

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N° 100

15 DECEMBRE 1987

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR
Observatoire royal de Belgique
Avenue Circulaire 3
1180 Bruxelles

TABLE DES MATIERES

p.

I. PAESSALOU (Traduction). Résultats de l'analyse spectrale croisée du déplacement du zéro du gravimètre GS-11 N°147 et de la pression atmosphérique. Proc. Acad. Sc. Estonian SSR. n°34, 1985.	6907
JIANG XIAN-HUA, LI RUI-HAO. Diurnal body tides of an Earth with a fluid core. Acta Geophysica Sinica, Vol.30, n°1, pp. 61-68, 1987.	6915
LIU XUYAN. The spectral analysis and filtering of tilt tidal observation. Crustal Deformation and Earthquake, vol.5, 1985.	6923
LIU XUYAN. Elimination of precipitation effects from crustal deformation observation using homomorphic convolution filter. Earthquake, n°6, pp. 48-51, 1985.	6927
HSU HOU-TSE, MAO WEI-JIAN. The effect of different Earth models on the load tide corrections. Acta Geophysica Sinica, Vol.28, n°3, 1985.	6932
B. MEURERS. Comparison of Earth tide observations in Vienna.	6942
A.E. OSTROVSKII, V.Y. STARKOV, E.Ya. STARKOVA (Traduction). Etude des marées terrestres, Naouka, Moscou, 1980.	6954
I.A. CHIROKOV, K.M. ANOKHINA (Traduction). Observations clinométriques avec le pendule vertical "ASKANIA" dans le puits près de Moscou. Etude des marées terrestres Naouka, Moscou 1980.	6960
O. FRANCIS, V. DEHANT. Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimations.	6962
I.V. SAVIN (Traduction). Analyse spectrale à bande étroite des observations de marées. Théorie et analyse de l'information séismologique. Publ. 18, Akad.Naouk SSSR, Moscou, 1985.	6987

de transfert comme le coefficient barométrique du gravimètre. En tenant compte du spectre croisé en phase nous pouvons déterminer également la caractéristique en fréquence du déphasage du gravimètre vis à vis de l'effet de la pression. Il est clair que cette analyse nous donne une information nettement plus importante sur l'effet de la pression sur le gravimètre que l'analyse de corrélation habituelle.

La méthode d'analyse spectrale croisée a été testée sur les mêmes données d'observation de marées terrestres à Tallin que la méthode des analyses par moyenne glissante et régression de corrélation, décrite précédemment (Paessalou, 1984). Les variations des dérives instrumentales et de la pression atmosphérique déterminées comme écarts à la moyenne glissante de 10 jours ont servi de données de départ pour l'analyse. On a choisi cette valeur de l'intervalle dans le but d'étudier un domaine de fréquence assez large. L'écart à la moyenne glissante élimine la "tendance" des séries temporelles. C'est une condition nécessaire de l'analyse spectrale.

Après avoir déterminé les fluctuations des dérives instrumentales et de la pression on a calculé leurs fonctions aussi bien d'autocovariance que de covariance croisée. Comme on le sait (Jenkins, Watts, 1971) il faut tronquer la fonction d'autocovariance avant l'analyse spectrale. La coupure correspond à l'atténuation du spectre dans le domaine de fréquence et est faite pour augmenter la stabilité des estimations spectrales. Dans notre cas la coupure des fonctions d'autocovariance et de covariance croisée a été faite pour un retard de 720 h., c'est-à-dire qu'une série a été déplacée d'un mois au maximum par rapport à une autre. Ce nombre de points, assez élevé par rapport à la longueur de l'enregistrement filtré de 3360 ordonnées, a été choisi pour obtenir une capacité de résolution élevée du spectre.

Pour éviter l'apparition d'oscillations dans les fonctions de covariance ces dernières ont été estimées à travers de fenêtres provisoires dont les ordonnées tendent vers zéro aux extrémités. Cette procédure montre que les ordonnées de la fonction de covariance sont multipliées par le poids de la fenêtre déterminée et la réduction suivante s'applique déjà sur la fonction covariante "pondérée". On a utilisé des fenêtres de deux types : d'abord, la fenêtre représentant aussi bien au début qu'à la fin sur 10 % de sa largeur une fonction sinusoïdale et présentant une valeur constante entre les parties initiales et finales (nous la désignerons plus loin dans l'article sous le nom de fenêtre intermédiaire); ensuite, la fenêtre de Hanning (Jenkins, Watts, 1971). La fenêtre intermédiaire donne la possibilité d'évaluer le spectre plus en détail mais la dispersion est ainsi plus grande. A l'aide de la fenêtre de Hanning

avec une dispersion plus petite nous obtenons une évaluation plus amortie du spectre (fig. 1a, b). Après avoir utilisé les deux sortes de fenêtres, les fonctions covariantes ont été soumises à la transformation de Fourier.

Tous les calculs ont été faits sur IBM "Minsk-32". Nous avons écrit le programme pour déterminer les différences par rapport à la moyenne glissante. Les programmes pour les fonctions covariantes et d'analyse spectrale ont été empruntés (Recueil ... 1974; Algorithme ... 1979).

Nous examinerons d'abord les spectres de la dérive et de la pression atmosphérique obtenus par la fenêtre provisoire intermédiaire (fig. 1a). Le pic principal dans les deux spectres s'observe à la fréquence d'environ 4 unités ($1 \text{ unité} = 10^{-3} \text{ h}^{-1}$) c'est-à-dire à une période d'environ 250 heures (plus précisément 266,7 heures), comme si le pic observé à cette fréquence dans la dérive devait son origine au pic de la pression.

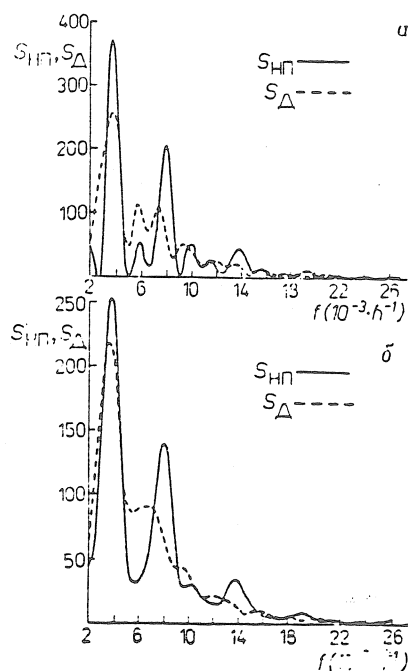


Fig. 1. Spectres de dérive (S_{pn}) et de la pression atmosphérique (S_p) obtenus par l'application de la fenêtre provisoire intermédiaire (a) et également par l'application de la fenêtre provisoire de Hanning (b).

(Nous verrons dans la suite que cette confirmation n'est évidemment que partielle). Le pic suivant en importance pour la dérive est observé à la fréquence de 8 unités c'est-à-dire pour la période de 125 heures. Mais dans le spectre de la pression exactement à cette fréquence il n'y a pas de pic mais on observe deux maxima dans l'intervalle de fréquence entre les pics du spectre de la dérive, ainsi le pic du côté droit dans le spectre de la pression couvre partiellement le pic dans la dérive à la fréquence de 8 unités. Cela signifie que ce maximum dans le spectre de la dérive ne peut être provoqué que partiellement par la pression. En ce qui concerne le petit pic dans le spectre de dérive à la fréquence de 6 unités, il est selon toute vraisemblance un lobe latéral du maximum principal. (Dans le spectre de dérive obtenu par l'utilisation de la fenêtre provisoire de Hanning (fig. 1b) il n'y a pas de lobe latéral).

Comme nous le constatons sur la figure 1a dans la bande des fréquences de 9 à 15 unités les spectres de dérive et de pression varient nettement moins. On observe trois petits pics qui se dessinent mieux dans le spectre de dérive. Les spectres sont également assez semblables dans cette bande de fréquences, en particulier près de la fréquence de 10 unités. Mais la précision des ordonnées du spectre dans cette zone est plus petite que dans la zone des pics principaux à cause de la petite valeur de ces ordonnées. Nous n'avons pas examiné en détail l'intervalle de fréquence de plus de 15 unités car l'intensité du spectre y est faible. Nous noterons cependant un petit pic dans le spectre de dérive à la fréquence de 19,2 unités (52 heures) non lié à la pression. (A cet endroit on observe dans le spectre de la pression atmosphérique un minimum).

Le spectre croisé en amplitude et le spectre de cohérence sont donnés sur la fig. 2a où est également représentée la fonction de transmission en amplitude du gravimètre c'est-à-dire le coefficient barométrique. Pour obtenir des estimations plus sûres on n'a utilisé qu'une fenêtre de Hanning. Il nous semble qu'il est utile de partager ces graphiques en quatre bandes de fréquence dont les limites correspondent approximativement aux minima du spectre de cohérence et du spectre croisé en amplitude : 2-6, 6-9, 9-15 unités ensuite de 15 jusqu'à la fin.

Dans la première bande se trouve le pic principal du spectre croisé mais la corrélation qu'indique le spectre de cohérence n'est pas la plus grande. Dans la bande suivante on observe le maximum suivant en valeur du spectre croisé. Ce dernier est confirmé par le spectre de cohérence qui indique une diminution de la corrélation dans cette gamme de fréquence ce à quoi il fallait s'attendre puisque les pics de la dérive et de la pression ne se recouvrent que partiellement (fig. 1a).

Si la corrélation entre la pression et la dérive existe ici alors elle est masquée par un pic assez haut dans la dérive à la fréquence de 8 unités et selon toute vraisemblance elle n'a pas de poids.

Dans la bande des fréquences de 9 à 15 unités, le spectre croisé a deux pics de petite pente et décroît. Mais dans le spectre de cohérence on observe un maximum sur la fréquence de 10 unités (période de 100 heures) correspondant à un petit pic dans le spectre croisé. En général, dans cette gamme des fréquences le niveau moyen du spectre de cohérence est un peu plus élevé que dans les bandes examinées précédemment. Cependant à cause des faibles amplitudes des spectres de la pression et de la dérive dans cette bande, la précision du spectre de cohérence ne peut être élevée et le spectre se déforme facilement sous l'influence de causes étrangères et plus intensives par rapport à la

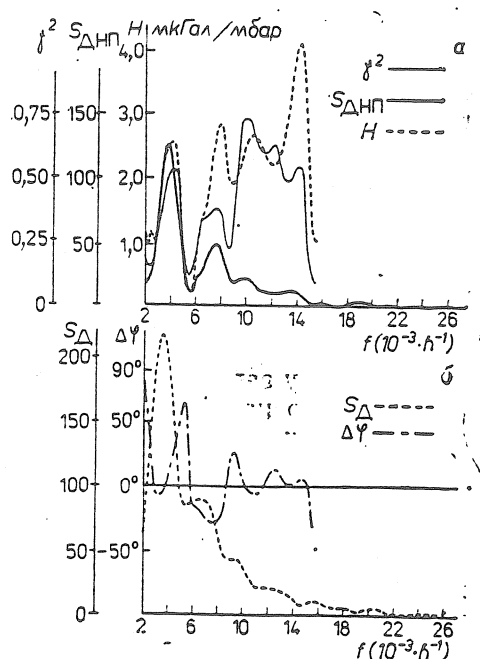


Fig. 2. (a) Spectre de cohérence entre la pression atmosphérique et la dérive (γ^2), le spectre croisé ($S_{D, pn}$) et la fonction de transmission en amplitude (H)

(b) Spectre croisé en phase ($\Delta \phi$) et spectre de pression atmosphérique obtenu par l'application de la fenêtre provisoire de Hanning (S_D) (b).

pression (température, bruit électrique, etc ...). Mais malgré tout nous avons trouvé dans le travail précédent (Paessalou, 1984)

que le coefficient de corrélation entre la pression atmosphérique et la dérive atteint la valeur maximale pour des périodes de quatre et cinq jours. Le spectre de cohérence a donné une répartition partielle de la corrélation plus nette : le pic principal est sur la fréquence de 10 unités. Ce dernier correspond bien avec la période de quatre jours. Il semble bien que dans la bande des fréquences voisines de 10 unités (100 h.) l'enregistrement du gravimètre GS-11 N° 147 soit beaucoup plus sensible aux variations de la pression.

A la fréquence de 15 unités l'intensité dans les spectres de la pression et de dérive et par conséquent aussi dans le spectre croisé est devenu insignifiante. Sa précision de détermination s'est même détériorée. D'importantes perturbations peuvent surgir même dans le spectre de cohérence puisqu'il représente la relation du carré du spectre croisé en amplitude au produit des spectres de la dérive et de la pression. Par cette opération les erreurs relatives s'additionnent. Pour cette raison cette partie du spectre de cohérence n'est pas examinée comme les parties correspondantes de la fonction d'amplitude de transmission et du spectre de phase.

La fonction de transmission en amplitude (fig. 2a) suit dans les grandes lignes le spectre de cohérence ce qui est compréhensible : plus grand est le lien plus doit se faire sentir la pression sur le gravimètre. Le pic élevé à la fréquence de 8 unités est le résultat de l'influence du pic dans le spectre de dérive sur la même fréquence qui n'a au fond pas une origine nette ce dont témoigne le spectre de cohérence. Le pic près de la fréquence de 14 unités est selon toute vraisemblance constitué par le déplacement de l'estimation de la fonction de transmission vers le haut à cause de la diminution plus

rapide du spectre de la pression en comparaison avec l'intensité du spectre croisé. En jugeant d'après les données en notre possession, la fonction d'amplitude de transmission donne une caractéristique moins sûre du lien réciproque que le spectre de cohérence.

Le spectre croisé en phase est représenté sur la figure 2b. Il est justifié ici de n'examiner que les valeurs négatives de ce spectre réparties à l'endroit du pic principal du spectre de pression (fenêtre provisoire de Hanning). La transformation des degrés par la vitesse angulaire donne un retard de 7 heures pour la période de 308 heures.

Comme on peut le voir sur la figure 3 la diminution relative la plus sensible de l'intensité du spectre de dérive est observé dans la bande de fréquence voisine de 10 unités (période de 100 heures) ce à quoi il fallait s'attendre puisqu'ici il y avait un coefficient maximum de cohérence.

Nous essayerons d'interpréter les résultats obtenus. D'après le spectre de cohérence l'enregistrement du gravimètre GS-11 N° 147 réagit apparemment sélectivement aux variations de la pression à différentes périodes. Nous sommes arrivés précédemment à la même conclusion (Paessalou, 1984). Il est très remarquable qu'au plus grand pic dans le spectre de la pression ne correspond pas le plus grand pic dans le spectre de cohérence. S'il en est bien ainsi en réalité alors la dépendance des indications du gravimètre en fonction de la vitesse de la variation de la pression prévaut sur la dépendance à l'intensité de la pression.

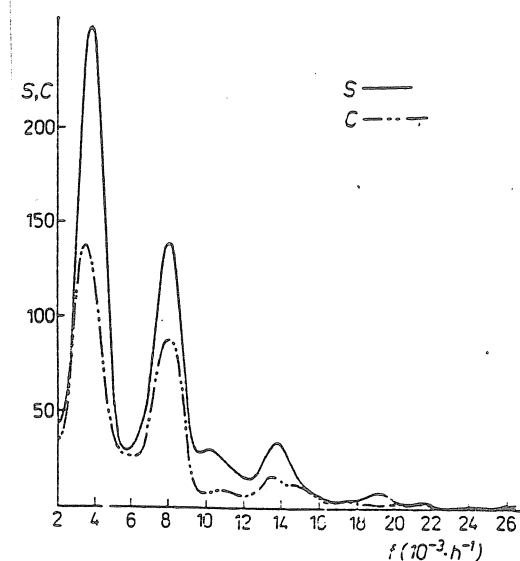


Fig. 3. Spectre de dérive avant (S) et après (C) l'élimination de l'influence de la pression atmosphérique obtenu par l'application de la fenêtre de Hanning.

Mais sur la base de nos données il ne faut pas en conclure avec assurance puisque la dérive est aussi affectée par d'autres bruits. Cela sera éclairci plus loin.

Nous voyons sur le spectre "du bruit résiduel" (fig. 3) que l'élimination de l'influence de la pression ne corrige que peu la structure en fréquence de la dérive. Selon toute vraisemblance on a affaire ici à d'autres facteurs perturbant l'enregistrement gravimétrique qui agissent à l'unisson avec la pression ou sur

des fréquences voisines d'elle. Ces dernières peuvent altérer aussi l'influence de la pression.

RESULTATS PRINCIPAUX

1. On propose la méthode de l'analyse spectrale croisée se basant sur des critères statistiques et permettant d'évaluer la répartition de fréquence :
 - a) de la corrélation entre le facteur perturbateur (pression atmosphérique) et l'enregistrement gravimétrique (dérive); b) de la fonction de transmission en amplitude du gravimètre (coefficient barométrique); c) de la fonction de transmission en phase du gravimètre (retard de l'effet de pression sur l'appareil).
2. La méthode a été testée sur des données de cinq mois d'observations gravimétriques des marées terrestres à Tallin. L'estimation du spectre de cohérence permet de supposer une certaine sélectivité de l'action de la pression sur l'enregistrement du gravimètre GS-11 N° 147. Il est possible que cet appareil réagisse beaucoup mieux aux variations de la pression pour une période de 100 heures.
3. Dans le spectre de dérive on a découvert des pics sur les périodes de 267 et 125 heures. Nous pouvons attribuer le premier et principal à l'effet de la pression atmosphérique.
4. L'estimation assez élevée du coefficient barométrique du gravimètre GS-11 N° 147, atteignant les valeurs de $2,6 \mu \text{ Gal/mbar}$ à l'endroit du pic principal du spectre de la pression est en fait explicable par l'influence de la pression sur l'appareil lui-même. Dans le travail de N.N. Pariiskii, B.P. Pertsev et M.V. Kramer (1982) l'effet non instrumental de la pression atmosphérique est estimé à $0,406 \mu \text{ gal}/\mu \text{ bar}$. Mais pour Tallin cette valeur est encore plus petite car la station n'est pas loin de la mer ($\sim 1 \text{ km}$). Pour les zones marines qui représentent un baromètre inversé ce coefficient diminue.
5. Pour obtenir des estimations plus sûres aussi bien des spectres du coefficient barométrique et du retard de phase que du spectre de cohérence il a fallu augmenter le nombre de degrés de liberté ce qui équivaut à l'augmentation de la longueur des séries étudiées.
6. Il est recommandé d'appliquer cette méthode pour l'estimation de l'effet de la pression atmosphérique (et des autres facteurs perturbateurs) non seulement sur les enregistrements de marées gravimétriques mais aussi sur les mesures clinométriques et extensométriques. Cette estimation numérique peut servir comme un des critères de qualité des mesures de marées terrestres.

BIBLIOGRAPHIE

- Алгоритмы и программы анализа геофизических исследований. Минск, 1979, 7—36.
- Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М., 1971, вып. 1; М., 1972, вып. 2.
- Парийский Н. Н., Перцев Б. П., Крамер М. В. Влияние изменений в распределении атмосферных масс на значение ускорения силы тяжести. — В кн.: Повторные гравиметрические наблюдения. М., 1982, 12—26.
- Пазсалу И. Я. Учет влияния атмосферного давления на смещение нуля-пункта гравиметра Gs-11 № 147 методом корреляционно-регрессионного анализа. — В кн.: Хронология и формирование четвертичного покрова Эстонии. Таллин, 1984, 76—83.
- Сборник научных программ на ФОРТРАНе. М., 1974, вып. 1, 97—99.

DIURNAL BODY TIDES OF AN EARTH WITH A FLUID CORE

Jiang Xian-Hua, Li Rui-Hao
(Institute of Seismology, State Seismological Bureau, Wuhan)

Acta Geophysica Sinica, Vol. 30, n° 1, pp. 61-68, 1987

ABSTRACT

Precise observations of the Earth tides have confirmed that the diurnal tidal Love numbers are frequency-dependent. This can be explained by the liquid-core dynamical theory.

The purpose of this paper is to numerically study the dynamical effects of a elliptically stratified and rotating fluid core upon the diurnal Earth tides. In our model, two toroidal modes and one spheroidal mode are included to express displacement in the liquid core. Moreover, the Adams-Williamson condition which is necessary in Molodensky theory is not assumed.

We have obtained the diurnal tidal Love numbers for 1066-A earth model by solving the boundary value problem. Comparision with Molodensky model 1 shows that the agreement is quite good except wave ψ_1 , which probably results from the difference between resonant frequencies.

Key words : Fluid core, Earth tides, Love numbers, Deformation response.

1. INTRODUCTION

The tidal deformation of a spherical, non-rotating elastic Earth is almost independant of the tidal frequency. The Love numbers rest nearly invariant in the whole window of tidal frequency. The case is quite different for an Earth with liquid core, which is assumed to be an elastic rotational ellipsoid consisting in three parts - the inner core, the invisid liquid outer core and the mantle. It is shown {1} that there exist free movement with periods a little shorter than one sidereal day in the liquid core. This movement is called nearly diurnal free oscillation. It makes the liquid core resonate with the diurnal tidal force, which is expressed by the dependance of the diurnal Love number and forced nutations on the tidal frequencies. This is the so-called dynamical effect of the liquid core.

Molodensky {2} has firstly developed a theoretical model for the liquid core dynamical effect and calculated the numerical results for two simple Earth models. The results are widely used till present days. While this theory has the following defects : 1) the truncation of the displacement vector includes only the spheroidal mode σ_2^1 and the toroidal mode τ_1^1 ; 2) the Adams-Williamson condition is postulated which is not necessarily true and 3) the Earth models are too simple, of which the parameters are very different from those of the present Earth models. Shen and Mansinha {3} and Sasao, Okubo and Saito {4} have improved the theory of Molodensky in different aspects.

In the present paper, effort is offered to overcome the mentioned defects. The toroidal mode τ_3^1 is considered in the displacement expression and the Adams-Williamson condition is deconstrained in order to make the model more general. Numerical results are calculated for the 1066 A model and comparison is made with Molodensky's results.

2. ELASTICAL MOVEMENT EQUATIONS AND BOUNDARY CONDITIONS

Suppose that the Earth is in hydrostatic equilibrium state when there were no external tidal potential and in this case, the Earth rotates around its greatest inertia axis with the mean angular velocity Ω . The dynamical parameters (density, elastic modulus and gravity acceleration) are functions of radius r and colatitude θ . If we accept small deformations and perfect elasticity, the strains and stresses fullfil the linear Hooke relations.

To describe the movement of deformation of the Earth, a coordinates system R fixed in the mantle is used, its three axes coinciding with the mean inertia main axes of the mantle. The instantaneous angular velocity of the Earth is

$$\omega = \Omega(\varepsilon \cos \sigma t i_1 + \varepsilon \sin \sigma t i_2 + i_3), \quad (1)$$

where i_1, i_2, i_3 are the basic unit vectors; σ is the angular frequency of the tidal potential and ε is concerned with forced nutation.

The movement of the liquid core is governed by the following partial differential equations

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d\omega}{dt} \times r + 2\omega \times \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \times (\omega \times r) \right] \\ = \nabla \cdot T^* + \rho \nabla (V_0 + V), \\ \nabla^2 V = 4\pi G \nabla \cdot (\rho u). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where ρ is the density; u is the displacement vector; V_0 is the sum of gravitational and centrifugal potentials before deformation; G is the gravitational

universal constant; V is the total anomalous potential which is the sum of the tidal potential V_E and the eulerian potential V_d ; $\bar{T}^*$ is the total stress tensor including the initial stress tensor and eulerian stress tensor $\bar{T}$.

Our discussion being restricted to the diurnal tidal potential, V_E can be developed into a sum of a serie diurnal waves in the coordinates system R :

$$V_E = \frac{1}{3} Q^2 r^2 P_2^1(\cos \theta) \sum_i \alpha_i \cos(\sigma_i t - \varphi). \quad (3)$$

where $P_2^1(\cos \theta)$ is the associated Legendre function and α_j , σ_j are the concerned constants.

(2) can be evaluated using the hydrostatic equilibrium condition :

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right] \\ = \rho \nabla(V + V_p) + \nabla \cdot \bar{T} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \nabla V_0 + \nabla(\rho_0 \eta), \\ \nabla^2 V = 4\pi G \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where

$$\bar{T} = \lambda \Delta \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (5)$$

$$\eta = \mathbf{u} \cdot \nabla V_0, \quad (6)$$

$$V_p = -\frac{1}{3} \varepsilon Q^2 r^2 P_2^1(\cos \theta) \cos(\sigma t - \varphi). \quad (7)$$

λ , μ being the Lamé constants and Δ the divergence of $\mathbf{u}$.

For the liquid core, $\mu=0$, (4) reduces to

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ = \nabla \left(\eta + V + V_p + \frac{\lambda \Delta}{\rho_0} \right) - \beta(r) \Delta \nabla V_0, \\ \nabla^2 V = 4\pi G \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where

$$\beta(r) = 1 - \frac{\lambda \rho_0}{\rho_0^2 V_0},$$

"." representing the derivative with respect to the radius and $\beta(r)$ a parameter describing the stability of the liquid core {3}. Molodensky {2} assumes the Adams-Williamson condition, i.e. $\beta=0$ while Shen and Mansinha {3} treat β as a constant. We will treat β as a function of r to have more generality.

(4) and (8) are the fundamental equations of the problem. The unknowns V_d , $\mathbf{u}$ and $\bar{T}$ satisfy the following boundary conditions : In the interior of the Earth, $\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}$, $\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}$, V_d and $\bar{n} \cdot (\nabla V_d - 4\pi G \rho_0 \bar{\mathbf{u}})$ are continuous through every discontinuous surface; at the Earth' surface

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}|_{in} &= 0, \\ V_d|_{in} &= V_d|_{out}, \\ \mathbf{n} \cdot (\nabla V_d - 4\pi G \rho_0 \mathbf{u})|_{in} &= \mathbf{n} \cdot \nabla V_d|_{out}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where "in" and "out" represent the inner or outer boundary.

3. HARMONIC DEVELOPMENT

Taking account that the Earth's ellipticity is a quantity of high order, we can represent ρ_0 , λ , μ and V_0 as a spherically symmetrical term with an elliptical correction term

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \bar{\rho}(r) - e r \bar{\rho} \sin^2 \theta, \\ \lambda &= \bar{\lambda}(r) - e r \bar{\lambda} \sin^2 \theta, \\ \mu &= \bar{\mu}(r) - e r \bar{\mu} \sin^2 \theta, \\ V_0 &= \bar{V}_0(r) - e r \bar{V}_0 \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where e is the ellipticity of the equal density surface in function of r . It can be calculated from ρ_0 by solving the Clairaut equation.

Because the Earth's rotation and the ellipticity effect are considered, self-coupling and mutual-coupling of the spheroidal and toroidal modes of the displacement field are created. In this case, to seek the displacement provoked by an external force of some harmonic form, a system of infinite partial differential equations should be derived out and solved. This is practically impossible. A combination of a finite number of spheroidal and toroidal modes are normally considered to be an appropriate solution, the number being determined by the accuracy needed and the possibility of numerical calculation. When one more spheroidal or toroidal mode is considered, the calculations increase considerably. It is shown theoretically and observationally that the coupling effect in the liquid core is much more important than that in the solid part of the Earth. So the toroidal mode $\tau_{\ell+1}^m$ is included in this paper, which introduces two more partial differential equations of the first order. The truncated displacement solution is the form :

$$\left. \begin{aligned} \mu &\neq 0, \quad u = \sigma_l^m, \\ \mu &= 0, \quad u = \tau_{l-1}^m + \sigma_l^m + \tau_{l+1}^m. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

We develop the following quantities in spherical harmonics

$$\left. \begin{aligned} \sigma_l^m &= \text{Re} \left\{ \left[e_r \tilde{U}_l(r) + e_\theta \tilde{V}_l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \tilde{V}_l(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right\}, \\ \tau_l^m &= \text{Im} \left[\left(e_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{W}_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right], \\ V &= \text{Re} \left[\sum_i H_i(r) Y_i^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right], \\ \eta &= \text{Re} \left[\sum_i \eta_i(r) Y_i^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \text{Re} \left[\sum_i \Delta_i(r) Y_i^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right], \\ \frac{\lambda \Delta}{\rho_0} &= \text{Re} \left[\sum_i X_i(r) Y_i^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \right]. \end{aligned} \right\}$$

and

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi}.$$

We substitute (12) in (4) and (8), using the following equations

$$\begin{aligned} P_1^1(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos\theta) &= \frac{n(n-m+1)}{2n+1} P_n^m(\cos\theta) \\ &+ \frac{(n+1)(n+m)}{2n+1} P_{n-1}^m(\cos\theta), \\ P_{n_1}^{m_1}(\cos\theta) P_{n_2}^{m_2}(\cos\theta) &= \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{m_3} \\ &\times \left[\frac{(j-m_3)!(n_1+m_1)!(n_2+m_2)!}{(j+m_3)!(n_1-m_1)!(n_2-m_2)!} \right]^{1/2} P_j^{m_3}(\cos\theta), \end{aligned}$$

where $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ is the Wigner symbol and $m_3 = m_1 + m_2$, we arrive at a system of infinite number of differential equations with respect to r .

We consider here $l=2$ and $m=1$, take (11) as the form of the solution:

$$\mu \neq 0 \quad \dot{Y} = A(r)Y, \quad (13)$$

$$\mu = 0 \quad \left. \begin{aligned} \dot{Y}_F &= A_F(r)Y_F + B(r)\varepsilon, \\ X &= M(r)Y_F + N(r)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} Y &= (\tilde{U}_1, \tilde{Z}_1, \tilde{V}_1, \tilde{Y}_1, \tilde{H}_1, \tilde{Q}_1)^T, \\ \tilde{Z}_1 &= \tilde{\lambda}_{\Delta_1} + 2\tilde{\mu}\tilde{U}_1 = \tilde{\Delta}_1 + 2\tilde{\mu}\tilde{U}_1, \\ \tilde{Y}_1 &= \tilde{\mu}(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_1/r + \tilde{U}_1/r), \\ \tilde{Q}_1 &= \tilde{H}_1 - 4\pi G\tilde{\rho}\tilde{U}_1 - 2/3(\sigma + \varrho)\varrho_{er}, \\ Y_F &= (\tilde{U}_1, \tilde{\Delta}_1, \tilde{H}_1, \tilde{H}_1)^T, \\ \tilde{H}_1 &= H_1 - 1/3(\sigma + \varrho)\varrho_{er}, \\ X &= (\tilde{V}_1, \tilde{W}_1, \tilde{W}_1)^T. \end{aligned}$$

"T" represents the transform and $A(r)$, $A_F(r)$, $B(r)$, $M(r)$ and $N(r)$ are coefficient matrixes.

Neglecting the ellipticity, the boundary condition at the Earth's surface are

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Z}_1(a) &= \tilde{Y}_1(a) = 0, \\ \tilde{Q}_1(a) + 3/a\tilde{H}_1(a) &= 5/3a\varrho^2 \left(\alpha - \frac{\sigma + \varrho}{\varrho} \varepsilon \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where a is the mean radius of the Earth.

4. ANGULAR MOMENTUM EQUATION

The diurnal tidal force causes the forced nutation of the Earth. Hence both the equation and the boundary condition concern with the unknown parameter ϵ . We can determine ϵ using the angular momentum equation of the Earth.

In the rotating reference system R, the equation is

$$\frac{dH}{dt} + \omega \times H = G, \quad (16)$$

H being the angular momentum and G the tidal torque

$$H = C \cdot \omega + h \quad (17)$$

$$G = \int_{\text{Earth}} \rho_0 r \times \nabla V_E dv \quad (18)$$

where C is the inertia tensor of the Earth under deformation and h the relative angular momentum. After some calculations, the angular momentum equation is evaluated to the final form :

$$(\epsilon - \sigma/\Omega)\epsilon - \frac{(\sigma + \Omega)}{\Omega A} f - \sigma(\sigma + \Omega)\xi \frac{1}{A\Omega^2} = e\alpha.$$

where e is the Earth's dynamical flattening and A, C the maximum and the minimum inertia moments. The parameters f and ξ are as follows :

$$f = 1/5 G[a^4 \tilde{Q}_2(a) - 2a^3 \tilde{H}_2(a)],$$

$$\xi = 8\pi/3 \int_c^b \tilde{\rho}(r) r^3 \tilde{W}_1(r) dr.$$

where b is the mean radius of the core-mantle boundary and C the mean radius of the inner-outer core boundary.

5. NUMERICAL CALCULATIONS

Similar to static tidal theory {6}, the Earth's diurnal solid tides can also be described with the three Love numbers :

$$\left. \begin{aligned} u_r &= k V_E / g_0; \\ u_\theta &= l / g_0 \frac{\partial V_E}{\partial \theta}, \\ V_d &= k V_E. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

where g_0 is the reference gravity and u_r , u_θ the radial and latitudinal components of $\bar{u}$. Introducing the expression of u_r , u_θ and V_E , we have finally

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{3\tilde{U}_2(a)g_0}{\alpha\Omega^2 a^2}, \\ l &= \frac{3\tilde{V}_2(a)g_0}{\alpha\Omega^2 a^2}, \\ k &= \frac{3\tilde{H}_2(a)}{\alpha\Omega^2 a^2} + \frac{\sigma + \Omega}{\Omega\alpha} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

As a matter of fact the calculation of the Love numbers of the diurnal tides is reduced to the solution of the system of partial differential equations (13) and (14). The numerical method is discussed in {1}.

The parameters ρ_0 , g , λ and μ are given by Earth models. Here the 1066 A model is used. The Table 1 gives the Love numbers for 16 main diurnal tides.

The result presented here have more generality than the widely used Molodensky's result. To have some idea about the difference of the two theories, we have also prepared the numerical result using Molodensky's theory with the 1066 A Model. The result is listed in Table 2 at left.

TABLE 1. Love numbers of diurnal tides.

	Caracte- ristic number	amplitude	h	l	k	δ
Q_1	135.655	0.07216	0.61120	0.08527	0.30147	1.15899
O_1	145.555	0.37689	0.61040	0.08529	0.30107	1.15879
M_1	155.655	-0.02964	0.60805	0.08536	0.29988	1.15821
π_1	162.556	0.01029	0.59499	0.08576	0.29332	1.15500
P_1	163.555	0.17554	0.58863	0.08596	0.29013	1.15344
S_1	164.556	-0.00423	0.57525	0.08636	0.28340	1.15015
	165.545	0.01050	0.53420	0.08761	0.26276	1.14005
K_1	165.555	-0.53050	0.52862	0.08778	0.25996	1.13868
	165.565	-0.07182	0.52307	0.08795	0.25717	1.13732
	165.575	0.00154	0.51624	0.08816	0.25374	1.13564
ψ_1	166.554	-0.00423	0.97946	0.07406	0.48659	1.24957
ϕ_1	167.555	-0.00756	0.67043	0.08347	0.33125	1.17356
	168.554	-0.00044	0.64411	0.08427	0.31802	1.16709
J_1	175.455	-0.02964	0.61838	0.08505	0.30508	1.16076
OO_1	185.555	-0.01623	0.61553	0.08514	0.30365	1.16006
τ_1	194.455	-0.00311	0.61465	0.08516	0.30321	1.15984

TABLE 2. Comparison of Love numbers of diurnal tides.

	h	l	k	δ		h	l	k	δ
Q_1	0.609	0.085	0.299	1.160	Q_1	0.611	0.085	0.301	1.159
O_1	0.608	0.085	0.299	1.159	O_1	0.610	0.085	0.301	1.159
M_1	0.605	0.085	0.298	1.159	M_1	0.608	0.085	0.300	1.158
π_1	0.592	0.085	0.291	1.156	π_1	0.595	0.086	0.293	1.155
P_1	0.586	0.085	0.288	1.154	P_1	0.589	0.086	0.290	1.153
S_1	0.572	0.086	0.281	1.151	S_1	0.575	0.086	0.283	1.150
	0.530	0.087	0.259	1.141		0.534	0.088	0.263	1.140
K_1	0.524	0.087	0.257	1.139	K_1	0.529	0.088	0.260	1.139
	0.518	0.087	0.254	1.138		0.523	0.088	0.257	1.137
	0.511	0.087	0.250	1.136		0.516	0.088	0.254	1.136
ψ_1	0.924	0.076	0.458	1.236	ψ_1	0.979	0.074	0.487	1.250
ϕ_1	0.666	0.083	0.328	1.173	ϕ_1	0.670	0.083	0.331	1.173
	0.641	0.084	0.316	1.167		0.644	0.084	0.318	1.167
J_1	0.616	0.084	0.303	1.161	J_1	0.618	0.085	0.305	1.161
OO_1	0.613	0.084	0.301	1.161	OO_1	0.615	0.085	0.304	1.160
τ_1	0.612	0.084	0.301	1.161	τ_1	0.615	0.085	0.303	1.160

6. DISCUSSION

It is seen from Table 1 that the Love numbers of the diurnal tides of a Earth with a liquid core depend on the tidal frequency σ . The resonant frequency is close to the frequency of ψ_1 . As the factor of checking the liquid core dynamical effect, the difference of the gravity tidal factor of O_1 and K_1 : $\delta(O_1) - \delta(K_1) = 0.020$ agrees with observational results.

The right side of Table 2 is the result of the theory developed in this paper. One sees that a great discrepancy appears for ψ_1 wave and all the rest have no evident differences. As conclusion, we assert that

- 1) ψ_1 is more sensible for the different theoretical models. Although it is yet very difficult to obtain the Love numbers of ψ_1 by observational methods with precision, it is possible to examine the different theoretical models for the liquid core dynamical effect with the improvement of observational precision and continuity.
- 2) The consideration of the toroidal mode τ_{l+1}^m and the cancelling of the Adams-Williamson condition have an influence only on ψ_1 . This confirms that the Molodensky theory is reliable enough.

REFERENCES

- [1] Wahr, J. M., A normal expansion for the forced response of a rotating earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 664—675, 1981.
- [2] Molodensky, M. S., The theory of nutation and diurnal earth tides, *Commun. Belg.*, 283, 25—56, 1961.
- [3] Shen, P.-Y. and Mansinha, L., Oscillation, nutation and wobble of an elliptical rotating earth with liquid outer core, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 46, 467—496, 1976.
- [4] Sasao, T., Okubo, S. and Saito, M., A simple theory on dynamical effects of stratified fluid core upon nutational motion of the Earth, in *Proc. IAU Symp.*, 78, 165—183, 1980.
- [5] Smith, M. L., The scalar equation of infinitesimal elastic gravitational motion for a rotating slightly elliptical earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 37, 491—526, 1974.
- [6] Melchior, P., The tides of the planet Earth, 2nd ed Pergamon Press, Oxford, 1983.
- [7] Gilbert, F. and Dziewonski, A. M., An application of normal theory to the retrieval of structural parameters and some source mechanism from seismic spectra, *Phil. Trans. R. Soc.*, 278 a, 187—269, 1975.
- [8] 李瑞浩等, 中国固体潮向量空间分布特征的研究, 地震学报, 6, 223—240, 1984.

Traduction : Guo Junyi

THE SPECTRAL ANALYSIS AND FILTERING OF TILT TIDAL OBSERVATION

Liu Xuyan

Crustal Deformation and Earthquake, Vol. 5, n° 4, pp. 339-342, 1985.

ABSTRACT

In this paper, the spectrum analysis of tilt tide data observed at the Taian station is made using fast Fourier transform (F.F.T.). On the basis of the spectrum, diurnal and semidiurnal wave are separated from observation values by linear phase finite impulse-duration response filtering (F.I.R.) and then tide factors, phase lags, mean square errors are calculated. Comparing above results with that obtained by Venedikov method, it indicates that effect of F.I.R filtering is rather good.

It is well known that tilt tides are one aspect of the response of the Earth to luni-solar attraction. Fig. 3a shows the EW tilt tidal observations at Taian Observatory. The purpose of a frequency spectral analysis is to separate the amplitudes and phases of several different frequencies which appear in the observed curve. Before to apply a frequency spectral analysis, the observed curve must be divided into different time periods, sampled and the drift should be eliminated. This is the preprocessing. In the example of this paper, rectangular windows are used for period division and the sampling interval is one hour.

Suppose $x(k)$ to be a discrete sampled sequence; the frequency spectrum $x(n)$ is calculated using FFT method according to the equation

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j xnk/N} \quad (1)$$

where n is related to the discrete angular frequencies given by $2n\pi/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. N is the length or sampling period.

Fig. 1 gives the frequency spectrum of the tilt observations at Taian Observatory. It appears from Fig. 1a that for the observation of a period of one month, the logarithm amplitude spectrum and background noise spectrum of the long period waves, diurnal and semi-diurnal waves present evident differences, but not the ter-diurnal ones. This is to be expected.

In what follows we use a FIR filter to separate the diurnal and semi-diurnal waves. Fig. 2 shows the amplitude spectrum and phase spectrum of FIR filter.

In Fig. 2a, ω_a and ω_b are the minimum and maximum angular frequencies of the wave group to be separated. All signals passed through the filter possess a delay of a half sampling period $N/2$. The phase is rigorously linear. From Fig. 2, we obtain that the transfer function of FIR filter is

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (2)$$

Suppose that $y(n)$ is the Fourier transform of the output through a FIR filter, then

$$y(n) = H(n) x(n) \quad (3)$$

where $H(n)$ is the discrete form of the transfer function of the filter. The filtered data $y(k)$ are obtained by applying an inverse Fourier transform to the above equation :

$$y(k) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) H(n) e^{-j2\pi nk/N} \right]^* \quad (4)$$

where * represent the conjugate, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

We have separated the diurnal and semi-diurnal waves from the tilt observation at Taian using the above method. The wave forms are shown in Fig. 3b and 3d. The theoretical values are calculated and the theoretical curves are also drawn (Fig. 3c and 3d).

Using the theoretical values and the result obtained here we have calculated the tidal amplitude factors, phase lags and their errors. The results are given in the Table 1. For comparison, we have applied the Venedikov method for the semi-diurnal waves. The results are shown in Table 2. The tidal amplitude factor obtained with the two methods are very close. This means that good results can be achieved by using a FIR filter.

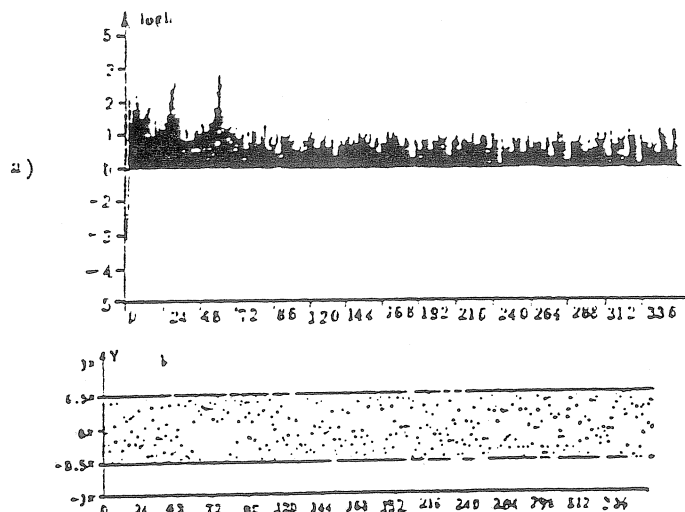


Fig. 1. The observation value spectrum of the tilt tide of EW at Taian station. (from may 1 to may 31, 1984).

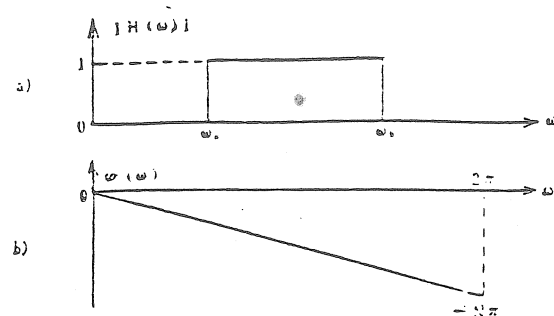


Fig. 2. The transmission function for FIR filter.

a) amplitude spectrum b) phase spectrum

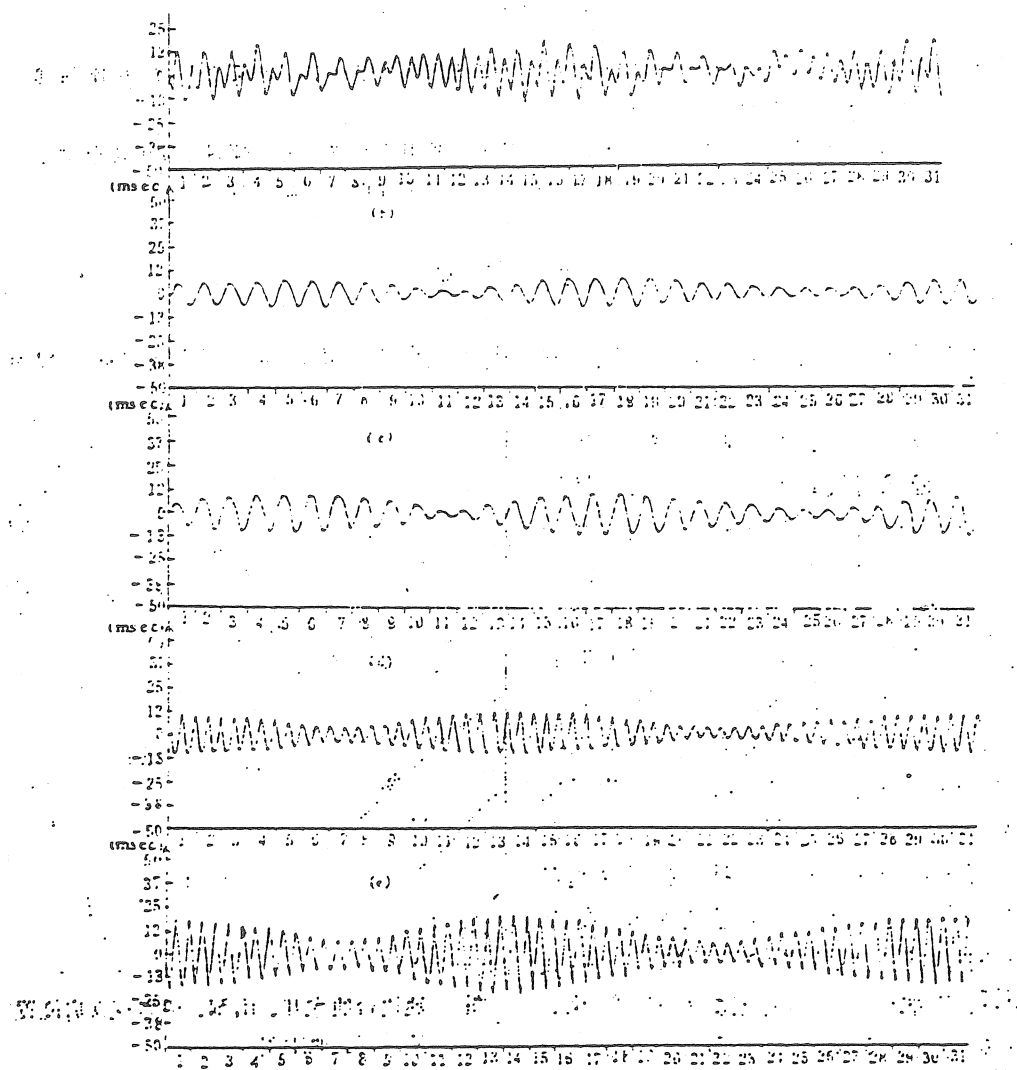


Fig. 3. a) Curve of the observations; b) Filtering curve showing the diurnal wave; c) Theoretical curve showing the diurnal wave; d) Filtering curve showing the semidiurnal wave; e) Theoretical curve showing the semidiurnal wave.

TABLE 1 - EW Tilt tide at the Taian station (from may 1 to 31, 1984)

diurnal wave			
γ	0.726	$\pm$	0.084
phase	3°870	$\pm$	9°340
semi diurnal wave			
γ	0.572	$\pm$	0.044
phase	0°484	$\pm$	10°069

TABLE 2 - Results calculated by Venedikov method

	γ	e.q.m	phase	e.q.m
2N2	0.591	0.163	-11°287	0.276
N2	0.592	0.022	-6.802	0.036
M2	0.570	0.004	-3.305	0.006
L2	0.310	0.194	31.783	0.624
S2	0.577	0.008	-3.832	0.013

Translation Guo Junyi

ELIMINATION OF PRECIPITATION EFFECTS FROM CRUSTAL DEFORMATION OBSERVATION USING HOMOMORPHIC CONVOLUTION FILTER

Liu Xuyan

Institute of Seismology, State Seismological Bureau, Wuhan, China

Earthquake n° 6, pp. 48-51, 1985

ABSTRACT

In this paper, the properties of some disturbances affecting observation data of crustal deformation are discussed and classified. The influence of rainfall on crustal deformation is a convolution process in which amplitude and phase of crustal deformation may be modulated. Finally the author suggests that the method, homomorphic convolution filter, will be able to remove the effects of precipitation on the data of crustal deformation only by using observation data of crustal deformation, without the data of rainfall.

In the crustal deformation observation $x(t)$, there are, besides the signal $S(t)$, still perturbations $W(t)$ triggered by the environmental noise and the instrumental imperfectnesses. Environmental noise includes mainly the effects of temperature, atmospheric pressure, underground water and rainfall, etc ... A noise source can act continuously or discontinuously and the influence can be superpositional or non-superpositional. For instance, the temperature disturbance is continuous and superpositional, and the following relation yields :

$$x(t) = S(t) + W(t - t_0) \quad (1)$$

where t represents observing time and t_0 is time lag. On the other hand abrupt disturbance due to rainfall is discontinuous and non superpositional can be expressed as

$$x(t) = S(t) * P(t) \quad (2)$$

with

$$P(t) = \delta(t) + \sum_k \alpha_k \delta(t - t_k)$$

where $*$ and $\delta(t)$ represent convolution operator and Dirac function respectively;

α_k , t_k correspond to a given event.

The precipitation disturbance is much more complex than that of temperature and discussed broadly by many authors. We have presently two principal methods to eliminate the effects : one is the convolutional regression method, another is the Wiener filtering method. Both methods remove the effect by using a convolution integral of the precipitation $R(t)$ and an impulse response function $h(t)$, i.e. the precipitation disturbs the crustal deformation and hence the observation $x(t)$ by convoluting with another factor.

By analysing crustal deformation observation data, it is found that the disturbance of rainfall on crustal deformation does not appear immediately after rain but some days later and it can be recognized from (2) that the effect of rainfall on the crustal deformation is a convolutional process which modulates amplitude as well as phase, the disturbance can therefore be considered as the sum of emerged waves obtained by adding to the crustal deformation signal $S(t)$ different lags and multiplying it by different coefficients. To separate the signal $S(t)$ from the observation $x(t)$, one should solve equation (2), which is a linear inverse filtering process. But normally, convolutional structure and linear system do not match mutually, and in another aspect, to process the filtering, one should know exhaustively one component of the signal. This is not easy. But this can be reached by using an homomorphic convolution filter. The method is summarized as follows.

Fig. 1 is a typical form of homomorphic convolution system. D_* is the eigen-system; L is a linear filter; D_*^{-1} is the inverse system of D_* ; $x(n)$ is the input; $\hat{x}(n)$ is the output of $x(n)$ through D_* ; $\hat{y}(n)$ is the output of $\hat{x}(n)$ through L and $y(n)$, which is the signal $S(n)$, is the output of $\hat{y}(n)$ through D_*^{-1} ; n is the time index of sampling and $*, +$ represents convolution and addition respectively.

For commensuration with L , D_* have the generalized characteristics of superpositionality and the following equations yield

$$1. D_* \{x_1(n) * x_2(n)\} = D_* \{x_1(n)\} + D_* \{x_2(n)\} = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n);$$

$$2. D_* \{C : x_1(n)\} = CD_* \{x_1(n)\} = C \hat{x}_1(n).$$

where $x_1(n)$, $x_2(n)$ represent two input sequences. But it is the convolution form of the two sequences that acts as the input of D_* . C is a scalar and $:$ represents the calculation rule of combining the scalar and inputs. Hence the system represented in Fig. 1 can be replaced by that represented in Fig. 2

where $Z\{ \}^*$, $\log \{ \}$, $Z^{-1}\{ \}$ and $\exp \{ \}$ means taking to the input Z transformation, logarithm operation, inverse Z transformation and natural exponentiation respectively. L is a linear filter; $.$ represents multiplying combination.

From this point, the function of D_* is to transform convolutions to additive combinations in order to match the linear filter L .

The Z transformation on a unit circle is just the Fourier transformation and Z^{-1} is therefore the inverse Fourier transformation. The final output is just the signal to be separated $S(n)$.

The above is the main line of homomorphic convolution filter method.

The following text will introduce a so called real inverse spectral method of calculating $\hat{x}(n)$ and $y(n)$. But we must postulate that the input sequence possesses the property of Hilbert transformation, i.e. it is a sequence of minimum phase. All the poles and zero points of a minimum phase sequence are in the unit circle of Z plane. Suppose that the terrestrial deformation signal $S_T(t)$ is 0 in the negative demi-axes of time which is expressed as

$$S_T(t) = 0 \quad t < 0$$

and that the signal fulfills the absolute integrability which is more severe than the square integrability (finite energy).

$$\int_0^{\infty} |S_T(t)| dt < \infty \quad (3)$$

Hence the integral transformation

$$S_T(p) = \int_0^{\infty} S_T(t) e^{-pt} dt,$$

$$S_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma_1}^{\infty+i\sigma_1} S_T(p) e^{pt} dp \quad (4)$$

must be convergent for $\sigma < 0$, $-\infty < \omega < \infty$, where σ_1 is an arbitrary constant, $p = \sigma + j\omega$. When $\sigma = 0$, (4) becomes a pair of Fourier transformation i.e. the frequency spectrum $S(\omega)$ of $S(t)$ always exists. And all the poles of $S_T(p)$ are in the left half P plane, i.e. all the pole of $S_T(p)$ are in the unit circle of Z plane, but the zero points can be in or out of the circle. If the zero points are in the unit circle, the minimum phase condition yields. Therefore most of the observational sequences of terrestrial deformations fullfil the condition

* by definition in the complex plane $Z\{n\} = W\{n\}e$, $W = e^{j\omega n}$, $Z^{-1}\{n\} = W$.

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{x(n)}{x(0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}(k) \frac{x(n-k)}{x(0)}, & n > 0 \end{cases} \quad (5)$$

and

$$\hat{x}(0) = \log x(0) \quad (6)$$

(5) and (6) constitute an expression of the minimum phase system D_{**} . $\hat{x}(n)$ which is called real inverse spectrum is the inverse Fourier transformation of the logarithmic amplitude of the Fourier transformation of the input sequence (Fig. 2). From (5), for minimum phase inputs, the system D_{**} is a causal system. Let us suppose $\hat{y}(n)$ to be the value of $\hat{x}(n)$ after filtering, we can calculate, from the following formula, the expected signal $y(n)$ to be separated.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right) \hat{y}(k) y(n-k) \\ &= \hat{y}(n) y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{y}(k) y(n-k), \quad n > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$y(0) = \exp \{\hat{y}(0)\}. \quad (8)$$

It should be pointed out here that we need only add to the input sequence a constant to make $x(0) > 0$ in order to make {6} having the definition.

Therefore, before performing the filtering, we should at first affirm whether the observational anomaly and the precipitation have some relation in time under the postulation that other perturbations are excluded. If the relation is confirmed, the observation is perturbed by the rainfall and the L filter can be constituted according to the period where the real inverse spectrum $\hat{x}(n)$ shows anomaly (or the rainfall epoch) :

e.g. if the indexes of the rainfall data are comprised between i - j , one can design a L filter which possesses the following properties

$$\hat{x}(n) \rightarrow \boxed{L} \rightarrow \hat{y}(n) = \begin{cases} \frac{\hat{x}(j+1) - \hat{x}(i-1)}{(j-i+2)} & (n-i+1), \quad i \leq n \leq j \\ \hat{x}(n). & \text{another value of } n. \end{cases}$$

We have used the method to the levelling data of short distance at Dahui Chang and the inclination observations at Wengchuan for the modelisation of the precipitation effects. Fig. 3 and Fig. 4 show the results after processing the homomorphic convolution filtering, which shows that the efficiency is very good. One finds that, before the terrible earthquake in Tangshan, the change speed of altitude becomes great obviously at Dahui Chang.

The main feature of the method is that no auxiliary observation is needed in calculations and that the deformation property beyond the disturbed period is preserved. The defect of the method is that the calculated quantity is large in the successive calculations and that sometimes a divergence appears in calculating the real inverse spectrum. To overcome this difficulty, the so called complex inverse spectrum should be calculated. Complex inverse spectrum is the Fourier inverse transformation of the complex logarithm of the Fourier transform of the input sequence. The algorithm of the complex logarithm is similar to continuous frequency function, the phase of the input sequence $x(n)$ must be calculated. This demands calculating the phases of every developed frequency using the self adapted numerical integration method. This is not discussed here.

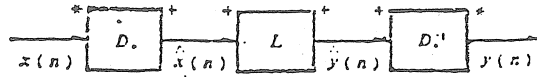


Fig. 1

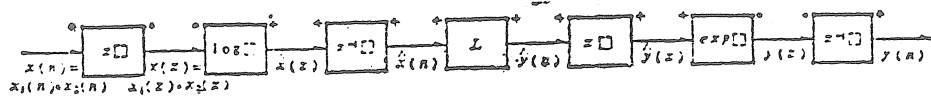


Fig. 2

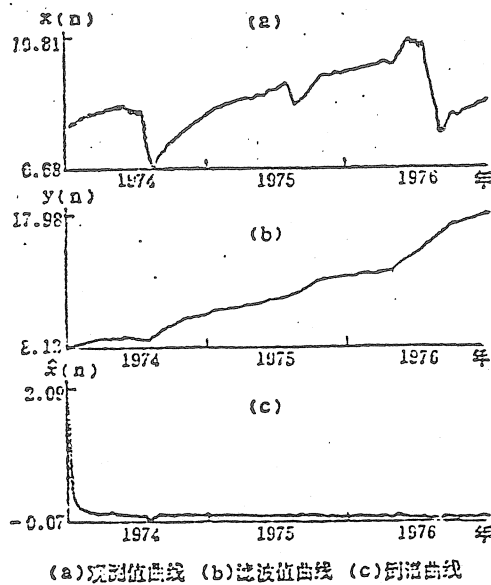


Fig. 3 大灰厂台 1974--1976 年短水淹曲线

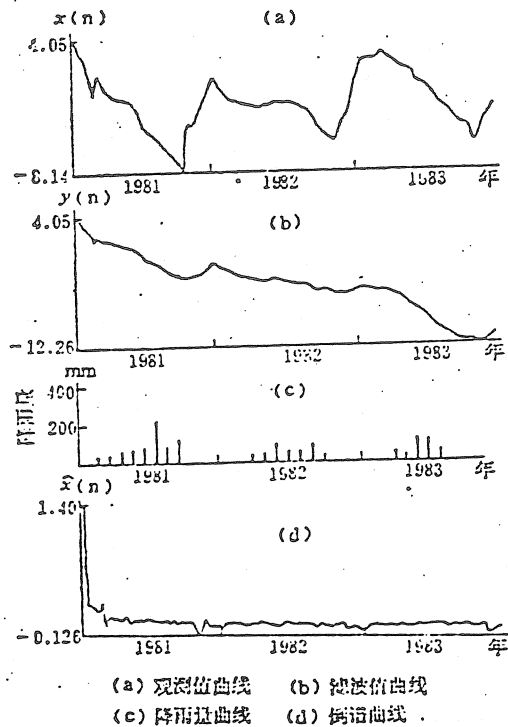


Fig. 4 汶川台 1981--1983 年地倾斜 EW 向曲线

THE EFFECT OF DIFFERENT EARTH MODELS ON THE LOAD TIDE CORRECTIONS

Hsu Hou-Tsé

Mao Wei-Jian

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Acta Geophysica Sinica, Vol. 28, n° 3, pp. 282-290, 1985

ABSTRACT

There is close relation between loading tidal correction and structure of crust and upper mantle. By using recent 1066 A Earth model, we have recalculated the loading Love numbers and obtained loading Green's functions for gravity, tilt and strain. It is shown that there are considerable difference of Green's functions obtained by these two models, especially for small θ . Afterwards, we have estimated the effect of different models on loading correction, in which the evaluation of distant region is carried out by an analytical method, and for near region, by using a digital method.

1. INTRODUCTION.

It is well known that, to describe the response of the Earth to the solar and lunar tidal force, it is sufficient to consider only the low degree Love numbers as the development to third degree of the tidal potential is already accurate enough. Low degree Love numbers depend mainly on the elastic parameters in the deep interior of the Earth and are not sensible to the structure of crust and upper mantle. Alsop and Kuo {1}, Denis {2} and Wihlim {3} etc. have studied the effect of different Earth models (the differences are mainly on the crust and upper mantle) to the Love numbers. Their results are practically the same. The maximum discrepancy between Love numbers don't exceed 1 %.

It is quite different for loading tides because very high degree loading Love numbers should be considered for describing the response of the Earth to the loading due to oceanic tides. Because the loading mass is normally expressed as a sum of spherical harmonic series of infinite degree and the high degree loading Love numbers are very sensible to the structure of the crust and upper mantle, the static response of the different Earth models to surface loading are different and hence introduce different tidal corrections. This paper deals principally with this problem.

The tidal deformation equations are integrated firstly using the Runge-Kutta method for the recent 1066 A Earth model and the loading Love numbers of $n = 0$ to 10000 are obtained. After comparing them with the loading Love numbers of other Earth models, they are utilised further to construct the different loading Green's functions and the comparison is done with the Green's functions for G-B Earth model obtained by Farrell. The effect on the loading corrections of gravity and tilt due to the difference of these two resulting Green's functions is discussed. In our calculations, the analytical method in {8} is used for the remote region while a numerical method is used for the near region.

2. LOADING LOVE NUMBERS AND GREEN'S FUNCTIONS.

The tidal deformation of a layered, spherical, selfgravitant, non-rotating elastic Earth due to surface loading can be obtained by solving the following differential equation system of sixth order according to the elastic theory :

$$\frac{dY}{dr} = AY \quad (1)$$

where $Y = (y_1, y_2, \dots, y_6)^T$, with T representing transform. y_1, y_3 and y_5 are respectively the radial, tangential deformations and the eulerien potential; y_2 and y_4 are respectively the radial and tangential stress; A is a square matrix depending on ω, r, n and λ, μ, ρ (here r is the radius; ω is the frequency of tidal force which is zero when static state is considered; n is the degree of the spherical harmonic function; λ, μ and ρ are respectively the Lamé parameters and density). Because $\mu=0$ in the liquid core, (1) becomes a system of 4 equations. If $\omega=0$ and the Adams-Williamson condition holds, the problem can be simplified furthermore.

Together with the surface loading boundary conditions, equation (1) is solved and the Love numbers of different degree h'_n, k'_n and l'_n are obtained. A complet development of the method and result can be found in {9}.

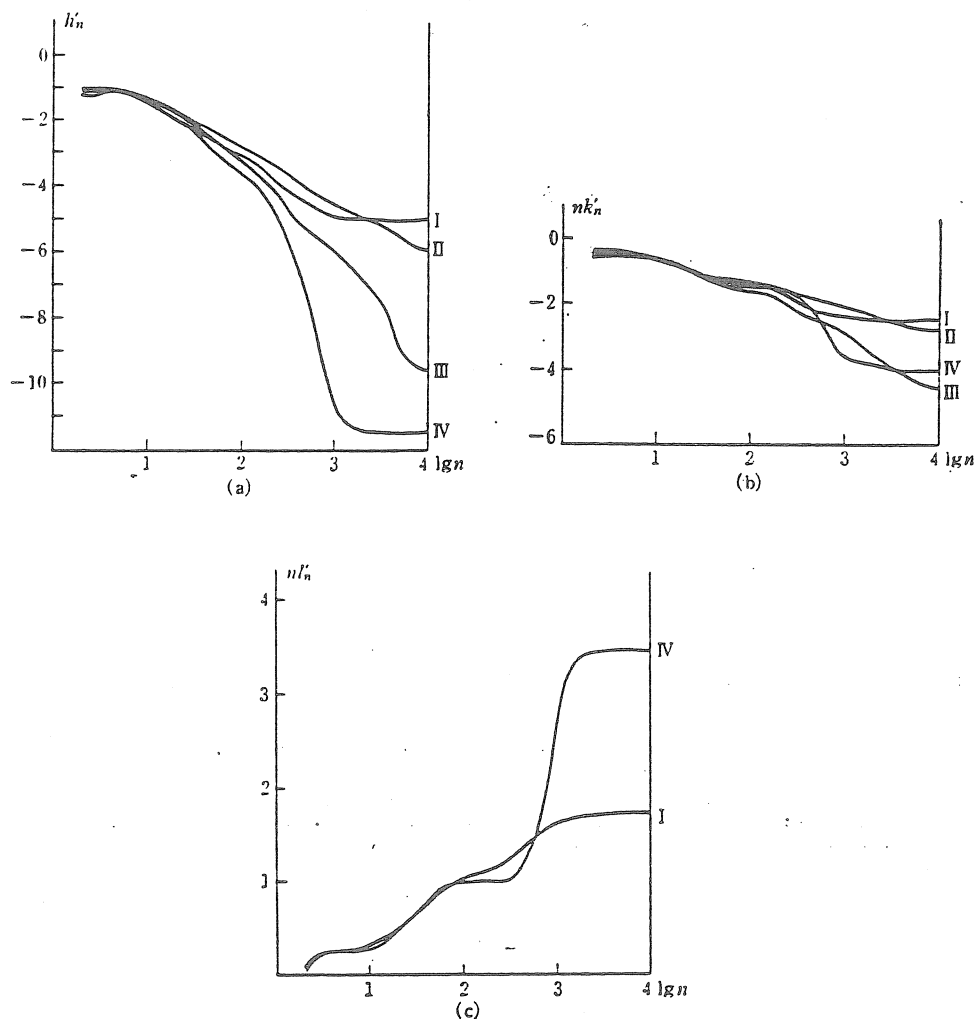


Fig. 1. Love numbers of different earth models, a - h'_n ; b - k'_n and c - l'_n

It should be mentioned that the following asymptotic expression given by Farrell can be used to check the Love numbers we obtained. This expression is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} h'_n \\ nl'_n \\ nk'_n \end{bmatrix} = \frac{gM_e}{4\pi a^2 \eta} \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\mu} \\ 1 \\ -\frac{3\rho\eta}{2\bar{\rho}\mu} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

where g , M_e , a , $\bar{\rho}$ are respectively the gravity at the surface of the Earth, the mass of the Earth, the radius of the Earth and the average density of the Earth; $\eta = \lambda + \mu$ and $\sigma = \lambda + 2\mu$ are functions of the Lamé parameters of the upper layer of the Earth model.

Fig. 1 gives the Love numbers of the different Earth models. The curve I corresponds to the G-B model or Farrel's result. The curve II corresponds to the Bullard 1 model which is slightly different from the G-B model in the

position of the transient layer C in the mantle. The curve III corresponds to the Bullard 3 model of which the density of the upper limit of the mantle is slightly greater than that of the G-B model or 3.70 g/cm^3 . The curve IV corresponds to the 1066 A model. Here the curves II and III were given by Varga {6} and the curve IV was given by the author of the present paper {9}.

It is found from Fig. 1 and from our calculation that 1) the property of Earth's core (density and λ) affect only the low degree loading Love numbers and their effect can be neglected when $n > 10$; 2) the different existing Earth models (which are different principally in the structure of the crust and upper mantle) have greater effect on the high degree loading Love numbers.

The loading Love numbers obtained by solving (1) for the Earth model 1066 A may be used further to calculate the Green's functions of different kinds :

$$\left. \begin{aligned} \text{Vertical displacement } u(\theta) &= \frac{a}{m} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos \theta), \\ \text{Tangential displacement } v(\theta) &= \frac{a}{m} \sum_{n=1}^{\infty} l'_n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta), \\ \text{Gravity } G(\theta) &= \frac{g}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2h'_n - (n+1)k'_n) P_n(\cos \theta), \\ \text{tilt } T(\theta) &= -\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + K'_n - h'_n) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where θ is the angular distance between the load and the station.

The Green's function of the instantaneous astronomical latitude can also be calculated as follows :

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n - l'_n) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta). \quad (4)$$

where m is the mass of the Earth and θ , the geocentric angle between the loading mass and the point where the function is researched. The asymptotic values h_{∞} , l_{∞} , k_{∞} defined by Farrell are used in the calculations :

$$\begin{bmatrix} h_{\infty} \\ l_{\infty} \\ k_{\infty} \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} h'_n \\ n l'_n \\ n k'_n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

and the disc factor is introduced to accelerate the convergent speed. Fig. 2 shows the gravity and tilt Green's functions due to elastic deformation. It is evident from the fig. that the Green's functions are almost the same when $\theta > 1^\circ$. So the main effect is in the near region of the load, at a radius less than about 100 km.

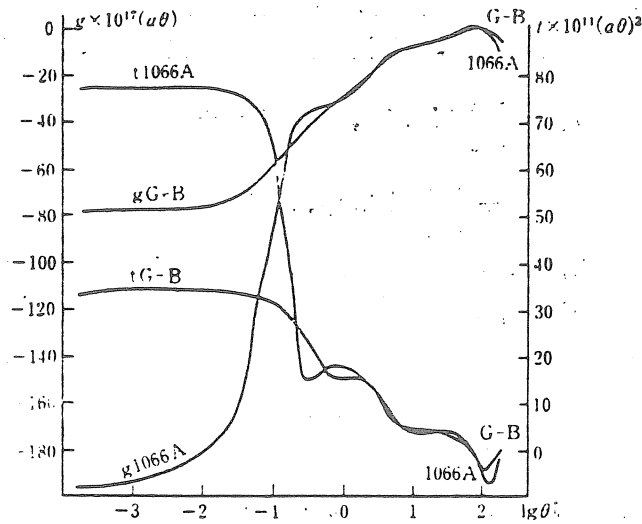


Fig. 2. Gravity and tilt Green's function.

3. THE EFFECT OF DIFFERENT EARTH MODELS ON THE LOADING CORRECTION.

As we have proposed, the loading tidal correction can be calculated by dividing the Earth into a near region and a remote region, a convolution integral being used in the near region and a spherical harmonic development in the remote region. The loading correction due to the remote region is given by the following simple formulas :

$$\text{gravity} \quad \delta g = \sum_{r=0}^{\infty} \rho Q'_r H_r, \quad (6)$$

$$\text{tilt} \quad \left. \begin{aligned} \delta \xi &= \sum_{r=0}^{\infty} \rho R'_r \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \\ \delta \eta &= \sum_{r=0}^{\infty} \rho R'_r \frac{\partial H_r}{\cos \varphi \partial \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where the two groups of factors Q'_r and R'_r are respectively

$$Q'_r = 2\pi a^2 \int_{\psi_0}^{\pi} G(\theta) P_r(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (8)$$

$$R'_r = \frac{2\pi a^2}{r(r+1)} \int_{\psi_0}^{\pi} T(\theta) P'_r(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (9)$$

with P_r , P_r^1 the associated Legendre polynomials; ψ_0 the dividing radius of the near and remote regions; ρ the density of the ocean assumed to be 1 and H_r the term of degree r of the Laplace spherical harmonic development of the tidal height.

Evidently, the above two groups of factors vary with the Earth models and hence introduce different tidal corrections. This is another error source other than the inaccuracy of ocean tidal charts.

In practical calculations, the tidal height H is decomposed into a sum of various wave heights :

$$H(\varphi', \lambda', t) = \sum_s \xi^s(\varphi', \lambda') \cos[\omega_s t + \chi_s - \delta^s(\varphi', \lambda')]. \quad (10)$$

where ξ^s , δ^s , χ_s and ω_s are respectively the amplitude, phase, astronomical phase and angular frequency of the wave s in the position φ' , λ' ; t is the Greenwich time. For simplification, only the M_2 wave is discussed here after, the subscript s is dropped and (6) becomes

$$\begin{aligned} \delta g = & \sum_{r=0}^{\infty} Q'_r H_{rc}(\varphi, \lambda) \cos(\omega t + \chi) \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} Q'_r H_{rs}(\varphi, \lambda) \sin(\omega t + \chi). \end{aligned} \quad (11)$$

where $H_{rc}(\varphi, \lambda)$ and $H_{rs}(\varphi, \lambda)$ are respectively the r^{th} degree of the Laplace spherical surface developments of $\xi(\varphi', \lambda') \cos \delta(\varphi', \lambda')$ (its coefficients of the spherical harmonic development are noted by $\bar{a}_{rk}$, $\bar{b}_{rk}$) and $\xi(\varphi', \lambda') \sin \delta(\varphi', \lambda')$ (its coefficients of the spherical harmonic development are noted by $\bar{a}'_{rk}$, $\bar{b}'_{rk}$) :

$$\left. \begin{aligned} H_{rc}(\varphi, \lambda) &= \sum_{k=0}^r (\bar{a}_{rk} \cos k\lambda + \bar{b}_{rk} \sin k\lambda) \bar{P}_{rk}(\sin \varphi), \\ H_{rs}(\varphi, \lambda) &= \sum_{k=0}^r (\bar{a}'_{rk} \cos k\lambda + \bar{b}'_{rk} \sin k\lambda) \bar{P}_{rk}(\sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

where $\bar{P}_{rk}$ is the normalized associated Legendre polynome. Accordingly, if we pose

$$\delta g(\varphi, \lambda) = L(\varphi, \lambda) \cos[\omega t + \chi - \alpha(\varphi, \lambda)],$$

where L , α are respectively the amplitude and phase of the effect of M_2 on gravity, then

$$\left. \begin{aligned} L(\varphi, \lambda) \cos \alpha(\varphi, \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} Q'_r H_{rc}(\varphi, \lambda), \\ L(\varphi, \lambda) \sin \alpha(\varphi, \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} Q'_r H_{rs}(\varphi, \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Using the G-B and 1066 A Earth models, we can calculate Q'_r of the two models and their difference ΔQ using the Green's functions given in 2 and (8). According to (13), the effect of different Earth models on the loading gravity correction is as follows :

$$\begin{aligned} \Delta L \cos \alpha &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta Q'_r H_{rc}(\varphi, \lambda), \\ \Delta L \sin \alpha &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta Q'_r H_{rs}(\varphi, \lambda). \end{aligned}$$

This value vary with the point studied evidently. To have a general idea about this effect, we take the average square value of the whole globe, for the cosine term :

$$\begin{aligned} m_{L\cos\alpha}^2 &= \frac{1}{4\pi} \iint \Delta_{L\cos\alpha}^2 d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \sum \Delta Q'_r H_{rc}(\varphi, \lambda) \right\}^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} \Delta Q'_r \Delta Q'_{r'} \iint H_{rc} \cdot H_{r'c} d\omega. \end{aligned}$$

Because of the orthogonality of the spherical functions, when $r = r'$, we have :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint H_{rc}^2 d\omega &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^r \iint (\bar{a}_{rk} \cos k\lambda + \bar{b}_{rk} \sin k\lambda)^2 \bar{P}_{rk}^2(\sin \varphi) \cos \varphi d\varphi d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^r (\bar{a}_{rk}^2 + \bar{b}_{rk}^2) = C_{rc}; \end{aligned}$$

and when $r \neq r'$, we have

$$\frac{1}{4\pi} \iint H_{rc} \cdot H_{r'c} d\omega = 0.$$

Hence

$$\left. \begin{aligned} m_{L\cos\alpha}^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta Q_r'^2 C_{rc}, \\ m_{L\sin\alpha}^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta Q_r'^2 C_{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where m represent the average square deviation and C_{rc} and C_{rs} are as follows

$$\begin{aligned} C_{rc} &= \sum_{k=0}^r (\bar{a}_{rk}^2 + \bar{b}_{rk}^2), \\ C_{rs} &= \sum_{k=0}^r (\bar{a}_{rk}'^2 + \bar{b}_{rk}'^2). \end{aligned}$$

For the amplitude, if the relative error of the two directions are not considered, we have

$$m_L^2 = \cos^2 \alpha m_{L\cos\alpha}^2 + \sin^2 \alpha m_{L\sin\alpha}^2.$$

Assume

$$m_s = \max\{m_{L\cos\alpha}, m_{L\sin\alpha}\},$$

then

$$m_L^2 \leq m_s^2. \quad (15)$$

and for the phase

$$m_a^2 \leq \frac{m_s^2}{L^2}.$$

Similarly, the effect on tilt can be derived.

Let us assume $\frac{1}{2}(\delta\xi^2 + \delta\eta^2) = L'(\varphi, \lambda) \cos[\omega t + \chi - \alpha'(\varphi, \lambda)],$

then

$$\left. \begin{aligned} m_{L'\cos\alpha'}^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta R_r' \cdot r(r+1) C_{rc}, \\ m_{L'\sin\alpha'}^2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \Delta R_r' \cdot r(r+1) C_{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where $\Delta R_r'$ is the difference between the models G-B and 1066 A calculated from (9), $\Delta Q_r'$ and $\Delta R_r'$ are listed in table 1.

Let us introduce

$$m'_s = \max\{m_{L'} \cos \alpha', m_{L'} \sin \alpha'\},$$

then

$$m_{L'}^2 \leq m_s'^2,$$

$$m_{a'}^2 \leq \frac{m_s'^2}{L'^2}.$$

In our practical calculations, we chose $\psi_0 = 10^\circ$ and the Schwiderski tidal chart for calculating C_{rc} and C_{rs} ; the results are shown in fig. 3. The effect of the region beyond $\psi_0 = 10^\circ$ can be obtained simply from (14) and (16); the results are listed in table 2. For the region inside $\psi_0 = 10^\circ$, the results are obtained by numerical convolution integration using the Green's functions of the two Earth models. They show that the effect on gravity is less than $0.03 \mu\text{gal}$ and the effect on tilt is less than 3.36 ms . The total effects on loading gravity and tilt corrections of the different Earth models are represented in table 3 (M_2).

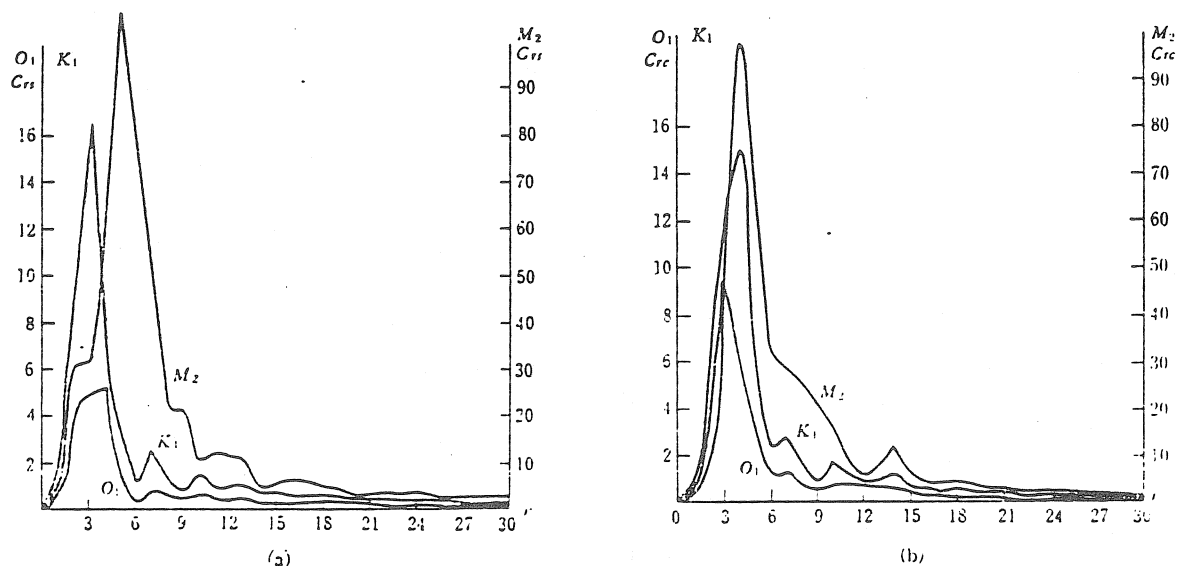


Fig. 3. The values of C_{rs} and C_{rc} .

4. CONCLUSION.

The following conclusions are obtained from the above result :

- 1) Despite that the structure of the crust and mantle affect a lot the loading Love numbers (mainly the high degree numbers) and the loading Green's functions (mainly in the near area), the effect on the gravity loading correction due to the difference of Earth models is not great. In the whole territory of China, this effect don't exceed $0.2 \mu\text{gal}$ which is inside the precision of tidal observation.
- 2) In the near sea area of China, the effect on tilt loading correction due to the local seismological model is much more important than the effect on gravity loading correction. This effect is different from one region to another.

If attempt is made to study the structure of the crust and mantle from the tilt observations, the regions of Qingdao and Quanzhou are the most favorable. In those regions, the difference between the loading tilt corrections for the G-B and 1066 A models reach 2 - 4 ms and this difference is smaller for other regions in China.

Table 1. Difference of the factor Q'_r , R'_r for the two Earth models.

r	$ \Delta Q'_r \times 10^3$ $\psi_0 = 10^\circ$	$ \Delta Q'_r \times 10^3$ $\psi_0 = 20^\circ$	$ \Delta R'_r \times 10^4$ $\psi_0 = 10^\circ$	$ \Delta R'_r \times 10^4$ $\psi_0 = 20^\circ$
0	3.567	8.524	0	0
1	4.599	9.369	1.828	3.002
2	31.42	27.01	40.44	39.33
3	9.377	5.480	14.04	13.01
4	1.509	1.757	4.393	3.487
5	1.668	4.223	0.463	0.314
6	1.680	3.486	0.224	0.415
7	1.580	2.644	0.038	0.537
8	1.591	1.956	0.117	0.481
9	1.504	1.251	0.149	0.388
10	1.330	0.565	0.181	0.308
11	1.156	0.005	0.260	0.294
12	0.993	0.412	0.317	0.276
13	0.862	0.665	0.333	0.237
14	0.730	0.794	0.303	0.170
15	0.615	0.798	0.237	0.085
16	0.504	0.710	0.154	0.002
17	0.401	0.552	0.071	0.075
18	0.296	0.361	0.001	0.124
19	0.197	0.159	0.045	0.140
20	0.104	0.028	0.068	0.127
21	0.026	0.188	0.072	0.097
22	0.042	0.303	0.066	0.060
23	0.010	0.370	0.056	0.024
24	0.146	0.384	0.044	0.006
25	0.185	0.355	0.033	0.027
26	0.218	0.285	0.023	0.040
27	0.242	0.193	0.016	0.045
28	0.260	0.085	0.009	0.044
29	0.267	0.019	0.004	0.038
30	0.266	0.112	0	0.029

Table 2. Effect of different Earth model on the loading corrections of gravity and tilt (remote region, $\psi_0 = 10^\circ$) unit in μgal .

error \ waves	M_2	O_1	K_1
$m_{L\cos\alpha}$	0.144	0.081	0.092
$m_{L\sin\alpha}$	0.185	0.070	0.103
$m_{L'\cos\alpha}$	0.055	0.029	0.034
$m_{L'\sin\alpha}$	0.064	0.024	0.037

Table 3. Total effect of different Earth model on the loading correction of gravity and tilt (M_2 wave).

Observed quantity	Region	amplitude difference	
gravity	whole China	< 0.2 μgal	
tilt		S-N component ms	E-W component ms
	Qingdao	2.30	1.61
	Quanzhou	2.53	3.38
	Yuling	2.84	0.06
	other region	< 1.00 ms	

REFERENCES.

- [1] Alsop, L. E. and J. T. K., The characteristic numbers of semi-diurnal earth tidal components for various earth models, *Ann. Geophys.*, 20, 286, 1964.
- [2] Denis, C., Static and dynamic effects in theoretical Love numbers, *Proceedings of the 8th international symposium on earth tides*, 709—729, 1977.
- [3] Wihlim, H., Influence of upper mantle structure on earth tides, *Proceeding of the 8th international symposium on earth tides*, 774—786, 1977.
- [4] Schwiderski, E. W., Global ocean tides, Part 2: The semidiurnal principal lunar tide (M_2), *Atlas of tidal charts and maps*, NSWCT TR 79—414, 1979.
- [5] Farrell, W. E., Deformation of the earth by surface load, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10, 761—797, 1972.
- [6] Varga, P., Connection between the inner structure and the static deformations of the earth caused by external forces, *Geophysical Transactions*, 25, 31—38, 1978.
- [7] Gilbert, F. and Dziewonski, A. M., An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A278, 187, 1975.
- [8] 许厚泽等, 海洋潮汐对重力潮汐观测的影响, *地球物理学报*, 25, 120—129, 1982.
- [9] 毛伟建, 地球表面质量负荷的静态响应, *地球物理学报*, 27, 74—83, 1984.

COMPARISON OF EARTH TIDE OBSERVATIONS IN VIENNA

B. Meurers

Institute for Meteorology and Geophysics, University of Vienna

1. Introduction

In earth tide investigations LCR D and G gravimeters have been applied very successfully as shown by several authors (e.g. Wenzel, 1970). The main application of the LCR D-9 is gravimetric field work. Nevertheless the periods between the field measurements can be utilized for earth tidal recordings. The first earth tide registrations with LCR D-9 were performed on a profile along the Eastern Alps at the stations Innsbruck, Vienna, Tihany and afterwards at the station Graz in order to calibrate the LCR D-9 (Lichtenegger, Meurers, Varga, 1981). A measurement of four months duration was started in Vienna for investigating the significance of analysis results from short registration intervals. The good quality of the former registrations could be confirmed (Meurers, 1986). For comparison of results from different LCR gravimeters D-51 has been applied in station Vienna also. Meanwhile the D-9 gravimeter has been improved by installation of an electronic feedback system SRW-D (Schnüll, Röder, Wenzel, 1984). Especially with respect to instrumental problems the application of feedback systems very increases the quality of earth tide registrations (Röder, Schnüll, Wenzel 1985). Contrary to conventional capacitance readout methods following advantages can be utilized by measurements with feedback systems :

- Phase lags depending on instrumental influences of astaticized gravimeters nearly are removed.
- Independence of registration sensitivity from small tilt variations and cyclic errors of the gravimeter.

During earth tide registrations without feedback system the recording sensitivity is usually determined by turning the micrometric screw of the gravimeter. These calibrations have to be repeated at certain time intervals for sensitivity control. The calibration results strongly are influenced by tilt variations and also affected by (unknown) cyclic errors of the micrometric screw. The frequency transfer function of the gravimeter and consequently the instrumental phase lags in the tidal frequency range are dependent on instrumental tilt too (Sato, 1977). Besides each calibration procedure disturbs the registration as it is connected with a direct gearing into the measuring system and therefore often is followed by changing drift rates. The feedback system has to be calibrated only before and after the earth tide registration to control its sensitivity which can be expected to be stable in time and not influenced by tilt variations.

In the following this paper will give a comparison of results obtained from LCR D-9 gravimeter with and without electronic feedback system respectively considering the rheological behaviour of astaticized instruments. A four parameter rheological

model is derived based on a parallel registration at a station with known tidal parameters and the influence of this model on calibration results obtained by micrometric displacements is estimated.

2. Results from LCR gravimeters without feedback system

Before presentation of detailed results obtained by LCR D-9 and D-51 some general remarks have to be made. All earth tide registrations have been performed with the same instrumental configuration (RC-filter, time-marker and recorder). The low pass filter does not cause any measurable phase lags in the tidal frequency range. Recording sensitivities have been determined by weekly calibrations with four to six displacements of the micrometric screw in hourly time intervals. The analysis results were calculated by Chojnicki's method (Chojnicki, 1973 and 1978). For comparison the complete analysis results obtained by the Venedikov method are appended at the end of this paper.

In tab. 1 the analysis results of all earth tide registrations with LCR D-9 and LCR D-51 are summarized. Again a good repeatability of the results from LCR D-9 can be stated despite of relatively short registration intervals. This is confirmed by investigating the homogeneity of analysis results from independent parts of the total registration interval (Meurers, 1986). Both instruments are showing identical amplitude factors and phase lags within the tolerance. The phase lags amount to 1-2 degree which is typical for astaticized gravimeters.

inst.	epoch	n	$\delta(O1)$	$\kappa(O1)$	$\delta(M2)$	$\kappa(M2)$	C
D-9	1979	1647	1.1715 .0035	-1.90° .17°	1.1862 .0015	-1.21° .07°	1.013
D-9	1982	2902	1.1708 .0017	-1.37° .09°	1.1871 .0012	-0.71° .06°	1.014
D-9	1979/ 1982	4549	1.1708 .0020	-1.54° .10°	1.1867 .0012	-0.90° .06°	1.014
D-51	1984	1247	1.1712 .0034	-1.76° .17°	1.1853 .0024	-1.15° .17°	1.012

Tab. 1 : Analysis results obtained from LCR gravimeters in Vienna
 n length of record in hours
 C ratio $\delta(M2)/\delta(O1)$

Phase lags and attenuation factors caused by instrumental influences can be determined by recording at a station with well defined earth tidal parameters. Therefore a parallel measurement was performed together with other gravimeters of different types at station Graz. Tab. 2 shows the analysis results of LCR D-9, the phase lag being representative at station Graz (Lichtenegger, 1983) and the instrumental phase lag derived from these values for the tidal waves O1 and M2.

inst.	epoch	n	$\delta(O1)$	$\kappa(O1)$	$\delta(M2)$	$\kappa(M2)$	C
D-9	1980/	2507	1.1733	-1.67°	1.1905	-0.76°	1.015
	1981		.0031	.15°	.0016	.08°	
representative phase				-0.05°		1.09°	
instrumental phase lag				-1.62°		-1.85°	

Tab. 2 : Analysis results obtained from LCR D-9 in Graz
 n length of record in hours
 C ratio $\delta(M2)/\delta(O1)$

3. Calculation of rheological models and influence on calibration results

For the first approximation the transient response $R(t)$ of astaticized gravimeters to a step function caused by turning the micrometric screw can be described by a two parameter model which combines one Hooke element with one Kelvin body (Ducarme, 1975) :

$$(1) \quad R(t) = A \{1 + \varepsilon (1 - \exp(-t/\tau))\}.$$

The rheological parameters τ and ε can be determined if the phase lag of two tidal waves according to the frequency transfer function of the instrument is known. It has to be pointed out, that the calibration results obtained by displacements of the micrometric screw are influenced systematically in dependence on the time intervals Δt between the displacements as shown in the following. The observed reading difference ΔR_n is

$$\Delta R_n = A \{-1 - \varepsilon + \varepsilon(-\exp(-n\Delta t/\tau) + 2\exp(-(n-1)\Delta t/\tau) - \dots + 2\exp(-\Delta t/\tau))\}$$

for even-numbered n

$$\Delta R_n = A \{1 + \varepsilon - \varepsilon(\exp(-n\Delta t/\tau) - 2\exp(-(n-1)\Delta t/\tau) + \dots + 2\exp(-\Delta t/\tau))\}$$

for odd-numbered n

where n is the number of displacements. Hence the amount of successive reading differences $|\Delta R_n|$ is :

$$(2) \quad |\Delta R_n| = A \left\{1 + \varepsilon - \sum_{m=1}^n \varepsilon \ell (-1)^{m+1} \exp(-m\Delta t/\tau)\right\}$$

$\ell = 1$ for $m = n$
 $\ell = 2$ for $m < n$

and with $n \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta R_n| = A \{1 + \varepsilon - 2\varepsilon / (1 + \exp(\Delta t/\tau))\}.$$

Eqs. 2 and 3 show that the observed reading differences corresponding to successive displacements ΔM of the micrometric screw are too small systematically and therefore the recorder sensitivity is overestimated. For $t \rightarrow \infty$ the true sensitivity E results from Eq.1 as follows:

$$E = \Delta M / A(1 + \varepsilon)$$

For $n \rightarrow \infty$ the observed sensitivity E_{∞} can be calculated by Eq. 4 :

$$(4) \quad E_{\infty} = E / \{1 - 2\varepsilon / (1 + \varepsilon)(1 + \exp(\Delta t / \tau))\} > E.$$

This model easily can be extended to a 4 parameter model. In this case Eqs. 1 and 4 have to be changed to

$$(5) \quad R(t) = A \{1 + \varepsilon (1 - \exp(-\Delta t / \tau)) + \eta (1 - \exp(\Delta t / \theta))\}$$

and

$$(6) \quad E_{\infty} = E / \{1 - \varepsilon f / (1 + \exp(\Delta t / \tau)) - \eta f / (1 + \exp(\Delta t / \theta))\}$$

with $f = 2 / (1 + \varepsilon + \eta)$.

Fig. 1 shows the calculated sensitivity in dependence on the number of micrometric displacements in hourly time intervals. All values are standardized with the true sensitivity, which would be observed in case of one single displacement for $t \rightarrow \infty$. An alternating sequence of residuals is formed by subtraction of the mean sensitivity, which approximately corresponds to the limit of this fast converging sequence.

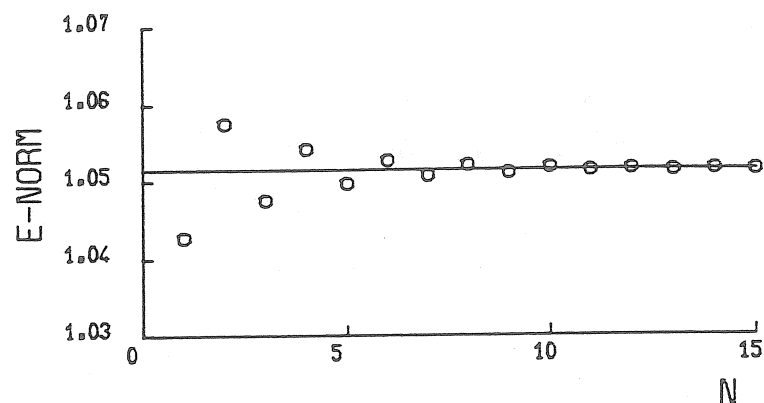


Fig.1 : Sensitivity in dependence on number n of micrometric displacements (rheological model with 4 parameters : $\tau = 150.5$ min, $\theta = 6.8$ min, $\varepsilon = 0.0667$, $\eta = 0.0275$)

The amplitude and phase response functions $H(\omega)$ and $\Phi(\omega)$ of this rheological model result to

$$(7) \quad H(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad \text{and} \quad \Phi(\omega) = \arctg (Q/P)$$

$$P(\omega) = 1 - \{ \varepsilon \alpha^2 / (1 + \alpha^2) + \eta \beta^2 / (1 + \beta^2) \} / (1 + \varepsilon + \eta)$$

$$Q(\omega) = - \{ \varepsilon \alpha / (1 + \alpha^2) + \eta \beta / (1 + \beta^2) \} / (1 + \varepsilon + \eta)$$

$$\alpha = \omega \tau = 2\pi \tau / T$$

$$\beta = \omega \theta = 2\pi \theta / T$$

where T indicates the period of any tidal wave. Based on the results in table 2 and measurements of the transient response to displacements of the micrometric screw the following parameters have been calculated for LCR D-9 by trial and error methods :

$$\tau = 150.5 \text{ min}$$

$$\varepsilon = 0.0667$$

$$\theta = 6.8 \text{ min}$$

$$\eta = 0.0275$$

By applying these parameters in Eqs. 2 and 7 the following corrections can be derived for the main tidal components O1 and M2 :

	attenuation factor	phase correction
O1	1.0345	1.62°
M2	1.0124	1.85°

Tab. 3 : Corrections of tidal parameters for LCR D-9

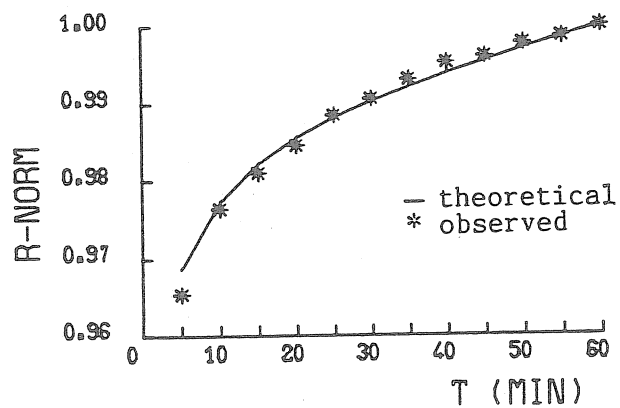


Fig.2 : Theoretical and observed transient response of LCR D-9

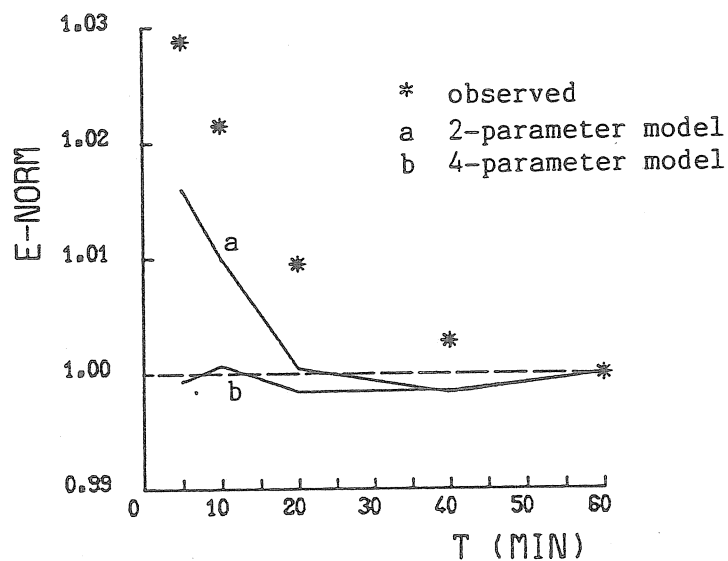


Fig. 3 : Dependence of sensitivity on length of time intervals between micrometric displacements and correction according to Eq. 6

After the fitting process the mean transient response determined from five independent measurements agrees very well with the theoretical response function defined by the above parameters. This is demonstrated by fig. 2.

The dependence of sensitivity on the length of the time interval between successive micrometric displacements as expected according to Eq. 6 can be demonstrated experimentally. The dots in fig. 3 represent the calibration results of LCR D-9 standardized by the sensitivity obtained at time intervals of exactly one hour. In addition the sensitivity values corrected according to Eqs. 4 and 6 are marked by drawn lines. After this correction a significant correlation with the length of time intervals can not be observed any longer. For theoretical calculations the above rheological parameters have been applied again.

4. Analysis results obtained with feedback system SRW-D

After installation into the LCR D-9 the electronic feedback system SRW-D was calibrated at the local calibration line in Hannover (Kanngiesser et al. 1983). The results are checked periodically at a vertical calibration line in Vienna which has been installed for this purpose. 1986 a six month registration was started. The analysis results are shown in Tab. 4. As expected the accuracy is increased significantly. The mean errors calculated by Chojnicki's analysis method amount to less than 50% of the errors resulting from measurements without feedback system at approximately the same number of hourly readings. For comparison tab. 4 also contains the former analysis results obtained at station Vienna after correction according to tab. 3.

inst.	epoch	n	$\delta(O1)$	$\kappa(O1)$	$\delta(M2)$	$\kappa(M2)$	C
D-9	1979/ 1982	4549	1.1318	0.08°	1.1722	0.95°	1.036
D-9/ SRW-D	1986	3335	1.1521 .0008	0.12° .04°	1.1816 .0005	1.03° .02°	1.026

Tab. 4 : Analysis results of LCR D-9 with SRW-D in comparison with former registrations in Vienna

A very good agreement between the phases is observed in the tidal waves. But the amplitude factors are too small in comparison to the results obtained with feedback system. The differences amount to 1 % in the semidiurnal and 2 % respectively in the diurnal frequency range. That means the rheological model removes instrumental phase lags but does not consider correctly the attenuation factors. This can be seen also by comparing the factor C. Hence provided the instrumental phase lags derived from the registration in Graz are determined correctly, it can be concluded that the two and also the four parameter model is not sufficient to correct instrumental influences completely. The fact of both amplitude factors being too small after correction can partly be explained by systematical calibration effects as cyclic errors of the micrometric screw are not taken into account at calculation.

ting the recording sensitivity till now. So the former calibrations should be reinterpreted by considering these cyclic errors, which can be determined by the SRW-D feedback system.

Another way to correct instrumental influences is to calculate empirical attenuation factors exclusively based on comparison with results from measurements applying the electronic feedback system. Tab. 5 shows the tidal parameters for the stations Graz, Tihany and Vienna corrected in that way.

station	inst.	epoch	n	$\delta(O1)$	$\kappa(O1)$	$\delta(M2)$	$\kappa(M2)$
Vienna	D-9	1979/ 1982	4549	1.152	0.12°	1.182	1.03°
Tihany	D-9	1979	1559	1.156	-0.22°	1.182	1.02°
Graz	D-9	1980/ 1981	2507	1.155	-0.01°	1.185	1.17°

Tab. 5 : Tidal parameters corrected by comparison with feedback results

Per definition the corrected values for Vienna are the same as observed by applying the feedback system. The tidal parameters for Tihany and Graz agree very well with the results obtained from long tidal registrations with different gravimeters at these stations (Varga et al., 1985) especially if the δ factors are considered. The deviations of amplitude factors amount to 0.1% in O1 and 0.3% in M2 only. Phase lags differ by 0.7 degree for M2 wave in Tihany and by 0.1 or 0.2 degree for O1 (Tihany) and both frequencies in Graz. The results valid for Vienna fit very good to the regional distribution of δ factors shown in the above paper after applying ocean corrections.

5. Conclusions

A four parameter rheological model has been developed in this paper to explain instrumental influences on earth tidal results. They are based on observed phase lags determined by registrations at a station with known tidal parameters as well as by the transient response function of the LCR D-9 gravimeter. It is shown that the calibration results obtained by micrometric displacements have to be corrected as they systematically depend on the length of the time interval between successive displacements. By applying this rheological model the instrumental influences however can not be removed completely in case of LCR D-9. The resulting factor C becomes too large.

The quality of earth tide registrations with the LCR D-9 was significantly improved by applying the electrostatic feedback system SRW-D. The internal accuracy increased by the factor 2 approximately. Corrections of the former recordings without feedback system could be obtained by considering empirical attenuation factors and phase corrections, which are defined by comparing the results from measurements in Vienna before and after installation of the electronic feedback system. The agreement of

the corrected tidal parameters with the results obtained from other gravimeters seems to be rather good for the stations Tihany and Graz. The results from Vienna also are fitting very well to the regional distribution of δ factors.

6. References

- Chojnicki, T.: Ein Verfahren zur Erdgezeitenanalyse in Anlehnung an das Prinzip der kleinsten Quadrate. Mitt. Inst.f.Theor. Geod.Univ.Bonn, 1973
- Chojnicki, T.: Supplementary precision estimation of results of tidal data adjustment. B.I.M., no 78, 4670-4673, 1978
- Ducarme, B.: A fundamental station for trans-world tidal gravity profiles. Phys.Earth Planet.Inter., 11, 119-127, 1975
- Kanngieser, E., Kummer, K., Torge, W., Wenzel, H.G.: Das Gravimeter-Eichsystem Hannover. Wiss.Arb.d.Fachrichtung Vermessungswesen d. Univ. Hannover, no 120, 1983
- Lichtenegger, H.: Theoretische Untersuchungen und praktische Ergebnisse von Erdgezeitenregistrierungen im Grazer Raum. Mitt.d.Geod.Inst.d.TU Graz, Graz, 1983
- Lichtenegger, H., Meurers, B., Varga, P.: Local tide profile in Austria and Hungary. Proc.9th.Int.Symp.on Earth Tides, New York, 1981, E.Schweizerbart'sche Verlagsbuchhdlg., 151-154, 1983
- Meurers, B. : New results from earth tide registrations in the Eastern Alps. ZfMuG. no. 306, 53-57, 1986
- Röder, R.H., Schnüll, M., Wenzel, H.G.: Gravimetry with an electrostatic feedback system. BGI, Bull.d'Inf., 55, 1985
- Sato, T.: On an instrumental phase lag of the LCR-Gravimeter. B.I.M., no 75, 4341-4360, 1977
- Schnüll, M., Röder, R.H., Wenzel, H.G.: An improved electronic feedback for LCR gravity meters. BGI, Bull.d'Inf., 54, 27-36, 1984
- Varga, P., Gerstenecker, C., Groten, E., Hönig, W.: Gravimetric earth tide observations in Tihany, reliability and interpretation. Ann.Geoph., 3, 4, 493-498, 1985
- Wenzel, H.G. : Erdgezeitenregistrierung mit LCR Gravimetern Modell G. B.I.M. No 66, 3648-3661, 1973

7. Appendix

A : Table of complete results of Venedikov analysis for
Tihany 1979

STATION 0954 TIHANY VERT.COMP HUNGARY

UNIVERSITÄT WIEN, INST. F. MET. U. GEOPHYSIK
LAT : 46.9000 N LON : 17.8667 E HEIGHT : 145 M
GRAVIMETER : LACOSTE&ROMBERG D-9
INSTALLATION : B.MEURERS
MAINTENANCE : I.SZABO, B.MEURERS

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377
6 0 79 5 6/79 522 79 527/79 616 79 620/79 714
33
COMPOSANTE 1
1=V, 2=NS, 3=EW, 5=HOR, STRAIN, 6=VERT, STRAIN, 7=T, 8=P

ONDES DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 205 WAVES
SIGMA1 14 2 3 Q1 30 5 01 26 5 M1 22 3 P191K1 33 6 J1 22 5 001 18 3
NU1 19 3

TIME INTERVAL 71.0 DAYS 1584 READINGS 3 BLOKS EFFICIENCY .93

WAVE GROUP	ESTIMATED AMPL.	AMPL. FACTOR	R.M.S.	PHASE DIFF.	R.M.S.	AMPL.	PHASE
133.-139. 30 Q1	6.97 .13	1.1738	.0222	-.833	1.087	.13	-50.3
143.-149. 26 01	36.48 .12	1.1765	.0037	-1.981	.181	1.36	-67.9
161.-168. 33 P191K1	50.76 .08	1.1662	.0019	-1.378	.096	1.67	-46.9

ONDES SEMI DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 155 WAVES
EPS2 21 4 2N2 20 4 N2 24 5 M2 26 7 L2 14 3 S2K2 21 3 ETA2 15 4 2K2 14 1
243.-248. 24 N2 7.93 .05 1.1804 .0080 -.174 .385 .14 -10.0
252.-258. 26 M2 41.65 .05 1.1873 .0013 -.954 .062 1.17 -36.2
267.-277. 21 S2K2 19.39 .05 1.1880 .0032 -2.074 .158 .83 -57.8

ONDES TER DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES
M3 17 0
327.-375. 17 M3 .44 .04 .9428 .0752 1.993 4.474 .06 165.3

STANDARD DEVIATION D 2.24 SD 1.10 TD .91 MICROGAL

QUALITY FACTORS : Q1= 5.9 Q2= 12.8
O1/K1 1.0106 1-01/1-K1 1.0752 M2/O1 1.0092
CENTRAL EPOCH IJJ= 2444034.0

AUSTRIA

VERT. COMP

STATION WIEN

UNIVERSITAET WIEN, INST. F. MET. U. GEOPHYSIK
LAT : 48.2483 N LON : 16.3617 E HEIGHT : 192 M
GRAVIMETER : LACOSTE & ROMBERG D-9
INSTALLATION : B. MEURERS
MAINTENANCE : B. MEURERS

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B. DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377
6 0 79 123/79 312 79 316/79 4 3 82 129/82 320 82 324/82 6 2

COMPOSANTE 1
1=Y. 2=NS. 3=EW. 5=HOR. STRAIN. 6=VERT. STRAIN. 7=T. 8=P

[illegible]

TIME INTERVAL	1227.5 DAYS	4656 READINGS	4 BLOKS	EFFICIENCY	.16
---------------	-------------	---------------	---------	------------	-----

WAVE GROUP ARGUMENT N	ESTIMATED AMPL. R.M.S.	AMPL. FACTOR	PHASE DIFF.	R.M.S.	RESIDUE AMPL.	PHASE
133.-139. 30 Q1	6.89	1.1665	-1.429	.541	-18	-77.1
143.-149. 26 Q1	36.18	1.1720	-1.554	.101	1.05	-58.9
143.-149. 26 Q1	50.18	1.1555	-1.302	.075	1.37	-56.1

ONDES SEMI DIURNES																								
GROUP REPARTITION FOR 15S WAVES																								
	EPS2	21	4	2N2	20	4	N2	24	5	M2	26	7	L2	14	3	S2K2	21	3	ETA2	15	4	2K2	14	1
	243.-	-248.	24	N2			1.1879	.0053			-.805		.256			-31.1								
	257.-	-258.	26	M2			1.1876	.0010			-.912		.049			-34.6								
	247.-	-277.	24	S2K2			1.1902	.0019			-1.616		.094			-48.6								

ONDES TER DIURNES			
GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES			
M3	17	0	
737	375	47	M3
		44	04
		1.0444	.0292
		-2.590	1.559
			.02
			-94.8

STANDARD DEVIATION	D	2.47	SD	1.48	TD	.57 MICROGAL
--------------------	---	------	----	------	----	--------------

QUALITY FACTORS : Q1= .8 Q2= 3.4
Q1/K1 1.0142 1-01/1-K1 1.1056 M2/O1 1.0134
CENTRAL EPOCH TJJ= 2444510.0

C : Table of complete results of Venedikov analysis for
Graz 1980

AUSTRIA

VERT.COMP

STATION GRAZ

UNIVERSITAET WIEN, INST. F. MET. U. GEOPHYSIK
LAT : 47.0772 N LON : 15.4389 E HEIGHT : 361 M
GRAVIMETER : LACOSTE&ROMBERG D-9
INSTALLATION : B.MEURERS
MAINTENANCE : H.LICHTENEGGER, G.ZACH

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377

G 0 801113/801117 801210/801214 801224/81 113 81 121/81 222 81 228/81 3 2

G 0 81 311/81 4 2 81 410/81 422

55

COMPOSANTE 1

1=V, 2=NS, 3=EH, 5=HOR-STRAIN, 6=VERT-STRAIN, 7=T, 8=P

ONDES DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 205 WAVES

SIGHQ1	14	2	SIGHA1	21	3	Q1	30	5	01	26	5	M1	22	3	P1S1K1	33	6	J1	22	5	001	15	3
NU1	19	3																					

TIME INTERVAL 162.5 DAYS

EFFICIENCY .68

7 BLOKS

2640 READINGS

162.5 DAYS

ONDES SEMI DIURNES

WAVE	GROUP	ESTIMATED AMPL.	AMPL.	R.M.S.	PHASE	R.M.S.	AMPL.	PHASE
ARGUMENT	N	WAVE	FACTOR	R.M.S.	DIFF.	R.M.S.	AMPL.	PHASE
133.-139.	30	Q1	1.1712	.0183	-1.597	.893	.20	-71.0
143.-149.	26	01	1.1741	.0033	-1.702	.160	1.17	-67.7
161.-168.	33	P1S1K1	1.1595	.0020	-1.267	.097	1.46	-49.9

ONDES TER DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 155 WAVES

EPS2	21	4	2N2	20	4	N2	24	5	M2	26	7	L2	14	3	S2K2	21	3	ETA2	15	4	2K2	14	1
243.-248.	24	N2	7.87	.06	1.1790	.0095				-.837	.460	.17	-.42.5										
252.-258.	26	M2	41.49	.06	1.1907	.0017				-.816	.081	1.22	-29.1										
267.-277.	21	S2K2	19.29	.05	1.1898	.0032				-1.407	.155	.67	-44.8										

ONDES TER DIURNES

GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES

M3	17	0	M3	17	0	M3	17	0
327.-375.	17	M3	.52	.02	1.1181	.0470	-5.443	2.405
							.05	-66.7

STANDARD DEVIATION D 2.56 8D 1.72 TD .69 MICROGAL

QUALITY FACTORS : Q1= 3.2 Q2= 8.7
Q1/K1 1.0126 1-01/1-K1 1.0918 M2/01 1.0141
CENTRAL EPOCH TJJ= 2444637.0

D : Table of complete results of Venedikov analysis for
Vienna 1986 (registration with feedback system SRW-D)

STATION WIEN VERT.COMP AUSTRIA

UNIVERSITAET WIEN, INST. F. MET. U. GEOPHYSIK
LAT : 48.2483 N LON : 16.3617 E HEIGHT : 200 M
GRAVIMETER : LACOSTE & ROMBERG D-9, FEEDBACK SRW
INSTALLATION : B. MEURERS
MAINTENANCE : B. MEURERS

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B. DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS

NOMBRE TOTAL D ONDES 377
G 1 861013/861019 861022/861113 861118/861124 861127/87 3 9
72

COMPOSANTE 1
1=V, 2=NS, 3=EW, 5=HOR. STRAIN, 6=VERT. STRAIN, 7=T, 8=P

ONDES DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 205 WAVES
SIGMA1 14 2 SIGMA1 21 3 Q1 30 5 01 26 5 M1 22 3 P181K1 33 6 J1 22 5 001 18 3
NU1 19 3

TIME INTERVAL 149.0 DAYS 3456 READINGS 4 BLOKS EFFICIENCY .97

WAVE GROUP ARGUMENT N WAVE	ESTIMATED AMPL. R.M.S.	AMPL. FACTOR	R.M.S.	PHASE DIFF.	R.M.S.	AMPL.	PHASE	RESIDUE AMPL.	PHASE
133.-139. 30 Q1	6.88 .04	1.1636	.0064	-.426	.315	.06	-64.8	.06	-64.8
143.-149. 26 01	35.61 .04	1.1533	.0012	.178	.062	.21	148.9	.21	148.9
161.-168. 33 P181K1	49.44 .04	1.1385	.0008	.127	.042	.12	69.7	.12	69.7

ONDES SEMI DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 155 WAVES
EPS2 21 4 2N2 20 4 N2 24 5 M2 26 7 L2 14 3 S2K2 21 3 ETA2 15 4 2K2 14 1
243.-248. 24 N2 7.58 .02 1.1883 .0024 1.470 .117 .26 47.6
252.-258. 26 M2 39.38 .01 1.1820 .0004 1.044 .021 1.02 44.8
267.-277. 21 S2K2 18.34 .01 1.1834 .0009 .408 .042 .38 19.9

ONDES TER DIURNES
GROUP REPARTITION FOR 17 WAVES
M3 17 0
327.-375. 17 M3 .45 .01 1.0323 .0206 -.014 1.130 .02 -179.6

STANDARD DEVIATION D 1.68 80 .52 TD .32 MICROGAL

QUALITY FACTORS : Q1= 10.3 Q2= 40.6
01/K1 1.0130 1-01/1-K1 1.1068 M2/01 1.0248
CENTRAL EPOCH TJJ= 2446790.0

ANOMALIES DANS LES AMPLITUDES ET LES PHASES DES INCLINAISONS DE MAREES

A.E. Ostrovskii, V.Y. Starkov, E.Ya. Starkova

Etude des marées terrestres, Naouka, pp. 182-187, Moscou, 1980

La grande quantité de données obtenues ces dernières 20 années par observations des inclinaisons de marées montre que les constantes harmoniques γ et κ dépendent fortement des conditions d'aménagement de la salle d'observations. De pair avec l'influence des facteurs météorologiques - température, pression et précipitation - on a constaté que dans les salles aménagées dans la roche on observe des effets locaux sur les amplitudes et phases. Ces anomalies diminuent fortement la précision des mesures aussi bien du facteur d'amplitude γ que de l'écart de phase κ {1} et, de pair avec le bruit météorologique, créent des difficultés supplémentaires pour obtenir les valeurs globales moyennes.

La question se pose de savoir si l'on ne pourrait utiliser la méthode des inclinaisons pour étudier les hétérogénéités dans la structure de l'écorce terrestre d'après les anomalies dans les amplitudes et dans les phases. Des tentatives ont été faites depuis longtemps {2, 3}. Cependant l'interprétation est très compliquée et difficile. Des observations spéciales sur une fracture ont également été faites par les auteurs de cet article {4}. Ces observations ont été faites à faible profondeur et l'influence de la fracture était fortement masquée par les inclinaisons d'origine thermique.

Dans le présent article on examine une nouvelle expérience. Les observations sur la fracture ont été faites dans de meilleures conditions. La longueur de la galerie était d'environ 100 m; le bruit thermique y était sensiblement plus faible que dans la première expérience. On a réalisé deux séries d'observations, la première d'environ six mois, la seconde de plus d'un an.

Nous donnons sur la figure 1 le schéma de la galerie de la station de Kondara. Elle est creusée dans un massif de granit le long d'une zone tectonique dont la largeur est de 30 à 40 m. Par la partie centrale de la zone passe la fracture qui est coupée par trois coupures depuis le puits principal de la galerie. Dans la première coupure depuis l'entrée, la fracture présente une crevasse d'une largeur de 10 à 15 cm remplie par de roches poreuses, d'argile et des débris de roche. Plus profondément dans la galerie, dans la deuxième et la

troisième coupures, la fracture n'est pas tellement évidente mais se remarque bien d'après la composition de la roche. L'extrémité du puits principal de la galerie entre dans un granit monolithique solide. On a construit sur le granit un socle en béton d'une hauteur de 20 à 25 cm et d'une surface de $1,5 \text{ m}^2$. C'est ici qu'on a fait précédemment des observations utilisées pour comparer avec les inclinaisons sur la fracture à la station de Kondara 1 (désignée dans la suite par K1).

La station K1 est représentée sur la figure 2 à plus grande échelle. Au bout de la troisième coupure, sur son croisement avec la fracture, on a aménagé un socle en béton d'une hauteur de 15 à 20 cm d'une surface de $1,5 \times 1,5 \text{ m}$ sur lequel on a installé les clinomètres photoélectriques N° 4558, 4561, 4560 et 4562. Les deux premiers enregistraient la composante NS, les deux autres la composante EW. Les pendules de chaque paire d'appareils sont orientés l'un vers l'autre (installation antiparallèle).

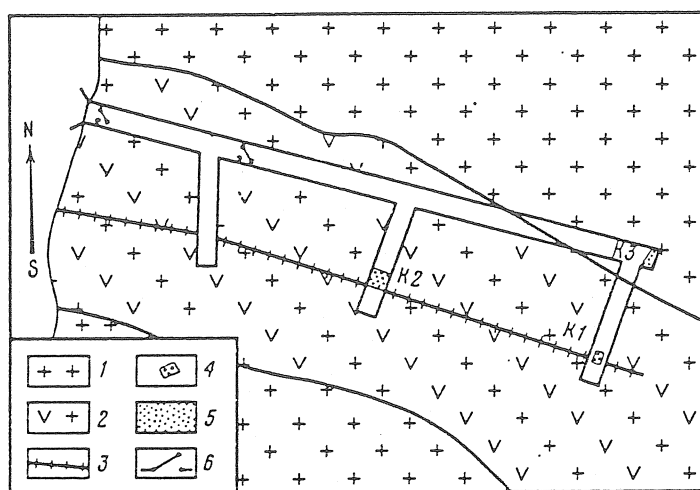


Fig. 1. Schéma de la galerie de Kondara

1 - Granit fort granuleux; 2 - granit de quartz; 3 - fracture;
4 - socle de béton; 5 - sol de la galerie en béton; 6 - porte.

La première série du 22.IX.1973 au 10.III.1974 a une durée de presque 6 mois. A la fin de cette série les clinomètres ont été enlevés et placés à nouveau de telle sorte que les clinomètres enregistrant la composante NS ont changé de site : l'appareil N° 4558 se trouvant au point II2 a été installé au point II1 et l'appareil N° 4561 se trouvant au point II1 a été installé au point II2. Les clinomètres N° 4560 et 4562 (respectivement aux points II3 et II4) ont été installés aux mêmes endroits qu'au cours de la première période d'observations.

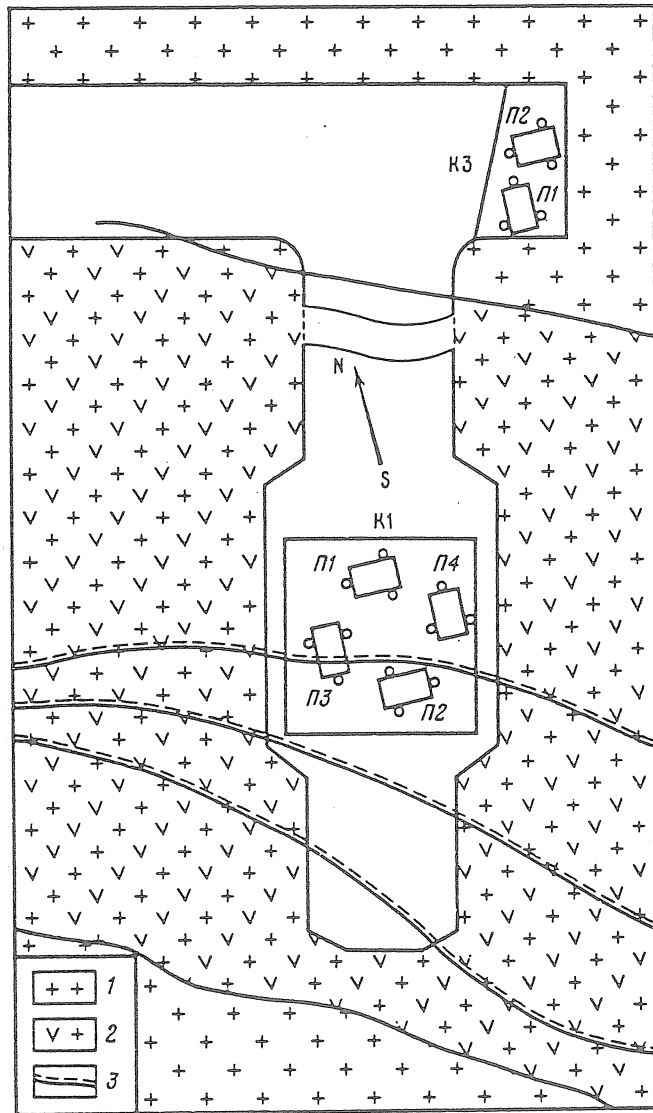


Fig. 2. Disposition des appareils dans la station de Kondara 3 (K3) et Kondara 1 (K1).

1 - Granit fortement granuleux;
2 - Granit de quartz; 3 - fracture.

Constantes des appareils.

L'étalonnage a été réalisé au début et à la fin des observations. Pendant les observations la sensibilité a été contrôlée à l'aide d'une impulsion du courant donnée deux fois par jour.

La différence dans la constante fondamentale du clinomètre au début et à la fin des observations pour ces quatre appareils était : pour le clinomètre N° 4558 de 0,2 %, N° 4561 - 0,04 %; 4562 - 0,08 %; 4560 - 0,8 %.

La différence dans la sensibilité des clinomètres au début et à la fin des observations ne dépasse donc pas 1 %.

On a obtenu précédemment à l'aide des clinomètres N° 4558 et 4562 les constantes harmoniques à la station K3 située sur le granit monolithique avec lesquelles on a comparé les constantes obtenues sur la fracture, dans la station de Kondara 1.

Résultats. Les résultats de l'analyse harmonique des inclinaisons aux sites II1 - II4 de la station de Kondara 1 sont donnés dans la table 1.

Au point II1 on a obtenu, avec 6 mois d'observations, une valeur γ avec une grande concordance intérieure. L'erreur quadratique moyenne ne dépasse pas 0.004. La seconde série d'observations, plus longue, a donné un moins bon accord : 0.012. Ce paradoxe s'explique par le fait que la première série a été faite dans les mois d'automne quand les ondes thermo-élastiques diurnes et semi-diurnes étaient faibles et ne provoquaient pas de grandes perturbations {4}. L'écart de phase au point II1 pour la première et la seconde séries était quasi nul.

Table 1. Constantes harmoniques γ et κ pour M2 dans la station de Kondara 1.

Point	Série	N° de l'instrument	NS		EW	
			γ	κ°	γ	κ°
П1	1	4561	0,846	-0,49	-	-
			± 4	$\pm 1,10$		
	2	4558	0,806	1,15	-	-
			± 12	$\pm 0,69$		
П2	1	4558	0,352	8,58	-	-
			± 3	$\pm 2,11$		
	2	4561	0,364	5,80	-	-
			± 7	$\pm 2,24$		
П3	1	4560	-	-	0,662	15,49
					± 8	$\pm 1,28$
	2	4560	-	-	0,622	15,24
					± 12	0,63
П4	1	4562	-	-	0,591	-0,96
					± 5	$\pm 1,00$
	2	4562	-	-	0,532	-1,22
					± 12	$\pm 0,71$

On a effectué avec les mêmes appareils deux séries d'observations au point II2. On a obtenu là un résultat tout à fait exceptionnel. Le facteur d'amplitude diminue de 2,5 fois sur une distance d'un mètre entre les points. La précision des mesures se trouve dans le même rapport qu'au point II1 : la série longue a un accord interne 2 fois moindre que la première série. L'écart de phase a sensiblement augmenté et l'erreur a crû dans la détermination de κ . Il n'est pas exclu que l'erreur dans la détermination de la phase soit provoquée en partie par des perturbations thermiques.

Au point II3 le facteur d'amplitude paraît normal en composante EW. Dans toutes les stations de la galerie, pour toutes les années d'observations, cette composante donne un facteur plus petit qu'en composante NS.

Table 2. Constantes harmoniques γ et κ pour M2 sur le monolithe et sur la fracture.

Station	Point	NS		EW	
		γ	κ°	γ	κ°
Kondara sur monolithe	П1	0,814	2,90	-	-
	П2	-	-	0,631	3,30
Kondara I	П1	0,836	0,60	-	-
	П2	0,355	7,69	-	-
	П3	-	-	0,655	15,33
	П4	-	-	0,571	-2,09

Mais il est très étonnant qu'en ce point on ait obtenu un écart de phase de plus de 15° . Ainsi la précision de la mesure lors de la détermination de l'écart de phase correspond à la longueur de la série : la série est 2 fois plus longue et l'erreur de 2 fois plus petite. Ainsi cet écart de phase est provoqué non par les perturbations de température mais exclusivement par la direction de la fracture tectonique.

Au point II4 c'est la même loi dans les erreurs quadratiques moyennes : la seconde série longue donne une plus grande erreur que la première. Le facteur d'amplitude est un peu plus petit qu'au point II1 et beaucoup plus grand qu'au point II2.

Ainsi à la suite des observations faites avec les clinomètres installés directement sur la fracture on a obtenu un facteur d'amplitude γ , 2,5 fois plus petit que sa valeur moyenne; en outre, sur la fracture on a obtenu de façon sûre une anomalie de phase atteignant 15° .

Inclinaisons de marées sur le monolithe et sur la fracture. Nous donnons dans la table 2 les valeurs moyennes des constantes harmoniques obtenues en quatre points de la station de Kondara sur la fracture et aux deux points de la station de Kondara 3.

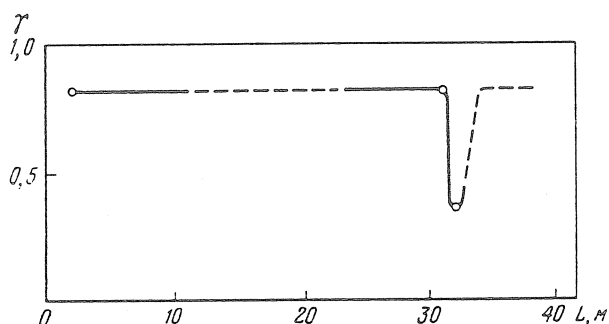


Fig. 3. Graphique de la variation de γ en fonction de la distance depuis le puits de la galerie.

Les points II2 et II3 de la station de Kondara présentent le plus grand intérêt : le point II2 se caractérise par une valeur anormale du facteur d'amplitude et le point II3 - par le grand écart des phases.

On peut figurer ce résultat sur le profil donné à la figure 3. En fait au centre du profil il y a peu de points, en outre il n'y a pas d'observations à l'extrémité du profil c'est-à-dire dans cette partie de la coupure où elle passe par la partie la plus intéressante de la zone tectonique mais cela ne diminue pas l'intérêt du résultat obtenu.

La comparaison des résultats des observations sur les granits monolithiques et sur la fracture montre que le facteur d'amplitude γ sur la fracture peut être fortement diminué. Dans le cas de la fracture de Kondara la valeur γ pour la composante perpendiculaire à la direction de la fracture était 0,355 soit 2,5 fois plus petite que sur le monolithe. Pour la composante parallèle à

la fracture l'écart de phases était anormal. La différence des phases atteignait 15° avec une erreur de mesure de moins d'un degré.

Les observations des inclinaisons de marées peuvent donc être utilisées pour étudier les fractures tectoniques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Островский А.Е. Результаты наблюдений приливных наклонов земной поверхности на территории СССР за 1957-1972 гг. - В кн.: Приливные деформации Земли. М.: Наука, 1975, с. 77-82.
2. Tomaschek R., Groten E. The problem of the residual ellipses of tilt measurement. - 4^e Symp. Intern. sur marées Terrestres. Bruxelles, 1961, p. 78-94.
3. Матвеев П.С. О возможности использования результатов наклономерных наблюдений для исследования особенностей строения земной коры. - В кн.: Вращение и приливные деформации Земли. Киев: Наукова думка, 1970, с. 72-86.
4. Анохина К.М., Островский А.Е. Наблюдения приливных наклонов в платформенных условиях. - В кн.: Медленные движения земной коры. М.: Наука, 1972, с. 201-212.

OBSERVATIONS CLINOMETRIQUES AVEC LE PENDULE VERTICAL "ASKANIA"
DANS LE Puits PRES DE MOSCOU

I.A. Chirokov, K.M. Anokhina

Etude des marées terrestres Naouka, pp. 193-195, Moscou 1980.

Des observations des marées ont été faites avec le pendule vertical "Askania" N-1 N° 9 dans la station expérimentale de Polouchkino près de Moscou, dans un puits d'une profondeur de 45 m. La construction et la technologie de la préparation du puits sont conformes aux recommandations de la firme "Askania". L'enregistrement a commencé en août 1974 et a duré six mois sans interruption.

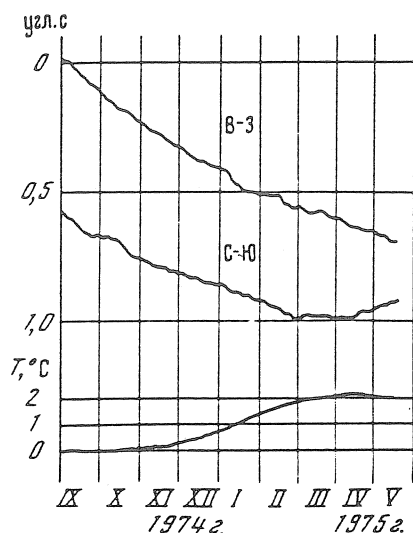
L'orientation du clinomètre a été déterminée à l'aide d'un équipement spécial avec une précision d'environ 0,3°. Les coefficients d'échelle ont été calculés d'après les calibrations répétées par bille et ont été comparés $K_{EW} = 0,341 \cdot 10^{-3}$ et $K_{NS} = 0,303 \cdot 10^{-3}$ par mm.

La stabilité de ces coefficients dans la période des observations était d'au moins 0,6 %.

La dérive a été calculée par la combinaison de Pertsev; elle a un caractère monotone et ne dépasse pas 0,1/mois : en six mois la dérive a atteint 0,55 pour la composante EW et 0,48 en NS. Elle n'est pas liée aux variations de la température dans le puits.

La marée, affranchie de la dérive, a été soumise à l'analyse harmonique par les méthodes de Pertsev et Venedikov. Les résultats sont présentés dans la table. Les valeurs γ et κ obtenues par les deux méthodes concordent dans les limites des erreurs. L'exception concerne les ondes N_2 et O_1 dans l'azimut NS pour lesquelles le désaccord atteint 1,9 %. Pour l'onde N_2 cela s'explique apparemment par la méthode de lissage lors du calcul des valeurs indépendantes γ et κ par la méthode de Pertsev.

Après introduction de la correction de l'influence de la marée océanique calculée par B.P. Pertsev, l'inégalité azimutale $\gamma_{NS} < \gamma_{EW}$ pour l'onde M_2 disparaît, les valeurs des corrections pour les composantes NS et EW étant respectivement égales à +0,053 et +0,015.



Dérive du point nul du clinomètre "Askania".

Après la prise en considération de l'effet indirect le retard de phase de l'onde M_2 est : $\kappa_{EW} = -1,5^\circ$ et $\kappa_{NS} = 1,0^\circ$. Pour les autres ondes semidiurnes on n'a pas calculé la correction de l'océan.

Les facteurs d'amplitude des ondes semidiurnes ont des valeurs plus élevées que celles obtenues jusqu'à présent dans d'autres stations voisines de Moscou {1}. En particulier les observations à Polouchkino avec les pendules horizontaux d'Ostrovskii dans trois puits situés à 10 m du puits du clinomètre "Askania" ont donné trois valeurs indépendantes du facteur $\gamma_{EW} (M_2)$ concordant entre elles avec une précision de 1 % et ayant une valeur moyenne égale à 0,725 {2}. On peut sans doute expliquer cette différence de 7 % entre le pendule Ostrovskii et l'"Askania" par une erreur systématique dans les observations faites avec le clinomètre "Askania". L'influence de l'erreur systématique sur les résultats de la détermination des ondes diurnes apparaît moins sensiblement.

Pour découvrir les causes de ce désaccord on se propose de faire des observations avec le clinomètre "Askania" dans les trois puits mentionnés.

Résultats de l'analyse harmonique des observations.

Composante	Méthode	Ondes semi-diurnes									
		M_2		S_2		N_2		$2N_2$		L_2	
		$H_T = 8,93 \text{ MC}$		$H_T = 4,16 \text{ MC}$		$H_T = 1,71 \text{ MC}$		$H_T = 0,27 \text{ MC}$		$H_T = 0,25 \text{ MC}$	
		γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°
EW	Venedikov	0,777	-3,5	0,784	-2,2	0,797	-2,5	0,654	-8,2	0,871	18,7
	Pertsev	0,773	-3,5	0,781	-2,0	0,799	-2,1	-	-	-	-
NS	Venedikov	0,744	1,4	0,754	0,1	0,722	-0,9	0,838	-7,5	1,023	2,5
	Pertsev	0,742	1,4	0,757	2,3	0,736	-2,0	-	-	-	-
Composante	Méthode	Ondes diurnes									
		K_1		O_1		Q_1		M_1		I_1	
		$H_T = 7,56 \text{ MC}$		$H_T = 5,37 \text{ MC}$		$H_T = 1,03 \text{ MC}$		$H_T = 0,42 \text{ MC}$		$H_T = 0,42 \text{ MC}$	
		γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°	γ	κ°
EW	Venedikov	0,681	-4,3	0,666	-2,0	0,677	-3,3	0,650	9,2	0,874	14,8
	Pertsev	0,684	-4,0	0,663	-4,3	-	-	-	-	-	-
NS	Venedikov	0,763	-2,1	0,729	5,9	0,645	9,2	0,435	35,0	1,459	5,4
	Pertsev	0,788	-3,0	0,737	5,0	-	-	-	-	-	-

Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimations.

O. Francis
Observatoire Royal de Belgique
3, Avenue Circulaire
B-1180 Bruxelles
Belgique

V. Dehant
Chargée de Recherche au Fonds National de la Recherche Scientifique
Université Catholique de Louvain
2, Chemin du Cyclotron
B 1348 Louvain-la-Neuve
Belgique

Abstract:

The computation of the ocean loading indirect effects is made at each station by using a convolution between the Green's functions and a set of point mass-loads. These Green's functions are computed using a series expansion which presents convergence difficulties. In the present paper the mathematical artifices used by Farrell in 1972 are analysed and tested. A strategy is then proposed and new Green's functions are computed. New theoretical models inside the Earth, thus new Love numbers, are introduced to compute new numerical tables.

Plan

Introduction

1. Definition of Love numbers and Green's function
2. Numerical computation
 - 2.1. Inputs
 - a) the constants
 - b) the load Love numbers
 - c) the Legendre polynomials
 - 2.2. Summation method
 - 2.2.1. Kummer's transformation
 - 2.2.2. Euler's transformation
 - 2.2.3. Disk factor
 - 2.2.4. Alternative method for small angular distances
 - 2.3. Conclusion and strategy
3. Numerical results

Introduction

The tidal gravimetric observations are collected at the International Center for Earth Tides (ICET). After correction of the local atmospheric pressure effects, when available, the time series are transformed into the frequency domain where they are corrected for the transfer function of the gravimeter itself. The ocean loading effects are then removed. The corrected tidal gravimetric factor δ_c is so determined for about 270 stations. Using the same definition as that of the ICET, latitude dependent theoretical tidal gravimetric factors δ_m can be obtained and compared with the observed ones (Dehant & Ducarme, 1987). There is still a systematic difference of about 0.7% (Figures 1 and 2). In order to understand and interpret the residuals in terms of physics of the Earth interior, the precision of the ocean loading corrections must be increased. These corrections include the direct gravitational attraction of the fluid masses, the deformation of the Earth surface due to their weight and the induced mass redistribution inside the Earth. The modelling of these effects all together requires the knowledge of the ocean tides everywhere on the Earth i.e. corange and cotidal maps which give amplitudes and phases of the ocean tide at every points of a grid. Farrell (1972) developed a method which allows to compute the ocean loading effects at each station. These are usually called the "indirect effects". The procedure is divided into two steps.

The first one consists in computerizing the response of the Earth to a point mass-load considering a particular model for the internal structure of the Earth (see part I). The different components of the Earth response are tabulated in function of the angular distance between the application point of the load and the observation point. They are called the Green's functions.

For the second step, one considers that an ocean is divided into a set of cells to which a given tidal amplitude and phase are assigned. The mass of each cell is then concentrated at the associated center of figure and a convolution using these masses and the Green's functions is performed in order to compute the total response of the Earth (see part II).

It must also be mentioned that the ocean and atmospheric loading effects are not only perturbing gravity data but they are also important for precise geophysical and geodetical data.

In part I of this paper, we present a critical analysis of the Farrell's method for the computation of the Green's functions and new numerical values are obtained for different rheological models inside the Earth. The new results are used in part II to computerize indirect effects at different stations.

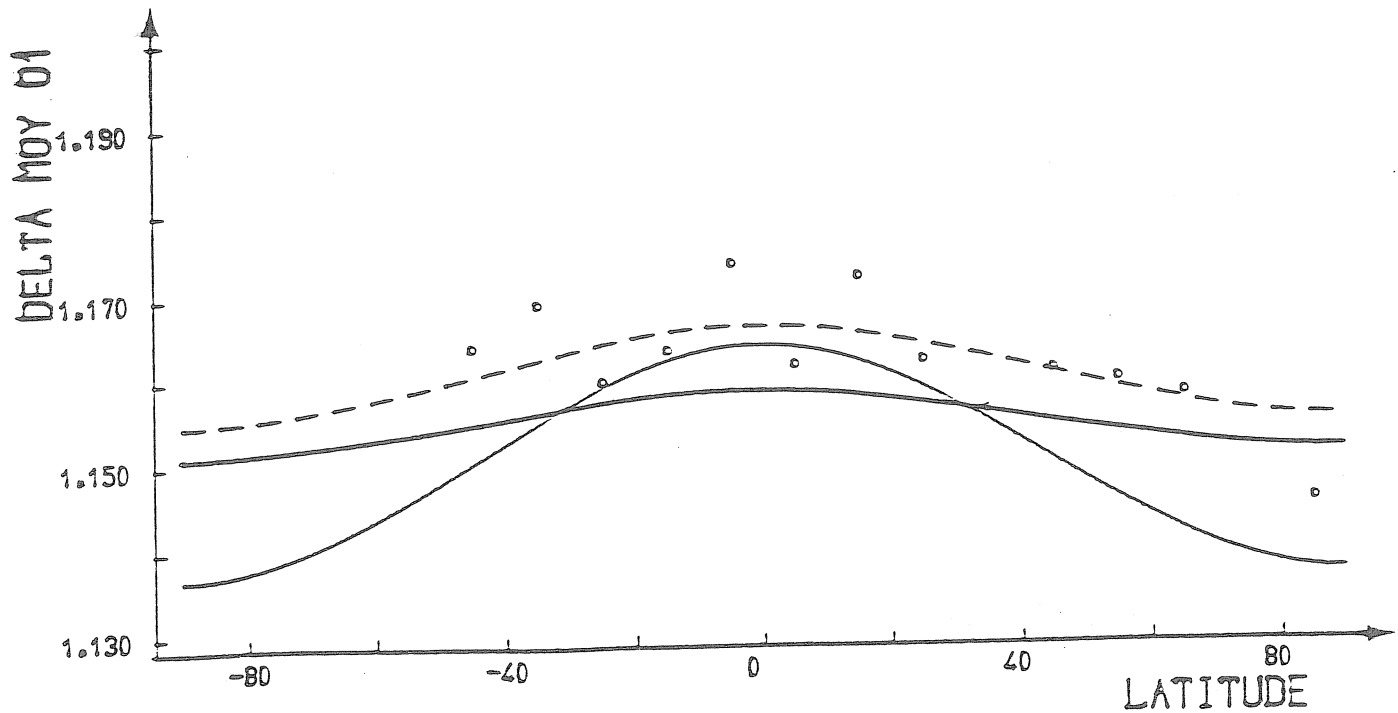


Figure 1: Results for O_1 using the 1066A model like in (5). Points = means computed for each span of 10 degrees from the observed tidal gravimetric factors (ICET data bank). Dashed line = curve deduced from the observed δ by regression; fine curve = δ from Wahr's definition; thick curve = δ from the present paper definition.

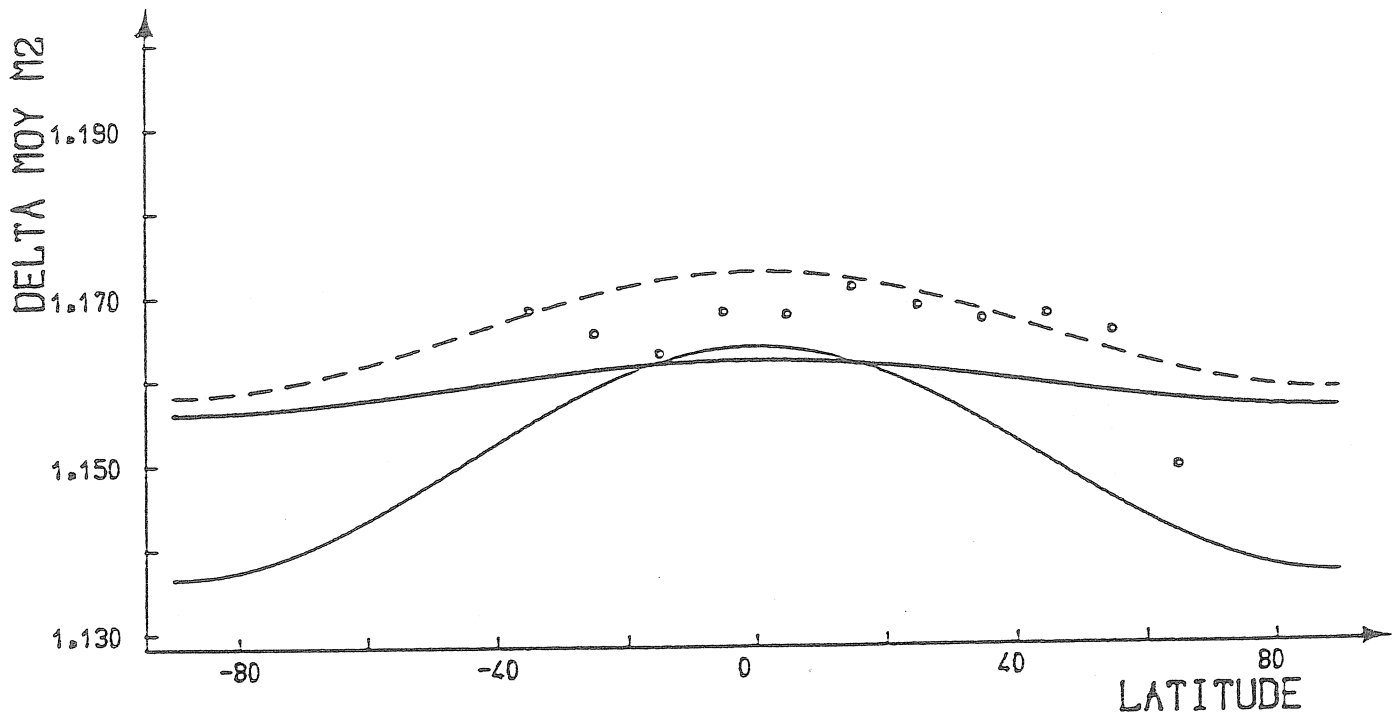


Figure 2: Results for M_2 using the 1066A model like in (5). Same comments as in figure 1.

1. Definition of Love numbers and Green's functions

The Love and Shida numbers have been introduced in the case of a spherical non rotating Earth. They are dimensionless numbers which characterize the Earth's response to the luni-solar attraction. One defines them as Earth's transfer functions between these characteristics and the external tidal potential or its derivative.

They have been generalized in the case of an external mass-load potential. In this case, they are called mass-load Love numbers and are usually distinguished by a superscript prime.

The Earth response to a mass-load is computed by integrating the equation of motion, the stress-strain relationship and Poisson's equation inside the Earth, from the center to the surface. These equations are parameterized by the rheological properties of the Earth and thus load Love numbers depend on the "seismological model".

Because the mass-load potential can be developed in Legendre's polynomials, a same expansion can be applied to transform the vectorial equations (Partial Differential Equations) into scalar equations (Ordinary Differential Equations of the first order in d/dr). Mass-load Love numbers are obtained in this way for each fixed degree of the potential.

The load Love numbers are used in the computation of the Green's functions. These functions represent the response of the Earth at an observation point to an external mass-load point at an angular distance θ .

The Green's functions form three groups:

- (a) the horizontal and vertical displacements,
- (b) the horizontal and vertical accelerations,
- (c) the strain tensor components.

Some of the mathematical expressions can be found in Farrell's paper (1972). The others can be found in Melchior (1983). We reproduce them in table 1.

TABLE 1: Mathematical expression of the Green's functions

radial displacement :

$$u(\theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos\theta) \quad (1)$$

horizontal displacement :

$$v(\theta) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (2)$$

gravity acceleration :

$$g(\theta) = \frac{g}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2h'_n - n(n+1)k'_n) P_n(\cos\theta) \quad (3)$$

tilt :

$$t(\theta) = -\frac{1}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n - h'_n) \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (4)$$

astronomical tilt :

$$A(\theta) = -\frac{1}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n - l'_n) \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (5)$$

strain :

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{a} + \frac{1}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} l'_n \frac{\partial^2 P_n(\cos\theta)}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

where a is the mean radius of the Earth, m_e is the total mass of the Earth normalised with respect to unit mass, θ is the angular distance, h'_n , k'_n and l'_n are the load Love numbers and P_n are the Legendre's polynomials.

2. Numerical Computations

2.1. Inputs:

In order to compute the Green's functions all the elements of the mathematical expressions presented in Table 1 must be numerically evaluated. These elements are some fundamental constants, the Love numbers and the Legendre polynomials.

a) The constants:

The numerical computation of the Green's functions requires the knowledge of the mean radius of the Earth a , the mean gravity at the surface g and the Earth total mass m_e . Different reasonable values of the constants have been considered. We found relative errors up to $5 \cdot 10^{-4}$ on the Green's functions which correspond to the precision on the constant m_e . For the final computations, we take $a = 6371$ km and $g = 9.82$ m sec⁻¹ as usually and $5974 \cdot 10^{24}$ kg for m_e .

b) The load Love numbers:

In the numerical evaluation, the Love numbers for all degrees up to a fixed number N are required. But Farrell (1972) gives only a list of a few Love numbers in which he suggests to interpolate the missing values. By using different interpolation methods, polynomials or cubic spline interpolation, applied to the raw Love numbers or to their logarithm, we got different results. Due to the repartition of the Love numbers computed by Farrell, an interpolation on the logarithmic values seems to be safer. This is illustrated in Figure 3. In the logarithm case, the relative difference on the Green's functions obtained by using the 6 points Lagrange interpolation and by the cubic-spline interpolation is of the order of $5 \cdot 10^{-3}$.

c) The Legendre polynomials:

In order to compute the Legendre polynomials, we use a formula relating one degree, n , to the two previous degrees, $n-1$ and $n-2$. The stability of this formula could be verified using the true values of the Legendre polynomials at different orders for $\theta = 90^\circ$ and $\theta = 180^\circ$ which are well known. The results are presented in Table 2 and 3 respectively. It can be concluded that the relative error is of the order of $5 \cdot 10^{-10}$ and is thus negligible.

Table 2: Numerical values of the Legendre polynomials corresponding to $\theta = 90^\circ$.

n	P_n exact	P_n obtained from the recursive formula
101	0	$0.41023 \dots 10^{-10}$
1001	0	$-0.12886 \dots 10^{-10}$
5001	0	$-0.28790 \dots 10^{-9}$
10001	0	$-0.39694 \dots 10^{-9}$

Table 3: Numerical values of the Legendre polynomials corresponding to $\theta = 180^\circ$.

n	P_n exact	P_n obtained from the recursive formula
101	1	1.000000000000000173
1001	1	1.0000000000000019887
5001	1	1.0000000000000518078
10001	1	1.00000000002076986

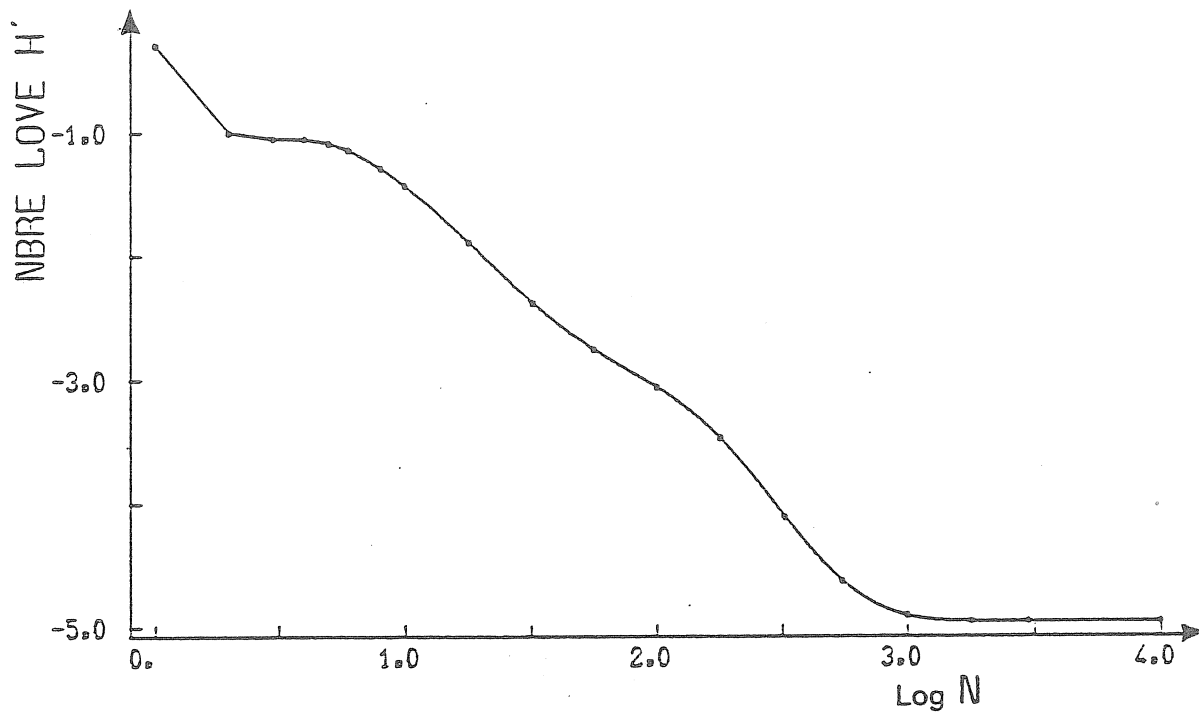
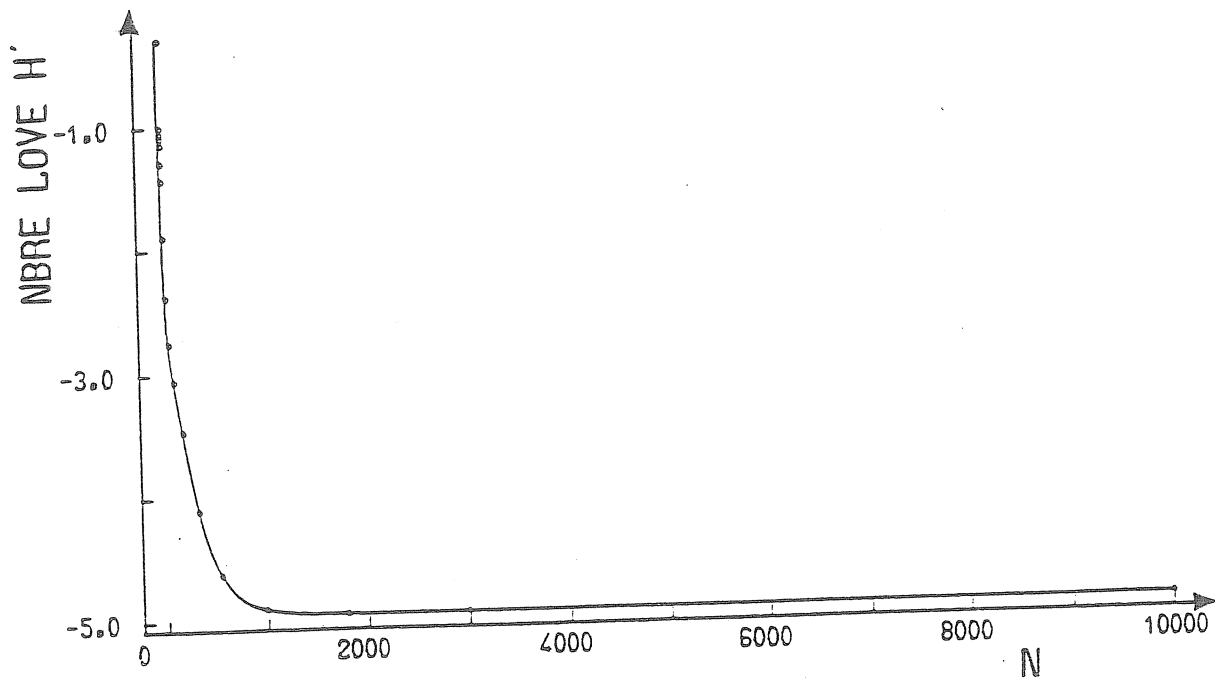


Figure 3: Load Love number h' tabulated by Farrell (1972) versus n and $\log n$.

2.2. Summation method

To obtain the Green's functions, it is necessary to compute infinite series of Legendre polynomials weighted by the mass-load Love numbers. All these inputs are described in the previous paragraph.

There are difficulties in the numerical evaluation of the sum due to the slow convergence of the series. These difficulties are related to:

- (1) the computer round off errors,
- (2) the convergence errors due to truncation in the infinite series,
- (3) the amplification in the summation of the errors inherent in the inputs.

Among all the inputs the errors on the Love numbers have the most important part in this amplification (3). These load Love numbers are provided with an absolute error of the order of $5 \cdot 10^{-4}$ in Farrell's paper.

One of us (Francis, 1987) computed the maximum absolute errors on the sum. In all the cases except for small θ (see below) these maximum absolute errors are greater than the final results.

The first difficulty (1) can be removed easily by increasing the number of digits in the computation. As far as the next two difficulties are concerned, a compromise must be found because, in order to reduce the convergence errors (2), a maximum of terms in the series should be summed up; on the other hand, the reduction of the third kind of errors (3) requires a minimum of terms. For that purpose, mathematical "artifices" must be used, as Farrell (1972) already mentioned.

The objective of the present section is to review and test these artifices in order to deduce a more appropriate strategy for the computation of the Green's functions.

2.2.1. Kummer's transformation

Based on the well known asymptotic behaviour of the Love numbers (precisely of h'_n , nk'_n and nl'_n), the Green's functions can be rewritten. The radial displacement, for example is expressed by:

$$u_r = \frac{ah'_\infty}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos \theta) \quad (8)$$

where a , m_e , θ are defined in Table 1 and h_∞ is the asymptotic value.

The advantage of this procedure is that the first part can be evaluated exactly and the Legendre polynomials in the second part are now weighted by $(h'_n - h'_\infty)$ which is a more rapidly decreasing function of n . Thus, for the same fixed precision, the number of terms in the summation will be smaller.

Table 4 displays the Green's functions computed using the Kummer's transformation alone. It can be seen that the values are not coherent with respect to the Farrell's results which include other mathematical artifices. Moreover, for the tilt, the values are even out of range when $\theta > 5^\circ$.

2.2.2. Euler's transformation

The Kummer's transformation is the first step in the compromise we are looking for. The second step is to apply the Euler's transformation. This method is a standard technique to rapidly sum alternating series. Thus the Green's functions must be transformed into alternating series. The most logical way is to construct them by using the cosine-like behaviour of the Legendre polynomials.

Our first idea was to make a test on the sign on the polynomials. But Farrell (1972) uses the following formula:

$$u_r = \sum_{i=0}^M a_i(\theta)$$

where $M = N \langle - \rangle$, the symbol $\langle \rangle$ indicates the nearest integer, n

$$a_i(\theta) = \sum_{n=j(i)}^{k(i)} (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos \theta)$$

$$\text{with } j(0) = 0, j(i) = k(i-1) + 1,$$

$$k(0) = \left\langle \frac{\pi}{4\theta} \right\rangle \text{ and } k(i) = j(i) + \left\langle \frac{\pi}{\theta} \right\rangle$$

In this formula, the number of terms in each partial sum, $a_i(\theta)$, is always the same because one always increments by the constant $\langle \pi/\theta \rangle$; however, if one uses a sign test to construct the partial sums, one sees that the number of successive Legendre polynomials of the same sign in each sub-sum $a_i(\theta)$ is not constant. But then, in the Farrell's case and when the number of terms in the partial sum is small (when θ is large, π/θ becomes small), the a_i have no more the same magnitude. In addition, the sign alternation is no more respected.

For small angular distances θ , both methods give the same results (see Table 5). But for angles higher than about 100° , there are some differences at the second or third decimal. The corresponding number of partial sums in the numerical computation becomes very different.

To discriminate between both choices, let us write down the necessary conditions to apply the Euler's transformation:

Table 4: Green's functions computed by using only the Kummer's transformation. The same normalisation as Farrell (1972) is adopted. Only the elastic part of the Green's function are tabulated as Farrell did. This is noticed by the subscript E.

The lines show the decimals from which the absolute differences with respect to Farrell's results are higher than 0.5.

θ , deg.	$u(\theta)$	$v(\theta)$	$g^E(\theta)$	$t^E(\theta)$	$A^E(\theta)$
.0001	-33.991	-11.367	-78.802	34.006	.000
.0010	-33.857	-11.366	-78.481	34.005	.000
.0100	-32.651	-11.289	-75.632	33.764	.005
.0200	-31.801	-11.177	-73.782	33.120	.010
.0300	-31.107	-11.158	-72.347	33.531	.015
.0400	-30.157	-11.133	-70.213	34.263	.019
.0600	-28.482	-10.685	-66.503	32.522	.028
.0800	-26.850	-10.681	-62.543	33.739	.037
.1000	-25.476	-10.355	-59.805	31.802	.045
.1600	-21.772	-9.365	-51.363	29.209	.067
.2000	-20.017	-8.713	-47.298	26.346	.078
.2500	-18.418	-8.032	-43.501	26.062	.091
.3000	-17.164	-7.473	-40.388	23.576	.102
.4000	-15.733	-6.741	-36.647	22.082	.122
.5000	-14.959	-6.343	-34.428	18.135	.143
.6000	-14.437	-6.156	-32.832	14.262	.165
.8000	-13.676	-6.068	-30.538	18.683	.214
1.0000	-13.015	-5.965	-28.751	14.322	.264
1.2000	-12.298	-5.862	-26.978	17.110	.314
1.6000	-10.958	-5.476	-23.945	13.928	.403
2.0000	-9.755	-4.995	-21.358	10.459	.475
2.5000	-8.502	-4.389	-18.703	11.068	.546
3.0000	-7.531	-3.866	-16.620	13.624	.600
4.0000	-6.136	-3.072	-13.606	17.138	.677
5.0000	-5.257	-2.524	-11.622	9.628	.728
6.0000	-4.674	-2.155	-10.219		.769
7.0000	-4.274	-1.914	-9.188		.810
8.0000	-3.998	-1.760	-8.433		.855
9.0000	-3.603	-1.654	-7.863		.904
10.0000	-3.646	-1.580	-7.390		.956
12.0000	-3.393	-1.501	-6.622		1.080
16.0000	-3.000	-1.437	-5.541		1.368
20.0000	-2.624	-1.386	-4.769		1.676
25.0000	-2.109	-1.309	-3.814		2.076
30.0000	-1.533	-1.212	-2.952		2.449
40.0000	-.294	-.930	-1.431		2.918
50.0000	.843	-.591	-.265		2.784
60.0000	1.671	-.321	.361		2.003
70.0000	2.079	-.216	.536		.730
80.0000	2.053	-.306	.305		-.784
90.0000	1.638	-.555	-.137		-2.288
100.0000	.912	-.898	-.732		-3.581
110.0000	-.039	-1.263	-1.378		-4.539
120.0000	-1.132	-1.546	-2.015		-5.101
130.0000	-2.288	-1.717	-2.606		-5.251
140.0000	-3.439	-1.726	-3.135		-4.994
150.0000	-4.518	-1.550	-3.896		-4.348
160.0000	-5.462	-1.186	-3.883		-3.321
170.0000	-6.210	-.654	-4.293		-1.894
180.0000	-6.193	.000	-5.153		.000

Table 5: The gravimetric Green's function computed using Farrell's intervals (g_F) are compared to those obtained using a sign test (g_T).

N_{it} is the number of partial sums needed to get a fixed precision of $5 \cdot 10^{-4}$.

θ , deg.	$g_F(\theta)$	N_{it}	$g_T(\theta)$	N_{it}
.0001	-78.802		-78.802	
.0010	-78.481		-78.481	
.0100	-75.632		-75.632	
.0200	-73.782		-73.782	
.0300	-72.013	3	-72.347	3
.0400	-70.111	3	-70.213	8
.0600	-66.484	4	-66.503	8
.0800	-62.931	8	-62.843	11
.1000	-59.669	6	-59.668	5
.1600	-51.486	6	-51.486	7
.2000	-47.351	7	-47.351	7
.2500	-43.403	7	-43.403	7
.3000	-40.483	8	-40.483	8
.4000	-36.640	8	-36.640	8
.5000	-34.352	8	-34.352	9
.6000	-32.814	9	-32.814	10
.8000	-30.573	10	-30.573	11
1.0000	-28.706	10	-28.706	11
1.2000	-27.026	11	-27.026	10
1.6000	-23.983	11	-23.983	10
2.0000	-21.373	11	-21.373	10
2.5000	-18.734	11	-18.734	10
3.0000	-16.650	12	-16.650	10
4.0000	-13.606	10	-13.605	10
5.0000	-11.598	11	-11.598	10
6.0000	-10.211	9	-10.211	10
7.0000	-9.205	10	-9.206	11
8.0000	-8.446	10	-8.442	10
9.0000	-7.853	10	-7.853	11
10.0000	-7.375	10	-7.375	11
12.0000	-6.637	9	-6.638	11
16.0000	-5.571	9	-5.577	10
20.0000	-4.739	11	-4.740	11
25.0000	-3.821	10	-3.825	12
30.0000	-2.962	11	-2.962	11
40.0000	-1.437	18	-1.451	67
50.0000	-.290	28	-.293	88
60.0000	.369	25	.369	11
70.0000	.536	40	.532	157
80.0000	.318	24	.342	87
90.0000	-.143	36	-.143	10
100.0000	-.728	37	-.726	101
110.0000	-1.369	32	-1.351	114
120.0000	-2.012	27	-1.964	307
130.0000	-2.615	17	-2.638	147
140.0000	-3.145	14	-3.141	231
150.0000	-3.593	12	-3.595	136
160.0000	-3.966	13	-3.868	62
170.0000	-4.282	11	-4.282	11
180.0000	-4.555	14	-4.555	14

For the alternate series $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

with $a_n > 0$ for all n .

if the a_n decrease to 0 (1)

if the $\Delta a_n (= a_n - a_{n-1})$ decrease to 0 (2)

if the $\Delta^2 a_n (= \Delta a_n - \Delta a_{n-1})$ decrease to 0 (3)

and $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{2}$ (4)

Then the Euler's transformation speeds the convergence.

Condition (4) is verified independently of the determination of the intervals which can be based either on the sign test or on Farrell's choice. In both cases, conditions (1), (2) and (3) are not verified because a_n have a cyclic behaviour. But at the desired precision, the number of partial sums is sufficiently small in Farrell's case to stay in the first cycle and so (1) and (2) are satisfied but (3) is not. The reason why it stops so quickly is that the alternation is not respected. In the sign test case, for the same precision, a higher number of terms must be used as previously mentioned. This number is out of range and this is the reason why we prefer the Farrell choice of interval although there are objections against this method because the hypotheses needed for Euler's transformation, especially the alternation of the series, are not satisfied.

However, this problem of choice arises only for angular distances bigger than about 100° .

2.2.3. Disk factor

The third artifice used by Farrell is the introduction of a disk factor in the second part of the Green's function expression (8). The Green's functions corresponding to a disk load of radius α can be expended in the same way as in the case of the point mass-load, by adding a weight in all the terms of the expansion. This weight is equal to 1 when α tends to zero i.e. for a point mass-load. The second part of expression (8) can then be replaced by:

$$\lim_{m_e \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos \theta) \quad (9)$$

$$\text{with } F_n(\alpha) = \frac{-(1+\cos \alpha)}{n(n+1)\sin \alpha} \frac{\partial P_n(\cos \alpha)}{\partial \alpha}$$

If the limit and the sum are exchanged, the second part of the expression of the Green's functions becomes:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos \theta) \quad (10)$$

The introduction of the disk factor $F_n(\alpha)$ speeds up the convergence of the series, by providing a weight decreasing as $n^{-3/2}$ if α is not too small. At this point arises the question: for α tending to zero, how is the limit numerically estimated?

In Farrell's paper (1972) two methods are suggested:

- First, to compute the Green's functions for different disk factor angles α and extrapolate for α tending to zero. Using this method, we have not been able to reproduce the exact results published by Farrell. Table 6 displays differences at the third decimal in the Green's functions. In this table, one can also notice that it was not necessary to extrapolate when small values of α are chosen. Farrell did not comment on this peculiarity. Thus it seems that he did not use this method.
- Secondly, he suggests a simplest way to compute the Green's function, without any limit evaluation. In this case, the disk factor is left in the summation with a particular α angle. The choice of this angle is related to the value of the angular distance θ . Farrell suggests a ratio between the two from 10 to 30. Farrell justifies this choice reasoning in a much simplified case, the Boussinesq plane approximation. In this way, we have been able to reproduce the values tabulated by Farrell except for very small angular distances (see section 2.24). Some examples are given in Table 7. However, two objections can be formulated:
 - 1) The justification for the choice of the α angle is not correct in the spherical case. Even more, the behaviour of the radial displacement $u(\theta)$ for example is different in the two cases: when α increases, in the Boussinesq plane approximation $u(\theta)$ increases, whereas it decreases in the spherical Earth case.
 - 2) The second objection is that the disk factor has only been introduced in the second part of the sum for the computation of the Green's function (8). But it is necessary to introduce it in the first part of the sum to satisfy the Kummer's transformation. However, if the disk factor is introduced in this part, it becomes impossible to find an exact expression.

Table 6: Comparison between the results of the Green's function $u(\theta)$ obtained by extrapolation for α tending to zero and the Farrell's results (1972).

For the signification of the lines, see Table 4.

$\theta, \text{deg.}$	$u(\theta)$
.0200	-31.969
.0300	-30.983
.0400	-30.120
.0600	-28.475
.0800	-26.886
.1000	-25.424
.1600	-21.818
.2000	-20.037
.2500	-18.381
.3000	-17.199
.4000	-15.730
.5000	-14.931
.6000	-14.430
.8000	-13.689
1.0000	-12.999
1.2000	-12.316
1.6000	-10.972
2.0000	-9.761
2.5000	-8.520
3.0000	-7.543
4.0000	-6.136
5.0000	-5.248
6.0000	-4.671
7.0000	-4.250
8.0000	-4.003
9.0000	-3.799
10.0000	-3.641
12.0000	-3.399
16.0000	-3.004
20.0000	-2.624
25.0000	-2.112
30.0000	-1.537
40.0000	-.296
50.0000	.845
60.0000	1.674
70.0000	2.078
80.0000	2.050
90.0000	1.637
100.0000	.913
110.0000	-.036
120.0000	-1.131
130.0000	-2.291
140.0000	-3.442
150.0000	-4.517
160.0000	-5.457
170.0000	-6.206
180.0000	-6.716

Example :

α	$u_\alpha(\theta)$
0.0300	-15.7274412898932504
0.0200	-15.7286051758054264
0.0010	-15.7297443560873320
0.0001	-15.7300292912036536
0.0001	-15.7300492638299844
0.4000	-15.730

Table 7: u_F is the Green's function of the radial displacement tabulated by Farrell (1972), u_a , the value of the same Green's function computed with a disk factor of radius a .

$$\theta = 180 \text{ degree} \quad u_F(\theta) = -6.663 \quad \theta = 170 \text{ degree} \quad u_F(\theta) = -6.161$$

$\alpha, \text{ deg}$	$u_a(\theta)$
8	-6.604
7	-6.630
6	-6.653
5,5	-6.663
4	-6.688

$\alpha, \text{ deg}$	$u(\theta)$
8	-6.101
7	-6.122
6	-6.143
5	-6.161
4	-6.175

$$\theta = 100 \text{ degree} \quad u_F(\theta) = 0.920$$

$\alpha, \text{ deg}$	$u(\theta)$
5	0.938
4	0.930
3	0.923
2,5	0.920
2	0.917

Table 8: Comparison between the Green's functions of the radial displacement obtained by the raw sum (u_R), tabulated by Farrell (u_F) and using the Boussinesq's approximation (u_B).

$\theta, \text{ deg.}$	$u_R(\theta)$	$u_F(\theta)$	$u_B(\theta)$
0.0001	-33.99	-33.64	-34.00
0.001	-33.86	-33.56	-34.00
0.01	-32.65	-31.75	-34.00
0.02	-31.80	-30.86	-34.00

2.2.4. Alternative method for small angular distances

For angular distances smaller than 0.02° , the methods for series convergence acceleration developed by Farrell (1972) and presented above, cannot be applied. Indeed, in this case, the interval of alternation is so big that the 10 000 first Legendre polynomials have all the same sign. Farrell (1972) suggests to compute the Green's function for small angles replacing the sum by an integral. To numerically evaluate this integral, he suggested the Simpson's rule. Other methods have also been used. We have obtained almost the same results as using the raw summation (see Table 8). In this table, our computations are also compared with Farrell's published results. There are big differences between both sets of values. Nevertheless, Farrell's results could be reproduced by extrapolation. In order to select between all these results, the Boussinesq's solution for a plane approximation, appropriate in the small angles case, can be used. One can see in Table 8 that these results are much closer to our results without extrapolation than to Farrell's ones. It must be mentioned that the Boussinesq's solution appears to be constant because of the normalisation introduced as Farrell did.

A second argument in favour of our results is the study of errors propagation. The absolute error on the final result is deduced from the precision of the Love numbers because the other are negligible.

For example, the absolute error on the Green's function u_r given by equation (8) is computed using the rules of sums and products of errors. An error on one Love number, $e_{h'_n}$ and an error of one Legendre polynomial e_{P_n} are propagated as follows:

$$e_{u_r} = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{10000} \left(e_{h'_n} + 2e_{h''_n} \right) P_n(\cos \theta) + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} (h'_n - h''_n) e_{P_n}$$

considering that the errors on P_n are practically zero and using $5 \cdot 10^{-4}$ for $e_{h'_n}$ and $e_{h''_n}$ (see above, section 2.1), e_{u_r} is evaluated at $1.5 \cdot 10^{-17}$ m for unnormalised values. For examples, for $\theta = 0.0001^\circ$ and $\theta = 0.02^\circ$, this gives maximum relative errors of $5 \cdot 10^{-6}$ and 10^{-3} , respectively. Up to an angle of 0.02° , the raw summation gives then sufficiently precise results. From the angle 0.1° there are sufficient alternations to use the Euler's transformation. The problem arises for the angular distances comprised between 0.02° and 0.1° . This is because, firstly, the relative error can be bigger than 10^{-3} so that the raw summation would not be appropriate; secondly, for these angles, the number of alternations is not sufficient to use the Euler's transformation, for the required precision. One can thus not select between both solutions. We decide to take the same solution as Farrell i.e. Euler's transformation until the precision on the load Love numbers increases.

2.3. Conclusion and strategy

Theoretically, the methods developed by Farrell are very advisable, but, on the basis of numerical tests, some criticisms can be formulated.

First, we reject the disk factor artifice because it has been introduced to speed up the convergence and decrease the number of operations in the computer. This reduced the computer time and this is no more necessary at present. Moreover, as previously shown, this procedure is not quite correct mathematically.

Secondly, the Euler's transformation causes some troubles for the small angular distances as well as for the large ones. The small angular distances are divided into different categories. For angles less than 0.02° , we recommend to use the Kummer's transformation alone because the alternation intervals are too large to apply the Euler's transformation. Moreover, the integral method proposed by Farrell does not improve anything. Farrell's results have probably been obtained by extrapolation and are unreliable compared to the results of the Boussinesq's plane approximation. Between 0.02° and 0.1° , the situation is much more embarrassing because the raw summation is not precise enough while there are no sufficient alternations for the Euler's transformation. As Farrell, we use the Euler's transformation. For angular distances larger than 0.1° , there is no problem for the Euler's transformation up to 100° . For angles over 100° , differences at the second or third decimal could be noted when using different choices of alternation interval (Farrell's formula or sign test). This had no influence for smaller angular distances because the choice of alternance intervals does not change much the partial sums as they contain a large number of terms. In our tables, the Farrell's intervals are used. This choice is led by the fact that for a given precision the results are obtained by using much less partial sums with respect to the number of intervals constructed on the sign test, although this is not the most logical choice. The whole strategy adopted is presented in Table 9.

In order to solve the problem for the small angular distances (between 0.02° and 0.1°), much more and more precise Love numbers must be provided. It should then be possible to apply the raw summation to angles larger than 0.02° . It must be mentioned at this point that, in practice, the Green's functions corresponding to angular distances smaller than 0.1° are generally not used except for the stations close to the coast (distance $\leq 10\text{km}$). For these stations, the Farrell's method is no more reliable because the cells are too large in the corange and cotidal maps.

To solve the problem of the large angular distances, we should concentrate our efforts to find another method to sum alternate series.

3. NUMERICAL RESULTS

Computer programs setting up the strategy discussed above have been developed at the Royal Observatory of Belgium (Francis, 1987). They allow us to compute the Green's functions using the same rheological property profiles inside the Earth as Farrell i.e. the Guttenberg-Bullen profile (G-B). The results presented in Table 10 are compared with Farrell's ones.

Other rheological profiles e.g. the 1066A model (Gilbert & Dziewonski, 1975) or the PREM (Dziewonski, 1981), have been integrated by respectively Xianhua (1986) and Zschau and Rabbel (personal communication to Melchior, 1982) in order to obtain load Love numbers. New Green's functions are computerized using these different inputs. The results are presented in Table 11 and plotted in Figure 4.

TABLE 9: Strategy for the computation of the Green's function

- 1) Kummer's transformation is applied;
- 2) no disk factor is used;
- 3) Euler's transformation or raw summation?

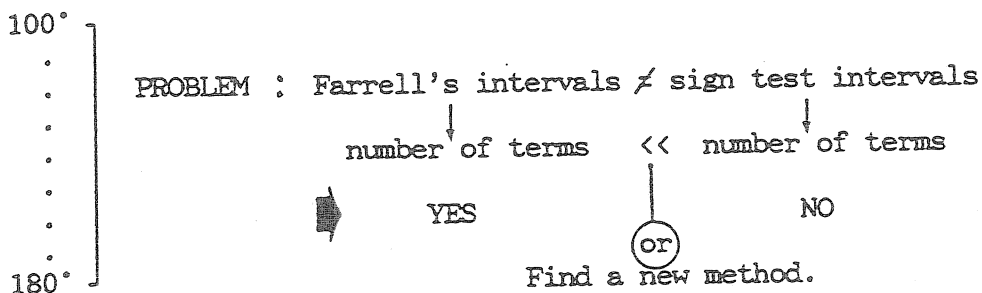
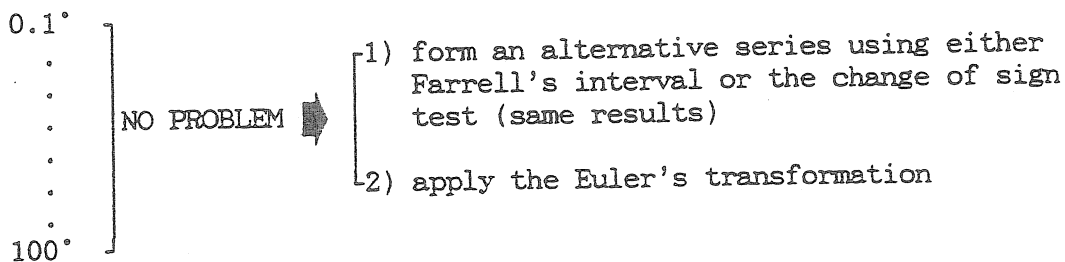
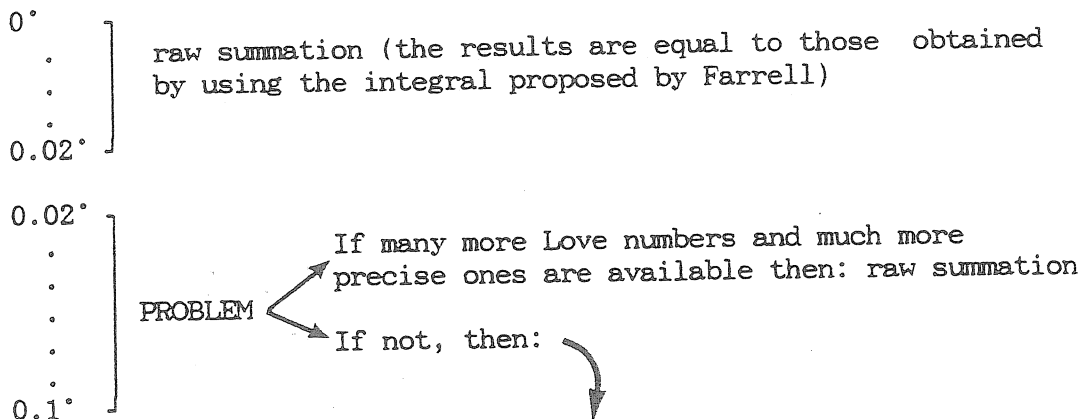


Table 10: Green's functions for the Gutenberg-Bullen profile (Francis, 1987).

θ (°)	$u(\theta)$	$v(\theta)$	$g^E(\theta)$	$t^E(\theta)$	$A^E(\theta)$
.00001	-33.991	-11.367	-78.802	34.006	.000
.00010	-33.857	-11.366	-78.481	34.005	.000
.00100	-32.651	-11.289	-75.632	33.764	.005
.00200	-31.801	-11.177	-73.782	33.981	.010
.00300	-30.983	-11.125	-72.013	33.727	.015
.00400	-30.120	-11.056	-70.111	33.688	.019
.00600	-28.475	-10.944	-66.484	33.343	.029
.00800	-26.886	-10.634	-62.931	32.997	.037
.01000	-25.424	-10.367	-59.669	32.396	.045
.01600	-21.818	-9.372	-51.486	29.844	.067
.02000	-20.037	-8.726	-47.351	27.786	.078
.02500	-18.381	-8.026	-43.403	25.283	.091
.03000	-17.199	-7.470	-40.483	23.117	.102
.04000	-15.730	-6.731	-36.640	19.867	.122
.05000	-14.931	-6.343	-34.352	17.873	.143
.06000	-14.430	-6.164	-32.814	16.875	.165
.08000	-13.689	-6.061	-30.573	16.347	.214
1.00000	-12.999	-5.989	-28.706	16.270	.265
1.20000	-12.316	-5.860	-27.026	16.207	.314
1.60000	-10.972	-5.478	-23.983	15.928	.403
2.00000	-9.761	-4.999	-21.373	15.033	.476
2.50000	-8.520	-4.391	-18.733	13.640	.546
3.00000	-7.543	-3.865	-16.650	12.368	.600
4.00000	-6.136	-3.069	-13.606	10.116	.677
5.00000	-5.248	-2.523	-11.598	8.255	.728
6.00000	-4.671	-2.158	-10.211	6.948	.770
7.00000	-4.280	-1.916	-9.205	5.974	.811
8.00000	-4.003	-1.759	-8.446	5.279	.855
9.00000	-3.799	-1.653	-7.853	4.755	.903
10.00000	-3.641	-1.580	-7.375	4.374	.957
12.00000	-3.399	-1.501	-6.638	3.915	1.080
16.00000	-3.004	-1.438	-5.571	3.556	1.368
20.00000	-2.624	-1.388	-4.740	3.365	1.679
25.00000	-2.112	-1.311	-3.821	3.333	2.077
30.00000	-1.537	-1.212	-2.962	3.320	2.449
40.00000	-.296	-.929	-1.437	2.966	2.916
50.00000	.845	-.590	-.290	1.949	2.782
60.00000	1.674	-.321	.369	.421	2.004
70.00000	2.078	-.218	.537	-1.263	.732
80.00000	2.050	-.305	.318	-2.706	-.783
90.00000	1.637	-.554	-.143	-3.713	-2.290
100.00000	.913	-.897	-.729	-4.262	-3.584
110.00000	-.036	-1.252	-1.369	-4.416	-4.539
120.00000	-1.131	-1.547	-2.012	-4.221	-5.097
130.00000	-2.291	-1.718	-2.615	-3.736	-5.248
140.00000	-3.442	-1.726	-3.144	-3.065	-4.998
150.00000	-4.517	-1.548	-3.592	-2.517	-4.356
160.00000	-5.457	-1.186	-3.966	-1.567	-3.322
170.00000	-6.206	-.658	-4.282	-.816	-1.879
180.00000	-6.716	.000	-4.555	.000	.000

Table 11: Gravimetric Green's function for the Gutenberg-Bullen, 1066A and PREM models, respectively.

θ , deg.	ξ_{G-B}	ξ_{1066A}	ξ_{PREM}
.0001	-78.802	-188.497	-98.064
.0010	-78.481	-187.381	-97.663
.0100	-75.632	-176.498	-93.464
.0200	-73.782	-166.009	-88.856
.0300	-72.013	-155.053	-84.351
.0400	-70.111	-144.647	-79.986
.0600	-66.484	-124.910	-71.818
.0800	-62.931	-106.973	-64.562
.1000	-59.669	-91.767	-58.335
.1600	-51.486	-61.289	-45.568
.2000	-47.351	-50.423	-40.854
.2500	-43.403	-43.063	-37.487
.3000	-40.483	-39.566	-35.637
.4000	-36.640	-36.822	-33.721
.5000	-34.352	-35.464	-32.508
.6000	-32.814	-34.363	-31.434
.8000	-30.573	-32.259	-29.495
1.0000	-28.706	-30.080	-27.728
1.2000	-27.026	-28.177	-26.167
1.6000	-23.983	-24.842	-23.569
2.0000	-21.373	-21.992	-21.311
2.5000	-18.734	-19.116	-18.555
3.0000	-16.650	-16.878	-16.476
4.0000	-13.606	-13.641	-13.528
5.0000	-11.598	-11.543	-11.451
6.0000	-10.211	-10.128	-9.859
7.0000	-9.205	-9.144	-8.889
8.0000	-8.446	-8.423	-8.023
9.0000	-7.853	-7.873	-7.466
10.0000	-7.375	-7.437	-6.949
12.0000	-6.637	-6.761	-6.212
16.0000	-5.571	-5.705	-5.138
20.0000	-4.739	-4.812	-4.298
25.0000	-3.821	-3.849	-3.391
30.0000	-2.962	-2.977	-2.566
40.0000	-1.437	-1.382	-1.126
50.0000	-.290	-.199	-.078
60.0000	.369	.456	.483
70.0000	.536	.605	.577
80.0000	.318	.376	.331
90.0000	-.143	-.107	-.146
100.0000	-.728	-.717	-.733
110.0000	-1.369	-1.359	-1.345
120.0000	-2.012	-1.970	-1.928
130.0000	-2.615	-2.524	-2.455
140.0000	-3.145	-3.007	-2.916
150.0000	-3.593	-3.423	-3.314
160.0000	-3.966	-3.781	-3.656
170.0000	-4.282	-4.089	-3.954
180.0000	-4.555	-4.354	-4.209

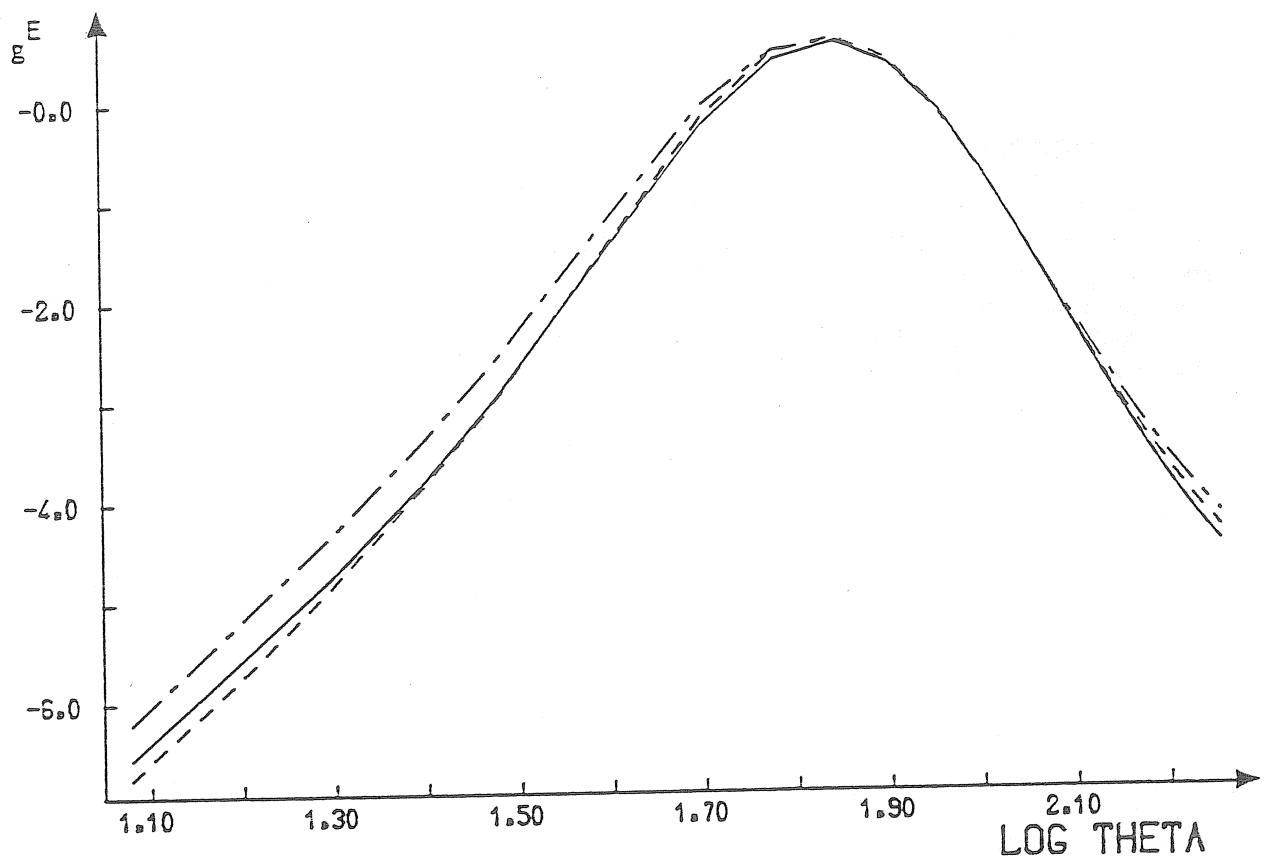
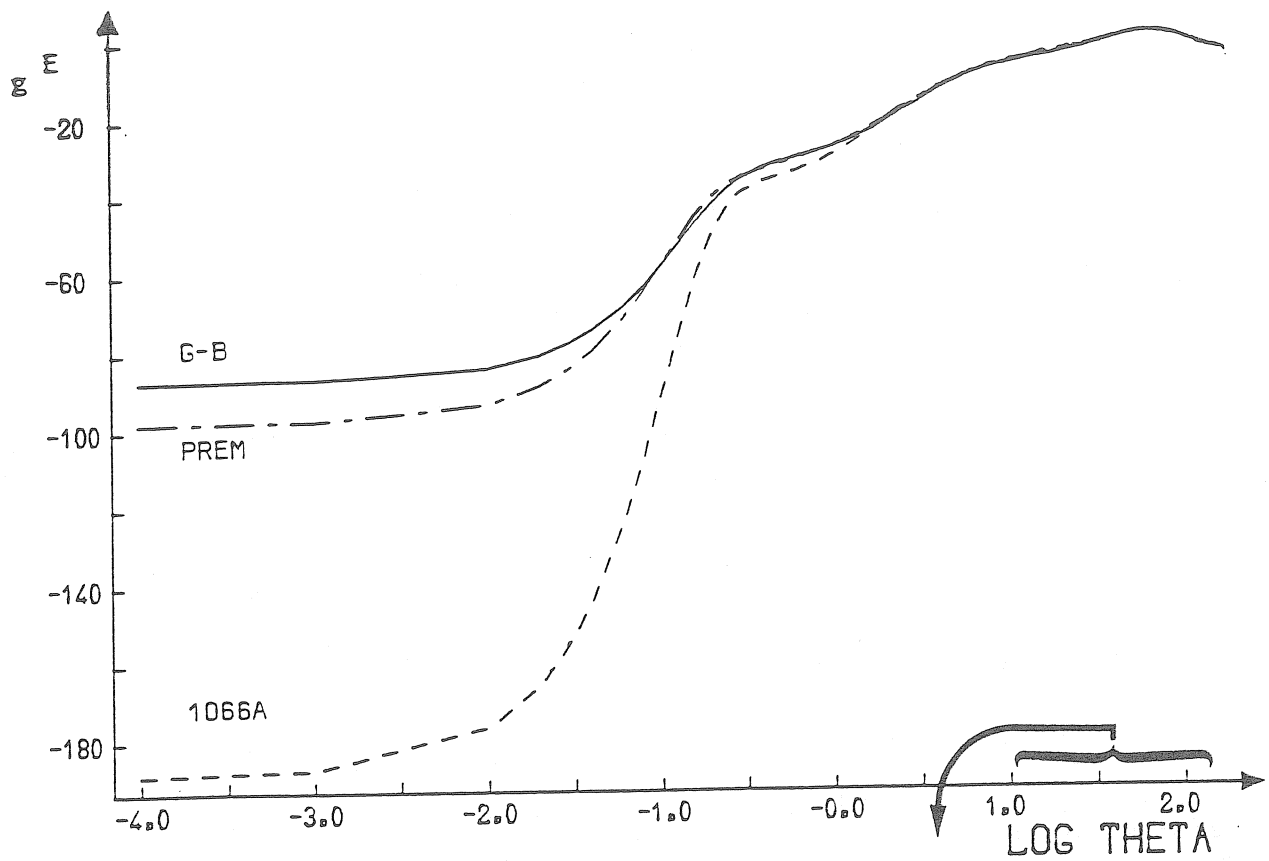


Figure 4: Gravity Green's functions for different models.

Convolutions between these resulting Green's functions and the complex vector representing the ocean tide amplitudes and phases are performed at five stations as examples. From the comparison between the results of the three different models (Table 12) it can be concluded for gravity that:

- 1) There are practically no differences between the G-B model and the 1066A, although the Green's functions are very different for small angular distances (Figure 4). This small influence is normal because, as already mentioned, the small angular distance Green's functions are only used for coastal stations.
- 2) However, the differences are more important for the PREM model. This is due to the systematic difference between G-B - and PREM- Green's functions.

The new theoretical results for the ocean indirect effects are very promising because the new residuals are much smaller. In the future, we plan to recompute all the residuals for all the stations available at the ICET, using the Green's functions of the new PREM model or of the Zschau's new inelastic model (Zschau and Wang, 1985).

Acknowledgements

We are thankful to B. Ducarme for reading our manuscript and for all the scientific discussions we had. Prof. P. Melchior is gratefully acknowledged for bringing us into this field and reading our manuscript.

All the computations have been performed at the Royal Observatory of Belgium.

Table 12 : Tidal wave M_2 . Gravity load vectors $\vec{L}$ have been computed from the Schwiderski maps according Farrell's procedure for three models : Gutenberg-Bullen, 1066A and PREM. The results are compared to the observed residues. The amplitudes of $\vec{L}$ are given in microgals in the first column and the phases of $\vec{L}$ in degrees in the second.

Station	Lat.	Lon.	$\vec{L}(G-B)$	$\vec{L}(1066A)$	$\vec{L}(PREM)$	Observed residues
Brugge	51.20	3.22	1.9036 76.67	1.9036 77.41	1.8287 75.63	2.69 72.
Bruxelles	50.80	4.36	1.8797 63.07	1.8884 63.50	1.8069 62.80	1.76 61.4
Walferdange	49.66	6.15	1.8381 60.80	1.8550 60.99	1.7640 60.61	1.63 52.
Potsdam	52.38	13.07	1.1426 45.69	1.1596 45.73	1.0873 45.45	0.99 44.6
Kiev	50.40	30.60	0.6314 11.84	0.6350 11.56	0.5902 11.65	1.06 12.5

References

- Dehant, V. & Ducarme, B., 1987: "Comparison between the theoretical and observed tidal gravimetric factors".
Phys. Earth Planet.Int., accepted for publication.
- Dziewonski A.M. & Anderson D.L., 1981: "Preliminary reference Earth Model".
Phys. Earth Planet.Int., 25, 297-356
- Farrell W.E., 1972: "Deformation of the Earth by Surface Loads".
Reviews of geophysics and Space Physics, vol.10, N°3, 761-797.
- Francis, O., 1987: "Calcul numérique de la déformation de la croûte terrestre sous l'effet d'une charge en surface".
Mémoire de l'Université Catholique de Louvain, Belgium, 79 pp.
- Gilbert, F. & Dziewonski, A.M., 1975: "An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra".
Phil.Trans. R. Soc. London A, 278, pp 187-269
- Melchior, P., 1983: "The Tides of the Planet Earth".
2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 641 pp.
- Xianhua, J., 1986: "Static deformation Response of the Earth to tidal potential, concentrated mass loading and shear stress".
B.I.M., 97, pp 6587-6597.
- Zschau, J. & Wang, R., 1985: "Imperfect elasticity in the Earth's mantle: implications for Earth tides and Long period deformation".
Proceedings 10th International Symposium on Earth Tides, Madrid, Spain, pp 379-384

Analyse spectrale à bande étroite des observations de marées

I.V. Savin

Théorie et analyse de l'information sismologique.
Publ. 18, pp. 217-228, Akad. Nauk SSSR, Moscou 1985

Nous proposons dans ce travail une méthode de séparation des périodicités cachées dans les séries temporelles observées qui peut s'appliquer à l'étude des oscillations propres de la Terre, à l'analyse détaillée du bruit microsismique, aux observations de marées et à la solution des autres problèmes qui se présentent avec des signaux polyharmoniques. On suppose que les harmoniques inconnues se trouvent dans une bande étroite de fréquences par rapport à la fréquence d'échantillonnage des observations. La méthode est basée sur la séparation de l'information venant de la bande étudiée des fréquences à l'aide de la transformation "radiotechnique" du signal, par démodulation et de l'application consécutive de la méthode d'entropie maximum (ME) [1].

La démodulation du signal est constituée de trois pas dont chacun peut être réalisé aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine des fréquences (dans ce dernier cas les effets se produisent sur la transformée discrète de Fourier (DFT du signal). Le premier pas se fait par "détection synchrone" et consiste en un transport de la bande étudiée dans la région des basses fréquences dans le domaine temporel. Il se réalise par multiplication du signal sur l'exposant complexe de la fréquence "porteuse" (fréquence centrale de la bande) et dans le domaine des fréquences - par déplacement cyclique des échantillons DFT du signal de sorte que la fréquence "porteuse" coïncide avec zéro. Le deuxième pas - filtrage en basse fréquence - constitue le lissage du signal dans la fenêtre glissante à l'aide des coefficients de pondération de la réponse impulsionnelle du filtre.

Dans le domaine des fréquences, il revient à une multiplication du DFT signal par la caractéristique en fréquence du filtre. Le troisième pas - (la décimation) est la suppression de certains échantillons de sortie du filtre, multiple par rapport à la fréquence d'échantillonnage et de la largeur de bande du

filtre ce qui, dans le domaine des fréquences est équivalent au rétrécissement de la bande de départ des fréquences des observations par sommation multiple ("superposition") des échantillons DFT. Le résultat de la démodulation est le signal complexe portant l'information d'amplitude et de phase, provenant uniquement de la bande donnée des fréquences et constitué d'un nombre assez bien plus petit des échantillons que le signal observé. Cela allège sensiblement les calculs à l'étape suivante d'estimation de la densité spectrale ME.

La méthode d'entropie maximum sur la représentation autorégressive du signal et proposée en premier lieu pour l'analyse des processus stationnaires aléatoires a acquis une popularité grâce au fait qu'elle était sensible à la présence dans le signal de composantes harmoniques. Dans beaucoup de cas ME permet de mieux séparer les harmoniques voisines que la méthode classique de Blackman-Tuckey {2}. L'application de ME est effectuée en deux pas: l'estimation des paramètres de l'autorégression (AR) à l'aide de la méthode récursive des moindres carrés et le calcul de la densité spectrale à partir des paramètres AR. L'ensemble de la démodulation et de ME permet à l'aide de la technique simple de transformées rapides de Fourier FFT et du "recouvrement avec accumulation" {3} de réaliser une analyse de précision des longues séries (des dizaines de milliers de données d'observation sur un mini-computer avec des paramètres modestes.

Démodulation

Soit $x(k)$, $k=0, \dots, N-1$ la série temporelle observée, de longueur N , δt est le pas de l'échantillonnage, f_0 est la fréquence centrale de la bande étudiée de largeur f . Nous admettons que f soit beaucoup plus petite que la fréquence d'échantillonnage $F = 1/\delta t$. Alors le premier pas de la démodulation, la détection synchrone dans le domaine temporel s'écrit ainsi

$$y(k) = x(k) \exp[-i2\pi f_0 \delta t k], k = 0, \dots, N-1. \quad (1)$$

Si l'intervalle d'observation est multiple de la période de l'onde porteuse $1/f_0$ c'est-à-dire que la fréquence coïncide avec une des fréquences DFT $b/(N\delta t)$ alors que dans le domaine de fréquence la détection synchrone se ramène au déplacement cyclique des échantillons de transformée de Fourier $x(k)$:

$$Y(l) = X(l \oplus m), l = 0, \dots, N-1,$$

où sont désignés par des majuscules les transformées de Fourier des séries correspondantes par exemple

$$X(l) = \delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp[-i2\pi l k/N], l = 0, \dots, N-1,$$

le signe (+) désigne le déplacement cyclique à gauche, le pas du déplacement $m = f_0 \delta t N$.

Le pas suivant, la filtration de basse fréquence s'écrit dans le domaine temporel sous forme de convolution:

$$z(k) = \sum_{j=-L}^L h(j)y(k-j), k=L, \dots, N-L-1, \quad (2)$$

où $h(j)$, $j=0, \pm 1 \dots \pm L$ - la réponse impulsionnelle du filtre des basses fréquences. Les coefficients $h(j)$ se calculent de sorte que la caractéristique en fréquence du filtre $H\{f\}$ déterminée par l'expression

$$H\{f\} = \delta t \sum_{j=-L}^L h(j) \exp[-i2\pi f/\delta t j], |f| \leq F/2,$$

aie une bande passante $\{-\Delta f/2, \Delta f/2\}$. La largeur de la fenêtre du filtre (longueur de la réponse impulsionnelle) est inversement proportionnelle à la largeur de la bande avec des coefficients dépendant du taux de réjection de $H\{f\}$ et de l'intensité des pulsations dans la bande de réjection. Le procédé simple de calcul des filtres de basses fréquences sera décrit dans le paragraphe suivant. Nous noterons que nous employons des filtres pairs ($h(j) = h(-j)$), car ils ont une caractéristique de phase nulle. La sortie du filtre $Z(k)$ est plus courte que l'entrée $Y(k)$ de $2L$ des échantillons à cause des conditions aux limites dans l'équation (2).

Dans le domaine des fréquences les filtrages se ramènent à une multiplication de deux transformées de Fourier

$$Z(l) = H(l) Y(l), l = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

où $H(l)$ est la transformée de Fourier DFT de la série $h_N(f)$ contenant des échantillons $h(j)$ et de zéro:

$$h_N(j) = \begin{cases} h(j), & j=0, \dots, L \\ 0, & j=L+1, \dots, N-L-1 \\ h(N-j), & j=N-L, \dots, N-1 \end{cases}$$

Cette disposition de la série paire est caractéristique de la DFT. $H(l)$ représente la série des échantillons de la caractéristique de fréquence $H(f)$ avec le pas F/N ; ainsi les échantillons $H(l)$, $l=0 \dots N/2$ (N -pair) correspondent aux fréquences de 0 à $F/2$ et $H(l)$, $l=N/2 \dots, N-1$ aux fréquences de $-F/2$ à $-F/N$ (l'échantillon $H(N/2)$ est utilisé deux fois). Nous noterons que les premiers et les derniers L des échantillons de DFT inverse $Z(l)$, ainsi que dans l'équation (2), n'ont pas de sens étant le résultat de l'effet cyclique de DFT {3}. Le 3ème pas de la démodulation, la décimation dans le domaine temporel est une coupure simple de $K = F/\Delta F$ fois de la sortie du filtre $z(k)$. En pratique normalement il ne faut pas calculer $Z(k)$ aux points intermédiaires c'est-à-dire que le volume des calculs lors du filtrage est diminué de K fois. Si N est multiple de K alors dans le domaine de fréquence l'échantillonnage se réalise par la somme des échantillons $Z(l)$ pour toutes les K bandes (le phénomène de superposition des fréquences {5}). Cela apparaît clairement dans

les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
 z(Km) &= \frac{1}{N\delta t} \sum_{l=0}^{N-1} Z(l) \exp [i2\pi lKm/N] = \\
 &= \frac{1}{N\delta t} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{K-1} Z(kN_1 + j) \exp [i2\pi(kN_1 + j)m/N_1] = \\
 &= \frac{1}{N_1\Delta t} \sum_{j=0}^{N_1-1} \left[\sum_{k=0}^{K-1} Z(kN_1 + j) \right] \exp [i2\pi jm/N_1], m = 0, \dots, N_1 - 1,
 \end{aligned} \tag{4}$$

où $Z(km)$ sont les échantillons rejetés de la série $Z(k)$, $N_1 = N/K$, $t = K\delta t$ est le nouveau pas d'échantillonnage.

La superposition des fréquences peut être source d'erreurs si après le filtrage dans la bande de coupure du filtre il restait des pics non filtrés. Un danger particulier dans ce sens est représenté par la dérive (variation lente de la moyenne du signal), qui donne un pic d'une grande amplitude sur la fréquence zéro. Après la détection synchrone, ce pic se déplace dans la zone des fréquences négatives et si lors du filtrage il n'est pas atténué alors après la décimation il se manifeste sous forme de fantôme ainsi appelé dans la bande étudiée des fréquences. Un autre danger, lié au choix incorrect du point de coupure du filtre c'est-à-dire par la détermination de la bande f , sera examiné dans le chapitre suivant.

On peut trouver en {4} certains procédés d'élimination de la dérive. Nous donnons une procédure simple mais efficace pour enlever la dérive. Au début la valeur moyenne $\bar{x}$ se déduit de la série

$$x_c(k) = x(k) - \bar{x}, k = 0, \dots, N-1, \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k).$$

Ensuite la série $x_c(k)$ centrée est filtrée par le filtre lissant récursif du premier ordre dans le sens direct et inverse avec des conditions initiales nulles:

$$\begin{aligned}
 x_f(k) &= (1 - \beta)x_f(k-1) + \beta x_c(k), k = 1, \dots, N-1, x_f(0) = 0; \\
 x_b(k) &= (1 - \beta)x_b(k+1) + \beta x_c(k), k = N-2, \dots, 0, x_b(N-1) = 0,
 \end{aligned}$$

où β est le paramètre de lissage ($0 < \beta < 1$) choisi expérimentalement en fonction du caractère de la dérive (plus petit est β , plus fort est le lissage; la gamme de valeur pour β - va de 0,001 à 0,01). Après cela la demi-somme des sorties des filtres $x_f(k)$ et $x_b(k)$ se déduit de $x_c(k)$. Le filtrage dans le sens direct et inverse élimine le maintien de phase propre au filtre récursif. Toutefois aux limites de l'intervalle d'observation il peut y avoir des perturbations de phases du signal et des dérives résiduelles liés aux conditions initiales nulles.

Nous évaluerons maintenant la quantité d'opérations arithmétiques, plus précisément, des opérations de multiplication, exigées pour la démodulation. La démodulation dans le domaine temporel exige $2N$ multiplications réelles par la détection synchrone (ainsi nous ne tenons pas compte de la perte de temps pour le calcul des sinus et des cosinus dans la formule (1), en admettant qu'ils soient pris d'une table) et $2(N-2L)(L+1)/K$ multiplications réelles pour le filtrage avec coupure. La valeur $(L+1)/K$ dépend des exigences auxquelles doit satisfaire le filtre et se trouve habituellement compris entre 5 et 20. Par conséquent, la plus grande partie du temps de calcul nécessaire pour, approximativement $2N(L+1)/K$ multiplications, est occupé par le filtrage. La démodulation dans le domaine de fréquence à l'aide de FFT exige $(N/4) \log_2 N_1$ multiplications complexes pour la DFT directe (on suppose que N est égal à une puissance de 2, dans le cas contraire la série $x(k)$ se complète en ajoutant des zéros jusqu'à la puissance la plus proche). Le multiplicateur $N/4$ (au lieu de $N/2$ habituel) est mis parce que la série $x(k)$ est réelle et au lieu de FFT "complexe" on peut utiliser l'algorithme FFT spécial pour les séries réelles {3, 4}. Le pas suivant exigeant des opérations arithmétiques, le filtrage occupe $2N$ multiplications réelles, puisque la série $H(l)$ en {3} est réelle (nous ne tenons pas compte de la perte de temps sur le calcul $H(l)$). Comme il résulte de (4), la décimation dans le domaine de fréquence se ramène à une sommation et, enfin, la DFT inverse exige $(N_1/2) \log_2 N_1$ de multiplications complexes. Puisque la plus grande partie des calculs est occupée par la directe DFT, les pertes de temps en démodulation à l'aide de FFT font à peu près $N \log_2 N$ multiplications réelles. Cela signifie que, dans les cas où $2(L+1)/K > \log_2 N$, la démodulation se réalise plus aisément dans le domaine de fréquence.

Passons à la question de la démodulation des longues séries. On peut réaliser la démodulation des longues séries sans difficultés particulières partiellement par la méthode "du recouvrement avec accumulation" {3}. La série d'entrée est divisée en segments se recouvrant d'une longueur N_2 . La longueur des recouvrements est égale à $2L$. Les recouvrements garantissent "la continuité" de la sortie du filtre des basses fréquences puisque lors du filtrage les premiers et les derniers L des échantillons de chaque segment se perdent. En outre lors de la détection synchrone il est nécessaire, par l'introduction du multiplicateur de phase d'assurer la continuité de la phase de l'onde porteuse sur la jonction des segments et lors du rejet il faut tenir compte du décalage temporel qui apparaît si $N_2 - 2L$ n'est pas multiple de K . Les résultats de la démodulation de chaque segment sont simplement jointifs l'un l'autre. Si le filtrage se fait à l'aide de la FFT alors N_2 se choisit égal à la puissance de 2 et le dernier segment se complète de zéros selon nécessité.

Ainsi, le rapport de la longueur du segment N_2 à la longueur de la caractéristique d'impulsion du filtre $2L + 1$ est de grande importance. Les valeurs optimales N_2 pour $2L + 1$ données {3} sont présentées plus bas:

$2L + 1$	N_2	$2L + 1$	N_2
11	32	95-171	1024
11-17	64	173-309	2048
19-29	128	311-575	4096
31-51	256	577-1049	8192
53-93	512	1051-1999	16384

Si la bande de fréquences étudiée est très étroite alors on peut réaliser le filtrage en plusieurs étapes. Par exemple si la bande f est 100 fois plus petite que la fréquence de l'échantillonnage F alors on pourrait utiliser deux cascades du filtre avec rejet rétrécissant la bande de 10 fois, donneront le même résultat qu'une cascade. La quantité d'opérations lors de la réalisation à plusieurs cascades est un peu plus longue que lors de la réalisation à une cascade. En effet, soit que la longueur de la réponse impulsionnelle du filtre à une cascade est égale à $2L_{100} + 1$ et à deux cascades $2L_{10} + 1$; $L_{100} = 10 L_{10}$ (voir le paragraphe suivant). Les dépenses de filtrage dans le domaine temporel sont dans le premier cas à peu près $2 NL_{100}/100 = 2NL_{10}/10$ multiplications et dans le second cas $- 2NL_{10}/10 + (2N/10) L_{10}/10 = 1,1 (2 NL_{10}/10)$. c'est-à-dire de 10% en plus. Autant donc sont plus grandes dans le second cas les pertes de longueur de la série de départ sur les conditions initiales du filtrage. Les pertes lors du filtrage à plusieurs cascades à l'aide de FFT ont le même caractère. Cependant ces pertes sont compensées par l'abaissement du niveau du bruit dû aux erreurs d'arrondi {6} et par la facilité d'application. Ayant un petit choix de filtres prêts on peut rétrécir la bande des observations en un nombre donné de fois. En outre, le rétrécissement successif de la bande est souvent utile en soit puisqu'il permet de détailler graduellement le spectre du signal.

Choix du filtre

Pour le filtrage en basse fréquence nous utilisons le filtre sans déphasage avec une caractéristique d'impulsion finie {6}. Ces filtres sont toujours stables et ne modulent pas la forme du signal utile (ils n'introduisent pas de retards de phases). Ils sont pratiques pour la réalisation aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine des fréquences lors de la réduction de longues séries. Nous avons choisi un procédé simple de calcul de la caractéristique d'impulsion du filtre à l'aide "de la pondération" de réponse impulsionnelle du filtre idéal des basses fréquences par la fenêtre de Kaiser {6}. La caractéristique d'amplitude plate "en forme de table" dans la bande passante

constitue l'avantage des filtres de ce type. La fenêtre de Kaiser se rapporte à la classe des fenêtres optimales employées dans l'analyse harmonique [7]. Elle se calcule facilement et a un paramètre spécial permettant de régler le niveau des rebonds dans la bande de réjection du filtre synthétisé.

La caractéristique d'impulsion infinie du filtre idéal des basses fréquences avec la fréquence de coupure f_c a la forme

$$h_i(j) = \begin{cases} 2f_c \delta t, & j = 0 \\ \frac{\sin [2\pi f_c \delta t j]}{\pi j}, & j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

La fenêtre de Kaiser de largeur $2L+1$ se détermine par l'expression

$$w(j) = \frac{I_0[\pi\alpha\sqrt{1 - j^2/(L+1)^2}]}{I_0[\pi\alpha]}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm L,$$

où I_0 désigne la fonction modifiée de Bessel de 1ère classe et d'ordre zéro, α est le paramètre de la fenêtre. La caractéristique d'impulsion du filtre réel s'obtient par la "pondération" $h_i(j)$ par la fenêtre $W(j)$:

$$h(j) = w(j)h_i(j).$$

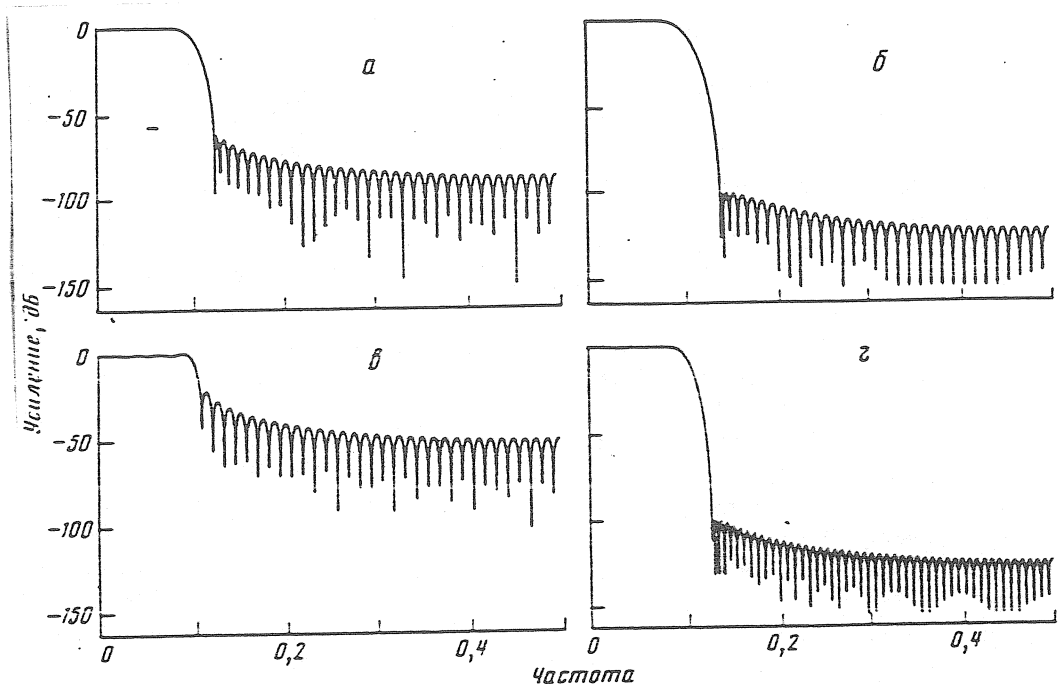


Fig.1. Les caractéristiques d'amplitude des filtres des basses fréquences obtenues "par la pondération" de la caractéristique d'impulsion idéale avec une fréquence de coupure $f_c = 0,1/\delta t$ par la fenêtre de Kaiser.

A- paramètre de la fenêtre $\alpha=1,9$ la demi largeur de la fenêtre $L=39$; B- $\alpha=3,2$, $L=39$; C - $\alpha=0$ (fenêtre rectangle), $L=39$; D - $\alpha = 3,2$, $L = 59$.

La caractéristique en fréquence correspondante représente la convolution de la transformation de Fourier de la fenêtre de Kaiser avec la caractéristique idéale rectangle

$$H[f] = W[f] * H_i[f] = \int_{-F/2}^{F/2} W[f - \varphi] H_i[\varphi] d\varphi,$$

où $W(f-\varphi)$ se prolonge périodiquement hors de la bande $(-F/2, F/2)$

$$W[f] \approx \frac{(L+1)\delta t \operatorname{sh} [\pi \sqrt{\alpha^2 - (f\delta t(L+1))^2}]}{J_0[\pi\alpha] \pi \sqrt{\alpha^2 - (f\delta t(L+1))^2}}, \quad |f| \leq F/2,$$

$$H_i[f] = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & f_c < |f| \leq F/2. \end{cases}$$

L'amplitude de la transformation $W(f)$ a, en zéro, le lobe principal dans lequel est concentrée presque toute l'énergie de la transformation et les lobes latéraux atténuants de la largeur $F/(L+1)$.

La largeur du lobe principal est inversement proportionnelle à L et augmente avec l'accroissement de α , simultanément l'accroissement de α diminue le niveau des lobes latéraux. Sous l'influence de la fenêtre, il se produit une érosion de la coupure de la caractéristique idéale et l'apparition des oscillations dans la bande de réjection. Nous donnons sur la fig.1 en échelle logarithmique la caractéristique d'amplitude du filtre typique des basses fréquences. Lors de l'augmentation α le niveau des oscillations diminue (fig.1b) mais la coupure s'arrondit plus fortement. Mais par contre pour $\alpha \rightarrow 0$ la fenêtre de Kaiser devient une fenêtre rectangle, ce qui donne une coupure nette (fig.1c) mais le niveau élevé des oscillations latérales est inacceptable. La figure 1d illustre l'influence de la largeur de la fenêtre sur la bande passante.

Le choix optimal des paramètres du filtre dépend avant tout du spectre du signal étudié. En liaison avec cela il est souhaitable d'avoir une estimation grossière de la puissance spectrale dans toute la bande des observations, par exemple le périodogramme établi en échelle logarithmique (le carré du module DFT) de la série observée. Il faut préalablement éliminer de la série la dérive ou même soustraire la valeur moyenne. La bande passante est donnée par le paramètre principal du filtre f_c . Le rapport de puissance du bruit dans la bande de fréquence étudiée à la puissance maximale du signal hors de celle-ci détermine le niveau des oscillations résiduelles dans la bande de réjection et par cela même le paramètre α (habituellement $1 \leq \alpha \leq 3,5$). La raideur de pente de la coupure du filtre pour α donné est réglée par le paramètre L . il est recommandé de choisir L de sorte que la valeur $(L+1) f_c \delta t$ soit voisine d'un nombre entier compris entre 1 et 10.

Il faut tenir compte que l'altération de la coupure élargit la bande effective du filtre Δf et limite le pas de coupure de K. Si l'on prend comme largeur de bande la valeur $2f_c$ c'est-à-dire la largeur de la bande au niveau 6Db alors après la décimation l'information aux extrémités de la bande étudiée est modifiée à cause de la superposition des fréquences. Pour éviter cet effet, il faut déterminer f au niveau correspondant au diapason dynamique du signal utile. Par exemple, pour tous les filtres représentés à la figure 1, $2f_c = F/5$. parmi ceux-ci pour le filtrage avec rejet en quatre fois (mais non pas en cinq!) on peut recommander ceux représentés sur la figure 1, A et D, ainsi le premier A garantit l'atténuation à 60 Db de l'information située plus à droite du point de coupure situé à $F/8$ et le dernier D à 100 Db.

Méthode d'entropie maximum (MM)

Comme cela a été mentionné dans ME le signal étudié est considéré comme une réalisation du processus aléatoire stationnaire et on le représente par un modèle d'autorégression {8}. On suppose que la série temporelle complexe $Z(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ d'une durée N t satisfait à l'équation de l'autorégression (AR).

$$z(k) = a_1 z(k-1) + \dots + a_M z(k-M) + e_f(k), k = M, \dots, N-1, \quad (5)$$

dont les coefficients $a_1, \dots, a_M$ sont les paramètres de AR et M - l'ordre de AR; $e_f(R)$ représentent les variables aléatoires complexes indépendantes avec la moyenne nulle et une variance σ^2 . L'équation (5) peut être considérée comme le passage du signal $z(k)$ à travers le filtre linéaire de prédiction (d'un pas en avant) avec un bruit additif à la sortie. C'est pourquoi les paramètres de l'AR s'appellent encore coefficients de la prédiction linéaire de $Z(k)$ et les valeurs $\sigma_f(R)$ sont les erreurs résiduelles de la prédiction. La densité spectrale du processus aléatoire satisfaisant à l'équation (5) s'exprime facilement par les paramètres de l'AR et la variance des résidus.

$$S(f) = \frac{\Delta t \sigma^2}{|1 - \sum_{j=1}^M a_j \exp[-i2\pi f \Delta t j]|^2}, \quad |f| \leq \frac{1}{2\Delta t}. \quad (6)$$

L'application de ME consiste à estimer les paramètres AR à partir de la série $z(k)$ et à les substituer dans la formule (6).

Parmi les méthodes d'estimation des paramètres d'AR {2, 8} on emploie le plus souvent l'estimation de Yule-Walker et l'estimation de Burg (auteur de ME). L'estimation de Yule-Walker inclut en qualité de pas intermédiaire l'estimation $M+1$ des valeurs de la fonction d'autocovariance de la série $Z(k)$ ce qui exige à peu près $N(M+1)$ multiplications complexes et ensuite se ramène à la solution du système d'équations linéaires avec une matrice de Toeplitz par la méthode récursive de Levinson-Durbin exigeant $M^2 + M$ multiplications. L'estimation de Burg, s'obtient

par la méthode récurrente des moindres carrés (incluant l'équation récurrente de Levinson-Durbin) et exige $3N(M+1) + M^2 + M$ multiplications. Avec les grands rapports N/M les deux estimations donnent les mêmes résultats (ils se rapportent à la classe des estimations effectives asymptotiques des paramètres AR). Cependant l'estimation de Burg est plus stable aux erreurs d'arrondi et "fonctionne" mieux avec des petites valeurs (environ 3 à 5) du rapport N/M . C'est pourquoi nous ne donnons que la procédure d'estimation de Burg.

La procédure consiste dans la minimisation successive de la somme des carrés des erreurs de la prédiction avant et après pour les ordres AR de 1 à M .

$$E_m = \sum_{k=m}^{N-1} (|e_{fm}(k)|^2 + |e_{bm}(k)|^2), \quad m = 1, \dots, M, \quad (7)$$

où

$$e_{fm}(k) = z(k) - \sum_{j=1}^m a_{mj} z(k-j),$$

$$e_{bm}(k) = z(k-m) - \sum_{j=1}^m a_{mj}^* z(k-m+j), \quad k = m, \dots, N-1.$$

Ainsi s'applique la limitation: les paramètres AR doivent satisfaire à l'équation récurrente de Levinson:

$$a_{mj} = a_{m-1,j} - a_{mm} a_{m-1,m-j}^*, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (8)$$

L'indice complémentaire m est introduit ici pour désigner l'ordre AR. De cette équation découlent les expressions récursives pour les erreurs de prédiction

$$\begin{aligned} e_{fm}(k) &= e_{f,m-1}(k) - \rho_m e_{b,m-1}(k-1), \\ e_{bm}(k) &= e_{b,m-1}(k-1) - \rho_m^* e_{f,m-1}(k), \quad k = m, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (9)$$

par ρ_m on désigne le paramètre a_{mm} , appelé également coefficient de réflexion. Le coefficient de réflexion ρ_m minimisant E_m dans l'équation (7) se détermine par l'égalité

$$\rho_m = \frac{2}{D_m} \sum_{k=m}^{N-1} e_{f,m-1}(k) e_{b,m-1}^*(k-1), \quad (10)$$

où

$$D_m = \sum_{k=m}^{N-1} (|e_{f,m-1}(k)|^2 + |e_{b,m-1}(k-1)|^2).$$

La valeur minimale E_m correspondant à ρ_m est égale à

$$E_m = (1 - |\rho_m|^2) D_m. \quad (11)$$

A son tour, D_m s'exprime par E_{m-1}

$$D_m = E_{m-1} - |e_{f, m-1}(m-1)|^2 - |e_{b, m-1}(N-1)|^2 \quad (12)$$

En donnant les conditions initiales de récurrence pour $m=0$

$$e_{f0}(k) = e_{b0}(k) = z(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad E_0 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2,$$

et en appliquant successivement les relations (12), (10), (8), (9) et (11) pour $m = 1 \dots M$ nous obtiendrons les estimations des paramètres AR de l'ordre M . A titre d'estimation de la variance résiduelle σ^2 on peut utiliser la valeur $0,5 E_M/(N-M)$.

On peut calculer la densité spectrale d'après la formule (6) à l'aide de la FFT après avoir complété la série complexe $1, -a_1 \dots -a_m$ par des zéros jusqu'à N_3 de puissance souhaitée de 2). Par conséquent, ce pas exige à peu près $(N_3/2) \log_2 N_3$ multiplications complexes. A la fréquence zéro de $S(f)$ correspond la porteuse f_0 puisque nous appliquons ME au résultat de la démodulation de la série de départ $x(k)$.

D'importance essentielle en ME est le choix de l'ordre AR. L'ordre le plus petit donne une estimation lisse de la densité spectrale c'est-à-dire une résolution faible des pics et un ordre trop élevé - les pseudo pics. On connaît quelques critères formels du choix de l'ordre du modèle {2}. Cependant sur les exemples avec signaux harmoniques qui ne sont rigoureusement parlant pas des processus AR, ces critères donnent un ordre AR plus bas. Toutefois il faut tenir compte que la séparation des harmoniques données pour une longueur fixe du signal est liée avant tout au rapport de leurs amplitudes et du niveau du bruit dans la bande considérée. Avec des rapports signal/bruit faibles les pics spectraux correspondants s'élargissent inévitablement et il n'est pas possible de compenser cet élargissement par une augmentation de l'ordre du modèle AR. Bien plus les exemples artificiels et réels montrent que l'augmentation de l'ordre conduit à une décomposition des pics véritables et à l'apparition d'une grande quantité des pseudo-pics dont les amplitudes sont très sensibles à la croissance de l'ordre, à l'inverse des amplitudes des pics véritables. La particularité caractéristique des pseudo-pics est leur répartition uniforme en fréquence, ce qui donne une impression de modulation en fréquence du signal. En liaison avec cela il faut se reporter rigoureusement aux recommandations de nombreux auteurs {2} choisir l'ordre M dans la gamme de $N/3$ à $N/2$. Cela a lieu seulement pour les grands rapports signal/bruit. Comme point de départ lors du choix de l'ordre on peut se servir d'un des critères formels: par exemple, choisir M comme minimum de la valeur $E_M(N + M + 1)/(N - M - 1)$ le critère FPE) et ensuite augmenter l'ordre de 1,5 à 2 fois jusqu'à l'apparition des pseudo-pics.

Analyse des observations de marées

La méthode décrite a été appliquée aux données des observations gravimétriques qui nous ont été aimablement fournies par le Docteur V. Schwan, collaborateur de l'Institut Central de Physique de la Terre de l'Académie des Sciences de RDA (Potsdam).

Les données représentent une série temporelle constituée de quelques séries de mesures continues obtenues avec le gravimètre GS-15 avec un pas d'échantillonnage d'une heure, d'une durée d'environ 8 ans (1974-1982). On a soumis à l'analyse l'intervalle le plus long (24217) mesures au cours de trois ans d'observation. Les mesures montrent la réponse de l'appareil aux perturbations gravitationnelles liées au mouvement de la Lune, du Soleil et de la Terre, compliquées par l'influence du bruit atmosphérique et d'autres facteurs "non gravitationnels" et également par la dérive propre du gravimètre. Les variations du potentiel gravitationnel luni-solaire sont composées de quelques centaines d'harmoniques distribuées en fréquence en quelques groupes (par exemple marées diurne, semidiurne et terdiurne). Chaque groupe est constitué de dizaines d'ondes d'amplitude différente (certaines amplitudes diffèrent de 4 ordres). Les fréquences des ondes s'expriment en fonction des variables astronomiques et sont connues avec une grande précision. Ainsi, les observations gravimétriques constituent un signal complexe bruité, polyharmonique, convenant idéalement pour la réduction par des méthodes de séparation des périodicités cachées.

Nous donnons sur la figure 2 les estimations de la densité spectrale de ME à différentes bandes de fréquences. Avant la réduction on a éliminé la dérive à l'aide de la procédure donnée plus haut (paramètre $\beta = 0,001$). La démodulation a été faite pour trois périodes de l'onde porteuse : $T_0 = 24,12$ et 8h. On a utilisé le filtre rétrécissant la bande du signal d'entrée de 16 fois c'est-à-dire le pas de l'échantillon de sortie est $t = 16h$. L'ordre AR: $M = 50$, à peu près 30 fois plus court que la longueur de la démodulation. Cela garantit la stabilité des estimateurs lissés de la densité spectrale qu'on peut envisager comme les estimations initiales. Pour obtenir cette résolution des modes de marées principales sans la démodulation, il faudrait un ordre AR des dizaines de fois plus grand c'est-à-dire des temps de calculs nettement plus importants.

Nous donnons sur les fig. 3 et 4 le spectre détaillé dans la bande de la marée diurne après la compression des données de 160 et 256 fois. Les ordres AR sont égaux à 70 et 30. Les pics spectraux principaux coïncident bien avec les harmoniques de marées correspondantes (on a marqué sur les figures la position des fréquences vraies des pics identifiés). Les fréquences et les amplitudes théoriques de ces pics sont données ci-après.

Indice	Fréquence k^{-1}	Amplitude
O_1	0,0387307	0,37694
T_1	0,0389588	0,00493
-	0,0400404	0,00278
-	0,0402428	0,01066
M_1	0,0402686	0,02964
-	0,0404710	0,00567
-	0,0414385	0,01028
P_1	0,0415526	0,17543
-	0,0416667	0,00416
K_1	0,0417807	0,53011
1	0,0418948	0,00422
$\emptyset_1$	0,0420089	0,00755
θ_1	0,0430905	0,00567
J_1	0,0432929	0,02964

Nous attirons l'attention sur la séparation de l'onde ψ_1 se trouvant dans "l'ombre" de K_1 .

Ici le produit de la durée des observations par la différence des fréquences ψ_1 et K_1 est égal à peu près à 2,6, ce qui correspond aux exigences de l'analyse spectrale classique. Cependant l'amplitude propre de K_1 est 126 fois plus grande que l'amplitude de ψ_1 .

Cela confirme le pouvoir de résolution élevé de ME.

On a montré dans cet article que l'analyse spectrale à bande étroite de longues séries temporelles peut être réalisée effectivement même sur des petits ordinateurs en unissant la technique de la démodulation et l'estimation spectrale par la méthode de l'entropie maximum. La démodulation augmente le rapport énergétique signal/bruit, elle filtre l'information inutile, elle comprime les données et augmente la capacité de résolution ME, en diminuant le temps de calcul et les erreurs d'arrondi.

Cependant certaines erreurs de ME sont inhérentes à la méthode et à savoir: on détermine bien les fréquences du signal polyharmonique mais pas l'amplitude des harmoniques; ainsi nous obtenons effectivement l'estimation non paramétrique de la densité spectrale mais pas les valeurs explicites des fréquences et des amplitudes. A un degré important le choix de l'ordre du modèle AR reste subjectif. En outre, une procédure de démodulation a toute une série d'imperfections. Les filtres décrits sont très sélectifs dans le sens qu'ils atténuent uniformément le signal dans la bande de coupure alors qu'il serait souhaitable d'avoir une atténuation sélective de l'information changeante.

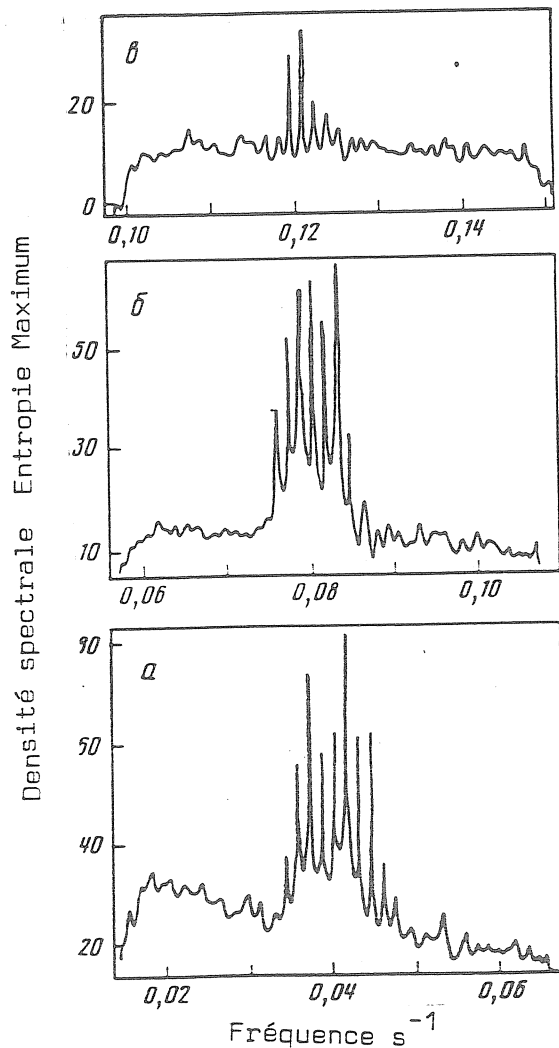
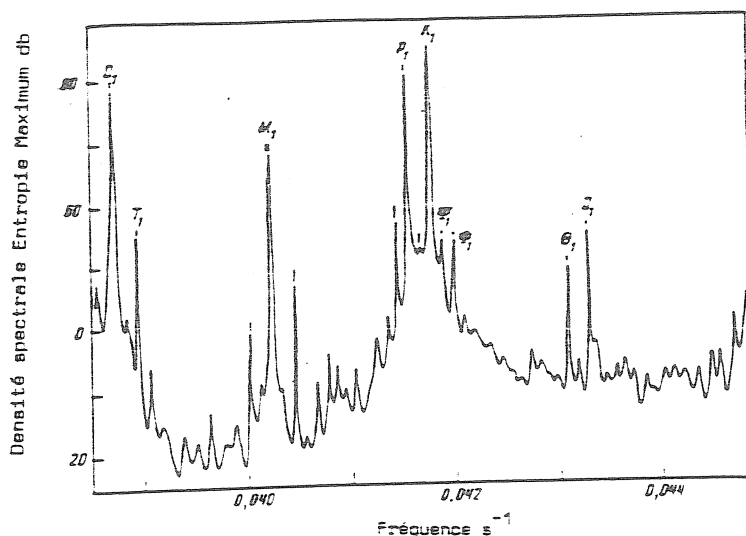
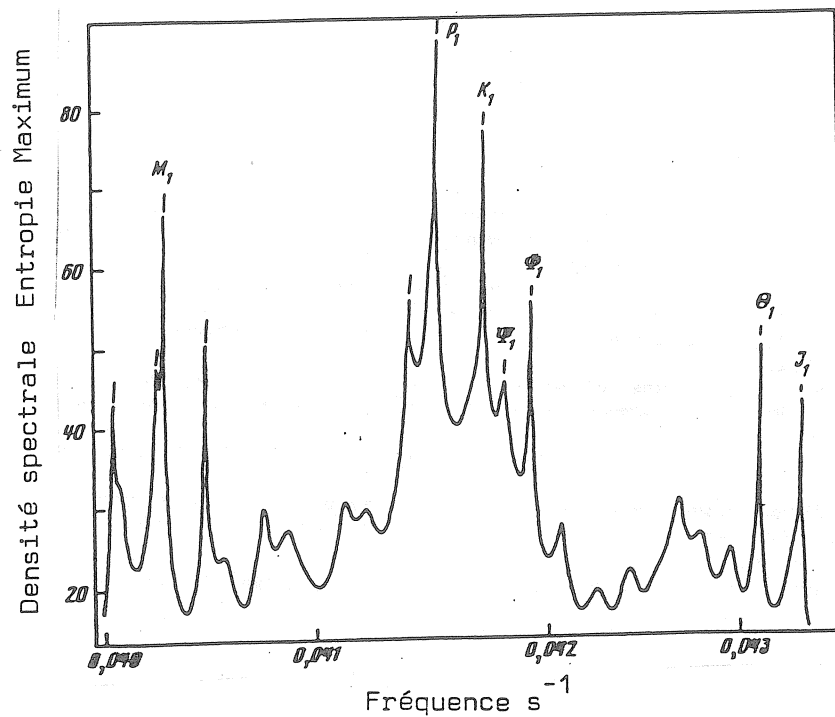


Fig.2. Densité spectrale logarithmique par la méthode d'entropie maximum d'une série gravimétrique de trois ans dans les trois bandes de fréquence après la coupure en 16 fois (ordre AR M = 50).

a - la marée diurne, b - la semi-diurne, c- la ter-diurne



Densité spectrale par la méthode d'entropie maximum ME
Fig.3. Densité spectrale de ME dans la bande de la marée diurne après la coupure de 160 fois (M = 70). Les tirets verticaux désignent les fréquences propres des harmoniques de marées.



Densité spectrale par la méthode d'entropie maximum ME
 Fig.4. Densité spectrale de ME dans la bande de la marée diurne après la coupure de 256 fois ($M = 30$).

Le prix payé pour la sélectivité sont les échantillons des données perdues à cause de la largeur de la réponse impulsionnelle. Il n'est pas clair également comment choisir de façon optimale la largeur de la bande des fréquences pour la séparation des harmoniques proches.

La solution de ces questions exige de continuer l'étude du pouvoir de résolution de ME commencée dans le travail [1], et de l'amélioration ultérieure de la méthode.

En conclusion, l'auteur exprime ses remerciements pour l'attention constante, le soutien et les nombreux jugements précieux du directeur de l'Institut de Physique Mathématique des Sciences VF Pissarenko et au candidat des sciences de technologie A.F. Kouchnir.

BIBLIOGRAPHIE

1. Писаренко В.Ф. Спектральная оценка максимальной энтропии и ее использование для определения частот гармоник. — В кн.: Интерпретация данных сейсмологии и неотектоники. М.: Наука, 1975, с. 83—109. (Вычисл. сейсмология; Вып. 8).
2. Кей С., Марпл С. Современные методы спектрального анализа: Обзор. Пер. с англ. — Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1981, т. 69, № 11, с. 5—51.
3. Введение в цифровую фильтрацию/Под ред. Р. Богнера, А. Константиноидиса: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 216 с.
4. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 432 с.
5. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. Вып. 1. 320 с.
6. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
7. Хэррис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье: Пер. англ. — Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1978, т. 66, № 1, с. 60—96.
8. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 408 с.

