$  coïncident avec les lignes de courant. C'est pourquoi il résulte également de la relation (15b)

$$(v, \nabla(h/\cos \theta)) = 0, \quad (16)$$

c'est à dire que, pour  $\sigma = \kappa = 0$ , les lignes de courant coïncident avec les isolignes  $h/\cos \theta = \text{constante}$ .

Nous noterons que la relation (16) peut également être obtenue de la façon suivante. En écrivant l'opérateur rot en coordonnées sphériques et calculant ensuite la composante radiale du rotationnel à partir des premier et second membres des équations du mouvement (1'), (1''), nous aurons pour  $\dot{v}_\theta = \dot{v}_\varphi = F_\theta = F_\varphi = 0$  :

$$\frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta \cos \theta) \right) = \text{div}_2 (v \cos \theta) = \cos \theta \text{div}_2 v + (v, \nabla \cos \theta) = 0. \quad (17')$$

D'autre part, pour  $\sigma = 0$  et  $\zeta = 0$  il découle de la condition d'incompressibilité (1''') :

$$\text{div}_2 (vh) = h \text{div}_2 v + (v, \nabla h) = 0. \quad (17'')$$

Après avoir éliminé de ces deux relations  $\text{div}_2 v$ , nous arrivons de nouveau à (16).

La condition aux limites (6) est facile à exprimer par  $\zeta$ . Les vecteurs  $v$  et  $\nabla \zeta$  étant perpendiculaires dans l'approximation zéro, il résulte de la formule (6) :

$$\zeta|_{r_0} = \text{const.} \quad (18)$$

Il est évident que la solution générale de l'équation (15'') est

$$\zeta = f(h/\cos \theta), \quad (19)$$

où  $f$  est une fonction arbitraire. Puisque sur la ligne côtière  $r_0$  la profondeur  $h = 0$ , (18) résulte automatiquement de la condition (19).

Ainsi l'équation homogène (15) a un grand nombre de solutions de la forme (19), chacune de celles-ci satisfait automatiquement les conditions aux limites.

Les solutions de l'équation non homogène (14) peuvent être trouvées par la méthode générale d'intégration des équations linéaires et quasi linéaires du premier ordre (par la méthode des caractéristiques de Koch [13]). Tenant compte de la forme évidente de l'opérateur  $L_0(\zeta)$  (12), l'équation (14) peut être représentée comme suit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - i\sigma \sin \theta \zeta = 0. \quad (20)$$

où

$$\alpha = \frac{g}{2\omega a^2} \frac{h}{\cos \theta}. \quad (21)$$

On peut considérer le rapport (20) comme la condition d'orthogonalité des vecteurs en coordonnées cartésiennes

$$\text{et } e_1 = \left( \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta}, -1 \right) \quad e_2 = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}, -\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}, i \sigma \sin \theta \right).$$

Puisque

$$d\tilde{\xi} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} d\theta,$$

le vecteur  $e_1$  est également orthogonal au vecteur

$$e_3 = (d\varphi, d\theta, d\tilde{\xi}),$$

tangent à la surface cherchée  $\tilde{\xi}(\theta, \varphi)$ . Ainsi, le vecteur  $e_2$  est perpendiculaire à la normale à la surface  $\tilde{\xi}(\theta, \varphi)$  et par conséquent il se trouve dans le plan tangent à cette surface. Les courbes déterminées par les équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\varphi}{\partial \alpha / \partial \theta} = \frac{d\theta}{-\partial \alpha / \partial \varphi} = \frac{d\tilde{\xi}}{i \sigma \sin \theta}, \quad (22)$$

appartiennent à la surface cherchée  $\tilde{\xi}(\theta, \varphi)$ .

Les équations (22) ont deux conditions pour les trois différentielles  $d\varphi$ ,  $d\theta$ ,  $d\tilde{\xi}$  et décrivent ainsi une famille de courbes à un paramètre [appelées caractéristiques de l'équation initiale (20)]. Si chacune des caractéristiques  $\Gamma$  est coupée par le contour  $\Gamma_0$  en un seul point alors les conditions pour sur  $\Gamma_0$  peuvent être considérées comme conditions initiales pour les équations (22). Dans ce cas, le groupe de caractéristiques (22) remplit toute la surface  $\tilde{\xi}(\theta, \varphi)$  et la solution de l'équation initiale aux dérivées partielles du premier ordre peut être considérée comme connue.

Il est facile cependant de montrer que dans le cas que nous avons examiné il se produit une dégénérescence et aucune des caractéristiques  $\Gamma$  n'a de points communs avec le contour  $\Gamma_0$ . Pour s'en assurer, nous noterons qu'il résulte du premier membre des égalités (22) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} d\varphi = 0, \quad (23)$$

c'est à dire que les caractéristiques  $\Gamma$  coïncident avec les isolignes introduites précédemment  $\alpha = \text{constante}$ , ou  $h / \cos \theta = \text{constante}$ . Puisque sur le contour de  $\Gamma_0$  le paramètre  $\alpha = 0$ , les caractéristiques de  $\Gamma$  correspondant à  $\alpha = 0$ , ne coupent pas  $\Gamma_0$ .

Le second membre des égalités (22) détermine l'accroissement de  $d\tilde{\xi}$  le long des caractéristiques  $\Gamma$ . En introduisant l'élément de longueur  $d\ell$  du contour  $\Gamma$  et en tenant compte de ce que, sur ce contour, la relation (23) est satisfaite nous obtiendrons

$$dl = a(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)^{1/2} = a \left( \frac{(\partial\alpha/\partial\varphi)^2}{(\partial\alpha/\partial\theta)^2} d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)^{1/2} = a^2 \left| \frac{\sin \theta}{\partial\alpha/\partial\theta} \frac{\partial\alpha}{\partial n} d\varphi \right|,$$

où

$$\partial\alpha/\partial n = \pm |\nabla\alpha| = \pm \frac{1}{a} \left( \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$\partial/\partial n$  est la dérivée suivant la normale à  $\Gamma$ .

Si  $\theta$  est la colatitude,  $\varphi$  la longitude ouest, si le circuit du contour  $\Gamma$  est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre et  $\partial/\partial n$  est la dérivée suivant la normale extérieure, l'expression se trouvant sous le signe du module est alors toujours positive et par conséquent

$$\frac{d\varphi}{\partial\alpha/\partial\theta} = \frac{dl}{a^2 \sin \theta \partial\alpha/\partial n}. \quad (24)$$

C'est pourquoi le second membre des équations (22) peut être également représenté sous la forme

$$d\tilde{\xi}|_{\Gamma} = \frac{i\sigma \tilde{\xi}}{a^2 \partial\alpha/\partial n} dl. \quad (25)$$

L'équation (25) est tout à fait équivalente à l'équation initiale (20) en ce sens que n'importe quelle courbe intégrale (25) appartient à la surface déterminée (20)  $\tilde{\xi}(\theta, \varphi)$  et inversement, n'importe quelle solution (20) peut être représentée par la famille des courbes intégrales (25). C'est pourquoi la condition d'existence des solutions de l'équation aux dérivées partielles (20) est équivalente à la condition d'existence des solutions de l'équation ordinaire (25). Il est simple de constater que cette dernière se ramène à la condition unique

$$\oint_{\Gamma} d\tilde{\xi} = \frac{i\sigma}{a^2} \oint_{\Gamma} \frac{\tilde{\xi} dl}{\partial\alpha/\partial n} = 0. \quad (26)$$

Si (26) n'est pas satisfaite l'accroissement de  $\tilde{\xi}$  pour un tour suivant le contour fermé  $h/\cos \theta = \text{constante}$  est différent de zéro ce qui est incompatible avec l'hypothèse que  $\tilde{\xi}$  est une fonction unique des coordonnées.

Dans le cas général d'une répartition arbitraire des profondeurs  $h = h(\theta, \varphi)$  la condition (26) n'est pas vérifiée et par conséquent il n'y a pas de solution unique de l'équation non homogène (20).

Le cas de la marée polaire dans l'océan avec une répartition à symétrie axiale de la terre, de la mer et des profondeurs constitue une exception à cette règle. Pour  $h = h(\theta)$  et les valeurs déterminées par les formules (2), (3''), les contours  $\Gamma$  coïncident avec les parallèles  $\theta = \text{constante}$  et le second membre de (26) se ramène aux intégrales

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\xi}|_{\theta=\text{const}} d\varphi. \quad (27)$$

qui tendent vers zéro. Dans ce cas, l'équation (20) a une solution élémentaire

$$\tilde{\xi} = -\frac{\xi \sigma \sin \theta}{\partial \alpha / \partial \theta}, \quad (28)$$

qui manque pour  $\sigma \rightarrow 0$ .

Nous avons ainsi montré que l'équation non homogène (11) dans l'approximation  $L_1(\tilde{\xi}) \approx 0$  n'a, en fait, pas de solution. Cela signifie que le terme  $L_1(\tilde{\xi})$  ne peut être rejeté même dans le cas limite  $\sigma \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0$  quand  $L_1(\tilde{\xi})/L_0(\tilde{\xi}) \rightarrow 0$ .

#### 4. Solution en tenant compte de $L_1(\tilde{\xi})$

En rétablissant le terme  $L_1(\tilde{\xi})$  dans l'équation (20) celle-ci prend la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} + \sin \theta (L_1(\tilde{\xi}) - i\sigma \tilde{\xi}) = 0. \quad (29)$$

En répétant sans aucun changement les calculs du paragraphe 3 nous obtiendrons l'équation analogue à (25) et ne différant d'elle que par le changement de  $i\sigma \tilde{\xi}$  en  $i\sigma \tilde{\xi} - L_1(\tilde{\xi})$  :

$$\left. \frac{d\tilde{\xi}}{dl} \right|_r = \frac{1}{a^2 \partial \alpha / \partial n} (i\sigma \tilde{\xi} - L_1(\tilde{\xi})). \quad (30)$$

Formellement (30) constitue, comme précédemment, une équation aux dérivées partielles du second ordre. Cependant, en tenant compte de la petitesse des coefficients des dérivées de rang élevé, elle peut être ramenée à un système d'équations ordinaires. Pour le vérifier nous utiliserons la méthode des perturbations en fonction des petits paramètres  $\sigma/\omega, \gamma/\omega$ . Puisque dans le second membre (30) les fonctions  $\tilde{\xi}, \tilde{\xi}$  et les dérivées de  $\tilde{\xi}$  par rapport à  $\theta, \varphi$  entrent avec de petits facteurs, leurs valeurs peuvent être déduites de l'approximation zéro (19). En posant

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_1$$

où  $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1$  sont respectivement les approximations nulle et zéro et en prenant en conformité avec (19)  $\tilde{\xi}_0 = f(h/\cos \theta)$  ou ce qui revient au même

$$\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_0(\alpha) \quad (31)$$

nous obtiendrons

$$\nabla_{\tilde{\xi}} \approx \nabla_{\tilde{\xi}_0} = \tilde{\xi}_0' \nabla \alpha; \quad \Delta_{\tilde{\xi}} \approx \Delta_{\tilde{\xi}_0} = \tilde{\xi}_0'' (\nabla \alpha)^2 + \tilde{\xi}_0' \Delta \alpha,$$

où la dérivée par rapport à  $\alpha$  est notée par un trait.

La substitution de ces valeurs en (13) donne

$$L_1(\bar{\xi}) \approx L_1(\bar{\xi}_0(\alpha)) = -i\sigma\bar{\xi}_0 + \frac{\alpha a^2}{2\omega \cos \theta} [(\kappa+i\sigma)(\bar{\xi}_0''(\nabla\alpha)^2 + \bar{\xi}_0' \Delta\alpha)] + \frac{a^2 \bar{\xi}_0}{2\omega} \frac{\partial\alpha}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{(\kappa+i\sigma)\alpha}{\cos \theta} \right). \quad (32)$$

Dans le second membre de (32) intervient une fonction inconnue  $\bar{\xi}_0(\alpha)$ . Comme on l'a noté au paragraphe 3, cette fonction n'est pas déterminée à l'approximation zéro; pour la trouver il faut tenir compte des termes du premier ordre.

Nous examinerons d'abord le cas où le contour limite ne coupe pas l'équateur et où tous les contours de  $r$  de la forme  $h/\cos \theta = \text{constante}$  sont fermés. Pour déterminer  $\bar{\xi}_0(\alpha)$  nous substituerons (31) dans (30) et nous intégrerons  $d\bar{\xi}/d\ell$  le long du contour  $r$ . Puisque lors du parcours du contour fermé l'accroissement de  $\bar{\xi}$  est égal à zéro, il résulte de la relation (30)

$$\oint_r d\bar{\xi} = \oint_r d\bar{\xi}_1 = \oint_r \frac{d\bar{\xi}}{dl} dl = \frac{1}{a^2} \oint \frac{dl}{\partial\alpha/\partial n} (i\sigma\bar{\xi} - L_1(\bar{\xi}_0(\alpha))) = 0. \quad (33)$$

Puisque sur le contour  $r$  le paramètre  $\alpha = \text{constante}$ , les valeurs de la fonction  $\bar{\xi}_0(\alpha)$  entrant en (33) et de ses dérivées par rapport à  $\alpha$  sont également constantes et après les substitution (32) en (33) on peut les sortir du signe intégrale. Ensuite nous obtiendrons l'équation différentielle ordinaire suivante par rapport à  $\bar{\xi}_0(\alpha)$ :

$$c_1(\alpha)\bar{\xi}_0''(\alpha) + c_2(\alpha)\bar{\xi}_0'(\alpha) + c_3(\alpha)\bar{\xi}_0(\alpha) = b(\alpha), \quad (34)$$

où

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \alpha \oint_r \frac{(\kappa+i\sigma)\partial\alpha/\partial n}{\cos \theta} dl; \\ c_2(\alpha) &= \oint \left[ \frac{\alpha(\kappa+i\sigma)\Delta\alpha}{\cos \theta \partial\alpha/\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{(\kappa+i\sigma)\alpha}{\cos \theta} \right) \right] dl = \\ &= \oint_r \frac{\text{div}_2 \left( \frac{\alpha(\kappa+i\sigma)\nabla\alpha}{\cos \theta} \right)}{\partial\alpha/\partial n} dl; \end{aligned} \quad (35)$$

$$c_3(\alpha) = -\frac{2i\sigma\omega}{a^2} \oint_r \frac{dl}{\partial\alpha/\partial n}; \quad b(\alpha) = \frac{2i\sigma\omega}{a^2} \oint_r \frac{\bar{\xi}_0 dl}{\partial\alpha/\partial n}.$$

Il convient de noter qu'entre les coefficients  $C_1(\alpha)$ ,  $C_2(\alpha)$  il y a une relation:

$$c_2(\alpha) = \frac{dc_1(\alpha)}{d\alpha}. \quad (36)$$

Pour s'en assurer nous multiplierons  $C_2(\alpha)$  par la différentielle  $da$  et nous tiendrons compte de ce que

$$\frac{d\alpha dl}{\partial\alpha/\partial n} = \delta s,$$

où  $\delta s$  est l'élément de surface entre les deux isolignes infiniment voisines  $\alpha = \alpha_0$  et  $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$ .

En transformant ensuite l'intégrale de surface en intégrale linéaire de contour par la formule de Gauss, nous trouverons :

$$d\alpha c_2(\alpha) = \iint_{\delta s} \operatorname{div}_2 \left( \frac{\sigma(\alpha + i\sigma) \nabla \alpha}{\cos \theta} \right) ds = d \left( \oint_r \frac{(\alpha + i\sigma) \partial \alpha / \partial n}{\cos \theta} dl \right) = dc_1(\alpha).$$

Après avoir séparé les parties gauche et droite de cette égalité en  $d\alpha$ , nous obtiendrons (36).

En tenant compte de (36) l'équation (34) peut être représentée également sous la forme

$$(c_1(\alpha) \tilde{\xi}_0'(\alpha))' + c_3(\alpha) \tilde{\xi}_0(\alpha) = b(\alpha). \quad (34')$$

L'intégration de (34') entre les limites  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  donne

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) \tilde{\xi}_0'(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (b(\alpha) - c_3(\alpha) \tilde{\xi}_0(\alpha)) d\alpha = \\ &= \frac{2i\sigma\omega}{a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \oint_{r_1} \frac{\tilde{\xi} + \tilde{\xi}_0}{\sigma \alpha / \partial n} dl d\alpha = \frac{2i\sigma\omega}{a^2} \iint_{S_{12}} \tilde{\xi} ds, \end{aligned} \quad (34'')$$

où  $S_{12}$  est la surface comprise entre les isolignes  $\alpha = \alpha_1$  et  $\alpha = \alpha_2$ .

L'intégrale  $i\sigma \iint \tilde{\xi} ds$  détermine la vitesse de variation de volume de l'eau de mer dans la zone limitée par les isolignes  $\alpha = \alpha_1$  et  $\alpha = \alpha_2$  et

$$\frac{a^2}{2\omega} c_1 \tilde{\xi}_0'(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \oint_{r_2} h v_n^{(1)} dl - \oint_{r_1} h v_n^{(1)} dl$$

est le courant passant par ces limites. C'est pourquoi le rapport (34'') détermine la condition de conservation de masse.

Ainsi, la condition de conservation de la masse totale se fait automatiquement par l'équation (34).

Après séparation des parties réelle et imaginaire, l'équation (34') représente le système des équations différentielles ordinaires du quatrième ordre.

$$(a_1 \tilde{\xi}_0' e^{\epsilon} + a_2 \tilde{\xi}_0'' e^{\epsilon})' + a_3 \tilde{\xi}_0' e^{\epsilon} = b_1, \quad (37)$$

$$(a_1 \tilde{\xi}_0' e^{-\epsilon} - a_2 \tilde{\xi}_0'' e^{-\epsilon})' - a_3 \tilde{\xi}_0' e^{-\epsilon} = b_2,$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= \operatorname{Re} c_1; & a_2 &= \operatorname{Im} c_1; & a_3 &= \operatorname{Im} c_3; \\ b_1 &= \operatorname{Re} b; & b_2 &= \operatorname{Im} b; & \tilde{\xi}^{\epsilon} &= \operatorname{Re} \tilde{\xi}_0; & \tilde{\xi}^{-\epsilon} &= -\operatorname{Im} \tilde{\xi}_0; \\ \tilde{\xi} &= \operatorname{Re} (\tilde{\xi}_0 e^{i\sigma t}) = \operatorname{Re} \tilde{\xi}_0 \cos \sigma t - \operatorname{Im} \tilde{\xi}_0 \sin \sigma t = \tilde{\xi}^{\epsilon} \cos \sigma t + \tilde{\xi}^{-\epsilon} \sin \sigma t; \\ b_2 &= \frac{2\sigma\omega}{a^2} \tilde{\xi}_0 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right); & b_1 &= 0 \end{aligned}$$

dans le cas des marées luni-solaires à longue période de première espèce et

$$b_1 = \frac{2\sigma\omega}{a^2} \xi_0 \oint_{\Gamma} \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{\partial \alpha / \partial n} dl; \quad b_2 = -\frac{2\sigma\omega}{a^2} \xi_0 \oint_{\Gamma} \frac{\sin \theta \cos \theta \cos \varphi}{\partial \alpha / \partial n} dl$$

dans le cas de la marée polaire (marées de seconde espèce d'après la classification de Laplace);  $\xi_0 = \theta_0/g$ :  $\theta_0$  est l'amplitude du potentiel générateur de marée décrite par les formules (3'), (3''). Pour  $\varkappa = 0$  le coefficient  $a_1 = 0$  et le système (37) se sépare en deux systèmes du second ordre non liés entre eux. Nous examinerons les conditions d'applicabilité de ces équations.

Il est évident que l'opérateur  $L_1(\xi)$  ne peut être représenté sous la forme de (32) que dans les cas où  $|\xi_1| \ll |\xi_0|$ . Pour déterminer dans quelles conditions cette inégalité se produit, nous noterons qu'en vertu de (31)  $\partial \xi_0 / \partial \ell|_{\Gamma} = 0$  et par conséquent, le premier membre de (30) est égal à  $\partial \xi_1 / \partial \ell|_{\Gamma}$ . Après avoir remplacé dans le premier membre de (30)  $\partial \xi / \partial \ell$  par  $\partial \xi_1 / \partial \ell$  et en intégrant ensuite (30) suivant le contour  $\Gamma$  entre les limites de  $\ell_1$  à  $\ell_2$  nous aurons

$$\bar{\xi}_1(\ell_2) - \bar{\xi}_1(\ell_1) \sim \frac{l |i\sigma\xi - L_1(\xi)|}{a^2 \partial \alpha / \partial n},$$

où  $l$  est la longueur du contour. Tenant compte que, conformément à (13),

$$|L_1(\xi)| \sim \sigma |\xi_0| + \frac{gh(\sigma + \varkappa)}{\omega^2 l_0^2} |\xi|$$

(où  $l_0$  est l'échelle caractéristique des distances sur lesquelles les fonctions  $\xi$ ,  $h$ ,  $\varkappa$  ont une variation sensible), la condition  $|\xi_1| \ll |\xi_0|$  peut être présentée sous la forme

$$l\sigma |\xi| \ll \frac{gh |\xi|}{\omega l_0}, \quad \frac{gh(\sigma + \varkappa)}{\omega^2 l_0^2} l \frac{\omega a^2 l_0}{a^2 gh} \ll 1$$

$$\sigma \ll \frac{gh}{\omega l l_0} \frac{\xi}{\xi} \quad (38')$$

$$\sigma + \varkappa \ll \frac{\omega l_0}{l}. \quad (38'')$$

Pour  $l_0 \sim l \sim a \sim 6.10^3$  km,  $h \sim 4$  km et  $\xi \sim \xi$  ces conditions se ramènent aux contraintes  $\sigma \ll \omega$ ,  $\varkappa \ll \omega$  qui, comme nous l'avons vu précédemment, sont satisfaites avec beaucoup de précision. La condition (38') est perturbée soit dans le cas  $|\xi| \gg \xi_0$ , soit pour  $h \ll 4$  km. Le premier cas ne présente pas d'intérêt puis que pour ce cas l'allure asymptotique  $\xi$  est déjà connue. Pour  $|\xi| \sim |\xi_0|$  la condition (38a) est perturbée à la fréquence chandlérienne pour  $h \leq 50$  m mais à la fréquence de la marée de 19 ans - pour  $h \leq 2$  m.

Puisque sur la partie principale de la surface de l'océan mondial  $h$  est de l'ordre de quelques kilomètres, on peut considérer que les relations (38) sont satisfaites et les équations (37) applicables.

Les conditions aux limites pour les équations (37) se ramènent à l'exigence de la régularité des solutions (limitations des vitesses des courants des marées au voisinage des lignes littorales, de l'équateur et des points des extrémés de la fonction  $\alpha(\theta, \psi)$ ) et seront aussi examinées plus loin.

### 5. Quelques exemples

5.1 Cas  $h = h(\theta)$ ,  $\mathcal{X} = 0$ . A titre de premier exemple d'application des équations (34) nous indiquerons que, comme cas particulier on a les équations bien connues de Lamb [12 p.420] pour les marées à longue période dans un océan de profondeur constante couvrant toute la Terre. En posant en (35)  $\mathcal{X} = 0$ ,  $h = \text{constante}$  et après avoir posé pour la brièveté  $k = g/2\omega a^2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{1}{a^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{kh}{\cos\theta} \right) \right) \right) = \frac{2kh}{a^2 \cos^3\theta}; & (39) \\ \frac{\partial\alpha}{\partial n} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{kh}{\cos\theta} \right) = \frac{kh \sin\theta}{a \cos^2\theta}; \\ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\alpha}{\cos\theta} \right) &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{kh}{\cos^2\theta} \right) = \frac{2kh \sin\theta}{a \cos^3\theta}.\end{aligned}$$

pour  $h = \text{constante}$ , les contours  $\Gamma$  de la forme  $\alpha = \text{constante}$  coïncident avec les parallèles  $\theta = \text{constante}$ . Après avoir substitué (39) en (35) et en effectuant l'intégration par rapport à  $\ell$  ( $d\ell = a \sin\theta d\psi$ ), nous trouvons

$$\begin{aligned}c_1 &= 2\pi i \sigma k^2 h^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} = 2\pi i \sigma \left( \frac{\alpha^4}{k^2 h^2} - \alpha^2 \right); \\ c_2 &= \frac{dc_1}{d\alpha} = 2\pi i \sigma \left( \frac{4\alpha^3}{k^2 h^2} - 2\alpha \right); \\ c_3 &= \frac{4\pi i \sigma \omega}{\alpha} \cos\theta; \quad b=0\end{aligned}\tag{40}$$

dans le cas de la marée polaire

$$b = \frac{4\pi i \sigma \omega}{\alpha} \xi_0 \left( \frac{3}{2} \cos^3\theta - \frac{\cos\theta}{2} \right)$$

dans le cas des marées luni-solaires à longue période de première espèce.

Après avoir exprimé les dérivées  $\tilde{\xi}_0$  par rapport à  $\alpha$  par les dérivés par rapport à  $\theta$  nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\xi}_0}{d\alpha} &= \frac{\cos^2\theta}{kh \sin\theta} \frac{d\tilde{\xi}_0}{d\theta}; & (41) \\ \frac{d^2\tilde{\xi}_0}{d\alpha^2} &= \left( \frac{\cos^2\theta}{kh \sin\theta} \right)^2 \frac{d^2\tilde{\xi}_0}{d\theta^2} - \left( \frac{2\cos\theta}{kh} + \frac{\cos^3\theta}{kh \sin^2\theta} \right) \frac{\cos^2\theta}{kh \sin\theta} \frac{d\tilde{\xi}_0}{d\theta}.\end{aligned}$$

La substitution de (40), (41) en (34) donne

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}_0}{d\theta^2} + \frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \frac{d \tilde{\zeta}_0}{d\theta} - \frac{4\omega^2 a^2 \cos^2 \theta}{gh} (\tilde{\zeta}_0 + \delta \tilde{\zeta}_5) = 0, \quad (42)$$

où  $\delta = \begin{cases} 1 & \text{dans le cas des marées luni-solaires à longue période} \\ & \text{(de première espèce)} \\ 0 & \text{dans le cas de la marée polaire (de seconde espèce)} \end{cases}$

Pour  $\delta = 1$  l'équation (42) coïncide avec l'équation de Lamb [12, § 218, formule (5)] si on pose dans celle-ci  $f = \frac{\sigma}{2\omega} = 0$  et  $S = 0$ ; pour  $\delta = 0$  l'équation (42) est homogène et c'est pourquoi elle n'a qu'une solution triviale  $\tilde{\zeta} = 0$ . Ce résultat s'obtient également par l'équation de Lamb pour  $S = 1$  et  $f = 0$ .

Dans le cas des répartitions axially-symétriques arbitraires des profondeurs  $h = h(\theta)$  et  $\chi = 0$  l'équation (33) se ramène à :

$$-\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \left( \frac{h \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \frac{d \tilde{\zeta}_0(\theta)}{d \cos \theta} \right) + \frac{4\omega^2 a^2}{g} \tilde{\zeta}_0(\theta) = -\frac{2\omega^2 a^2}{\pi g} \int_0^{2\pi} \tilde{\zeta}_5 d\varphi. \quad (43)$$

Pour  $\tilde{\zeta}_5$ , par la formule déterminée (3') le second membre (43) est égal comme précédemment à zéro et l'équation (43) n'a de nouveau qu'une solution triviale  $\tilde{\zeta} = 0$ . Cette déduction résulte aussi de la formule (28) si on y fait  $\sigma =$  zéro :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \tilde{\zeta}(\theta, \sigma) = 0. \quad (44)$$

Il est simple de constater que dans le cas général d'une répartition arbitraire des profondeurs les contours  $h/\cos \theta =$  constante ne coïncident pas avec les parallèles  $\theta =$  constante.

les intégrales  $\int_r \tilde{\zeta} d\varphi$ , ne sont généralement parlant pas égales à zéro et la relation (44) n'est pas satisfaite.

Ainsi, en l'absence de frottement, la hauteur de la marée polaire s'approche asymptotiquement de la surface équipotentielle uniquement dans le cas des répartitions axially-symétriques de la terre, de la mer et des profondeurs.

## 5.2 Approximation pour de faibles profondeurs.

L'équation (34) a une solution très simple dans le cas des profondeurs assez petites. Pour  $h \rightarrow 0$  le paramètre  $\alpha \rightarrow 0$  et conformément avec (35) les coefficients  $c_1 \rightarrow 0$  et  $c_2 \rightarrow 0$ . Finalement l'équation différentielle (34) se ramène à une seule condition non différentielle :

$$\bar{\xi}_0(\alpha) = - \frac{\oint_{\Gamma} \bar{\xi} dl / (\partial \alpha / \partial n)}{\oint_{\Gamma} dl / (\partial \alpha / \partial n)}. \quad (45)$$

On constate par cette formule que, sur  $\Gamma$ , la valeur  $\bar{\xi}_0$  est égale mais de signe opposé à la valeur moyenne  $\bar{\xi}$  sur le même contour calculée avec la fonction de pondération  $(\partial \alpha / \partial n)^{-1}$ . La relation a un sens physique simple : pour  $h \rightarrow 0$  passant par le contour  $\Gamma$  le courant  $\int h (\bar{v}_1, \bar{n}) d\ell$  tend vers zéro, par conséquent

$$\iint \bar{\xi} ds = \iint (\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}) ds = 0.$$

Tenant compte que  $ds = \frac{d\ell da}{\partial \alpha / \partial n}$  et  $\bar{\xi}_0 / r = \text{constante}$  il est simple de constater que cette condition est équivalente à (45).

Dans les environs des maxima et des minima de la fonction  $h / \cos \theta$ , où le contour se resserre en un point, il résulte de la formule (45) que  $\bar{\xi}_0 = -\bar{\xi}$  c'est à dire que la hauteur de la marée océanique  $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi} = 0$ .

La condition d'applicabilité de l'approximation des petites profondeurs correspond à la contrainte :

$$|\text{div}_2 (h v^{(1)}(\bar{\xi}))| \ll \sigma |\bar{\xi}|$$

ou

$$\frac{gh}{\omega^2 l^2} \ll 1,$$

où  $l$  est l'échelle caractéristique des distances, sur lesquelles la fonction  $h / \cos \theta$  a une variation importante. L'exemple illustrant la dépendance de  $l$  et  $h$  sera examiné dans le paragraphe 5.5.

5.3 Modèle d'un petit bassin ne coupant pas l'équateur. Nous examinerons plus loin le modèle d'un bassin rond ne coupant pas l'équateur avec une répartition centrale symétrique des profondeurs dont les dimensions sont plus petites que le rayon de la Terre. Après avoir désigné par  $(\theta_0, \varphi_0)$  les coordonnées du centre du bassin, et par  $r, \psi$  les coordonnées polaires d'un point courant par rapport à ce centre, nous considérerons que dans le bassin occupé :  $\theta \approx \text{constante}$ . Alors les contours  $\Gamma$  coïncident avec les circonférences  $r = \text{constante}$  et  $\bar{\xi}$  est fonction seulement de  $r$ . En posant en (13)  $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0(r)$ ,  $\theta = \text{constante}$  et  $\chi = 0$ , nous obtiendrons.

$$L_1(\bar{\xi}) = -i\sigma \bar{\xi}_0 + \frac{i\sigma g}{4\omega^2 \cos^2 \theta} \left\{ \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{\xi}_0}{dr} \right) + \frac{d\bar{\xi}_0}{dr} \frac{dh}{dr} \right\}. \quad (46)$$

La substitution de cette expression en (33) donne

$$\tilde{\zeta}_0 - \frac{g}{4\omega^2 \cos^2 \theta_0} \left[ h \frac{d^2 \tilde{\zeta}_0}{dr^2} + \left( \frac{h}{r} + \frac{dh}{dr} \right) \frac{d\tilde{\zeta}_0}{dr} \right] = -\frac{1}{2\pi_0} \int_0^{2\pi} \xi(r, \psi) d\psi. \quad (47)$$

Puisque l'équation (47) est du second ordre il doit y avoir deux conditions aux limites. Elles sont les suivantes : 1) puisque pour  $h \neq 0$  et  $r \rightarrow 0$  entrant en (47) la relation  $h/r \rightarrow \infty$  il résulte de la condition aux limites des solutions .

$$d\tilde{\zeta}_0/dr|_{r=0} = 0; \quad (48)$$

2) la seconde condition aux limites est la conséquence de la limitation de  $\tilde{\zeta}_0$  sur la frontière du bassin (pour  $r = r_0$ ). Pour  $r \rightarrow r_0$  la profondeur  $h \rightarrow 0$ , et  $dh/dr < 0$ , c'est pourquoi le coefficient de  $d^2 \tilde{\zeta}_0 / dr^2$  est négatif et tend vers zéro. Il est simple de montrer que dans ces conditions, les solutions croissent sans limite. La condition aux limites pour  $r = r_0$  et (48) détermine la solution d'une façon unique.

5.4 Modèle d'un bassin coupant l'équateur. Points singuliers. Les équations (37) sont obtenues dans l'hypothèse que les isolignes  $\Gamma$  de la forme  $h/\cos \theta = \text{constante}$  sont fermées. Il est facile cependant de voir que ce n'est pas toujours le cas. Si la ligne littorale  $\Gamma_0$  coupe l'équateur alors dans les environs infiniment voisins des points d'intersection le rapport  $h/\cos \theta$  se présente comme une incertitude du type 0/0 et peut prendre n'importe quelle valeur de  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ . C'est pourquoi les points d'intersection de  $\Gamma_0$  avec l'équateur sont singuliers. Les contours  $\Gamma$  peuvent commencer et finir en des points singuliers. Pour s'en assurer nous examinerons le modèle le plus simple d'un océan de profondeur constante avec des rives "escarpées", limité par une ligne côtière de configuration arbitraire. Dans ce cas les isolignes  $h/\cos \theta = \text{constante}$  loin des rives concordent avec les parallèles; à proximité de la limite avec la terre  $h$  décroît brusquement c'est pourquoi les isolignes se déplacent vers l'équateur, où  $1/\cos \theta$  est plus grand. Si la ligne littorale  $\Gamma_0$  coupe l'équateur, alors pour  $\theta \rightarrow \pi/2$  la condition  $h/\cos \theta = \text{constante}$  implique  $h \rightarrow 0$  c'est à dire que toutes les isolignes  $h/\cos \theta = \text{constante}$  commencent et finissent aux points d'intersection de la ligne côtière  $h = 0$  avec l'équateur  $\theta = \pi/2$ .

Bien que, dans ce cas, le contour  $\Gamma$  se trouve ouvert, les relations (33) restent en vigueur. Pour s'en assurer, nous noterons que pour  $\theta \rightarrow \pi/2$  découlant de la formule (9'') et de la condition aux limites de  $\tilde{v}$  il s'ensuit

$$\left. \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \psi} \right|_{\theta = \pi/2} = 0,$$

c'est à dire que les valeurs  $\tilde{\zeta}$  sont constantes à l'équateur.

C'est pourquoi pour les contours  $\Gamma$  commençant et finissant à l'équateur les intégrales  $\int_{\Gamma} d\tilde{\zeta}$  sont égales comme précédemment à zéro et dans les rapports (35) il faut remplacer les intégrales suivant les contours fermés par des intégrales suivant les contours ouverts commençant et finissant aux points singuliers. Il est simple de constater que les intégrales déterminant  $c_1(\alpha)$  et  $c_2(\alpha)$  divergent dans ce cas c'est à dire que les coefficients pour  $\tilde{\zeta}_0''(\alpha)$  et  $\tilde{\zeta}_0'(\alpha)$  en (34) croissent jusqu'à l'infini et la solution de l'équation (34) s'accroît en  $\tilde{\zeta}(\alpha) = \text{constante}$ . La valeur de cette constante est déterminée par la condition de conservation des masses.

d'où 
$$\iint_S (\xi + \bar{\xi}) ds = 0,$$

$$\text{const} = -\frac{1}{S} \iint_S \xi ds.$$

où  $S$  est la surface du bassin. Cette expression montre que dans les régions où les caractéristiques  $\Gamma$  commencent et finissent en des points singuliers, l'écart de la marée dynamique par rapport à la marée statique est égal à zéro à la limite  $\sigma \rightarrow 0$ .

5.5 Modèles de l'océan réel. Nous examinerons ensuite quelques modèles d'océan avec une répartition réelle des terres et des mers et une répartition différente des profondeurs. Dans le cas le plus simple d'un océan de profondeur constante toutes les caractéristiques commencent et finissent aux points de coupures de la ligne littorale avec l'équateur et par conséquent comme cela a été montré dans les paragraphes 5.4,  $\tilde{\zeta} = 0$ .

Pour évaluer les effets de la topographie du fond nous examinerons un modèle de répartition des profondeurs de la forme

$$h = h_0 (1 + \epsilon \sin n \theta \sin n \varphi)$$

où  $h_0 = \text{constante}$ , et  $\epsilon$  est l'amplitude des variations de profondeurs. Pour  $n \gg 1$  cette répartition des profondeurs correspond aux isolignes  $\alpha = \text{constante}$ , ayant l'aspect de cellules avec un rayon  $r_0 \sim \pi a / 2n$ . Dans la zone équatoriale (pour  $|\cos \theta| \leq 1/2n \epsilon$ ) les isolignes  $\alpha = \text{constante}$  deviennent ouvertes commençant et finissant en des points singuliers. Considérant en première approximation toutes les cellules fermées comme circulaires on peut se servir, pour la description de la marée dans chacune d'elles, de l'équation (47) du paragraphe 5.3.

Si  $n \gg 1$ , les valeurs des fonctions  $\tilde{\zeta}(\theta, \varphi)$  déterminées par les formules (3) peuvent être considérées comme presque constantes dans chaque cellule c'est à dire poser dans l'équation (47)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(r, \psi) d\psi = \xi(\theta_0, \varphi_0).$$

La condition (48) au centre de chaque cellule reste évidemment en vigueur. Sur les bords des cellules, à l'inverse du cas examiné dans le paragraphe 5.2,  $h \neq 0$ , c'est pourquoi la condition aux limites pour  $\tilde{\zeta}_0$  est réalisée pour n'importe quelles conditions initiales pour  $\tilde{\zeta}_0|_{r=0}$ . Puisque les caractéristiques se trouvent sur les bords des cellules coïncident avec les parallèles  $\theta = \text{constante}$ , les valeurs  $\tilde{\zeta}_0$  dans celles-ci sont égales à zéro. C'est pourquoi la condition (48) doit être complétée par une seconde condition aux limites

$$\tilde{\zeta}(r_0) = 0$$

Pour  $\epsilon \ll 1$  dans l'équation (47)  $dh/dr \ll h/r$  et on peut l'écrire sous la forme dilatée suivante

$$H\tilde{\xi}_0'' + \frac{H}{x}\tilde{\xi}_0' - \xi = 0, \quad (49)$$

où  $\xi = \xi + \tilde{\xi}_0$ , a

$$H = \frac{g}{4\omega^2 \cos^2 \theta_0} \frac{h}{r_0^2} = \frac{73}{\cos^2 \theta_0} \frac{ha}{r_0^2}$$

est la profondeur dilatée,  $r_0$  est le rayon de la cellule, la dérivée par rapport au rayon dilaté  $x = r/r_0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) est désignée par un trait.

Les conditions aux limites dans la notation dilatée ont la forme

$$\xi|_{x=1} = \xi, \quad (50')$$

$$\xi'|_{x=0} = 0. \quad (50'')$$

Après avoir représenté  $\tilde{\zeta}$  sous forme de série de puissances de  $x$  il est simple de montrer que la solution de l'équation (49) aux conditions aux limites (50) a la forme :

$$\xi = \xi (1 + C_1 + C_2 + \dots)^{-1} (1 + C_1 x^2 + C_2 x^4 + \dots),$$

où

$$C_k = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2k)^2} \frac{1}{H^k}.$$

Le rapport de la hauteur moyenne de la marée dynamique par rapport à la hauteur de la marée statique est égal à

$$\gamma = \frac{2}{\xi} \int_0^1 x \xi(x) dx = \frac{1 + C_1/2 + C_2/3 + \dots}{1 + C_1 + C_2 + \dots}.$$

Les valeurs numériques de ce rapport pour les différentes valeurs de  $H$  sont les suivantes :

$H$	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
$\gamma$	0.520	0.656	0.812	0.893	0.944	0.976

Ces données montrent qu'avec l'augmentation de la profondeur (ou, ce qui revient au même avec la diminution des dimensions horizontales de la cellule) la marée dynamique tend vers la marée statique. Pour  $\cos^2 \theta_0 = 0.5$  et  $h = 4$  km, à la valeur  $H = 0.1$  correspond  $r_0 = 6.10^3$  km et  $H = 5 - r_0 = 10^3$  km. Pour l'océan réel, les échelles horizontales compatibles avec la topographie  $r_0 \sim 10^3$  km c'est pourquoi l'écart de la marée dynamique par rapport à la marée statique est important.

Il convient de noter que de petites variations des profondeurs exercent une influence importante sur l'allure asymptotique des solutions : pour de petites variations non nulles zéro la solution  $\xi$  obtenue plus haut ne dépend pas de  $\epsilon$  et est différente de zéro; au même moment pour  $\epsilon = 0$  comme cela a été montré dans le chapitre 5.4,  $\xi = 0$ .

#### 6 Influence du frottement

Pour  $\sigma \rightarrow 0$  et  $\mathcal{X} \neq 0$  les coefficients  $c_3(\alpha)$   $b(\alpha)$  déterminés en (36) tendent vers zéro, et  $c_1(\alpha)$ ,  $c_2(\alpha)$  sont différents de zéro et l'équation (34) prend la forme

$$c_1(\alpha) \tilde{\xi}''(\alpha) + c_2(\alpha) \tilde{\xi}'(\alpha) = 0. \quad (51)$$

Il est facile de constater que cette équation a une solution aux limites unique

$$\tilde{\xi}_0(\alpha) = \text{constante} \quad (52)$$

En effet, dans les environs des maxima de la fonction  $\alpha(\theta, \eta)$  la valeur entrant en (35)  $\Delta \alpha < 0$ , c'est pourquoi

$$\frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \rightarrow \beta (\alpha - \alpha_{\max}) \quad (53)$$

où  $\beta$  est une constante positive. La substitution de (53) en (51) détermine la seconde solution de l'équation (51).

$$\tilde{\xi}_0' = (\alpha_{\max} - \alpha) - 1/\beta$$

croissant sans limite pour  $\alpha \rightarrow \alpha_{\max}$ .

Ensuite la condition de conservation de la masse impose que la constante entrant en (52) soit égale à zéro. Ainsi pour un coefficient de frottement non nul, l'écart de la surface de l'océan par rapport à l'équipotentielle tend asymptotiquement vers zéro.

Pour estimer à quelles valeurs de  $\sigma$  et  $\chi$  l'approximation (51) est correcte, il faut évidemment comparer les termes entrant en (51) avec  $c_3(\alpha) \int_0^{\alpha} \xi_0(\alpha)$

En prenant pour les estimations des ordres de grandeur des valeurs

$$\Delta\alpha \sim \alpha/l^2, \quad \partial\alpha/\partial n \sim \alpha/l, \quad \tilde{\xi}_0' \sim \tilde{\xi}_0/\alpha, \quad \tilde{\xi}_0'' \sim \tilde{\xi}_0/\alpha^2, \quad \alpha \sim gh/\omega a^2,$$

où  $l$  est l'échelle caractéristique des distances sur lesquelles les profondeurs ont une variation importante, nous obtiendrons

$$\frac{c_1 \tilde{\xi}_0'' + c_2 \tilde{\xi}_0'}{c_3 \tilde{\xi}_0} \sim \frac{\chi gh}{l^2 \sigma \omega^2}.$$

On peut négliger l'influence du frottement uniquement dans les cas où ce rapport est beaucoup plus petit que l'unité, c'est à dire

$$\frac{\chi}{\sigma} \ll \frac{l^2 \omega^2}{gh}. \quad (54)$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur du coefficient  $\chi$ , nous estimerons d'abord l'épaisseur de la couche limite  $D$  dans laquelle les forces de frottement visqueux ont une valeur importante. Pour  $\sigma \ll \omega$  le mouvement dans cette couche est déterminé par la condition d'équilibre de la force de Coriolis et des forces de frottement visqueux. Pour les courants laminaires ces dernières sont de l'ordre de  $\sqrt{\nu} \delta S/D$  (où  $\nu$  est la viscosité,  $\delta S$  est l'élément de surface) c'est pourquoi

$$|2\rho[\omega v] \delta S| \sim |\nu v \delta S/D|,$$

$$\text{où} \quad D \sim \left( \frac{\nu}{\omega \rho} \right)^{1/2} \sim 10 \text{ cm}$$

pour  $\nu \sim 2 \cdot 10^{-2}$  poise.

Pour les marées polaires et luni-solaires à longue période

$$\sqrt{\nu} \sim (10^{-4} - 10^{-5}) \text{ cm/s}$$

c'est pourquoi le nombre de Reynolds

$$R = \rho D \nu \sim 10^{-1} - 10^{-2}$$

est beaucoup plus petit que les valeurs critiques et l'hypothèse sur le caractère laminaire des courants dans la couche limite est justifiée.

Ainsi la force de frottement est de l'ordre  $\nu \delta S / D \sim \nu \delta S (\nu \omega \rho)^{1/2}$

$$\alpha \sim \frac{(\nu \omega \rho)^{1/2}}{h} \sim 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

agissant sur l'élément de surface pour  $h \sim 1 \text{ km}$ . La substitution de cette valeur en (54) donne

$$\sigma \gg \frac{(\nu \rho) g}{\omega^2 l^2} \sim \frac{3 \cdot 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}}{l^2} \quad (55)$$

Pour  $l \sim 10^3 \text{ km} = 10^8 \text{ cm}$  il résulte

$$\sigma \gg 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ ou } T = \frac{2\pi}{\sigma} \ll 8 \text{ ans}$$

Dans le cas limite inverse  $T \gg 8 \text{ ans}$  on peut négliger l'écart de la marée dynamique par rapport à la marée statique.

Cette estimation montre que l'influence du frottement laminaire n'est pas telle que les marées de périodes de 14 mois ou même 19 ans puissent être considérées comme statiques. En même temps on ne peut pas négliger complètement le frottement et considérer  $\alpha = 0$ . Comme il faut s'y attendre, le frottement a une valeur importante dans les récifs et les eaux peu profondes où le paramètre  $l$  peut être sensiblement plus petit que  $10^3 \text{ km}$  et le second membre (55) croît comme  $1/l^2$ .

En conclusion nous noterons que dans les équations de Laplace (1) on inclut parfois le terme  $k_h \Delta v$ , [14. 15] où  $k_h$  est appelé le coefficient de viscosité turbulente ayant la dimension de la viscosité cinématique  $\nu / \rho$ . En [16] les valeurs numériques  $k_k$  sont déterminées par la méthode des essais et des erreurs de façon à ce que les amplitudes calculées coïncident de la meilleure façon avec les amplitudes observées. Lors de la variation de  $h$  de 10 à 7 000 m en [15] on a pris.

$$10^7 \text{ cm}^2/\text{s} < k_h < 10^{10} \text{ cm}^2/\text{s},$$

ce qui est de 9 à 12 ordres plus grand que la viscosité cinématique  $\nu / \rho$ . Pour  $l \sim 10^8 \text{ cm}$ .

$$k_h \Delta v \sim \alpha' v,$$

où la valeur  $\alpha' \sim k_h / l^2 \sim (10^{-6} - 10^{-9}) \text{ s}^{-1}$  est comparable avec la valeur prise plus haut.

Dans le cas des marées à longue période les vitesses des courants et les nombres de Reynolds sont plus petits que les valeurs correspondantes pour les composantes à courte période à peu près de quatre ordres. Toutefois il n'est pas exclu que le frottement lié à la turbulence horizontale puisse dans certains cas apparaître ici aussi :

Il est évident que l'équation (37) peut se généraliser dans le cas  $k_k \neq 0$  si sous  $\alpha$  on entend l'opérateur.

$$\alpha = \alpha_0 - k_n \Delta.$$

Alors

$$L_1(\bar{\zeta}) = -i\sigma\bar{\zeta} + \frac{g}{4\omega^2} \operatorname{div}_2 \left[ \frac{h}{\cos^2 \theta} ((\alpha_0 + i\sigma) \nabla \bar{\zeta} - k_n \nabla (\Delta \bar{\zeta})) \right].$$

et l'ordre de l'équation (37) s'élève de quatre à huit.

### Conclusions

- I. Les marées océaniques du premier et du second genre de basses fréquences sont décrites par une seule équation scalaire aux dérivées partielles du second ordre (11) avec de petits coefficients pour les dérivées de haut rang (dérivées secondes). Des solutions de cette équation dépendent sensiblement des valeurs de petits coefficients et c'est pourquoi elles subissent une instabilité. Etant donnée l'instabilité les méthodes directes d'intégration numérique de l'équation (11) sont inefficaces.
- II. La solution du problème par la méthode des perturbations en fonction des petits paramètres égaux aux rapports de fréquence de la marée  $\sigma$  et du coefficient  $\alpha$  de frottement à la vitesse angulaire de rotation de la Terre  $\omega$ , montre :
  - 1) dans l'approximation zéro  $\sigma = \alpha = 0$ , les lignes de courant, les lignes des valeurs égales  $\tilde{\zeta} = \text{const}$  et les isolignes  $h/\cos \theta = \text{const}$  concordent et  $\tilde{\zeta}$  est fonction de  $\alpha$  uniquement
  - 2) le caractère de la dépendance  $\tilde{\zeta}(\alpha)$  ne se détermine pas par l'approximation zéro ; pour la calculer il faut tenir compte des termes du premier ordre. Au premier ordre de la théorie des perturbations la dépendance  $\tilde{\zeta}(\alpha)$  est déterminée par le système des équations différentielles ordinaires du quatrième ordre (37) donc l'intégration numérique ne présente pas pour le modèle réel de l'océan de difficultés de calculs importantes.
- III. L'analyse des équations (37) permet de tirer les conclusions suivantes :
  - 1) dans le cas d'un bassin ne coupant pas l'équateur le système (37) à une solution régulière unique ;
  - 2) les points d'intersection de l'équateur avec la ligne côtière sont habituelles. Les caractéristiques de l'équation (14) de la forme  $\alpha = \text{const}$  peuvent commencer et finir dans les points ordinaires. Dans les régions soumises à ces caractéristiques, l'écart de la surface de l'océan par rapport à la surface équipotentielle  $\tilde{\zeta}$  tend asymptotiquement vers zéro ; dans les régions soumises aux caractéristiques fermées, l'allure asymptotique  $\tilde{\zeta}$

dépend du rapport des deux petits paramètres  $\sigma/\chi$ , des dimensions caractéristiques horizontales de la région et des profondeurs moyennes : en particulier pour  $\chi \gg \sigma$  les valeurs  $\xi$  tendent asymptotiquement vers zéro ; pour  $\chi \sim (\sigma)$  et  $\chi \ll \sigma$  l'allure asymptotique peut être évaluée à l'aide des relations obtenues dans le paragraphe 5.5. Dans le cas le plus simple d'un océan de profondeur constante couvrant complètement toute la Terre et  $\chi \ll \sigma \ll \omega$ , les équations (37) concordent avec les équations de Lamb [ 12 § 218 ] ;

3. les estimations numériques pour les modèles les plus simples montrent que les effets dynamiques dans la théorie des marées à longue période sont importants et il faut en tenir compte lors de la construction de modèles rhéologiques du manteau à partir des données de satellites et des données astronomiques.

1. O'Connor W. P., Starr T. B. Approximate particular solutions for the pole tide in global ocean // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1983. V. 75. P. 397-405.
2. Carton J. A. The variation with frequency of the long-period tides // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 7563-7571.
3. Dickman S. R. The self-consistent dynamic pole tide in global ocean // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1985. V. 81. P. 157-174.
4. Молобеньский С. М. О динамической теории полюсного прилива // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 3. С. 3-16.
5. O'Connor W. P. On the application of asymptotic analysis to the dynamical theory of the pole tide // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1986. V. 85. P. 1-11.
6. Carton J. A., Wahr J. M. Modelling of the pole tide and its effects on the Earth's rotation // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1986. V. 84. P. 121-137.
7. Жарков В. Н., Молобеньский С. М. Поправка за динамический модуль сдвига для чисел Лява и чандлеровского периода // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 6. С. 88-89.
8. Anderson D. L., Minster J. B. The frequency dependence of Q in the Earth and implications for mantle rheology and Chandler wobble // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1979. V. 58. P. 431-440.
9. Smith M. L., Dahlen F. A. The period and Q of the Chandler Wobble // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 64. P. 223-234.
10. Молобеньский С. М., Жарков В. Н. О чандлеровском колебании и частотной зависимости  $Q_n$  мантии Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. С. 3-16.
11. Merriam J. B. Lageos and measurements of long-period earth tides and mantle Q // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. № B11. P. 9423-9430.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М., Л.: ОГИЗ - Гостехиздат, 1947. 928 с.
13. Камке Э. Справочник по уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Мир, 1966. 240 с.
14. Каган Б. А., Мониш А. С. Приливы // Океанология/Ред. Мониш А. С. 1978. Т. 2. С. 255-279.
15. Марчук Г. И., Каган Б. А. Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометеоиздат. 1983. 359 с.
16. Schwiderski E. W. Ocean tides. Pt I. Global ocean tidal equations // Marine Geodesy. 1980. V. 3. P. 161-217.

Академия наук СССР  
Институт Физики Земли  
им. О. Ю. Шмидта

Поступила в редакцию  
4.11.1987

*Traduction*

Résultats de l'analyse harmonique des observations  
clinométriques à la station de marée terrestre "Kirovo"

A.D. Krivoros, V.G. Goloubitskii, P.S. Matveev, E.A. Slavinskaia

Marées et Rotation de la Terre  
Akad. Naouk Ukrainskoi SSR  
Kiev Naoukova Doumka pp 3-16, 1985

*Abrégé*

La réalisation, pour la première fois dans notre pays, d'observations clinométriques de 1961-1978 pour un profil régional de marée terrestre Soumi-Kherson fut sans aucun doute une étape importante de la réalisation du grand programme d'étude des déformations de marées de la surface de la Terre en Ukraine. Au milieu des années 70, en complément à la station clinométrique fondamentale "Poltava", on avait déjà sur ce profil neuf nouveaux points clinométriques temporaires ("Samotoevka, Velikié Boudicha, Soudievka, Likhovka, Khristoforovka, Schmakovo, Ingouliets, Mourakhovka et Darievka") pour lesquelles on a obtenu des valeurs des paramètres des marées terrestres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ , dont la précision est tout à fait satisfaisante pour une application à l'étude globale de la marée terrestre et à l'étude des effets régionaux indirects d'origine tectonique [1]. Un onzième point clinométrique "Peregonovka" a été installé en 1974 dans la région de Poltava. Le choix de cet endroit a été déterminé par sa proximité relative de la zone de la fracture sud de bord du fossé Dniepr-Donetz traversant à peu près à 12 à 15 km au nord de la ville de Peregonovka dans la direction Nord-Ouest. Le but était de déceler dans les résultats des perturbations tectoniques hypothétique des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  provoquées par une influence de la fracture considérée. Les observations ont commencé en septembre 1974 dans l'espoir d'obtenir les données nécessaires en un an et demi à deux ans. Cependant l'estimation critique de la qualité des données a montré qu'il ne fallait pas compter sur une détermination rapide de valeurs précises pour les paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ . De fortes perturbations dues à l'onde diurne  $S_1$  étaient défavorables pour la moitié des données d'observation [2]. Il a donc fallu prolonger les observations et organiser à 6 km à l'ouest une nouvelle station clinométrique temporaire "Kirovo". Ces mesures complémentaires ont permis une finalisation du programme de recherches suivant le profil Soumi-Kherson. La prolongation des observations à "Peregonovka" jusqu'en octobre 1978 a permis d'augmenter sensiblement la précision des valeurs finales des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  [3] : par exemple, pour l'onde lunaire semi diurne principale  $M_2$  la précision pour la composante Est-Ouest atteint un pourcent. Les observations à "Kirovo" ont fixé les limites de validité des données vis à vis des dimensions régionales.

Méthode et conditions des observations à "Kirovo". Qualité des données d'observations.

L'organisation des observations est décrite très en détail dans le travail [4]. Les observations ont été faites dans une galerie à une profondeur de 10m, à l'aide de clinomètres photoélectriques Ostrovskii [5] installés au fond de la galerie dans des directions réciproquement perpendiculaires. L'appareil n° 49 enregistre la composante NS ( $\alpha_{49} = 179,54^\circ$ ) et l'appareil n° 62 enregistre la composante EW ( $\alpha_{62} = 89,54^\circ$ ). Les observations ont commencé en novembre 1977 et ont duré jusqu'en mai 1982. Le contrôle de la sensibilité des clinomètres se faisait deux fois par jour par impulsions automatiques de  $\pm 0,02''$ . L'étalonnage des appareils a été fait avant leur installation et après la fin des observations sur la plateforme clinométrique de l'Observatoire Gravimétrique de Poltava. La comparaison a montré qu'ils ont une stabilité satisfaisante dans le temps. Par rapport aux résultats de l'étalonnage initial auquel les appareils ont été soumis tout de suite après leur fabrication à l'Institut de Physique de la Terre d'URSS (1965 [6]) on n'a pas découvert de variations sortant des limites déterminées par les erreurs relatives de l'étalonnage ( $\approx 0,5\%$ ). Les critères de qualité des observations sont les suivantes :

1. L'enregistrement doit être continu (au moins un mois). La quantité de lacunes courtes (ne dépassant pas un jour) doit être minimale.
2. On doit examiner l'allure harmonieuse de l'inclinaison de marée enregistrée avec ses particularités individuelles caractéristiques (périodicité semi-diurne, inégalités diurnes et autres).

Dans une installation peu profonde il apparaît très souvent, à l'examen visuel des enregistrements que l'allure normale est aplatie ou perturbée par l'onde diurne  $S_1$  ou par d'autres inclinaisons et par des bruits systématiques. Il ne convient pas de prendre en considération un tel enregistrement lors de la détermination des paramètres. La qualité de l'enregistrement à "Kirovo" pourrait être meilleure. L'influence de l'onde diurne  $S_1$  s'est fait sentir ici dans un degré nettement moindre qu'à "Peregonovka". Nous noterons qu'un petit château d'eau du kolkhoze, fonctionnant chaque matin quelques heures à 150 m au Sud-Sud-Est de la galerie a influencé la qualité de l'enregistrement. La description détaillée de ce bruit, illustré par un fragment d'enregistrement est donnée dans le travail [4]. La perturbation sur la courbe de marée enregistrée a l'aspect d'un saut en pente douce dans l'inclinaison dirigée vers le château d'eau et durant tout le temps de son fonctionnement soit en moyenne trois heures pendant lesquelles s'accomplissait la dépense d'eau dans le réseau hydraulique d'approvisionnement branché à la tour. La relaxation de la perturbation durait habituellement une fois et demie à deux fois plus de temps que la durée de l'effet perturbateur du château d'eau. Trois heures de fonctionnement du château

Traduction

Résultats de l'analyse harmonique des observations  
clinométriques à la station de marée terrestre "Kirovo"

A.D. Krivoros, V.G. Goloubitskii, P.S. Matveyev, E.A. Slavinskaia

Marées et Rotation de la Terre  
Akad. Naouk Ukrainskoi SSR  
Kiev Naoukova Doumka pp 3-16. 1985

*Abrégé*

La réalisation, pour la première fois dans notre pays, d'observations clinométriques de 1961-1978 pour un profil régional de marée terrestre Soumi-Kherson fut sans aucun doute une étape importante de la réalisation du grand programme d'étude des déformations de marées de la surface de la Terre en Ukraine. Au milieu des années 70, en complément à la station clinométrique fondamentale "Poltava", on avait déjà sur ce profil neuf nouveaux points clinométriques temporaires ("Samotoevka, Velikié Boudicha, Soudievka, Likhovka, Khristoforovka, Schmakovo, Ingouliets, Mourakhovka et Darievka") pour lesquelles on a obtenu des valeurs des paramètres des marées terrestres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ , dont la précision est tout à fait satisfaisante pour une application à l'étude globale de la marée terrestre et à l'étude des effets régionaux indirects d'origine tectonique [1]. Un onzième point clinométrique "Peregonovka" a été installé en 1974 dans la région de Poltava. Le choix de cet endroit a été déterminé par sa proximité relative de la zone de la fracture sud de bord du fossé Dniepr-Donetz traversant à peu près à 12 à 15 km au nord de la ville de Peregonovka dans la direction Nord-Ouest. Le but était de déceler dans les résultats des perturbations tectoniques hypothétique des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  provoquées par une influence de la fracture considérée. Les observations ont commencé en septembre 1974 dans l'espoir d'obtenir les données nécessaires en un an et demi à deux ans. Cependant l'estimation critique de la qualité des données a montré qu'il ne fallait pas compter sur une détermination rapide de valeurs précises pour les paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ . De fortes perturbations dues à l'onde diurne  $S_1$  étaient défavorables pour la moitié des données d'observation [2]. Il a donc fallu prolonger les observations et organiser à 6 km à l'ouest une nouvelle station clinométrique temporaire "Kirovo". Ces mesures complémentaires ont permis une finalisation du programme de recherches suivant le profil Soumi-Kherson. La prolongation des observations à "Peregonovka" jusqu'en octobre 1978 a permis d'augmenter sensiblement la précision des valeurs finales des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  [3] : par exemple, pour l'onde lunaire semi diurne principale  $M_2$  la précision pour la composante Est-Ouest atteint un pourcent. Les observations à "Kirovo" ont fixé les limites de validité des données vis à vis des dimensions régionales.

Méthode et conditions des observations à "Kirovo".    Qualité des données d'observations.

L'organisation des observations est décrite très en détail dans le travail [4]. Les observations ont été faites dans une galerie à une profondeur de 10m, à l'aide de clinomètres photoélectriques Ostrovskii [5] installés au fond de la galerie dans des directions réciproquement perpendiculaires. L'appareil n° 49 enregistre la composante NS ( $\alpha_{49} = 179,54^\circ$ ) et l'appareil n° 62 enregistre la composante EW ( $\alpha_{62} = 89,54^\circ$ ). Les observations ont commencé en novembre 1977 et ont duré jusqu'en mai 1982. Le contrôle de la sensibilité des clinomètres se faisait deux fois par jour par impulsions automatiques de  $\pm 0,02''$ . L'étalonnage des appareils a été fait avant leur installation et après la fin des observations sur la plateforme clinométrique de l'Observatoire Gravimétrique de Poltava. La comparaison a montré qu'ils ont une stabilité satisfaisante dans le temps. Par rapport aux résultats de l'étalonnage initial auquel les appareils ont été soumis tout de suite après leur fabrication à l'Institut de Physique de la Terre d'URSS (1965 [6]) on n'a pas découvert de variations sortant des limites déterminées par les erreurs relatives de l'étalonnage ( $\approx 0,5\%$ ). Les critères de qualité des observations sont les suivantes :

1. L'enregistrement doit être continu (au moins un mois). La quantité de lacunes courtes (ne dépassant pas un jour) doit être minimale.
2. On doit examiner l'allure harmonieuse de l'inclinaison de marée enregistrée avec ses particularités individuelles caractéristiques (périodicité semi-diurne, inégalités diurnes et autres).

Dans une installation peu profonde il apparaît très souvent, à l'examen visuel des enregistrements que l'allure normale est aplatie ou perturbée par l'onde diurne  $S_1$  ou par d'autres inclinaisons et par des bruits systématiques. Il ne convient pas de prendre en considération un tel enregistrement lors de la détermination des paramètres. La qualité de l'enregistrement à "Kirovo" pourrait être meilleure. L'influence de l'onde diurne  $S_1$  s'est fait sentir ici dans un degré nettement moindre qu'à "Peregonovka". Nous noterons qu'un petit château d'eau du kolkhoze, fonctionnant chaque matin quelques heures à 150 m au Sud-Sud-Est de la galerie a influencé la qualité de l'enregistrement. La description détaillée de ce bruit, illustré par un fragment d'enregistrement est donnée dans le travail [4]. La perturbation sur la courbe de marée enregistrée a l'aspect d'un saut en pente douce dans l'inclinaison dirigée vers le château d'eau et durant tout le temps de son fonctionnement soit en moyenne trois heures pendant lesquelles s'accomplissait la dépense d'eau dans le réseau hydraulique d'approvisionnement branché à la tour. La relaxation de la perturbation durait habituellement une fois et demie à deux fois plus de temps que la durée de l'effet perturbateur du château d'eau. Trois heures de fonctionnement du château

d'eau ont provoqué sur l'enregistrement de la composante NS un saut perturbateur comparable à l'amplitude totale de l'inclinaison de marée semi diurne (0"02). En composante E.W. la valeur du saut correspondant était à peu près deux fois plus petite. Cette perturbation est certainement extrêmement défavorable et diminue sensiblement la qualité. Il nous est apparu qu'on ne réussit pas à obtenir des valeurs sûres des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ , sans l'élaboration d'un algorithme spécial d'analyse. En effet l'application du second des critères conduisait au rejet d'une partie importante des données ce qui était extrêmement indésirable. Le bruit provoqué par le régime de fonctionnement du château d'eau étant lié au temps solaire moyen, la réduction de ces observations garantit l'obtention de valeurs significatives des paramètres de marées terrestres a tout le moins pour les trois ondes lunaires principales  $O_1$ ,  $N_2$  et  $M_2$ . Une analyse expérimentale de quelques séries mensuelles en a confirmé l'exactitude.

#### Résultats de l'analyse harmonique

On a retenu, pour l'analyse, 103 séries mensuelles (48 en composante NS et 55 en EW). L'analyse a été faite d'après le schéma de 30 jours de Matveyev qui permet de déterminer les paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  des huit ondes de marées terrestres principales [7]. Les calculs ont été faits d'après le programme de Doubik. Les résultats obtenus pour chaque série sont donnés dans la table 1. Le petit trait au dessus du symbole de l'onde  $K_1$  indique que les valeurs des paramètres renferment les apports des ondes  $P_1$ ,  $S_1$  et d'autres ondes voisines en fréquence, et également l'apport important de l'onde thermique  $S_1$ . Le signe "plus" pour les valeurs des phases correspond à un retard de l'inclinaison de marée observée par rapport à sa valeur théorique. A "Kirovo" le bruit de fond était anormalement élevé comme cela a été montré précédemment. La validité de la détermination des petites ondes  $M_1$  et  $\mu_2$  étant extrêmement basse elles n'ont pas été incluses dans la table 1. De même pour l'onde  $Q_1$  de grande amplitude. On pourrait dire la même chose pour les résultats obtenus pour les ondes  $O_1$  et  $K_1$  dans la direction NS pour laquelle, aux latitudes moyennes, les amplitudes de ces ondes sont aussi petites que les amplitudes des petites ondes dans la direction EW. Nous donnons également ces résultats dans la table 1 et les soumettons à une moyennisation. Pour identifier dans la table 1 la série renfermant les résultats nettement erronés, on a effectué une moyenne préliminaire de toutes les valeurs  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  et on a réalisé également une estimation préliminaire de la précision des valeurs moyennées  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ . On a analysé pour l'onde  $M_2$  les écarts des résultats individuels par rapport à leur moyenne, à la suite de quoi on a constaté que les résultats obtenus pour les séries 23, 26 et 44 en composante EW sortent des limites déterminées par la probabilité fiable à 95 %. Les sept séries anormalement perturbées notées dans la table 1 par des parenthèses n'ont pas été prises en compte lors de la moyennisation finale des résultats. Ces résultats nettement erronés se rapportent soit aux mois d'hiver, soit aux mois d'été, c'est à dire aux périodes où l'enregistrement est fortement perturbé par l'onde thermique

irrégulière  $S_j$  et par le fonctionnement du château d'eau. La moyenne vectorielle des valeurs obtenues des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  pour chaque série et pour les cinq ondes principales a été réalisée suivant deux variantes [4] :

1) avec des poids égaux ( $p_i = 1$ );

2) avec des poids  $p_j$  individuels calculés selon la formule

$$p_i = 1/(\epsilon_D)_i^2$$

où  $\epsilon_D$  est l'erreur quadratique moyenne d'une ordonnée de la série analysée, calculée d'après la combinaison proposée par Doubik [8]. Les résultats des deux variantes sont donnés dans la table 2 où  $H_T$  est l'amplitude de la valeur théorique de l'onde de marée;  $n$  est le nombre de résultats mensuel englobés par la moyennisation vectorielle.

Interprétation des résultats Les résultats finaux ont une précision plus élevée que les résultats préliminaires publiés en [4]. Pour déduire ces résultats préliminaires on avait utilisé beaucoup moins de données d'observations (en composante NS 29 % et en composante EW 26 %). En outre nous avons rejeté quelques résultats mensuels nettement erronés (qui avaient été pris en considération précédemment). Avec l'augmentation de la précision on observe une stabilisation des valeurs moyennées des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$ . En effet, pour chacune des cinq ondes les différences entre les valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  finaux (table 2) et préliminaires nous ne sortent pas des limites déterminées par les erreurs quadratiques moyennes. Cette stabilité des résultats en combinaison avec l'élévation de leur précision lors de l'augmentation du volume des données analysées justifie que l'on utilise les valeurs  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  des ondes lunaires  $O_1$ ,  $N_2$ ,  $M_2$  dans la géodynamique moderne. Les résultats obtenus pour les ondes  $K_1$  et  $S_2$  tenant compte du niveau et du caractère des bruits à "Kirovo", ont des erreurs systématiques importantes. En comparant entre eux les résultats des moyennisations (table 2) nous verrons que la moyenne pondérée garantit l'obtention de résultats plus sûrs [4]. L'un des buts de l'organisation d'observations à "Kirovo" était un contrôle du point situé à l'est de "Peregonovka". La comparaison pour l'onde lunaire  $M_2$  montre, pour la composante EW, une bonne concordance des résultats et pour la composante NS une petite divergence (de l'ordre de 6 à 7 %) pour les deux paramètres. Il n'y a qu'une petite partie de cette divergence qui sort des limites déterminées par les erreurs de détermination des valeurs comparées. Il convient d'accorder une attention particulière à l'explication des causes car ce problème est d'une grande importance pour découvrir l'influence perturbatrice possible de la fracture sur les inclinaisons de marées. En dressant le bilan de la réduction des observations clinométriques à "Kirovo" situé près de la fracture du bord sud Dniepr-Donetz, dans la région où elle est coupée par le profil clinométrique Soumi-Kher-son, on peut conclure aux résultats principaux de ce travail :

1. L'analyse harmonique de cent séries de trois mois d'inclinaisons de marées à "Kirovo" (1977-1982) a permis de déterminer des valeurs suffisamment précises des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  caractérisant les ondes lunaires les plus importantes :  $M_2$   $N_2$  et  $O_1$ . Le haut niveau de bruit sur la fréquence de l'onde solaire diurne  $S_1$  n'a malheureusement pas permis de déterminer avec une précision suffisante les paramètres de l'onde solaire semi diurne  $S_2$  et de l'onde luni solaire  $K_1$ .

2. On a établi la bonne concordance des valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  obtenus pour l'onde  $M_2$  dans la direction EW à "Kirovo" et à "Peregonovka". Cela montre l'absence dans cette région d'inclinaisons de marées anormales dans cette direction. Par contre on a mis en évidence dans la composante NS une divergence des résultats de l'ordre de quelques pourcents; interprétation de celle-ci exige des recherches complémentaires.

3. En relation avec la perturbation importante de l'onde diurne thermique irrégulière  $S_1$  et d'autres bruits de cycle diurne (temps solaire) on a tiré une conclusion sur les valeurs les plus sûres des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  des ondes déterminées par moyennisation vectorielle des résultats suivant deux variantes poids égaux et poids inversement proportionnels au carré de l'erreur quadratique moyenne d'une ordonnée. L'estimation de la précision des résultats obtenus parallèlement montre que la moyenne vectorielle pondérée est plus efficace que la moyenne vectorielle simple.

1. Матвеев П.С., Голубицкий В.Г., Богдан И.Ю., Дубик Б.С., Славинская Е.А. Уточненные значения параметров земного прилива для пунктов наклономерного профиля Сумы - Херсон. - Вращение и приливные деформации Земли, 1977, вып. 9, с. 16-32.
2. Богдан И.Ю., Голубицкий В.Г., Матвеев П.С. Наклономерные наблюдения на ст. Перегоновка. - Вращение и приливные деформации Земли, 1977, вып. 9, с. 12-16.
3. Голубицкий В.Г., Матвеев П.С., Богдан И.Ю., Кривонос А.Л., Славинская Е.А. Результаты гармонического анализа наклономерных наблюдений на пункте "Перегоновка" за 1974-1978 гг. - Вращение и приливные деформации Земли, 1982, вып. 14, с. 23-31.
4. Матвеев П.С., Голубицкий В.Г., Кривонос А.Л., Славинская Е.А. Наклономерные наблюдения на пунктах "Кирово" и "Весичи". - Вращение и приливные деформации Земли, 1983, вып. 15, с. 11-20.
5. Островский А.Е. Наклономер с фотоэлектрической регистрацией. Изучение земных приливов, 1961, № 2, с. 41-75.
6. Широков И.А. Об эталонировании фотоэлектрических наклономеров. - В кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 1967, с. 149-160.
7. Матвеев П.С. Гармонический анализ месячной серии наблюдений земных приливов. - В кн.: Земные приливы. Киев: Наук. думка, 1966, с. 51-79.
8. Дубик Б.С. Оценка средней квадратической ошибки одной ординаты анализируемой приливной кривой и осреднение результатов гармонического анализа. - Вращение и приливные деформации Земли, 1975, вып. 7, с. 62-66.

Table 1 Valeurs  $\delta$  et  $\Delta\phi$  obtenues au point clinometrique "Kirovo"

Номер серия	Начало опыта	Углы, ко	$\delta$		$\Delta\phi$		$M_1$		$M_2$		$M_3$		$M_4$		$\delta$	$\Delta\phi$
			$\delta$	$\Delta\phi$	$\delta$	$\Delta\phi$	$\delta$	$\Delta\phi$	$\delta$	$\Delta\phi$	$\delta$	$\Delta\phi$	$\delta$	$\Delta\phi$		
1	771130	7,539	5,466	+ 6,96	1,1504	0,5328	+ 5,56	1,1241	-61,31	0,6296	+11,38	1,8617	+ 9,14			
2	771225	10,196	10,9136	-77,71°	1,2766	1,1916	+62,45°	2,4339	+81,01	0,9718	-1,15	3,5120	+10,57°			
3	780119	6,563	3,1892	+78,22	0,3591	0,5183	+78,16	1,0225	+28,99	0,7156	-8,10	3,3703	+19,42°			
4	780312	4,859	0,7818	-42,85	0,6145	0,7100	+66,02	1,3153	+28,55	0,7347	-6,60	0,0436	-18,38			
5	780409	4,371	2,0668	+77,73	0,7435	0,7435	-9,26	0,8105	-15,45	0,7678	-0,81	0,6673	-5,68			
6	780503	3,991	0,7160	-10,14	0,7792	0,9902	-23,04	0,9534	+15,28	0,7128	+3,01	0,3886	-18,68			
7	780610	3,849	0,4724	-68,18	0,3342	0,6456	-47,94	0,7721	-59,88	0,6562	+0,55	0,5716	-60,69			
8	780705	4,216	0,0161	+2,32	0,9638	0,0638	+18,55	0,0671	-4,65	0,7281	+5,82	0,2597	+60,69			
9	780725	4,698	0,3270	-31,93	0,4706	0,5047	+55,22	0,1086	+25,10	0,6322	-1,12	0,4256	-37,01			
10	781004	5,126	2,4812	-23,73	0,8073	0,7785	+33,55	0,3302	+17,27	0,6327	+7,23	0,5029	-35,92			
11	781119	4,509	1,7865	+29,66	0,8289	0,6944	+48,03	0,0445	+22,51	0,6837	+0,04	0,5029	-35,92			
12	790304	4,739	5,3923	-15,58	1,3357	0,1607	+12,87	0,7336	+7,77	0,7046	+0,07	0,0494	-50,91			
13	790329	4,442	0,3815	+27,91	0,6021	0,5088	-37,52	0,9338	-20,10	0,7992	+0,04	0,5087	-14,74			
14	790334	4,579	6,178	+76,35	0,6902	0,6902	-30,34	0,9495	+59,37	0,7992	+8,97	0,3738	+9,82			
15	790423	4,676	7,504	-36,24	0,3119	0,5554	-15,13	0,7406	-54,23	0,6759	-7,25	0,2080	+32,78			
16	790528	4,579	1,7437	+36,54	0,5451	0,9440	-35,03	0,8402	+23,82	0,7046	+0,14	0,4555	+27,99			
17	790721	4,676	5,398	-60,51	0,5348	0,8919	-21,15	0,9159	+12,74	0,7046	+0,09	0,7706	+9,82			
18	790822	4,661	7,9972	+26,54	0,5903	0,8819	-4,03	0,8157	-34,52	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
19	791019	4,284	0,8052	-26,51	0,7773	0,8970	-10,66	0,5186	+12,74	0,7046	+0,09	0,7706	+9,82			
20	791115	4,905	5,700	-40,51	0,7773	0,8970	-10,66	0,5186	+12,74	0,7046	+0,09	0,7706	+9,82			
21	791208	4,438	7,4433	+18,99	1,3235	0,5896	+46,06	0,9339	-34,52	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
22	800102	4,725	1,4751	-15,64	0,4289	0,5896	+15,24	0,8339	+69,31	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
23	800122	4,747	8,4045	+67,66	2,2705	0,9084	+15,24	0,8339	+69,31	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
24	800227	4,717	1,856	-20,89	0,4605	0,5751	+2,54	0,9362	+59,37	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
25	800320	4,517	0,659	-81,89	0,6781	0,7751	-66,01	0,3748	+13,89	0,8898	+0,09	0,7752	+22,46			
26	800417	4,358	1,656	+70,26	0,4215	0,5263	-17,41	0,7650	+13,89	0,8898	+0,09	0,7752	+22,46			
27	800510	4,551	5,262	+79,95	0,4215	0,5263	-17,41	0,7650	+13,89	0,8898	+0,09	0,7752	+22,46			
28	800602	4,529	2,8675	-58,44	0,2448	0,6853	+17,52	0,9494	+13,89	0,8898	+0,09	0,7752	+22,46			
29	800722	4,529	6,836	+79,86	0,4827	0,6299	-17,52	0,9494	+13,89	0,8898	+0,09	0,7752	+22,46			
30	810124	4,438	1,4751	-50,66	0,6837	0,8576	+10,28	0,4660	+79,30	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
31	810218	4,438	9,984	-61,60	0,4119	0,5156	+16,72	0,8222	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
32	810314	4,559	1,9972	+13,41	0,8119	0,6870	+26,39	0,7810	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
33	810421	4,509	1,6951	+15,82	0,4119	0,5156	+16,72	0,8222	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
34	810529	4,509	0,9264	-44,82	0,5896	0,6870	+26,39	0,7810	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
35	810722	4,509	3,7520	+35,67	0,9301	0,6375	-6,35	0,9822	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
36	810829	4,509	3,991	-67,56	1,0939	0,6375	-6,35	0,9822	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
37	810927	4,509	3,472	+13,93	0,8940	0,8940	+10,07	0,8222	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
38	811021	4,822	4,398	-14,06	0,8940	0,8940	+10,07	0,8222	+15,28	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
39	811027	4,753	5,700	+20,41	0,7485	0,4106	+14,36	0,8072	+23,82	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
40	811033	4,509	0,720	+64,66	0,8870	0,4106	+14,36	0,8072	+23,82	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
41	811127	4,509	9,813	-16,54	0,6068	0,9129	+21,53	0,5923	-26,63	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
42	820111	4,859	1,347	+23,58	0,7490	0,9129	+21,53	0,5923	-26,63	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
43	820205	4,859	1,374	+16,28	0,7490	0,9129	+21,53	0,5923	-26,63	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
44	820302	4,859	4,734	-47,55	1,0225	0,4039	+12,63	0,9716	+4,50	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
45	820327	4,859	2,164	+24,03	0,4733	0,5039	-47,44	0,8965	+20,86	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			
46	820423	4,859	5,668	-7,72	0,6423	0,5464	+10,32	0,7892	+1,01	0,7046	+0,79	0,3080	+27,99			

Composante E.W. / appareil H00 n° 62;  $\alpha_{22} = 89,54^\circ$

Номер серий	Начало серий, г. о. д.	Углы мо	δ <sub>1</sub>		γ		δ <sub>2</sub>		δ <sub>3</sub>		δ <sub>4</sub>		δ <sub>5</sub>	
			γ	δ <sub>1</sub>	γ	δ <sub>2</sub>	γ	δ <sub>3</sub>	γ	δ <sub>4</sub>	γ	δ <sub>5</sub>		

Composante N.S. / appareil H00 n° 49:  $\mu_{H0} = 179.54^{\circ}$

1	771130	8.2	4.8	31.1	1073	-84.52°	+2.01°	-70.58°	14504	-19.52°	0.4713	-7.20°	5682	+81.57°
2	771225	8.2	4.8	31.1	1073	-27.64	+26.66	-72.43	12375	-65.85	0.7310	+17.86	3396	-88.26
3	780119	8.2	4.8	31.1	1073	+3.59	+10.92	+10.22	0.2379	+55.14	0.5504	+18.45	11303	+52.08
4	780312	8.2	4.8	31.1	1073	+12.59	+31.11	+60.91	0.7553	-45.14	0.7096	+32.42	0322	+34.21
5	780411	8.2	4.8	31.1	1073	+54.67	-48.91	-4.05	0.6114	+77.74	0.6487	+11.55	5931	+18.89
6	780523	8.2	4.8	31.1	1073	+60.05	-78.04	-50.91	0.2281	+19.08	0.5996	+10.53	15044	+32.80
7	780705	8.2	4.8	31.1	1073	+39.96	-61.69	-88.93	0.5482	-36.26	0.5809	-14.09	6113	+63.55
8	780730	8.2	4.8	31.1	1073	+69.25	-87.74	+73.84	0.8296	+54.55	0.8016	+8.70	2976	-10.58
9	780827	8.2	4.8	31.1	1073	+1.26	-2.47	+2.70	0.9017	-82.83	0.8534	+6.45	0965	-20.56
10	780904	8.2	4.8	31.1	1073	+1.12	+3.10	+4.12	0.8009	-55.83	0.8220	-21.41	1459	+10.57
11	780929	8.2	4.8	31.1	1073	+84.16	+37.06	+18.34	0.3772	+59.30	0.6530	+7.47	1165	+13.12
12	780933	8.2	4.8	31.1	1073	+32.02	+15.07	+58.66	0.3699	+19.57	0.6225	+7.48	1370	+46.40
13	780937	8.2	4.8	31.1	1073	-1.35	+12.16	+20.59	0.8932	-89.23	0.8550	+8.55	0588	+67.05
14	781018	8.2	4.8	31.1	1073	+1.77	+6.33	-18.83	0.1245	+59.59	0.7330	+1.99	0935	+1.42
15	781121	8.2	4.8	31.1	1073	+38.16	-62.04	-82.73	0.1395	-40.27	0.7537	+3.92	0369	-7.25
16	781223	8.2	4.8	31.1	1073	+39.62	-72.85	-65.23	0.3052	+19.97	0.5580	+1.69	0356	+33.09
17	790107	8.2	4.8	31.1	1073	+5.05	+52.78	-32.50	0.2300	-38.44	0.5580	+3.52	0356	+33.09
18	790122	8.2	4.8	31.1	1073	+59.13	-59.52	+49.18	0.3233	+38.44	0.6829	+3.48	9209	+11.41
19	790127	8.2	4.8	31.1	1073	+1.06	+24.31	-34.28	0.3333	-80.99	0.6700	+4.52	1101	+1.41
20	790159	8.2	4.8	31.1	1073	+1.50	+5.03	+1.96	0.3291	-80.99	0.5594	+4.77	1101	+1.41
21	790202	8.2	4.8	31.1	1073	+4.46	-5.13	+8.52	0.8381	+91.72	0.5594	+4.77	2665	+32.83
22	790227	8.2	4.8	31.1	1073	+52.34	-56.15	+2.22	0.7295	+37.67	0.6244	+1.14	3359	-75.10
23	790227	8.2	4.8	31.1	1073	+2.09	+57.08	-60.09	0.3295	-45.08	0.4607	+4.09	3359	-75.10
24	790317	8.2	4.8	31.1	1073	+77.12	+44.62	-38.16	0.4332	-20.82	0.5689	+5.89	5710	+52.05
25	790325	8.2	4.8	31.1	1073	+66.66	+73.55	+50.87	0.2658	-19.77	0.5250	+6.92	6345	+82.17
26	790325	8.2	4.8	31.1	1073	+1.62	+2.81	+9.73	0.3470	-19.77	0.5605	+7.76	1746	+45.42
27	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+11.62	+32.96	+14.04	0.9772	+39.87	0.7613	+2.93	0104	+42.91
28	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+58.92	-13.62	-50.62	0.5024	-39.87	0.6852	+1.59	9044	+85.91
29	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+63.41	+24.31	-67.88	0.8437	-65.15	0.7581	+1.98	2344	+81.31
30	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+3.885	+13.62	-67.88	0.1582	-8.58	0.7156	+1.47	8902	-63.18
31	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+80.43	+13.62	-72.68	0.3416	+27.93	0.7156	+1.47	8902	-63.18
32	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+68.79	+13.62	-47.03	0.3335	+27.93	0.6030	+4.31	2596	+43.15
33	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+49.03	+13.62	-81.30	0.9718	+16.68	0.7070	+4.87	8119	+36.17
34	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+66.26	+5.04	-23.60	0.2809	+46.51	0.5812	+3.52	5064	+17.90
35	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+2.41	+23.41	-63.73	0.7228	-24.64	0.5812	+3.52	5064	+17.90
36	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+1.432	+23.41	-97.48	0.6218	+62.04	0.7892	+5.89	9248	+81.33
37	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+1.651	+23.41	-18.16	0.7019	+42.70	0.7892	+5.89	9248	+81.33
38	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+0.302	+23.41	+70.56	0.3708	+62.04	0.4735	+2.19	2025	+65.52
39	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+1.748	+23.41	+7.65	0.8628	+21.14	0.4735	+2.19	2025	+65.52
40	790333	8.2	4.8	31.1	1073	+0.864	+23.41	-24.43	0.5108	-23.77	0.6993	+3.40	7414	+48.45

Table 2 moyennes vectorielles des paramètres  $\gamma$  et  $\Delta\psi$  pour le point clinométrique de "Kirovo" (après les données des observations de 1977 à 1982)

Onde	Ampl. 0"001	Composante NS (n=45)			
		Poids égaux		Pondéré	
		$\gamma$	$\Delta\psi$	$\gamma$	$\Delta\psi$
$Q_1$	0,912	2,4087	-16,59 <sup>0</sup>	2,3220	-11,79 <sup>0</sup>
		$\pm 0,3537$	$\pm 13,16$	$\pm 0,3417$	$\pm 11,09$
$K_1$	1,283	4,3519	-11,26	4,0222	-12,80
		$\pm 0,6500$	$\pm 10,41$	$\pm 0,5096$	$\pm 10,68$
$N_2$	1,497	0,8064	-9,05	0,7812	-11,13
		$\pm 0,0958$	$\pm 5,91$	$\pm 0,0891$	$\pm 5,73$
$M_2$	7,819	0,6533	-0,70	0,6321	-0,69
		$\pm 0,0220$	$\pm 1,62$	$\pm 0,0195$	$\pm 1,65$
$S_2$	3,638	0,8907	+39,30	0,8536	+34,48
		$\pm 0,1101$	$\pm 8,15$	$\pm 0,0907$	$\pm 7,70$

Onde	Ampl. 0"001	Composante EW (n=51)			
		Poids égaux		Pondéré	
		$\gamma$	$\Delta\psi$	$\gamma$	$\Delta\psi$
$Q_1$	4,923	0,6584	+0,66 <sup>0</sup>	0,6374	-1,16 <sup>0</sup>
		$\pm 0,0443$	$\pm 4,57$	$\pm 0,0432$	$\pm 4,18$
$K_1$	6,925	0,9212	+1,52	0,9097	-4,29
		$\pm 0,0864$	$\pm 6,26$	$\pm 0,0786$	$\pm 6,01$
$N_2$	1,980	0,7791	-2,83	0,7420	-2,85
		$\pm 0,0606$	$\pm 4,16$	$\pm 0,0490$	$\pm 4,23$
$M_2$	10,343	0,7177	-4,64	0,7156	-4,20
		$\pm 0,0091$	$\pm 0,77$	$\pm 0,0080$	$\pm 0,71$
$S_2$	4,812	1,0113	+7,80	0,9212	+6,98
		$\pm 0,0745$	$\pm 2,90$	$\pm 0,0591$	$\pm 2,84$

Determination of the in situ parameters  
from the observed tidal oscillations in the  
well-aquifer systems at the Royal  
Observatory of Belgium.

---

M. Delcourt-Honorez \*

Abstract.

Periodic water levels variations are observed in two of the three wells drilled in the multiple aquifer-aquitard system at the Royal Observatory of Belgium in Brussels. These oscillations are due to the Earth tides phenomena. For each well-aquifer system we study the tidal response and the barometric effects.

Applying the models connecting Earth tides to hydrogeology, we use the observed tidal response to estimate the in situ parameters of both the aquifers and the aquifer system (porosity, specific storage, vertical compressibility and permeability).

---

\* Centre de Géophysique interne  
Observatoire Royal de Belgique  
Avenue Circulaire 3  
1180 BRUXELLES

## 1. Observations

The underground at the Royal Observatory of Belgium (ROB) is complex: eight different layers belong to a multiple aquifer-aquitard system, down to a 140 meter depth. Three of the layers are aquifers: an upper water table aquifer in the Brussels sand, an intermediate aquifer in the tuf of Lincet and a deepest aquifer in the fissured bedrock. The intermediate and the deepest aquifers may be considered to be confined aquifers (Delcourt-Honorez, 1988).

The water-levels variations are registered by capacitive transducers "Nivocaps" (Van Ruymbeke & Delcourt, 1986). All the observations are converted in the standard format used by ICET (Ducarme, 1975,1978).

Periodic water-levels fluctuations are continuously recorded in the intermediate and the deepest wells. The figure 1 shows water-level registrations in the deep well in the bedrock. In that deep well, periodic oscillations of about 5 cm amplitude are registered while in the intermediate well, the amplitude of the water-level fluctuations is only of about 1 cm. These oscillations in the intermediate well and in the deep well are represented at the same scale on the figure 2.

In this paper, we present the results of the analyses performed on the now available water-levels registrations set, i.e. on 34 months observations (from june 1984 to march 1987). Preliminary results deduced from the data sets covering respectively one year and twenty months registrations have been discussed in Delcourt-Honorez (1986 a, b).

## 2. Tidal analysis

### 2.1. Experimental results

-----

Water-levels in wells tapping confined aquifers are affected by changes in barometric pressure. We remove these barometric effects by using the Multiple Input Single Output method (De Meyer, 1982) and by determining the transfer functions and the impulse responses (Delcourt-Honorez, 1986 b).

The table 1 shows the results of the tidal analysis performed for the intermediate and deep wells before and after having removed the barometric effect. The amplitudes and the mean square errors are expressed in mm. The results deduced from this complete set of data are similar to those deduced from the analyses previously performed on the two sets of data covering respectively one year and twenty months (Delcourt-Honorez, 1986 a,b).

The observed oscillations in the fluid pressure of the two confined aquifers are due to Earth tides phenomena, according to the two criteria proposed by Melchior (1956): the phases are about  $180^\circ$  and the amplitude ratios agree with the theoretical ones.

## 2.2. Stability of the amplitudes and phases

---

We test the stability of the results by subdividing the global data set in five sub-sets, each covering a six months time interval. The tables 2 and 3 show for the two confined wells the amplitude and phase of the main tidal waves for the analysis performed after having applied the atmospheric pressure correction. The various waves are stable and show only a slight variation in amplitude and phase from a sub-set to another one. The amplitude ratios for the deep aquifer are very stable.

## 2.3. Discussion of the amplitudes

---

From the results of the analyses, we can deduce that the amplitudes of the tidal waves are larger in the deepest well in the aquifer of the bedrock than in the intermediate well in the tuf of Lincent, what we had seen on the raw registrations. This is due to the elastic and hydrogeological properties of the two aquifer layers (the values of the parameters of these layers are summarized in the table 4). The porosity  $\phi_0$  of the tuf of Lincent is of 33 % while the porosity of the bedrock is 9 % : these two different values explain the larger amplitude for the tides in the aquifer in the bedrock; indeed, according to e.g. Bredehoeft (1967), Morland et al. (1984), a decrease in the porosity value increases the amplitude. Moreover the bedrock permeability  $k_D$  ( $k_D = 4.44 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ) is greater than the tuf permeability ( $k_D = 2.37 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$ ): this also induces, according to Morland et al. (1984) a larger amplitude in the deep well. On the other hand, Melchior et al. (1964) have concluded that an increase in the depth increases the amplitude, which is also confirmed with our observations.

To compare the amplitudes values with those in other stations, the  $M_2$  wave amplitude is reduced to the equator (Melchior et al., 1964). For the intermediate well, we obtain 1.86 mm and for the deep well, 13.44 mm. Compared to other stations (Melchior, 1983), these amplitudes seem to be somewhat low but, as we shall see, they are nevertheless justified by the specific storage  $S_s$  values (cf expression ((31), § 4).

2.4. Discussion of the phase lags  
-----

A phase lag of about one hour (cf table 1) is observed between the maximum of gravity and the maximum of the water-level in the wells. We study this "inelastic response" (cf § 4).

3. Barometric Efficiency (BE) and Tidal Efficiency (TE)  
-----

Preliminary remark

=====

The storage coefficient  $S$  and the specific storage  $S_s$  of an aquifer are hydrogeological parameters that allow to connect Earth tides to hydrogeology.

It must be noticed that in hydrogeology, various definitions are used for  $S$  and for  $S_s$ . We have chosen for  $S_s$  the expression :

$$S_s = \rho g (\alpha + \emptyset_0 \beta) \tag{1}$$

in which  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\emptyset_0$  are respectively the fluid volumic mass, the skeleton aquifer vertical compressibility, the fluid compressibility and the volume porosity of the layer. For the storage coefficient  $S$  of a confined aquifer with thickness  $b$  :

$$S = S_s b \tag{2}$$

The  $S_s$  dimensions are  $L^{-1}$ ,  $S$  has no dimension. Several arguments justify our choice (Delcourt-Honorez, 1988, afterwards referred as DH, 88).

In hydrogeology, the Barometric Efficiency (BE) is traditionally defined by the following expressions (see figure 3).

$$BE = \frac{\rho g dH}{dp_a} , \tag{3}$$

where  $dH$  is the water-level variation in the well and  $dp_a$  is the atmospheric pressure variation (e.g. Walton, 1970) and

$$BE = - \frac{1}{\frac{\alpha}{\emptyset_0 \beta} + 1} \quad (\text{Jacob, 1950}) \tag{4}$$

With the two confined aquifers parameters values that we have estimated on the basis of rock and soil mechanics (DH, 88), we calculate the theoretical barometric efficiencies  $|BE|_{\text{theor}}$  defined by (4) and compare them with the observed values  $|BE|_{\text{obs}}$ : the results are given in the table 5. The observed values  $|BE|_{\text{obs}}$  are in agreement with the theoretical values.

Introducing (4) into the expression (1), we have

$$\frac{-1}{BE} = \frac{S_s}{\emptyset_o \beta \rho g} , \quad (5)$$

an expression which allows to express the barometric efficiency as a function of the specific storage  $S_s$  and of the porosity  $\emptyset_o$ . We use (5) to estimate the  $S_s$  and  $\emptyset_o$  values from the barometric response and the well tides.

A Tidal Efficiency TE may be defined by

$$TE = \frac{\frac{\alpha}{\emptyset_o \beta}}{\frac{\alpha}{\emptyset_o \beta} + 1} , \quad (6)$$

usually characterizing in hydrogeology (e.g. Jacob, 1950, Walton, 1970) the effect of rivers, lakes levels changes on the well but that expression is also valid for the elastic Earth tidal well response.

The Tidal Efficiency TE and the Barometric Efficiency BE are thus related by the simple relation.

$$|BE| + |TE| = 1 . \quad (7)$$

We calculate, for the two confined wells of the ROB, the theoretical tidal efficiency  $|TE|_{theo}$  and also deduce  $|TE|_{obs}$  from the observations (cf table 5).

The observed values of the Tidal Efficiency are in agreement with but lower than the theoretical values. This means that the waves amplitudes are attenuated.

#### 4. Interpretation of the results of the analyses

##### 4.1. Estimation of the permeability and the specific storage of the complex aquifer system

---

To explain the water-level responses in the intermediate and deep wells, we make some numerical explorations.

The observed phase lags of one hour (cf table 1) associated with the amplitude attenuation show that an elastic theory doesn't perfectly describe the behaviour of the wells.

The phase lags cannot be ascribed to the "Nivocaps" transducers. The three transducers are indeed similar and in the upper water table well, the registrations don't show any phase lag. Experimental observations in laboratory demonstrate that the nivocap doesn't distort the signal (Van Ruymbeke and Delcourt, 1986).

We apply the water-levels inelastic response theories to Earth tides usually called the "dynamic problem" in hydrogeology.

In response to a wave with a period  $\tau_p = 2\pi/\omega$ , the fluid pressure fluctuates according to the equation (cf figure 4)

$$p = \rho g (H + z) + p_0 \sin \omega t \quad (8)$$

causing the water-level in the well to oscillate; this oscillation is

$$x_2 = x_0 \sin (\omega t - \phi) , \quad (9)$$

where  $\phi$  is the phase lag.

The amplification factor A, according to Cooper et al. (1965), afterwards referred as C 65, is to be: "the ratio of the amplitude of the oscillation of the water-level in the well  $x_0$  to the amplitude  $h_0 = p_0 / \rho g$  of the pressure head fluctuation in the aquifer". Accordingly, we have

$$A = \frac{x_0}{h_0} \quad (10)$$

To deduce the expression of A, we need the following parameters (C 65):

$$H_e = H + \frac{3}{8} b \quad (11)$$

( $H_e$  is the effective height of the water column)

$$\alpha_w = r_w \left[ \frac{\omega S}{\tau} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

in which  $r_w$  is the well radius, S is the storage coefficient defined by (2),  $\tau$  is the aquifer transmissibility defined by  $\tau = k_D b$  (13)

$$\omega_w = \left[ \frac{g}{H_e} \left( 1 - \frac{r_w^2 \omega}{2 \tau} \operatorname{kei} \alpha_w \right) \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\beta_w = \frac{r_w^2 g}{4 \omega_w \tau H_e} \operatorname{ker} \alpha_w \quad (15)$$

In (14) and (15),  $\ker$  and  $\operatorname{kei}$  are the Kelvin functions, real and imaginary parts of  $K_0(\alpha_w i^{1/2})$  which is the modified Bessel function of the second kind of order zero.

The amplification factor is found to be

$$\frac{\rho g x_0}{\rho_0} = A = \left[ \left( 1 - \frac{\pi r_w^2}{\tau_p} \operatorname{kei} \alpha_w - \frac{4\pi^2 H_e}{\tau_p g} \right) + \left( \frac{\pi r_w^2}{\tau_p} \ker \alpha_w \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (16)$$

If the vertical oscillation of the well aquifer system is described by (cf figure 4)

$$x_1 = x'_0 \sin \omega t, \quad (17)$$

the water-level as recorded by an instrument moving with the land surface is then

$$x = x_2 - x_1, \quad (18)$$

with  $x_2$  and  $x_1$  defined by (9) and (17).

The amplification factor  $A'$ :

$$A' = \frac{x_0}{x'_0} \quad (19)$$

is as a function of  $A$ , with

$$A' = \frac{4\pi^2 H_e}{\tau_p^2 g} A, \quad (20)$$

We deduce the observed amplification for the water-level measure:

$$A_{\text{observed}} = A \left( 1 - \frac{4\pi^2 H_e}{\tau_p^2 g} \right) \quad (21)$$

The phase lag is

$$\phi = A \tan^{-1} \frac{2\beta_w \omega_w \omega}{\omega^2 - \omega_w^2}, \quad (22)$$

in which  $\omega_w$  and  $\beta_w$  are given by (14) and (15)

The expressions (16), (21) and (22) show that the water-level response in the well to a wave is depending on the wave period and on the well aquifer system parameters: well radius  $r_w$  and effective height of the water column  $H_e$ , transmissivity  $\bar{\epsilon}$  and storage coefficient  $S$  of the aquifer.

For tidal waves periods, we deduce from (21)

$$A_{\text{observed}} = A = \frac{\rho g x_0}{\rho_0} = \frac{x_0}{h_0} \quad (23)$$

This expression is verified by the numerical values given in the table 6. We may consequently calculate  $A$  by (16) only.  $A$  and  $\phi$  are written in the table 6. Thus, the calculated phase lags are not in agreement with the observed phase lags.

We also apply the Morland's and Donaldson's theory (1984): according to their study, we consider the parameter  $n_p$  given as

$$n_p = \frac{\bar{k}}{k_i} \quad , \quad (24)$$

in which  $k_i$  is the intrinsic permeability ( $k_i = \frac{k_D \eta}{\rho g}$ , with  $\eta$ , the dynamical viscosity) and with

$$\bar{k} = \frac{\eta \omega r^2}{\rho g b} \quad . \quad (25)$$

That parameter  $n_p$  is required to lie in an approximated range

$$0.04 \leq n_p \leq 0.2 \quad (26)$$

to obtain a one centimeter amplitude and a greater than eleven degree phase lag.

The validity of the condition (26) is governed by a right combination of the aquifer parameters, the waves period and the radius of the well  $r_w$ . To verify it for the two wells, we should have

- for the system "intermediate well - tuf of Lincent aquifer" :

$$0.27 \text{ m} \leq r_w \leq 0.60 \text{ m}$$

- for the system "deep well - bedrock aquifer" :

$$0.56 \text{ m} \leq r_w \leq 1.25 \text{ m}$$

Those two conditions are not realistic since the well radius value is 0.10 m.

We look for other factors to explain the amplitude attenuation and the phase lag : the inertial effect of the water in the aquifer and in the well and the "bore effective radius".

- The inertial effect of the water in the aquifer may be neglected if the condition (C 65)

$$\frac{r_w^2}{2b\phi_0} \ln \frac{r_i}{r_w} \ll H_e \quad (27)$$

is verified ;  $r_i$  is the influence region radius.

- The inertial effect of the water in the well may be neglected if the condition (C 65)

$$x_0 < \frac{\pi r_w^3 g}{10 f \gamma H_e} \ker \alpha_w \quad (28)$$

is verified ;  $f$  is the pipe friction.

For the two confined wells of the ROB, the two conditions (27) and (28) are always verified (DH 88). Thus the inertial effect of the water in the aquifer and in the well are not responsible of the observed phase lags.

- We consider the effective radius effect in the following way : since, according to Marsily (1981), "the well radius  $r_w$  is not well defined, it is admitted that it exists for the borehole a "bore effective radius ( $r_e$ )" that is to be taken into account for the water-level interpretations and that is somewhat greater than the true well radius  $r_w$ ". We calculate  $A$  by (16) and  $\phi$  by (22) for the two wells introducing in those expressions a set of  $r_e$  values larger and larger (cf table 7). To obtain a  $\phi$  value in agreement with the observed one, the required  $r_e$  values are (cf table 7)

- for the intermediate well,  $r_e = 0.53$  m
- for the deep well,  $r_e \geq 0,60$  m

These values are not realistic since, according to hydrogeological considerations the effective radius is only 0.06 m to 0.10 m greater than the true well radius value (Huisman, 1972). These unrealistic large  $r_e$  values are moreover in agreement with the unrealistic large radius values we deduced from the theory of Morland et al. (1984).

According to a recent investigation performed by Hsieh et al. (1987), to determine the aquifer transmissivity from Earth tides analysis, the expression of the phase lag is:

$$\phi = A \tan \frac{\frac{r_w^2}{2} \operatorname{ker} \alpha_w}{1 - \frac{\omega r_w^2}{2\zeta} \operatorname{kei} \alpha_w} \quad (29)$$

It also leads to a too low phase lag value which doesn't correspond to the observations.

All these theories are thus in good agreement with themselves but no theory allows to explain the observed phase lags.

Looking for the permeability  $k_D$  and specific storage  $S_s$  values that could explain the observed phase lags, we use the expression given by Gieske (1986) for the phase lag

$$\phi \approx A \tan \frac{r_w^2 K_0 \left( r_w \sqrt{\frac{\omega S_s}{k_D}} \right)}{2b k_D} \quad (30)$$

It must be noticed that for tidal waves, (30) is identical as (22) proposed by (C 65) but, we prefer the formulation (30) that is more suitable.

From (30) for diurnal and semi-diurnal waves, we solve the equations systems with the two  $k_D$  and  $S_s$  unknowns, for each aquifer.

- For the intermediate aquifer, the phase lags values  $\phi$  (for  $M_2$ ,  $\phi = 22^\circ$  and for  $O_1$ ,  $\phi = 13^\circ$ ) lead to  $k_D = 7.0 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-1}$  and  $S_s = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ .
- For the deep well, we obtain with the observed phase lags values  $\phi$  (for  $M_2$ ,  $\phi = 29^\circ$  and for  $O_1$ ,  $\phi = 20^\circ$ ),  $k_D = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-1}$  and  $S_s = 3.70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ .

From these results, we deduce that:

- These high values determined for  $S_s$  ( $\approx 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ ) show that a water volume larger than that separately contained in each aquifer can be restored. We think that this water is coming from the sandwiched clay layer between the two aquifers (see figure 5, the sandwiched clay layer is the clay of Waterschei).
- These values deduced for the permeability  $k_D$  ( $\approx 10^{-8} \text{ ms}^{-1}$ ) are 1000 times lower than the values of  $k_D$  in the two aquifers ( $k_D = 2.47 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$  in the tuf and  $k_D = 4.44 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$  in the bedrock). The values of  $k_D$  are of the same order of magnitude as the value of  $k_D$  of the clay of Waterschei separating the two aquifers. (The deduced value for the deep well,  $k_D = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-1}$ , is nearly equal to the clay permeability value we used in the consolidation study on the site of the ROB, let be  $2 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-1}$ , DH 88). This physically means that the flux is slow and largely influenced by the clay properties. We so interpret the observed phase lags as reflecting the global response of the whole aquifer system involving the tuf aquifer, the clay of Waterschei and the bedrock aquifer: the two "confined aquifers" are indeed not independant but they are to be considered as "leaky aquifers", in a multiple aquifer-aquitard complex system. The water-levels responses in the two wells are depending on the vertical leakage in the aquitard, as shown by the required parameters values to explain the observed phase lags.  
This is the reason why we consider the permeability and specific storage determined from the equations systems (30) as the aquifer system global permeability  $(k_D)_{\text{sys}}$  and the aquifer system global specific storage  $(S_s)_{\text{sys}}$ . The parameters had not been determined from tidal observations yet.  
The vertical leakages between each aquifer through the adjacent aquitard layer also attenuate the tidal amplitude and decrease the Tidal Efficiency.

4.2. Estimation of the porosity and the specific storage of the two aquifer layers.

---

To determine the porosity  $\emptyset_0$  and the specific storage  $S_s$  in each aquifer, we use the water-level amplitude response to Earth tides assuming that it is elastic (this kind of response is called "the static problem" in hydrogeology). This may be justified by one of the conclusions derived by Morland et al. (1984) who showed that the porosity influences the amplitude only and doesn't influence the phase lag.

Various theories describing the elastic response connect the tides in the wells (tidal dilatation  $\epsilon_t$ , water-level fluctuation  $dH$  or fluid pressure variation  $dp$ ) to the aquifer parameters (specific storage  $S_s$ , porosity  $\emptyset_0$ ).

We apply :

- The Bredeshoeft's model (1967) in which  $dH$  is expressed as :

$$dH = - \frac{1}{S_s} \epsilon_t , \quad (31)$$

in which  $\epsilon_t$  is the tidal dilatation defined by Melchior (1983).

- the Narasihman's and Kanehiro's procedure (1980,1984) that leads to

$$\frac{S_s}{\emptyset_0} = \rho g \beta \left( 1 + \frac{dp}{K_b \epsilon_t - dp} \right) , \quad (32)$$

in which  $K_b$  is the bulk modulus.

For each aquifer, we deduce from the results of the tidal analysis (cf. tables 1, 2 and 3) and from the water-levels barometric response also [cf (5)] , the ratio  $S_s/\emptyset_0$  values and, separately, the  $S_s$  and  $\emptyset_0$  values.

It must be noticed that the estimations of  $S_s/\emptyset_0$  performed from the data set covering one year, from the data set covering twenty months, from the complete set of data (34 months) and from the five sub-sets each covering six months, lead to identical values.

The  $S_s$  values according to the various approaches are given in the table 8.

The values deduced according to Narasihman et al. (1980) differ more from the hydrogeological ones than those obtained by applying Bredehoeft's theory (1967). We see that the obtained value (3a) in the table 8 from Earth tidal observations is nearly equal to the value we estimated by the expression (1).

The  $S_s$  values are also in good agreement with those we had deduced by a personal research relative to weak loadings in soil and rock mechanics (DH 88). Since  $\alpha$ , aquifer skeleton vertical compressibility, appears in the  $S_s$  expression (1), we can conclude that the analysis of the observed tides in wells allows to justify a posteriori the approaches we followed by using soil and rock mechanics considerations to estimate the layers elasticity parameters.

The combined water-level responses to the atmospheric pressure and to Earth tides allow to determine the porosity  $\emptyset_0$  [according to (5) and (31)]. We obtain

- for the tuf,  $\emptyset_0 = 31 \%$
- for the bedrock,  $\emptyset_0 = 14 \%$

For the bedrock, the value is rather greater than that obtained by classical rock mechanics expressions (we obtained 9 %) but for the tuf the porosity value estimated in this way is quite realistic (33 % according to soil mechanics).

## 5. Conclusion

---

The study of the water-level tidal responses in the wells leads to reliable estimations of the aquifer parameters and of the aquifer system parameters.

Acknowledgements

The author is greatly indebted to Professor P. Melchior, the director of the Royal Observatory of Belgium, Brussels, where all the computations were performed. The author is also grateful to Dr. B. Ducarme for his constant support and comments. Thanks are to be adressed to Professor J. Bouckaert, the director of the Belgian Geological Survey (that made the borehole) and to Dr. P. Laga and Professor A. Delmer (Belgian Geological Survey) for their comments about Geology, soil and rock mechanics.

Notations

b	confined aquifer thickness	L
f	pipe friction	/
g	acceleration due to gravity	LT-2
h	piezometric head	L
h <sub>o</sub>	pressure head fluctuation	L
k <sub>D</sub>	permeability	LT-1
n <sub>p</sub>	parameter	/
p	fluid pressure	ML-1T-2
p <sub>a</sub>	atmospheric pressure	ML-1T-2
r <sub>e</sub>	effective radius	L
r <sub>i</sub>	influence region radius	L
r <sub>w</sub>	well radius	L
t	time	T
x <sub>o</sub>	water level well oscillation amplitude	L
A, A'	amplification factors	/
BE	barometric efficiency	/
H	water column height above the aquifer	L
H <sub>e</sub>	effective water column height	L
K <sub>b</sub>	bulk modulus	ML-1T-2
S	storage coefficient (of the aquifer)	/
S <sub>s</sub>	specific storage (of the aquifer)	L-1
Σ	transmissivity	L <sup>2</sup> T-1
TE	Tidal Efficiency	/
α	aquifer skeleton vertical compressibility	M-1LT <sup>2</sup>
α <sub>w</sub>	parameter	/
β	fluid compressibility	M-1LT <sup>2</sup>
β <sub>w</sub>	parameter	/
ε <sub>t</sub>	tidal dilatation	/
ρ	fluid volumic mass	ML-3
τ <sub>p</sub>	wave period	T
φ	water-level phase lag	/
ω	wave frequency	T-1
ω <sub>w</sub>	parameter	T-1
∅ <sub>o</sub>	volume porosity	/

References

- BREDEHOEFT, J.D., 1967 : Response of well-aquifer systems to Earth tides.  
Journal of Geophysical Research, vol. 72, 3075-3087.
- COOPER, H.H., Jr., BREDEHOEFT, J.D., PAPADOPOULOS, I.S. & BENNET, R.R., 1965 : The response of well-aquifer systems to seismic waves.  
Journal of Geophysical Research, vol. 70, n° 16, 3915-3926.
- DELCOURT-HONOREZ, M., 1986 (a) : Earth tide response and barometric effect in three well-aquifer systems. The effect on gravity of the three water-level variations.  
Proceedings of the 10th Int. Symp. on Earth Tides, Madrid (Ed. R. Vieira), 843-854.
- DELCOURT-HONOREZ, M., 1986 (b) : Twenty months water-levels registrations in three well-aquifer systems, on the site of the Royal Observatory of Belgium.  
Bull. Inf. Marées Terr., n° 97, 6639-6648.
- DELCOURT-HONOREZ, M., 1988 : Sur la contribution des variations de la pression atmosphérique et des fluctuations du niveau des nappes aquifères aux variations de la pesanteur.  
Dissertation doctorale, Faculté des Sciences, Université Catholique de Louvain.
- DE MEYER, F., 1982 : A Multi input single output model for Earth tide data.  
Bull. Inf. Marées Terr., 88, 5628-5674.
- DUCARME, B., 1975 : The computational procedures at the International Centre for Earth Tides (ICET).  
Bull. Inf. Marées Terr., 72, 4156-4181.
- DUCARME, B., 1978 : Data standardization in tidal research.  
Bull. Inf. Marées Terr., 78, 4712-4719.
- GIESKE, A., 1986 : Phase shifts in the response of boreholes to tidal gravity variations.  
Proceedings of the 10th Int. Symp. on Earth tides, Madrid (Ed. R. Vieira), 827-834.

- HSIEH, P.A., BREDEHOEFT, J.D. & FARR, J.M. 1987 : Determination of Aquifer Transmissivity from Earth Tide Analysis. Water Resources Research, vol. 23, n° 10, 1824-1832.
- HUISMAN, L., 1972 : Groundwater recovery. The Macmillan Press LTD, London
- JACOB, C.E., 1950 : Flow of ground water. Engineering Hydraulics (Ed. Hunter Rouse), John Wiley & Sons, New York.
- de MARSILY, 1981 : Hydrogéologie quantitative. Masson.
- MELCHIOR, P.J. & GULINK, 1956 : Sur l'effet des marées terrestres dans les variations de niveau observées dans les puits, en particulier au sondage de Turnhout. Comm. de l'ORB, Série Géoph., n° 37.
- MELCHIOR, P.J., STERLING, A. & WERY, A., 1964 : Effets de dilatations cubiques dues aux marées terrestres observés sous forme de variations de niveau dans un puits à Basècles (Hainaut). Comm. de l'ORB, Série Géoph., n° 66.
- MELCHIOR, P.J., 1983 : The tides of the planet Earth. Pergamon Press, Oxford., 2nd edition.
- MORLAND, L.W. & DONALDSON, E.C., 1984 : Correlation of porosity and permeability of reservoirs with well oscillations induced by Earth tides. Géophys. J.R. Astr. Soc., n° 79, 705-725.
- NARASIMHAN, T.N. & KANEHIRO, B.Y., 1980 : A note on the meaning of storage coefficient. Water Resources Research, vol. 16, n° 2, 423-429.
- VAN RUYMBEKE, M. & DELCOURT, M., 1986 : A capacitive transducer for water-level measurements : "Nivocap". Proceedings of the 10th Int. Symp. on Earth Tides, Madrid (Ed. Vieira), 95-102.
- WALTON, W.C., 1970 : Groundwater resource evaluation. McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering. McGraw-Hill Book Company, New York.

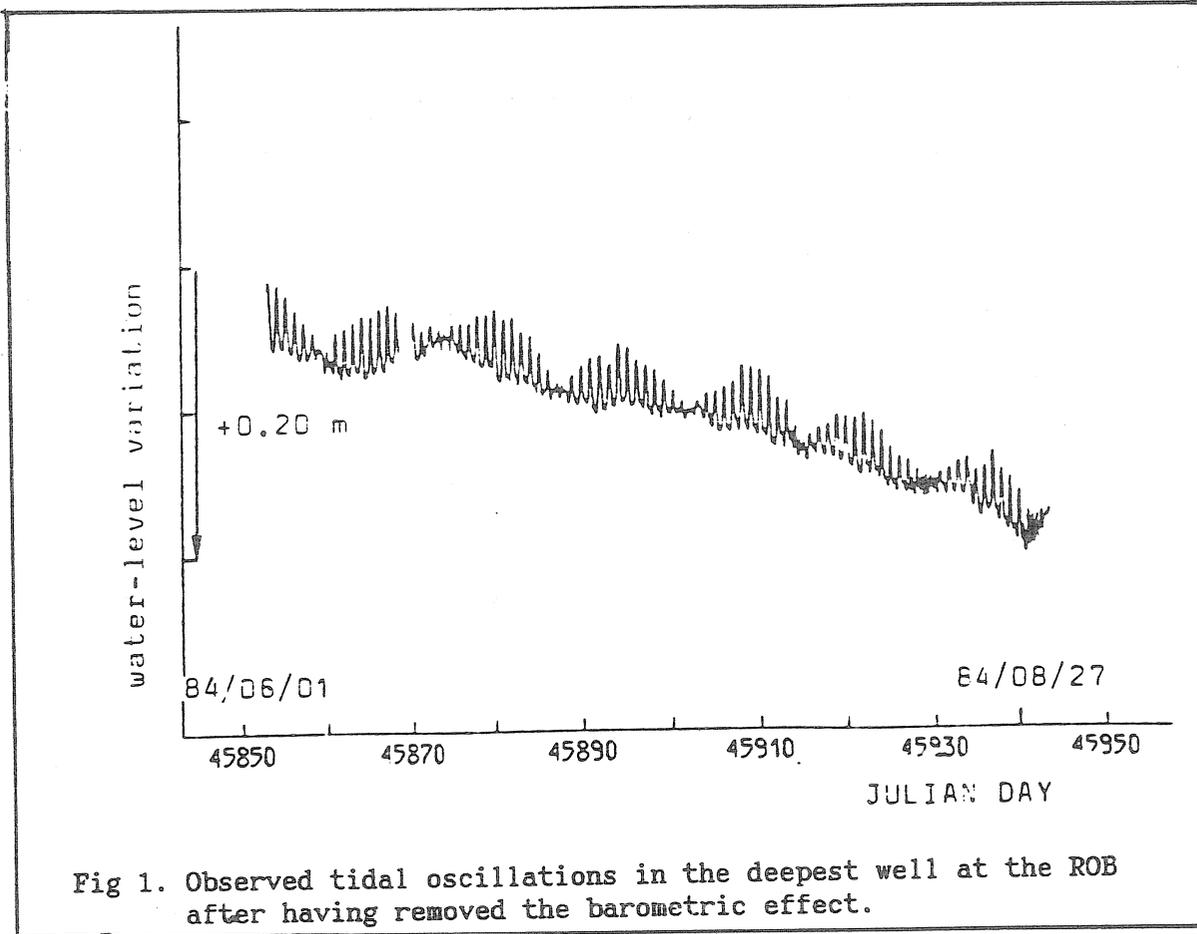


Fig 1. Observed tidal oscillations in the deepest well at the ROB after having removed the barometric effect.

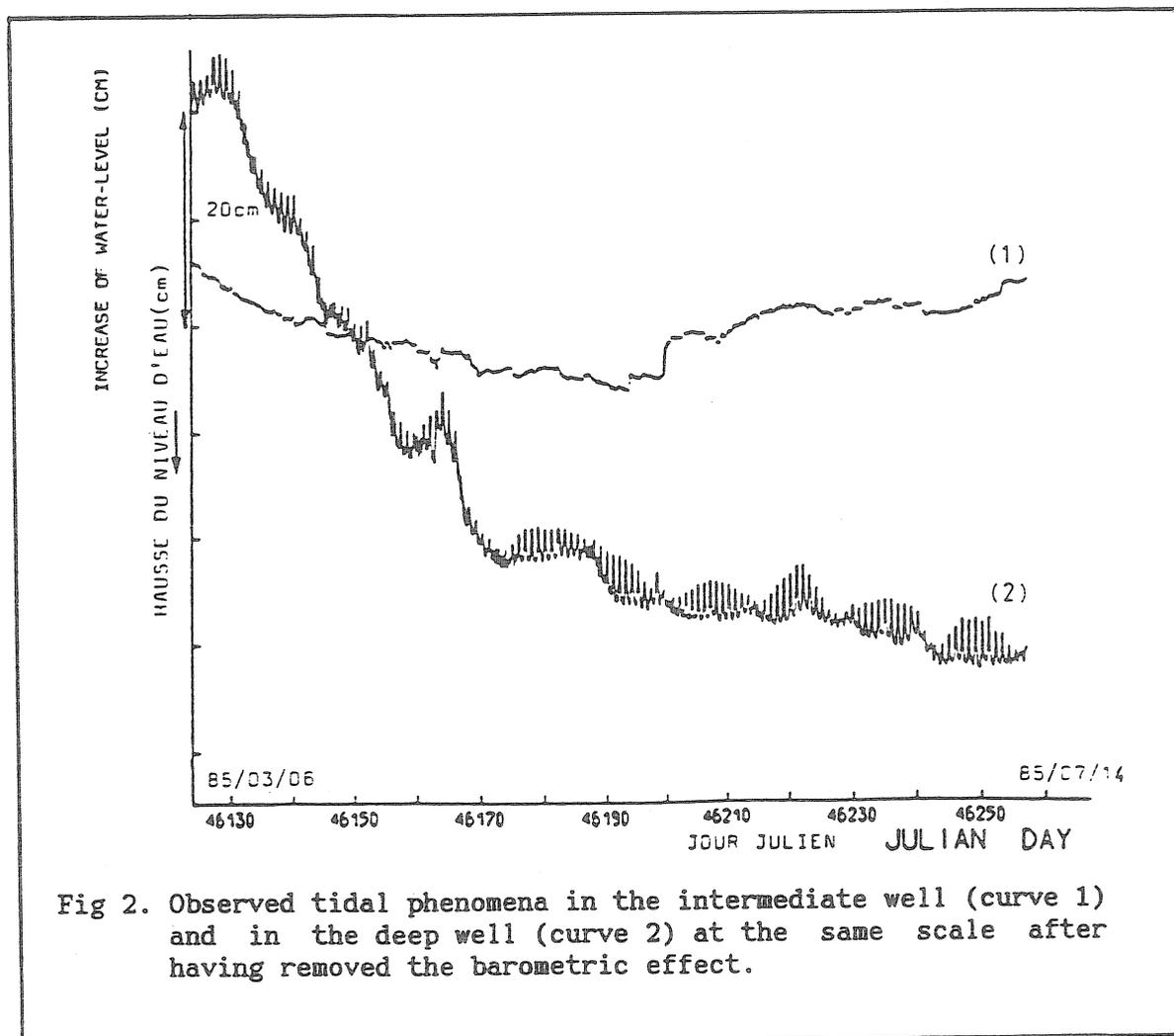


Fig 2. Observed tidal phenomena in the intermediate well (curve 1) and in the deep well (curve 2) at the same scale after having removed the barometric effect.

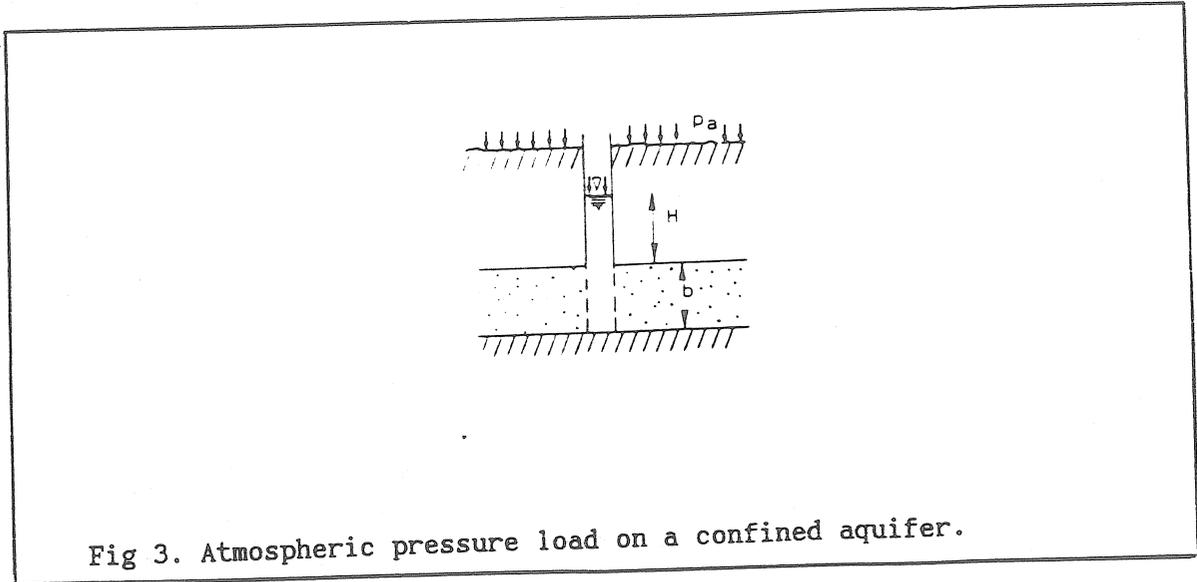


Fig 3. Atmospheric pressure load on a confined aquifer.

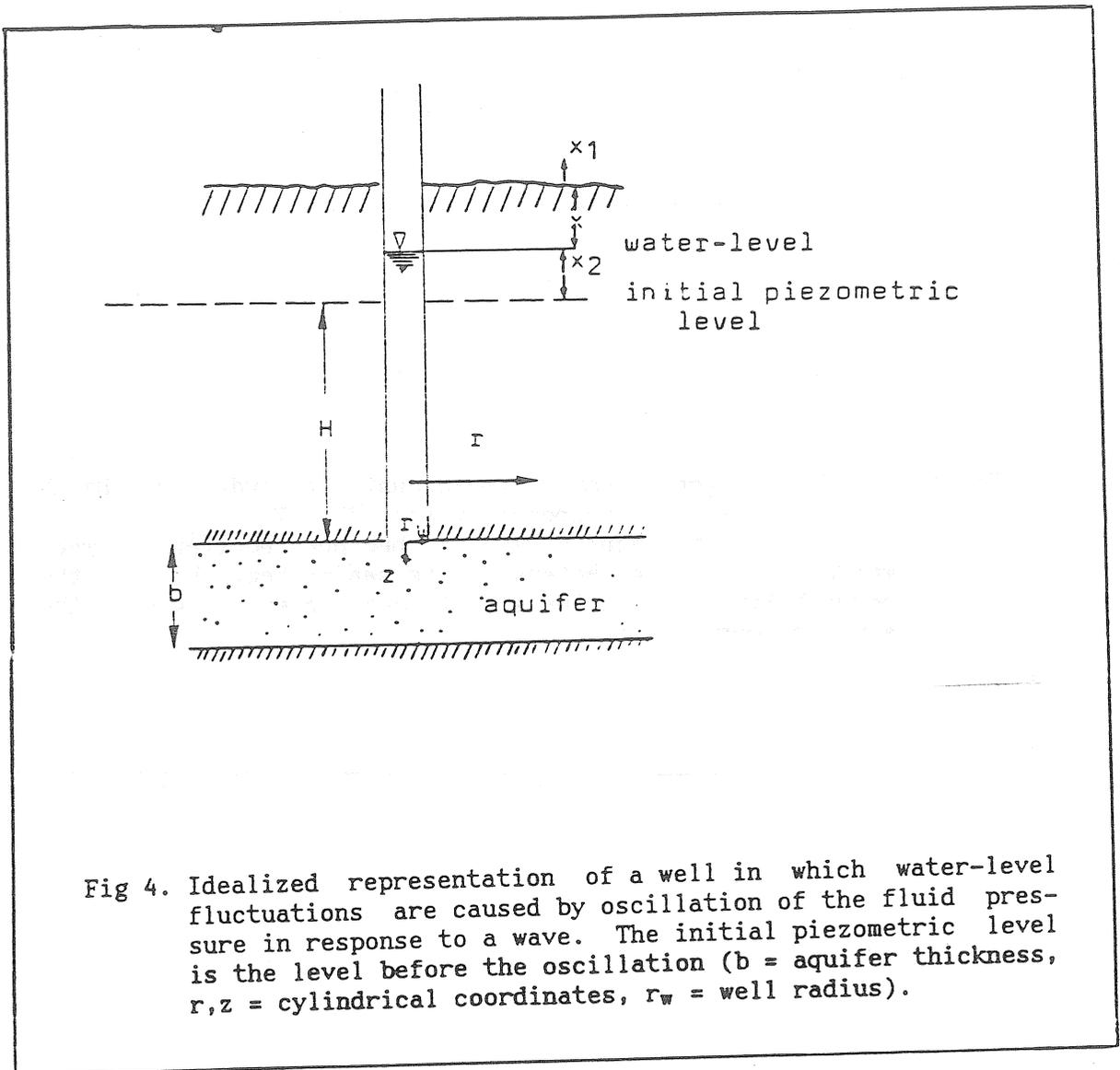


Fig 4. Idealized representation of a well in which water-level fluctuations are caused by oscillation of the fluid pressure in response to a wave. The initial piezometric level is the level before the oscillation ( $b$  = aquifer thickness,  $r, z$  = cylindrical coordinates,  $r_w$  = well radius).

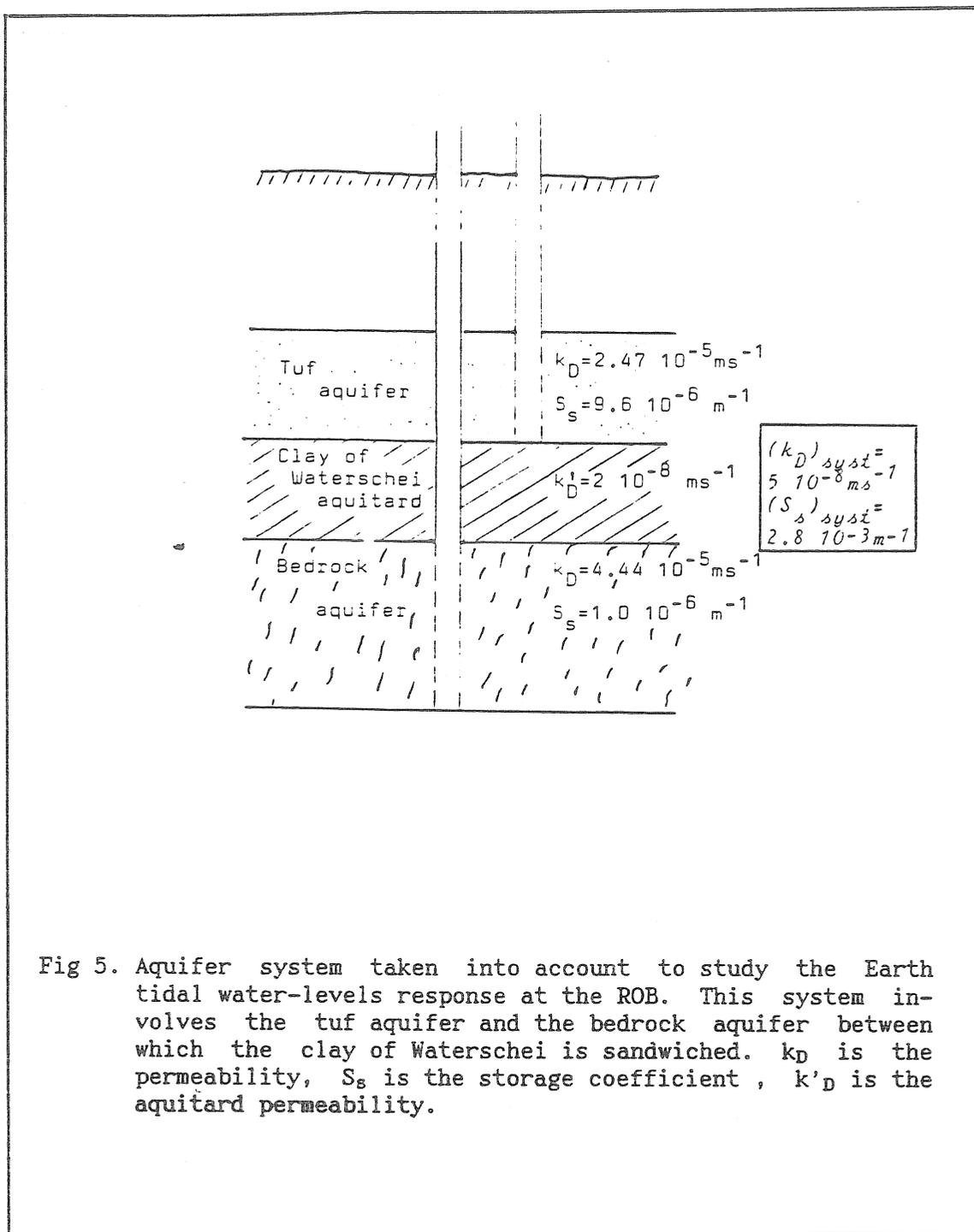


Fig 5. Aquifer system taken into account to study the Earth tidal water-levels response at the ROB. This system involves the tuf aquifer and the bedrock aquifer between which the clay of Waterschei is sandwiched.  $k_D$  is the permeability,  $S_s$  is the storage coefficient,  $k'_D$  is the aquitard permeability.



T A B L E 2

Water-levels tidal analyses results of the six months sub-sets of data for the intermediate well after having removed the barometric effect. The amplitudes and their RMS are expressed in mm.

	84/07/01 → 84/12/31 (184 d., 3792 h.r.)	85/01/01 → 85/06/30 (181 d., 4128 h.r.)	85/07/01 → 85/12/31 (184 d., 4272 h.r.)	86/01/01 → 86/06/30 (181 d., 4032 h.r.)	86/07/01 → 86/12/31 (185 d., 4224 h.r.)
$m_2$	0.51 ± 0.05	0.66 ± 0.04	0.76 ± 0.03	0.73 ± 0.04	0.84 ± 0.04
$N_2$	0.14 ± 0.05	0.13 ± 0.04	0.15 ± 0.03	0.16 ± 0.05	0.20 ± 0.05
$S_2$	0.32 ± 0.05	0.41 ± 0.04	0.50 ± 0.03	0.54 ± 0.04	0.61 ± 0.04
$S_1K_1$	0.76 ± 0.11	1.00 ± 0.08	0.77 ± 0.08	0.88 ± 0.14	1.08 ± 0.14
$P_1$	0.46 ± 0.12	0.12 ± 0.09	0.72 ± 0.09	0.57 ± 0.15	0.59 ± 0.16
$O_1$	0.62 ± 0.11	0.90 ± 0.08	0.86 ± 0.08	0.73 ± 0.14	1.05 ± 0.14
amplitude ratios					
theory					
$m_2/m_2$	0.520	0.613	0.661	0.737	0.730
$m_2/m_2$	0.232	0.194	0.194	0.221	0.241
$m_1/K_1$	0.789	0.894	1.125	0.831	0.968
$m_2/O_1$	0.989	0.739	0.879	0.995	0.803
standard deviation					
$D$	4.53	3.56	3.62	6.13	6.35
$SD$	1.85	1.43	1.42	1.70	1.69
$TD$	0.98	0.74	0.63	0.96	0.83

T A B L E 3

Water-levels tidal analyses results of the six months sub-sets of data for the deep well after having removed the barometric effect.  
The amplitudes and their RMS are expressed in mm.

	84/07/01 → 84/12/31 (104 d., 4176 h.r.)	85/01/01 → 85/06/30 (102 d., 4320 h.r.)	85/07/01 → 85/12/31 (183.5 d., 4032 h.r.)	86/01/01 → 86/06/30 (180 d., 3504 h.r.)	86/07/01 → 86/12/31 (185 d., 3264 h.r.)
M <sub>2</sub>	5.83 ± 0.11	5.48 ± 0.07	5.36 ± 0.10	5.21 ± 0.20	5.05 ± 0.08
M <sub>2</sub>	158.6° ± 1.1°	149.0° ± 0.0°	148.8° ± 1.1°	147.5° ± 2.1°	146.4° ± 0.9°
M <sub>2</sub>	1.05 ± 0.11	0.97 ± 0.07	0.90 ± 0.11	0.97 ± 0.22	0.80 ± 0.09
S <sub>2</sub>	152.3° ± 5.8°	153.5° ± 4.4°	166.0° ± 6.4°	154.5° ± 12.9°	149.1° ± 6.5°
S <sub>1</sub> K <sub>1</sub>	3.22 ± 0.11	2.92 ± 0.07	3.01 ± 0.10	3.01 ± 0.19	2.94 ± 0.08
P <sub>1</sub>	152.7° ± 1.9°	143.5° ± 1.4°	140.2° ± 1.9°	135.2° ± 3.5°	132.7° ± 1.5°
P <sub>1</sub>	8.66 ± 0.21	8.49 ± 0.16	8.42 ± 0.18	8.30 ± 0.30	7.62 ± 0.13
O <sub>1</sub>	164.6° ± 1.4°	150.3° ± 1.1°	157.0° ± 1.2°	159.1° ± 2.1°	156.8° ± 1.0°
O <sub>1</sub>	3.91 ± 0.22	2.95 ± 0.17	3.78 ± 0.20	2.60 ± 0.33	3.19 ± 0.15
O <sub>1</sub>	159.2° ± 3.3°	155.4° ± 3.3°	155.9° ± 3.0°	163.6° ± 7.4°	152.0° ± 2.6°
O <sub>1</sub>	7.70 ± 0.21	7.54 ± 0.16	7.49 ± 0.17	7.69 ± 0.30	7.03 ± 0.12
O <sub>1</sub>	164.5° ± 1.5°	159.1° ± 1.2°	156.5° ± 1.3°	159.4° ± 2.2°	159.8° ± 1.0°
standard deviation	9.06	7.11	7.59	12.21	5.03
SD	4.35	2.96	3.92	6.95	2.63
TD	2.55	1.76	1.07	4.00	1.52
amplitude ratios theory					
S <sub>2</sub> /M <sub>2</sub>	0.552	0.533	0.561	0.578	0.583
M <sub>2</sub> /M <sub>2</sub>	0.181	0.176	0.183	0.185	0.158
O <sub>1</sub> /K <sub>1</sub>	0.089	0.080	0.089	0.926	0.923
M <sub>2</sub> /O <sub>1</sub>	0.757	0.727	0.716	0.678	0.718

T A B L E 4

Various parameters values for the well-aquifer systems  
 ("intermediate well - tuf of Lincent aquifer" and "deep well-bedrock aquifer")  
 at ROB

	Thickness b(m)	Porosity $\phi$	Poisson coefficient $\nu_p$	Vertical compressibility $\alpha(m^2N^{-1})$	Specific storage $S_g(m^{-1})$	Permeability $k_D(mS^{-1})$	Transmissivity $T(m^2S^{-1})$	Well radius $r_w(m)$	Effective height $H_e(m)$
Intermediate well tuf of Lincent aquifer	10.50	33 %	0.27	8.30 10 <sup>-10</sup>	9.6 10 <sup>-6</sup>	2.47 10 <sup>-5</sup>	25.9 10 <sup>-5</sup>	0.10	5.5625
Deep well bedrock aquifer	26.00	9 %	0.29	7.78 10 <sup>-11</sup>	1.0 10 <sup>-6</sup>	4.44 10 <sup>-5</sup>	114.4 10 <sup>-5</sup>	0.10	12.4375

T A B L E 5  
 BAROMETRIC EFFICIENCIES  $|BE|$  and TIDAL EFFICIENCIES  $|TE|$  of the two confined wells at ROB.

	INTERMEDIATE AQUIFER					DEEP AQUIFER				
	$K_1$	$O_1$	$M_2$	$N_2$	$S_2$	$K_1$	$O_1$	$M_2$	$N_2$	$S_2$
waves efficiencies										
$ TE $ observed	0.638	0.795	0.726	0.865	0.943	0.525	0.571	0.493	0.467	0.671
	mean values					mean values				
$ BE $ observed by "MISO"	0.123					0.446				
$ BE $ theoretical by (4)	0.155					0.347				
$ TE $ observed	0.793					0.545				
$ TE $ theoretical by (6)	0.845					0.653				
						$ BE _{theor} +  TE _{theor} = 1$				
	$ BE _{obs} +  TE _{obs} = 0.916$					$ BE _{obs} +  TE _{obs} = 0.991$				

T A B L E 6

Amplification factors ( $A_{obs}$  and  $A$ ) and phase lags  $\phi$  values for the  $M_2$  and  $O_1$  waves in the two confined wells at ROB.

		$M_2$	$O_1$
Intermediate well	$A$	0.9977	0.9989
	(16)		
	$A-A_{obs}$	$10^{-8}A$	$10^{-9}A$
	(21)		
Deep well	$\phi$	$1^{\circ}15$	$0^{\circ}59$
	(22)		
	$A$	0.9995	0.9998
	(16)		
Deep well	$A-A_{obs}$	$10^{-7}A$	$10^{-8}A$
	(21)		
	$\phi$	$0^{\circ}30$	$0^{\circ}15$
	(22)		

T A B L E 7

Calculated water-levels phase lags  $\phi$  values by (30) in the intermediate and in the deep wells, for the  $M_2$  and  $O_1$  waves, as functions of the effective radius  $r_e$ ;  $\ker \alpha_w$  is the real part of  $K_0 (\alpha_w i)^{1/2}$ , modified Bessel function of second kind of order zero;  $\alpha_w = r_w (\omega S/\tau_e)^{1/2}$ . The  $\alpha_w$  and  $\ker \alpha_w$  numerical values are cut.

	$r_e = r_w = 0.1 \text{ m}$		$r_e = 0.20 \text{ m}$		$r_e = 0.40 \text{ m}$		$r_e = 0.50 \text{ m}$		$r_e = 0.60 \text{ m}$	
	$M_2$	$O_1$	$M_2$	$O_1$	$M_2$	$O_1$	$M_2$	$O_1$	$M_2$	$O_1$
INTER- MEDIATE WELL	$\alpha_w$	0.000739	0.001478	0.001025	0.002956	0.002050	0.0003694	0.002563	0.002217	0.003075
	$\ker \alpha_w$	7.326144	6.632996	6.998840	5.939850	6.305693	5.716750	6.082552	5.534385	5.900228
	$H_e$	5.5625	4.3437	4.3437	4.0390	4.0390	4.0025	4.0025	3.9826	3.9826
	$\phi$	1°14	4°11	2°09	14°43	7°49	21°16	11°2	28°35	15°47
DEEP WELL	$M_2$	0.000178	0.000357	0.000247	0.000714	0.000495	0.000893	0.000619	0.001072	0.000743
	$\ker \alpha_w$	8.745762	8.052615	8.418415	7.359468	7.725268	7.136325	7.502125	6.953497	7.319803
	$H_e$	12.4375	10.4218	10.4218	9.9179	9.9179	9.8575	9.8575	9.8246	9.8246
	$\phi$	0°31	1°13	0°57	4°13	2°09	6°25	3°17	8°74	4°45

T A B L E 8  
 In situ parameters  $S_0$ ,  $S_0/\theta_0$  values determination for the two confined aquifer layers at ROB from the well tidal observations and from the barometric effect in the wells.

waves	INTERMEDIATE AQUIFER					DEEP AQUIFER				
	$K_1$	$O_1$	$M_2$	$N_2$	$S_2$	$K_1$	$O_1$	$M_2$	$N_2$	$S_2$
$\epsilon_T$ (10 <sup>-8</sup> )	1.2	0.86	0.03	0.16	0.30	1.2	0.86	0.83	0.16	0.38
$S_0/\theta_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) (32) <sup>a</sup> N.K. (1984)	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	5.2	5.4	5.2	5.1	5.3
$S_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) (31) <sup>a</sup> Bred (1967)	12.8	10.2	11.2	9.4	8.7	1.4	1.2	1.5	1.6	1.1
	Mean values					Mean values				
$S_0/\theta_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) (32) <sup>a</sup> N.K. (1984)	4.6 (1a)					5.3 (1b)				
$S_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> )	1.5 (2a)					0.5 (2b)				
$S_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) (31) <sup>a</sup> Bred (1967)	10.5 (3a)					1.4 (3b)				
$S_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) (5) <sup>aa</sup> Bred (1967)	12.0 (4a)					0.9 (4b)				
$S_0$ (10 <sup>-6m-1</sup> ) definition (1) <sup>aaa</sup>	9.6 (5a)					1.0 (5b)				

N.K. = Narasimhan & Kanehiro  
 Bred = Bredehoeft

<sup>a</sup> estimation from tidal response observation  
<sup>aa</sup> estimation from barometric response observation  
<sup>aaa</sup> Hydrogeological definition

Traduction

Approximation stable du signal polyharmonique de la marée terrestre

A.M. Pougin

Marées et rotation de la Terre

Akad. Naouk Ukraïnskoï SSR, Kiev Naoukova Doumka, pp 47-53, 1985.

Dans cet article on examine une méthode asymptotique de détermination des dispersions inconnues du signal polyharmonique de marée avec des observations irrégulièrement précises pour la méthode des moindres carrés (MHK). On décrit les résultats de l'utilisation d'une méthode stable d'analyse des marées terrestres: la méthode de plus petits modules MHM 82 avec filtrations préliminaires des données (4, 5).

I. Admettons, que dans l'espace de temps  $t_k$ , on observe un signal polyharmonique affecté d'un bruit irrégulièrement précis, additif,  $f_k$  sans auto-corrélation

$$z_k = \sum_{i=1}^n A_i \cos \omega_i t_k + B_i \sin \omega_i t_k + f_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Les fréquences  $\omega_i$  sont connues et réparties dans l'intervalle de temps  $(t_N - t_1)$  (voir plus bas la condition (5)).

En supposant que la dispersion de la valeur accidentelle  $f_k$  varie avec le temps, nous modéliserons les variations saisonnières et dépendantes de l'observateur de la précision des observations et également le progrès des appareils lors des observations nombreuses du phénomène.

Nous appliquerons pour la détermination des paramètres  $A_i$  et  $B_i$  la méthode des moindres carrés avec pondération des observations  $r_k = p_k^2$ ,  $k = 1 \dots N$  de sorte que MHK (6) équilibré s'applique aux valeurs  $p_k z_k$ . Le poids  $r_k$  est l'estimation (fonction) de la valeur de la dispersion inverse  $V_k = M. f_k^2$  où  $M$  est le signe de l'espoir mathématique d'après une quantité de réalisations de processus accidentels  $\left\{ \frac{z_k}{p_k} \right\}_{k=1}^N$ .

Nous poserons

$$R^T = (A_1, \dots, A_N), \quad F^T = (f_1, \dots, f_N),$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t_1 & & \\ \sin \omega_1 t_1 & & \\ & \dots & \\ & & \cos \omega_N t_N \\ & & \sin \omega_N t_N \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ & \dots \\ 0 & A_N \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_N \end{pmatrix}.$$

T est le signe de transposition de la matrice et du vecteur. Alors  $PZ = CR + PF$  et pour MHK la matrice de corrélation du vecteur R est

$$Q = R^T L T^{-1}, \tag{2}$$

où

$$L = C^T X P C, \quad T = C^T C, \quad X = M. (F F^T) = \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & V_N \end{pmatrix}.$$

Notre problème est le calcul asymptotique ( $N \rightarrow \infty$ ) de la matrice Q et l'étude de l'influence des poids  $r_k$  sur l'efficacité de MHK.

La méthode asymptotique (à l'inverse de (4)) utilise la loi des plus grands nombres et les caractéristiques des valeurs  $r_k$ ,  $V_k$  et  $\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \omega_i t_k$ . Nous supposons ( $\omega_i t_k / 2\pi$ ) la valeur accidentelle singulièrement répartie en (0,1) ( $\{ \}$  est le symbole de prise de la partie fractionnaire du nombre). Il est naturel de poser, après avoir désigné la valeur accidentelle  $s \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \omega t_1$ .

$$M.S. = \frac{1}{2}, \quad M.S. = D. \tag{3}$$

Pour les observations équidistantes ( $t_k - t_{k-1} = H, k = 2 \dots N$ ) par la base pour (3) on se sert des égalités (4)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\cos \omega_i t_k}{\sin \omega_i t_k} \right]^2 = \frac{1}{2} + O(N^{-1}), \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\omega_i t_k) t_k = O(N^{-1}). \tag{4}$$

Les fréquences  $\omega_i, \omega_j$  répondent aux conditions de divisibilité

$$|\omega_i - \omega_j| \geq \frac{2\pi}{t_N - t_1}. \tag{5}$$

Les valeurs  $r_k$  dépendent de  $V_k$  et ne dépendent pas de  $V_L, L \neq k$ , la valeur accidentelle S (comme aussi  $t_k$ ) n'est pas en corrélation avec ( $r_k$ ) et  $V(V_k)$ .

D'après le théorème de Kolmogorov pour la coïncidence des éléments des matrices T et L avec les espoirs mathématiques pour  $N \rightarrow \infty$ , il faut et il suffit que ces valeurs existent. Avec probabilité  $\emptyset$  pour les valeurs indépendantes  $S_k$  (7).

$$M.S. = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \leq \frac{\sqrt{M.(5-M.S)^2}}{\sqrt{N}}, \tag{6}$$

où

$$Q = \sqrt{\frac{2}{N}} \int_0^1 e^{-z^2/2} dz.$$

Alors en vertu de l'indépendance des valeurs  $s$  et  $r$  avec probabilité  $q^2$

$$T_{ii} = \frac{N}{2} M \cdot r \cdot O(\sqrt{N}), \quad T_{ij} = O(\sqrt{N}), \quad i \neq j, \quad T^{-1} = \frac{2}{N \cdot M \cdot r} J \cdot O(N^{-3/2}), \quad (7)$$

où  $J$  est la matrice unitaire ( $2n \times 2n$ ) des éléments. Pour la matrice  $L$  nous avons

$$L_{ij} = \begin{cases} \frac{N}{2} M \cdot r^2 V \cdot O(\sqrt{N}), & i=j \\ O(\sqrt{N}), & i \neq j. \end{cases} \quad (8)$$

Maintenant avec une probabilité à volonté voisine de  $L$ , avec l'accroissement de  $N$  nous avons

$$Q_{ii} = \frac{2}{N} \frac{M \cdot r^2 V}{(M \cdot r)^2}, \quad Q_{ij} = O(N^{-3/2}), \quad i \neq j. \quad (9)$$

Pour les observations régulièrement précises indépendantes de la dispersion des inconnues du vecteur  $R$  pour MHK est

$$\begin{aligned} Q_{ii}^0 &= \frac{2}{N} M \cdot V, \\ M \cdot f_k^2 &= M \cdot V, \quad k=1 \dots N. \end{aligned}$$

où

L'efficacité  $E$  de l'utilisation de MHK avec des poids  $r_k$ , pour  $N \rightarrow \infty$  est

$$E = Q_{ii}^0 / Q_{ii} = \frac{M \cdot V (M \cdot r)^2}{M \cdot r^2 V}. \quad (10)$$

Si  $f(r/v)$  est la densité de la validité du poids  $r$  dans la condition où la dispersion est égale à  $V$ , alors la densité absolue de la validité du poids  $r$

$$f(r) = \int_0^{\infty} f(r/v) f(v) dv, \quad M \cdot r = \int_0^{\infty} r f(r) dr.$$

En posant  $W = r^2 V$ , nous obtenons

$$f(w) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{W}{v}\right) f(v) dv$$

et on peut calculer le rapport (10). On peut contourner les difficultés des calculs par l'introduction de la dépendance statistique.

$$r = \beta V^\gamma \quad (11)$$

où  $\beta$ ,  $V$  sont des valeurs accidentelles indépendantes non négatives. Pour MHK il faut prendre  $\gamma = -1$ . Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  reflètent la non adéquation du poids au procédé de MHK. En substituant (11) dans (10) nous rendons l'efficacité de  $E$

$$E = \gamma_1 \cdot \gamma_2, \quad \gamma_1 = \frac{(M \cdot \beta)^2}{M \cdot \beta^2}, \quad \gamma_2 = \frac{M \cdot V (M \cdot V)^{\gamma_2}}{M \cdot V^{\gamma_2 + 2\gamma}}. \quad (12)$$

D'après l'inégalité de Koch-Bouniakovskogo  $Y_1 \neq 1$ . Pour la répartition gamma des valeurs accidentelles  $\beta$  et  $V$

$$f(x) = x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha}, \quad x, \alpha, \lambda > 0, \quad (13)$$

où  $\Gamma(\dots)$  est la fonction gamma,  $\alpha, \lambda$  sont les paramètres de la répartition, nous avons les facteurs  $Y_1$  et  $Y_2$  conformément à la table 1 indépendants de  $A$ .

TABLE 1. Facteurs d'efficacité de  $Y_1$  et  $Y_2$  pour répartition gamma.

Facteur d'efficacité	$\gamma$	$\alpha$			
		0	0,5	1	2
$Y_1 = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$	-	0,5	0,6	0,67	0,75
$Y_2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2\gamma+2)}$	$\gamma = -1$	0	3,0	2,0	1,5
	$\gamma = -0,5$	3,14	1,9	1,57	1,3

Ainsi  $f(\beta)$  et  $f(V)$  sont en général différents:  $f(V)$  caractérise la qualité des observations,  $f(\beta)$ , comme aussi pour le paramètre est le procédé d'estimation du poids  $r$  c'est-à-dire la méthode d'analyse du signal polyharmonique.

Il est facile d'exprimer l'efficacité de  $E$  pour les autres lois de la répartition des valeurs accidentelles  $\beta$  et  $V$ .

II. Soit le bruit affectant l'observation  $x$  dont la dispersion variable est répartie d'après la loi  $f(x, V)$  où la dispersion  $V$  est répartie d'après la loi  $f(V)$ . Alors la valeur accidentelle  $x$  est répartie d'après la loi

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x, V) f(V) dV. \quad (14)$$

La précision irrégulière du bruit n'est pas observée si on ne suppose pas une certaine netteté de la variation de la dispersion avec le temps.

Pour  $x_k$  non corrélés la méthode de la probabilité maximale est l'obtention de l'optimum du produit  $\prod_{k=1}^n f(x_k)$  ou son logarithme

$$-\sum_{k=1}^n \ln f(x_k) = \min. \quad (15)$$

Nous notons  $-\ln f(x_k) = \psi(x_k)$

Le minimum (15) s'obtient par la procédure d'itération de l'algorithme de MFK avec les poids

$$r_k = \left| \frac{\psi(x_k)}{\Delta x_k} \right|$$

où  $\Delta x_k$  est une absence de coordination après le pas précéant de l'algorithme. L'algorithme concorde si la fonction  $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$  ne croît pas de façon monotone pour  $x > 0$  (6).

Pour la méthode des plus petits modules

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2B}} \exp(-|z|/\sqrt{2B}), \quad (16)$$

où

$$B = M \cdot X^2, \quad \phi(z) = \sqrt{2B} \frac{1}{|z|}$$

Pour les méthodes de travail (stables aux grands écarts des observations de la ligne de régression) de Hubert et Andrews nous avons le même algorithme d'itération. Dans la méthode de Hubert (8)

$$\phi(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq c\sqrt{B} \\ c/|z|, & |z| > c\sqrt{B} \end{cases} \quad (17)$$

où  $c$  est un certain paramètre égal à 0,5 - 2,0. Pour  $\sin$  de l'estimation d'Andrews (9) nous avons

$$\phi(z) = \begin{cases} \sin\left(\frac{z}{c\sqrt{B}}\right)/(cz), & |z| \leq c\sqrt{B} \\ 0, & |z| > c\sqrt{B} \end{cases} \quad (18)$$

$C = 1,5 - 2,1$ .

La fonction de Laplace (16) rend maximum l'entropie de la répartition

$$f(z): H = - \int f(z) \ln f(z) dz$$

pour les conditions  $f(z, V)$  de Gauss la dispersion  $V$  est connue uniquement en moyenne

De  $H \rightarrow \max$  il s'ensuit également (10)

$$f(V) = \frac{1}{V} \exp(-V/B)$$

Soit cependant  $f(x, V)$  de Gauss et  $f(V) = \frac{1}{V^2} \exp(-V/2)$

alors

$$M \cdot V = 2A = B$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2B} (\sqrt{B} + 2|z|) \exp(-2|z|/\sqrt{B})$$

$$\phi(z) = \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{B}|z|}$$

(19)

$\phi(x)$  manque dans la formule (19) pour  $x > 0$  et il est possible d'appliquer l'algorithme d'itération MHK avec les poids  $r_k = \phi$

$Z_k$ ). La dispersion  $V$  comme dans les méthodes d'Andrews et Hubert se soumet à l'estimation. Pour  $x \rightarrow \infty$  la fonction de pondération  $\phi(Z)$  (14) coïncide asymptotiquement avec la fonction de pondération pour MHM avec de petits  $Z$  elle est voisine en qualité des fonctions de Hubert et Andrews.

Pour chaque fonction (14) il y a une méthode de similitude maximale ayant l'efficacité  $E_{max}$  comparée avec MHK équilibré. Cela limite vers le haut le facteur  $Y_1 \leq E_{max}/Y_2$ . Cependant en supprimant l'uniformité de la dispersion  $V_k$  comme la fonction  $K$ , on peut obtenir des estimations plus précises d'après MHK avec les poids  $r_k$  qu'en minimisant la fonction de similitude (14).

Dans ce cas on suppose la gaussienne  $F(X, V)$  et la possibilité d'une estimation assez précise de la dispersion  $V$ .

3. La méthode de combinaison des plus petits modules (MHM) avec des filtres préliminaires de compression des données 48...81 (5) d'une haute efficacité est utilisée pour l'analyse des marées terrestres.

La Table 2 donne l'analyse des observations d'Obninsk par les méthodes M74 par MHK équilibré avec les filtres 48/.../81 (MHK 81) (5) et MHM 82. Les corrections du retard de phase  $x$  et à l'ellipsoïde  $y$  sont introduites.

Table 2. Facteurs d'amplitude et de phase à Obninsk en 1977, gravimètre GS-15 N°220 (sans corrections de l'influence de la mer, des forces d'inertie et de la nutation).

Méthode d'analyse	Intervalle de l'analyse jours	$q$	$K$	$M_2$	$S_2$
M74 /11/	291	$1,1505 \pm 29$	$1,1348 \pm 18$	$1,1775 \pm 11$	$1,1704 \pm 26$
		$-0,03 \pm 0,14$	$-0,01 \pm 0,09$	$-0,09 \pm 0,06$	$1,43 \pm 0,12$
MHK81	291	$1,1461 \pm 32$	$1,1413 \pm 20$	$1,1755 \pm 12$	$1,1795 \pm 28$
		$-0,21 \pm 0,16$	$0,00 \pm 0,10$	$-0,29 \pm 0,06$	$1,18 \pm 0,13$
MHM82	145	$1,1441 \pm 15$	$1,1423 \pm 10$	$1,1791 \pm 8$	$1,1792 \pm 18$
		$-0,04 \pm 0,08$	$0,47 \pm 0,05$	$-0,27 \pm 0,04$	$1,44 \pm 0,09$

En M74 et MHM 82 on a pris un coefficient d'étalonnage constant, en MHK 81, un coefficient variable.

Pour comparer la précision des trois méthodes il faut tenir compte deux fois du plus petit intervalle de la série analysée des observations à MHM 82, la concordance des résultats de l'auteur et de Venedikov dans les limites de 2% pour les ondes

$O_1$ ,  $M_2$ ,  $N_2$  est un peu plus grande pour les ondes  $K_1$ ,  $S_2$ .

Ici apparaît l'influence des ondes non dues aux marées  $S_1$  et  $S_2$  qui diminue l'estimation des dispersions  $G_x$ ,  $G_s$  pour les ondes  $K_1$ ,  $S_2$ ,  $O_1$ .

La valeur  $x_{M2}$  est égale à 0'27 et 0'29 d'après MHK 81 et MHM 82, plus voisine de la moyenne  $x_{M2}$  pour Obninsk pour les cinq séries d'observations en 1976 et 1977, égale à 0'22 (11) et sans tenir compte du résultat de la série analysée d'après M74 la moyenne est égale à 0'25.

La précision des estimations de la méthode des plus petits modules a été calculée d'après l'absence de coordination restante par le procédé habituel (8). Notamment, au dernier pas de la procédure d'itération MHK avec des poids déterminés itérativement on a déterminé les dispersions des inconnues pour MHK. D'après la table 2 et par d'autres résultats (clinométriques) d'utilisation des méthodes d'analyse la précision (écart moyen carré) de la méthode MHM 82 est 2 à 3 fois plus élevée que la méthode M65. L'utilisation de la méthode MHM 82 est particulièrement efficace pour la gamme des ondes diurnes, des ondes  $K_1$  et  $S_2$  et des données turbulentes.

L'utilisation des méthodes de combinaison pour l'analyse des marées terrestres est rendue très difficile sans une compression préliminaire des données suboptimales du filtre (48/36/81a, (5) et autres) pour lequel on se sert de la méthode MHM 82.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. Cartwright D.E., Taylor R.J. New Computation of the Tide-generating Potential. - Geophys. J. R. astr. Soc., 1971, 23, p.45-74.
2. Cartwright D.E., Edden A.C. Corrected Tables of tidal harmonics. - Geophys. J. R. astr. Soc., 1973, 23, N 3, p. 253-264.
3. Дычко И.А., Панченко Н.И. Развитие геофизических и астрономических исследований в Полтавской гравиметрической обсерватории за 50 лет. - Вращение и приливные деформации Земли, 1976, T. 8, с. 3-19.
4. Pugin A.M. Data compression filters coordinated with least squares forms method for analysis of a polyharmonic signal. - Study of the Earth tides, 1980, N 3, p. 56-79.
5. Пугин А.М. Применение фильтров сжатия данных при анализе земных приливов. - Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1983, N 2, с. 103-109.
6. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки наблюдений. - М.: Сов. радио, 1976. - 192 с.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 319 с.
8. Петрович М.И. Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ. - М.: Статистика и статистика, 1982. - 199 с.
9. Andrews D.F. A Robust Method for Multiple Linear Regression. - Technometrics, 1974, 16, N 4, p. 523-531.
10. Мудров В.И., Кушко В.Л. Метод наименьших модулей. - М.: Знание, 1971. - 61 с.
11. Volkov V.A., Simon Z., Varga P., Venedika A., Guseva F., Zagimov S.S. Earth tide observations by gravimeters in Obninsk and Pulkovo (USSR) during 1975-1978. - Study of the Earth tides, Budapest, 1980, N 3, p. 4-31.

A MODEL FOR THE STUDY OF THE EFFECTS OF THE AIR PRESSURE ON  
THE EARTH TIDE DATA

A.P. Venedikov  
Geophysical Institute, Sofia

1. Introduction.

There are a lot of attempts to estimate the influence of the meteorological and hydrological phenomena, mainly air pressure  $P$ , on the Earth tide observations. Without being able to enumerate all of them we shall classify the principal directions as :

(a) Correlation of  $P$  with the drift (Simon, 1968, 1975, Simon & Schneider, 1967, 1973, Zschau, 1975, Müller & Zürn, 1983, Kümpel, 1982).

(b) Correlation of the seasonal variations of the tidal parameters with corresponding parameters of  $P$  (Delcourt-Honorez, 1986 and personal information from ICET).

(c) Detailed theoretical mechanical models (Zschau, 1979, Kümpel, 1982, 1985).

(d) The usual analysis of the data with a separate estimation of the noise at the  $D$ ,  $SD$  and  $TD$  frequencies as well as the determination of the waves  $S1$  and  $S2$ ; the determination of the particular meteorological waves  $S3$ ,  $S4$  (Chojnicki, 1981).

And, (e), the "Schlager" of the day, the so called multi-channel input analysis (De Meyer, 1982, Schüller, 1985; the original idea is given by Buchheim, 1969). Some encouraging results have been communicated by Zürn, Rydelek & Richter (1985), Flach & Noel (1985), De Meyer & Ducarme (1985).

The idea of (e) is to implement in the equations of analysis some regression expressions of P. The model used by De Meyer as well as by Schüller consists in that the effect of P at time t is

$$a_0P(t) + a_1P(t-1) + \dots + a_mP(t-m) \quad (1)$$

where  $a_i$  are unknown constant coefficients, the unit of t is one hour and m is an unknown number of hours. Evidently this is an elegant and efficient model.

Nevertheless, from our point of view, it may be the object of some remarks: (i) the model is a too formal and empirical one, (ii) it does not take into account a different influence of P on different frequencies, (iii) the hourly values of P may be charged by a strongly correlated noise and (iv) if, hypothetically,  $P = \text{const.}$ , the effect calculated by the expression (1) remains generally different from the zero.

The object of the present paper is a model for the effect of P which is substantially different from (1). It has the following pretensions: (i) it is also a formal and empirical model however it has a little bit more physics in it, (ii) the effect of P is studied separately at the principal tidal frequencies, D, SD, TD, (iii) the relations are studied through the filtered numbers; as they are obtained from intervals of data without overlapping, the correlation between the hourly ordinates of P is less important, and (iv) when  $P = \text{const.}$ , there is no effect at all.

One more remark concerning point (ii). Bonatz (1987) stated that the effect of P on the instrumentation may be a non-linear one. The separation of the frequencies is one step toward non-linear models.

Our model, naturally, is related with our method for analysis. Since the first applications of the method (Melchior, 1966, 1967, 1968, Bonatz, 1967, Melchior & Venedikov, 1968) it became clear that the level of the noise is different at the D, SD and TD frequencies. This result, strange at the time but still valid, and valuable, is at least partly explained by strong meteorological effects, different for D, SD and TD.

The revelation of all this was made possible due to the filtering procedure, i.e. filtering of independent intervals and separation of the main tidal constituents. Our idea is that this procedure may be efficient for studying the effects of P.

## 2. A model for meteorological waves in Earth tide data.

It is to be pointed out that our model is very close to some ideas of Simon (1977, 1980) and Schwahn (1981).

On fig. 1 and 2 we use a vector presentation of several waves. All of them are supposed to be with one and the same frequency. A similar presentation is used for the ocean tidal influence (Melchior, De Becker, Ducarme, Van Ruymbeke, Poitevin, 1983). Thus the vector  $\bar{Q}$  is analogous to the ocean loading vector  $\bar{L}$ . The same without  $Q = |\bar{Q}|$  is the amplitude of this wave.

The vector  $\bar{R}_0$  along the abscissa is a theoretical tide (undeformable Earth,  $\delta_R = 1$ ,  $\chi_R = 0$ ).  $\bar{R}_0$  is somewhat different from the tide  $\bar{R}$  used by Melchior and all. (1983) which is related to a model of an elastic Earth.

The vector  $\bar{S}$  is a periodical component of P. Let us suppose that we submit to a tidal analysis the hourly values of P, formally just as if P were Earth tide data. Then for the tidal frequency corresponding to  $\bar{S}$  we shall get estimates of an amplitude factor  $\delta_s = S/R$  and a phase shift  $\chi_s$  which is the angle between  $\bar{S}$  and  $\bar{R}$ . Unlike the usual tidal factors  $\delta$  which are dimensionless,  $\delta_s$  has the dimension of (unit of P) / (tidal unit) for example mbar/microgal.

Our hypothesis is that  $\bar{S}$  generates in the tidal data a perturbing wave  $\bar{Q}$  which is linearly related to  $\bar{S}$ , i.e.

$$Q = B \cdot S \quad (B = \text{const.}) \quad \text{and} \quad b = \chi_s - q = \text{const.} \quad (2)$$

where  $b$  is the phase lag of  $\bar{Q}$  relatively to  $\bar{S}$ .

The wave  $\bar{S}$  is variable with the time, in amplitude and phase. The meaning of our hypothesis and the equations (2) is that the generated wave  $\bar{Q}$  follows  $\bar{S}$  with one and the same retardation in phase, and amplitude, proportional to  $S$ .

The equations (2) may be expressed as

$$Q \cos q = B_1 S \cos \chi_s + B_2 S \sin \chi_s \quad (3)$$

$$Q \sin q = B_1 S \sin \chi_s - B_2 S \cos \chi_s$$

where

$$B_1 = B \cos b, \quad B_2 = B \sin b \quad (4)$$

On fig. 2,  $\bar{A}$  is the observed tide with amplitude factor  $\delta = A/R_0$  and phase shift  $\chi$ .  $\bar{A}$  is changed (it includes) by the perturbing wave  $\bar{Q}$ , so that the wave

$$\bar{A}_0 = \bar{A} - \bar{Q}, \quad (5)$$

with amplitude factor  $\delta_0 = A_0/R_0$  and phase shift  $\chi_0$ , is free from this perturbation.

From fig.2 we derive

$$A \cos \gamma = A_0 \cos \chi_0 + Q \cos q \quad (6)$$

$$A \sin \gamma = A_0 \sin \chi_0 + Q \sin q$$

Let us introduce the quantities

$$\begin{aligned} \xi &= \delta \cos \chi, & \eta &= -\delta \sin \chi \\ \xi_0 &= \delta_0 \cos \chi_0, & \eta_0 &= -\delta_0 \sin \chi_0 \\ \xi_s &= \delta_s \cos \chi_s, & \eta_s &= -\delta_s \sin \chi_s \end{aligned} \quad (7)$$

Then, if we replace (3) into (6) and divide on the theoretical amplitude  $R_0$ , we get

$$\xi = \xi_0 + \xi_s \cdot B_1 - \eta_s \cdot B_2 \quad (8)$$

$$\eta = \eta_0 + \eta_s \cdot B_1 - \xi_s \cdot B_2$$

These are the basic equations of our model. Here  $\xi$  and  $\eta$  may be obtained through the processing of tidal data while  $\xi_s$  and  $\eta_s$  - through a similar processing of P. It remains to determine the coefficients  $B_1$  and  $B_2$ , then the corrected tidal numbers  $\xi_0$  and  $\eta_0$ , respectively the corrected parameters  $\delta_0$  and  $\chi_0$ .

### 3. How to use the basic equations.

There are four unknowns ( $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ) in the equations (8), while it is a system of merely two equations. We consider on the variability of the meteorological parameters  $\xi_s$  and  $\eta_s$  and the possibility to compose the equations at different epochs.

One way is to implement the model in the scheme mentioned in point (b) in § 1. A large series of tidal data and a parallel series of P can be subdivided into shorter series. From each one of the short series we can get  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi_s$  and  $\eta_s$ . Then through a regression analysis based on (8) we can obtain  $B_1$  and  $B_2$ .

Another way is to apply the equations (8) to waves with known  $\xi_0$  and  $\eta_0$ . For example the purely meteorological waves S3 and S4 have  $\xi_0 = \eta_0 = 0$ .

These are two options which are not yet experimented. Here we shall consider only how to include the equations (8) in the analysis and to get estimates of  $B_1$  and  $B_2$  simultaneously with the usual tidal unknowns.

At the first stage of the analyses the data are subdivided into very short time intervals of 48 hours (in the last version of our computer's program SV the length of the intervals is an arbitrary one but, of course, of the same order as 48). From each interval we get a couple of filtered numbers M and N about which we shall use here the notation  $U_1 = M$  and  $U_2 = N$ . We have one couple  $U_1, U_2$  for each one of the main tidal constituents, D, SD or TD.

By using the technics proposed by Venedikov (1981) and Xu Houze (1984) we can get through the filtered numbers for each filtered interval

tidal data	meteorological data P	D for SD (9) TD
$\xi, \eta$	$\xi_s, \eta_s$	

These are approximate determinations based on the approximate assumption that the tidal parameters are constants for the tides within one and the same main tidal group.

As a first option for the determination of the coefficients B the so obtained series (9) are put in the equations (8). Through the method of least squares we get the estimates of  $B_1, B_2, B$  and  $b$ .

For experimental purposes the program SV deals separately with each one of the equations (8) and thus we get two variants of the solution. In table 1 in the following § 4 these variants are conditionally indicated as

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\xi_s, \eta_s) && - \text{1st equation (8)} \\ \eta &= \eta(\xi_s, \eta_s) && - \text{2nd equation (8)} \end{aligned} \quad (10)$$

As a next variation we use the equations of the analysis for the filtered numbers  $U_1$  and  $U_2$ . These equations are of the kind

$$U_k = \sum_{i=1}^n (a_{ki} \xi_i + b_{ki} \eta_i) \quad (k = 1 \text{ and } 2) \quad (11)$$

where  $\xi_i$  and  $\eta_i$  are the tidal unknowns for  $m$  waves ( $i = 1, \dots, m$ ) of one and the same tidal group  $D$ , SD or TD. Here we replace them through the equations (8) in the following way

$$\xi_i = \xi_{oi} + \xi_s \cdot B_1 - \eta_s \cdot B_2 \quad (12)$$

$$\eta_i = \eta_{oi} + \eta_s \cdot B_1 + \xi_s \cdot B_2$$

where  $\xi_s, \eta_s$  are the numbers (9) for the same tidal group  $D$ , SD or TD. Thus the equations (11) become

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_i (a_{ki} \xi_{oi} + b_{ki} \eta_{oi}) \\ &+ (\xi_s \cdot \sum a_{ki} + \eta_s \cdot \sum b_{ki}) \cdot B_1 \\ &+ (-\eta_s \cdot \sum a_{ki} + \xi_s \cdot \sum b_{ki}) \cdot B_2 \end{aligned} \quad (13)$$

( $k = 1$  and  $2$ )

This case is denoted conditionally in Table 1 of § 4 as

$$U_k = U_k (\xi_s, \eta_s) \quad (14)$$

Let us denote by  $P_1$  and  $P_2$  the numbers obtained through the filtering of  $P$  and corresponding to the tidal filtered numbers  $U_k$ . As a last variant based again on the equations (8) we use, instead of the equations (1) and (13),

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_i (a_{1i} \xi_{oi} + b_{1i} \eta_{oi}) \\ &+ P_1 \cdot B_1 - P_2 \cdot B_2 \\ U_2 &= \sum_i (a_{2i} \xi_{oi} + b_{2i} \eta_{oi}) \\ &+ P_2 \cdot B_1 + P_1 \cdot B_2 \end{aligned} \quad (15)$$

This variant is indicated in Table 1 as

$$U_k = U_k (P_1, P_2) \quad (16)$$

## 4. Some resultats.

In Table 1 the results ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B$  and  $b$ ) for 3 gravity series with parallel air pressure data are given. There are presented the variants considered in the previous § 3.

An interesting case is the first one A. The authors of the data (Paesalu, Volkov & Gousseva, 1986) have observed that the gravimeter GS 11/147 has not a good hermetization. They have continued the observation with an experimental purpose, namely to check up the methods for the determination of the external atmospheric influence. Evidently we get here considerably higher values of all coefficients  $B$  plus an important phase lag  $b$ . The values are substantially different for D, SD and TD. This is recalling once again the remark of Bonatz (1987) about the non-linearity of the instrumental effect.

Generally the effect at the D tides is more important and it is better determined, with a small  $b$ . The effect at all the gravimeters is significantly different. As the cases B and C are for gravimeters of one and the same type one may conclude that the physical reaction of the Earth crust is different.

One may expect considerably more important differences for the clinometric observations. Recently Skalski, Martinu and Jerabek have established (personal communication) very great differences at very close stations as well as a strong dependence on the azimuth of the observation.

The coefficients  $B_1$  for the third case C in table 4 were obtained all negative. We have changed them as we suppose that this is due to a misunderstanding in the definition of the sign of the data.

The author wants to express his recognition and thanks to Dr. V. Volkov and Dr. Zd. Simon for providing the data which were analysed as well as to prof. P. Melchior for some valuable remarks on the present paper.

## REFERENCES

- Bonatz M., 1967 : Harmonische Analyse der Erdgezeiten nach den Verfahren von Lecolazet und Venedikov.- Zeit. Vermessungsw., H.9, pp 373-375.
- Bonatz M., 1987: Multichannel analysis and instrumental drift of spring gravimeters. - BIM, 99, 6753-6755.
- Buchheim W., 1969 : Korektur von Erdgezeitenbeobachtungen auf indirekte Effekte.- 6 Symp. Int. Marees Terrestres, Strasbourg, pp 137-146.
- Chojnicki T., 1981 : Seven years of tilt Earth tide observations at 0906 station Ksiaz, Poland.- 9 Int. Symp. Earth Tides, New York.
- Delcourt-Honorez M., 1986 : Lunar and solar barometric tides in seven stations of the trans-world tidal gravity profile. - BIM, 97, pp 6614 6627.
- De Meyer F., 1982: A multi input - single output model for Earth tide data.- BIM, 88, pp 5628-5674.
- De Meyer F., B. Ducarme, 1985: Input-output analysis of the observations of superconducting gravity meter. - 10 Int. Symp. Earth tides, Madrid, pp 531-554.
- Flach D., U. Noell, 1985: Tilt measurements in the 1000 m. deep iron ore mine Konrad. - 10 Int. Symp. Earth Tides, Madrid, pp 263-270.
- Küpel H.-J., 1982 : Neigungsmessungen zwischen Hydrologie und Oceanographie.-Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, pp 1-165.
- Küpel H.-J., 1985 : Model calculations for rainfall induced tilt and strain anomalies.- 10 Int. Symp. Earth Tides, Madrid, pp 889-904.
- Melchior P., 1966: Analyse de longs enregistrements de marées terrestres. - BIM, 46, pp 1863-1931.
- Melchior P., 1967 : Analyse harmonique de longues séries d'observations par la méthode Venedikov.- BIM, 48, pp 2133-2147.
- Melchior P., 1968 : Analyse harmonique de longues séries d'observations par la méthode Venedikov.- BIM, 51, pp 2386-2394.

- Melchior P., A. Venedikov, 1968: Derivation of the wave M3 (8h279) from the periodic tidal deformation of the Earth.- Phys. Earth Planet Int., 1., 363-372.
- Melchior P., M. De Becker, B. Ducarme, Ch. Poitevin, M. Van Ruymbeke, 1983: Effect of lateral heterogeneities in the lithosphere on tidal measurements.- 19 IUGG Gen. Assembly, Hambourg, manuscript, pp 1-3.
- Müller T., W. Zürn, 1983 : Observations of gravity changes during the passage of cold front. - J. Geophysics, 53, pp 155-162.
- Paesalu I.J., V.A. Volkov, F.P. Gousseva, 1986 : Preliminary results from comparative experimental observations with the gravimeters GS 11/147 and GS 15/220 in Obninsk. Estimation of the influence of the air pressure on the instruments.- Working meeting of KAPG on the Earth Tides, Poltava, manuscript.
- Schwahn W., 1981: Meteorological processes and their connection with the covariance function of the statistical part in gravimetric registration series.- Veröffentl. Zentralinst. Physik der Erde, 63, Teil III, Potsdam 1981, pp 733-741.
- Simon D., 1968 : Methoden der Sörpegelanalyse und ihres Bedeutung.- Symp. Clinom. Obser., KAPG, Leningrad, pp 95-131.
- Simon D., 1975: On several evaluation problems.- 7 Int. Symp. Earth Tides, Sopron, pp 429-450.
- Simon D., 1977: Über Einflüsse regionaler Luftdruckänderungen auf die Bewegung der Erdoberfläche.- Beratung Arbeitsgr. 3.3 KAPG, Sopron, manuscript.
- Simon D., 1980 : Zur Deutung der lokalen und regionalen Schwankungen der Verminderungsfaktoren  $\gamma$  (M2) und  $\gamma$  (K1).- Arbeitsgruppe 3.3 der KAPG, Budapest, manuscript, pp 1-24.
- Simon D., M. Schneider, 1967 : Zum Auftreten luftdruckbedingter Störungen in Horizontalpendelaufzeichnungen auf drei verschiedenen Stationen.- BIM, 49, pp 2218-2225.
- Simon D., M. Schneider, 1973 : Analyse der nichtperiodischen Bodendeformationen an der Erdzeitenstation Tiefenort 1958-1973.- Geod. Geoph. Veröff., Reihe III (in Vorbereitung).
- Venedikov A.P., 1981 : Determination of the tidal parameters from short intervals in the analysis of Earth tide records.- BIM, 85, pp 5435-5441.
- Xu Houze, 1984: Harmonic analysis for short data series using Venedikov's filters.- Crustal deformations and Earthquake (in Chinese), v.4, n° 2, pp 148-151.

Zschau J., 1975 : The influence of the air pressure variations on tilt measurements with the Askania borehole pendulum at the Kiel-Rehmsberg. - 7 Int. Symp. Earth Tides, Sopron, pp 779-796.

Zschau J., 1979: Airpressure induced tilt in porous media.- 8 Int-Symp. Earth Tides, Bonn, pp 418-433.

Zürn W., P.A. Rydelek, B. Richter, 1985: The core-resonance effect in the record from the superconducting gravimeter at Bad Homburg. - 10 Int. Symp. Earth Tides, Madrid, pp 141-148.

Figure 1

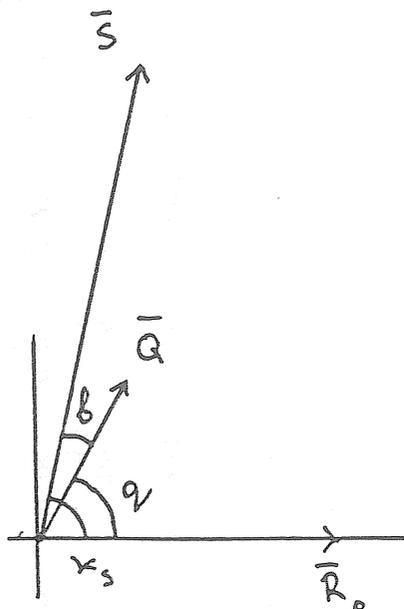


Figure 2

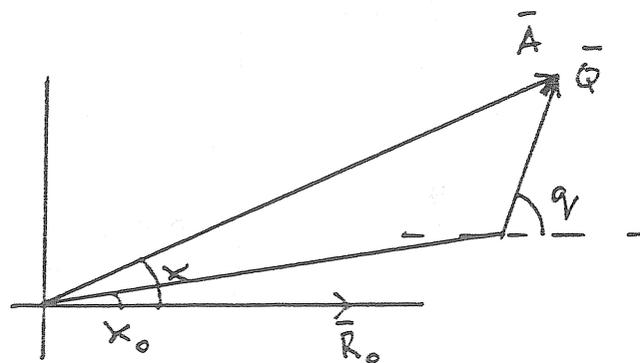


Table 1. Relation between tidal gravity data and atmospheric pressure

Diurnal tides D		Semidiurnal tides SD				Terdiurnal tides TD					
B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B	b	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B	b	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B	b
A. Station Obninsk, gravimeter GS 11/147, V. Volkov											
6.60	0.01	6.60	0°01	2.92	3.02	4.20	45°90	1.68	1.98	2.60	49°70
± 19	20			34	33			36	41		
8.37	3.42	9.04	22.22	4.24	2.73	5.04	32.78	1.60	1.88	2.47	49.60
± 32	30			36	37			43	3888		
5.13	2.23	5.59	23.49	3.11	1.84	3.61	30.61	1.53	1.87	2.42	50.70
± 20	21			28	29			24	22		
4.95	2.06	5.36	22.59	3.10	2.32	3.87	36.80	1.69	1.93	2.57	48.80
± 21	21			35	36			24	24		
B. Station Obninsk, gravimeter GS 15/220, V. Volkov											
0.46	0.06	0.46	7°40	0.23	-0.81	0.84	-74°10	0.34	-0.12	0.36	-19°40
± 10	13			27	24			30	28		
0.388	-0.15	0.41	-21.50	0.00	-0.75	0.75	-90.00	1.25	9.68	1.42	28.50
± 15	11			25	28			31	34		
0.40	0.09	0.41	12.70	0.06	-0.17	0.18	-70.60	0.76	0.03	0.76	2.30
± 06	06			11	11			15	14		
0.40	0.06	0.41	12.70	0.06	-0.18	0.19	-71.60	0.74	-0.05	0.74	-3.90
± 06	06			11	11			15	15		
C. Station Budapest, gravimeter GS 15/228, Zd. Simon, P. Varga											
0.49	-0.01	0.49	-0°90	0.06	-0.24	0.25	-76°00	0.23	0.24	0.33	45°90
± 07	05			08	07			11	11		
0.53	0.24	0.58	23.90	0.06	-0.20	0.21	-72.90	0.24	0.09	0.25	32.30
± 07	09			07	08			14	14		
0.40	0.03	0.40	4.30	0.15	-0.01	0.15	-5.70	0.14	0.09	0.17	32.30
± 02	02			06	06			08	08		
0.40	0.03	0.40	4.40	0.15	-0.02	0.15	-8.50	0.14	0.10	0.17	35.80
± 02	02			06	06			08	08		

$$\xi = \xi(\xi_s, \eta_s)$$

$$\eta = \eta(\xi_s, \eta_s)$$

$$U_k = U_k(\xi_s, \eta_s)$$

$$U_k = U_k(P_1, P_2)$$

Note : The coefficients B are expressed in  $\mu\text{gal}/\text{mbar}$

*Traduction*

Variations dans les flux profonds des gaz radiogènes  
comme conséquence des déformations élastiques  
de l'écorce terrestre.

A.Y. Tougarinov et S.S. Sardarov

Doklady, Académie des Sciences de l'URSS

Tome 223 n°4. pp. 856-859 1975

On sait que, pour expliquer le contenu actuel d'hélium, d'argon et des autres gaz inertes dans l'atmosphère terrestre on suppose qu'il existe un flux ascendant de ces gaz provenant, en surface, de l'intérieur de la Terre. La présente note est dédiée à la démonstration expérimentale de cette hypothèse sur la base de l'étude du régime de séparation des gaz profonds en fonction des propriétés élastiques des parties supérieures de l'écorce terrestre.

Les calculs montrent que la variation du rapport des flux des deux gaz, différant par leurs propriétés thermodynamiques, caractérise la variation de la tension agissante alors que la variation du flux général de ces gaz reflète la variation de la perméabilité du milieu étudié à cause de la formation de nouvelles micro et macro fissures. Ce fait, en combinaison avec le fait que Ar et He n'apparaissent pas dans les conditions de la nature dans les relations chimiques avec les matériaux les entourant, permet d'utiliser ces gaz comme sources d'information nécessaire pour estimer l'apparition et la variation de processus de déformation se produisant à l'intérieur de la Terre.

Le rapport de l'intensité des flux de gaz sera appelé dans la suite "coefficient de discrimination".

Pour étudier le régime de séparation des gaz radiogènes (hélium et argon) on a créé en 1973 des laboratoires de spectroscopie de masse pour les puits gazeux qui permettent d'effectuer pendant des jours entiers des analyses continues de ces gaz et qui fonctionnent encore à présent. Les laboratoires sont pourvus de spectrographes de masse de production nationale (MX-73-01, VTM-7A, MN-1305) et d'installations d'hélium - argon avec des réacteurs au titane (1). Un laboratoire se trouve sur le gisement gazeux de Shamkhal-Boulak dans la région d'un des épïcêtres du fort tremblement de Terre du Dagéstan du 14.V.1970; l'autre laboratoire est situé dans la brèche inférieure du réservoir d'eau de Tchirkeiskii à présent rempli. On étudie sans discontinuer les échantillons de gaz prélevés dans des puits spécialement forés à différentes profondeurs de 3 à 140 m dans lesquels on a

monté des sondes à gaz. Les gaz naturels sortant des puits de gaz de profondeurs de 250 à 3200 m.

La présence d'un flux d'argon est prouvée avec certitude par la variation du rapport du contenu d'isotopes  $^{40}\text{Ar}$  et  $^{36}\text{Ar}$  en fonction de la profondeur (fig.1) et la présence d'un flux d'hélium se confirme par son accumulation sous la sonde de gaz jusqu'à des concentrations différentes de sa concentration dans l'air. En fonction de la structure géologique du lieu de sélection des gaz, les flux de gaz peuvent cependant être différents quant aux variations de leur intensité dans le temps. On observe la même périodicité qui se décrit dans les périodes séismiquement calmes par une fonction polyharmonique (fig.2)

L'erreur de mesure de la concentration d'hélium et d'argon ne dépasse pas 3 % et est évidemment aussi d'un ordre beaucoup plus petit que l'amplitude de leur variation c'est pourquoi dans une série de cas, pour découvrir les grandes périodes de variations de l'intensité des flux de gaz il n'a pas fallu de réduction mathématique spéciale.

Sur la fig. 4 on compare les variations diurnes de la pesanteur, du niveau de l'eau dans un puits profond en Afrique Centrale où il n'y a pratiquement pas d'influence de marées océaniques (2) et les intensités des flux gazeux dans les puits de gaz de Dagestan d'après nos analyses, données pour un mois synodique. Il y a une bonne corrélation évidente du flux gazeux avec les déformations de marées. Les amplitudes maximales des variations journalières du niveau d'eau, des forces de pesanteur et l'intensité maximale de variation du flux gazeux profond se produisent à la nouvelle Lune et à la pleine Lune et les intensités minimales aux quadratures. La réduction mathématique des données expérimentales faite sur BM a séparé les harmoniques de quatre heures, semi diurnes et diurnes. Tout cela permet de considérer les variations d'intensité de l'hélium, de l'argon et de ses isotopes par l'apparition des processus des marées dans le régime de séparation de ces gaz.

Aux époques précédant un tremblement de Terre il se produit des accumulations lentes des déformations élastiques. Ainsi le bruit de fond moyen sur lequel s'opèrent les variations de marées des gaz croît (fig.3).

Si le coefficient de discrimination varie simultanément alors on observe évidemment un choc souterrain. On réussit ainsi à prédire avec une sûreté de 60 à 70 % les phénomènes tectoniques 6 à 30 heures avant leur apparition séismique.

#### Références

- <sup>1</sup> С. С. Сарбаров. Авт. свид. СССР, № 232404, 1968.    <sup>2</sup> П. Мельзиор, Земные приливны, М., «Мир», 1968.

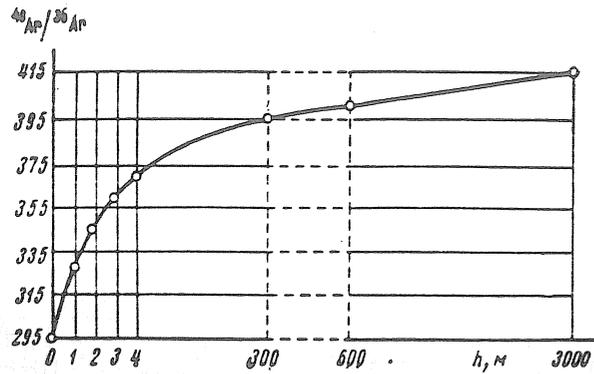


Fig. 1 Variation de l'état isotopique de l'argon en fonction de la profondeur

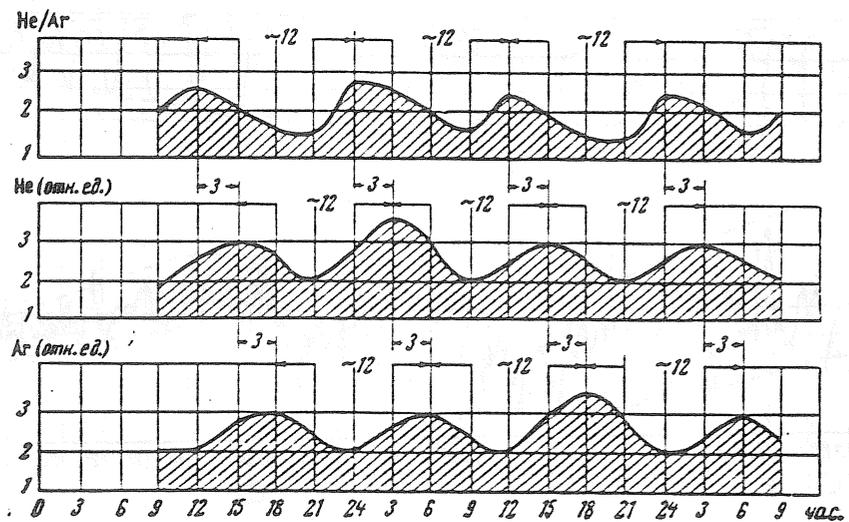


Fig. 2 Variations journalières de l'intensité des flux profonds d'hélium et d'argon.

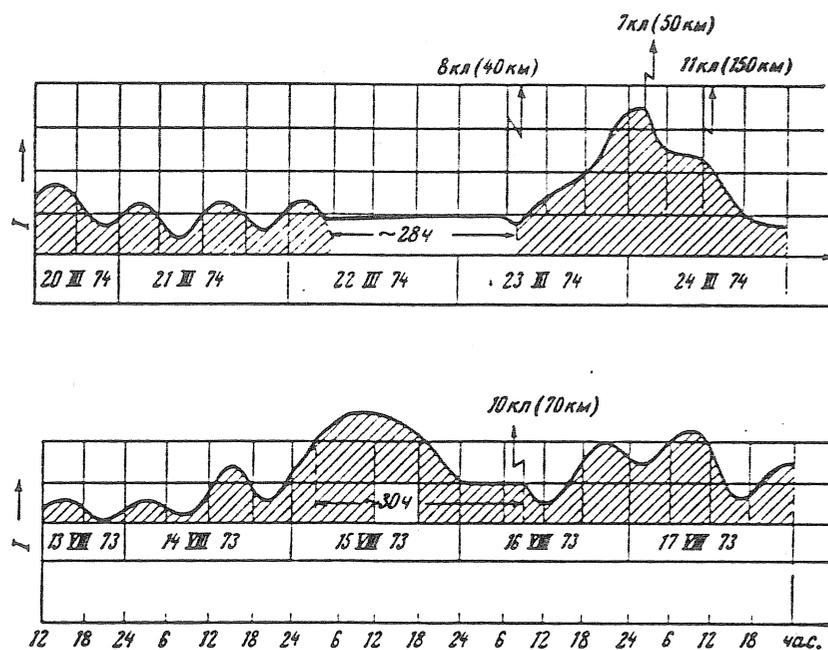


Fig. 3 Variations des flux profonds des gaz radiogéniques précédant les tremblements de Terre.

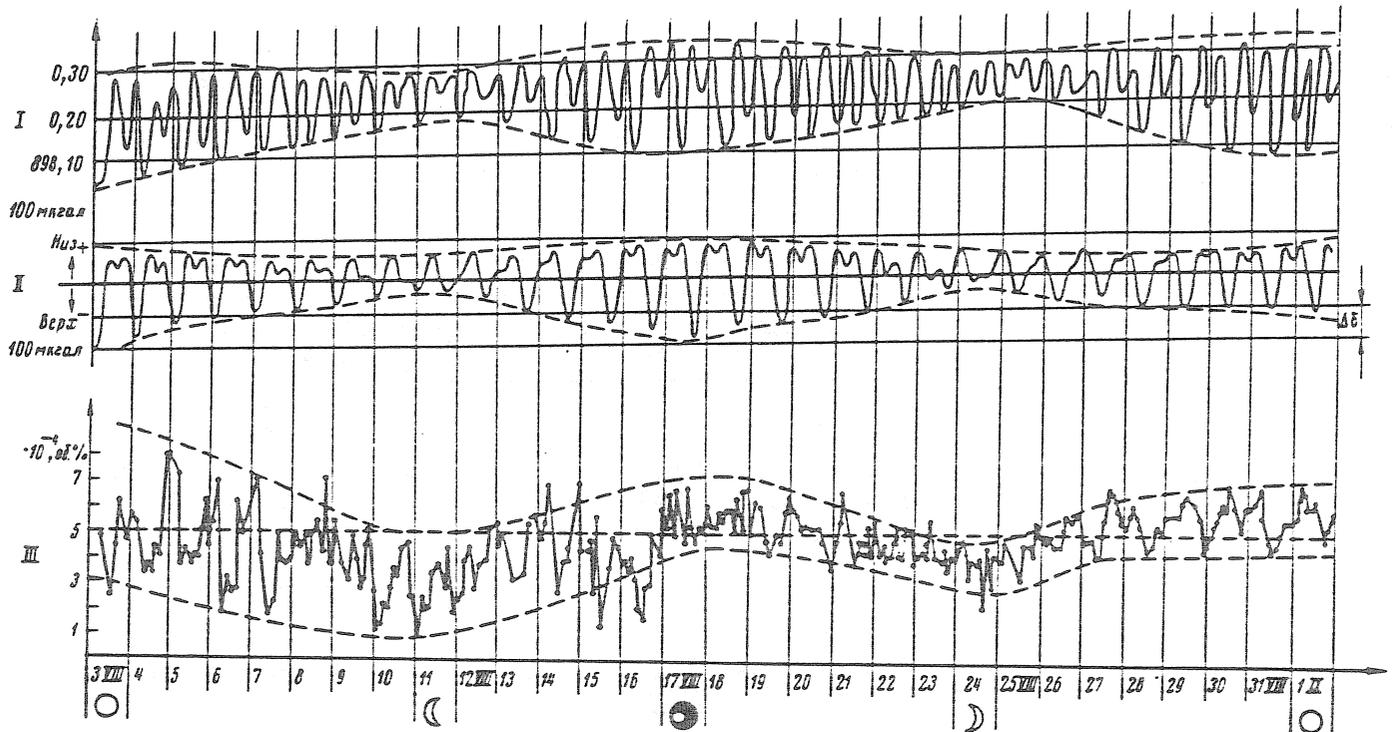


Fig. 4 Variations diverses et mensuelles du niveau de l'eau dans le puits profond (I), de la force de pesanteur (II) et de l'intensité du flux profond du gaz (III).

