TABLE DES MATIERES

p.

F. DE MEYER
Spectral analysis of the observations of a superconducting gravity meter 6157

G.N. DIASSAMIDZE, V.F. PISSARENKO. (traduction)
Filtrage numérique avec limites complémentaires. 6184

L.A. LATININA
Détermination du paramètre de marée terrestre ℓ d'après les données extensométriques. 6191

M. VAN RUYMBEKE
Transformation of nine LaCoste-Romberg gravimeters in feedback systems. 6202

N.N. PARIISKII, S.N. BARSENKOV, V.A. VOLKOV, D.G. GRIDNIEV, M.V. KOUZNETSOV, L.V. KOUZNETSOVA, B.P. PERTSEV, IOU K. SARITCHEVA, P. VARGA, S. SEKIVRON. (traduction)
Variations de marées de la pesanteur en URSS 6229

G.N. DIPASSAMIDZE, V.F. PISSARENKO (traduction)
Procédure élargie limite en fréquence lors de l'évaluation des amplitudes des harmoniques par la méthode des moindres carrés 6245

Spectral analysis of the observations of a superconducting gravity meter

F. De Meyer
Royal Meteorological Institute of Belgium
Av. Circulaire, 3,
Brussels, Belgium

1. Introduction

Power spectrum analysis is frequently used to identify hidden periodicities in a time series by the apparent peaks in the spectral curves. In order to locate the inherent periodicities accurately an increased frequency resolution is needed, which in fact can only be obtained by extending the observing interval. The use of adequate frequency windows is advisable because of the resulting reduction of side lobe effects, accompanying the strong spectral peaks, at the expense of broadening of the spectral lines.

When the data show a strong stochastic appearance the spectral diagrams will display a disturbed aspect which gives rise to spurious peaks induced by the noise fluctuations. Especially the red noise contribution, originating from the long-term behaviour of the time series hampers the interpretation of the spectral information in the low-frequency range. The only guarantee that the lines, rising above the continuous background generated by the coloured noise, correspond to real physical mechanisms is a high signal-to-noise ratio in the spectral peaks. In consequence methods of statistical inference are required to indicate a theoretical threshold for the purpose of deciding whether a spectral peak is accepted or rejected as a marking of a periodicity.

In this respect the least squares periodogram technique of Vaníček (1969) is reconsidered. Because the method is based upon the least squares algorithm this appraoch is advocated for non-uniformly sampled observations and it can be applied when the observing interval contains missing data. In these circumstances the traditional methods of power spectrum estimation are not directly applicable.

Although the spectral analysis in this connection will be focussed on a single time series it is also shown how the spectral results of a group of time sequences can be combined to search for common periodicities. The harmonic method then estimates the amplitudes and phases of the variations associated with the underlying variations. Furthermore it is outlined how the results of several harmonic analyses can be combined into a whole.

A spectral analysis of the hourly observations of the superconducting gravity meter at the International Centre for Earth Tides (ICET, Royal Observatory of Belgium, Brussels) merely aims at a pedagogic illustration of the method presented. Since tidal observations are commonly characterized by jumps in the measured curves and drift of the instrumental zero it is instructive to see how these effects can be accounted for. The results of the spectral analysis will evidently coincide with the information contained in the theoretical tidal potential but in view of the fact that spectral and harmonic analysis are used in such a broad variety of applications this text is deliberately put into a general background so that it is hoped that the reader can benefit from it when treating non-tidal observations.

2. Detection of hidden periodicities in a single time series

A power spectrum analysis can be performed by the three currently available numerical techniques: the autocovariance procedure (Blackman and Tukey, 1959), the periodogram approach by using the Fast Fourier Transform algorithm (Cooley and Tukey, 1965; Jenkins and Watts, 1968) and the maximum entropy method (Burg, 1975; Ulrych and Clayton, 1976). The computation of the least squares periodogram (Vaníček, 1969) may be regarded as the most straightforward and unsophisticated method in the framework of the search for hidden periodidicties in a time series. We will now consider the method of Vaníček from the statistical point of view.

Let $y_1,\ldots,y_n$ be n ordinates of a continuous time function $y(t)$, which is digitized at the (possibly) non-uniformly sampled time instants $t_1,\ldots,t_n$. As a model of periodic bahaviour a cosine function of arbitrary frequency $f=1/T$ can be fitted to the observations

$$y_j = a_o + a \cos 2\pi f t_j + b \sin 2\pi f t_j + \varepsilon_j \quad , \qquad (1)$$

where ε_j denotes the model error at the time point t_j. Defining the n-vectors $\underline{y}=(y_1,\ldots,t_n)'$ and $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)'$ and the $n\times 3$ matrix $\underline{H} = (h_{ji})$, with elements $h_{j1}=1$, $h_{j2}=\cos 2\pi f t_j$, $h_{j3}=\sin 2\pi f t_j$, $j=1,\ldots,n$, the vector-matrix equation of the linear regression model (1) results

$$\underline{y} = \underline{H}\underline{x} + \underline{\varepsilon} \quad . \qquad (2)$$

The transpose of any vector $\underline{a}$ or matrix $\underline{A}$ is denoted by $\underline{a}'$ or $\underline{A}'$, respectively.

The generalized least squares estimate $\underline{\hat{x}}=(\hat{a}_o,\hat{a},\hat{b})'$ of the parameter vector $\underline{x}=(a_o,a,b)'$ follows from minimization of the sum of

squares error criterion

$$Q(\underline{x}) = (\underline{y} - \underline{H}\underline{x})'\underline{V}_{\varepsilon}^{-1}(\underline{y} - \underline{H}\underline{x}) \tag{3}$$

with respect to $\underline{x}$, where $\underline{V}_{\varepsilon}=E\{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'\}$ is the covariance matrix of the model noise $\underline{\varepsilon}$ and E is the mathematical expectation operator. Solving

$$\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = -2\underline{H}'\underline{V}_{\varepsilon}^{-1}(\underline{y}-\underline{H}\underline{x}) = 0 \tag{4}$$

for $\underline{x}=\hat{\underline{x}}$ gives the Gauss-Markov estimate

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{H}'\underline{V}_{\varepsilon}^{-1}\underline{H})^{-1}\underline{H}'\underline{V}_{\varepsilon}^{-1}\underline{y} \quad . \tag{5}$$

The Gauss-Markov theorem (Anderson, 1971) states that the linear least squares estimate (5) has minimum variance in the class of unbiased estimators.

Suppose that the model errors ε_j are identically distributed with zero mean and constant variance σ^2. Writing $\underline{V}_{\varepsilon}=\sigma^2\underline{W}^{-1}$, where $\underline{W}$ is a symmetric positive definite matrix, Eq.(5) becomes

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{H}'\underline{W}\underline{y} \quad . \tag{6}$$

Substitution of Eq.(2) into (6) shows that

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x} + (\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{H}'\underline{W}\underline{\varepsilon} \tag{7}$$

and it is concluded that

$$\underline{\xi} = \hat{\underline{x}} - \underline{x} = (\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{H}'\underline{W}\underline{\varepsilon} \tag{8}$$

is the resulting perturbation of the true solution $\underline{x}$ caused by the model error $\underline{\varepsilon}$. The covariance matrix $\underline{V}_{\hat{x}}=E\{(\hat{\underline{x}}-\underline{x})(\hat{\underline{x}}-\underline{x})'\}$ of $\hat{\underline{x}}$ is given by

$$\underline{V}_{\hat{x}} = \sigma^2(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1} \quad . \tag{9}$$

If it is assumed that the model errors ε_j are mutually uncorrelated and identically distributed with zero mean and variance σ^2 (white noise assumption) the unweighted least squares solution follows from Eq.(6)

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{H}'\underline{H})^{-1}\underline{H}'\underline{y} \tag{10}$$

since $\underline{V}_{\varepsilon}=\sigma^2\underline{I}$ and $\underline{W}=\underline{I}$, with covariance matrix

$$\underline{V}_{\hat{x}} = \sigma^2(\underline{H}'\underline{H})^{-1} \quad . \tag{11}$$

The residual variance is estimated without bias from the minimum

value of $Q(\underline{x})$

$$\hat{\sigma}^2 = \underline{\hat{\varepsilon}}'\underline{\hat{\varepsilon}}/(n-3) \quad , \tag{12}$$

called the residual sum of squares, where $\underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{y} - \underline{H}\underline{\hat{x}}$ is the observed residual error.

Equation (6) represents the best linear unbiased estimate (BLUE) of the parameter vector $\underline{x}$ provided that the vector $\underline{\varepsilon}$ is normal and white. However this hypothesis is injured by the fact that the pure harmonic model $y_j^o = a \cos 2\pi f t_j + b \sin 2\pi f t_j$ in Eq.(1) is superimposed by a perturbation process, including random as well as deterministic contributions. Consequently the power density function of $\underline{\varepsilon}$ is not a constant as in the case of purely white noise, but has a more or less concentrated aspect in the frequency domain. As $\underline{H}'$ and $\underline{H}'\underline{W}\underline{H}$ in Eq.(8) depend on the theoretical model (deterministic functions) and the covariance matrix $\underline{V}_\varepsilon$, attention will be focussed in Section 3 on the vector $\underline{W}\varepsilon$ for investigating the perturbation mechanism governing the model parameters (Schüller, 1977).

Assuming that the errors ε_j are normally distributed a null amplitude test for the cosine model with period T follows from a theorem of multivariate analysis (Scheffé, 1958; Anderson, 1958, Section 5). Consider the general linear model (2), where $\underline{x}$ now is a r-vector of unknowns and $\underline{H}$ the n×r design matrix. Let $\underline{G}$ be a r×s matrix of rank s whose columns specify s linear parametric functions of the components of $\underline{x}$ and let

$$\underline{z} = \underline{G}'\underline{x} \quad . \tag{13}$$

Using the estimate $\underline{\hat{V}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}^2(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}$ of the covariance matrix $\underline{V}_{\hat{x}}$ the linear combination $\underline{z}$ is then best estimated by $\underline{\hat{z}} = \underline{G}'\underline{\hat{x}}$ which has covariance matrix $\underline{G}'\underline{\hat{V}}_{\hat{x}}\underline{G}$. Also, assuming normality of the model noise $\underline{\varepsilon}$ a standard result of multivariate analysis states that the statistic

$$\frac{1}{s\hat{\sigma}^2}\,(\underline{\hat{z}} - \underline{z})'[\underline{G}'(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{G}]^{-1}(\underline{\hat{z}} - \underline{z}) \tag{14}$$

follows a F-distribution with s and n-r degrees of freedom. A confidence hyperellipsoid including the true value of $\underline{z}$ with confidence $1-\alpha$ consists of all $\underline{z}$ satisfying the inequality

$$\frac{1}{s\hat{\sigma}^2}\,(\underline{\hat{z}} - \underline{z})'[\underline{G}'(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{G}]^{-1}(\underline{\hat{z}} - \underline{z}) \leqslant F_{1-\alpha}(s,n-r) \quad , \tag{15}$$

where $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)$ is the $100(1-\alpha)$th percentile (upper α significance point) of the F-distribution with ν_1 and ν_2 degrees of freedom.

A specific set of linear functions of $\underline{x}$ is given by any subset of the components of $\underline{x}$. Hence $\underline{G}'(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{G}$ is essentially a submatrix of $(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}$. Application of the result (15) to the cosine model (1) with $\underline{x}=(a_o,a,b)'$ and $\underline{z}=(a,b)'$, i.e., r=3 and s=2 and using the matrix

$$\underline{G}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

in the least squares estimation (10) it is concluded that the quantity

$$F = \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left[s_{aa}(\hat{a}-a)^2+2s_{ab}(\hat{a}-a)(\hat{b}-b)+s_{bb}(\hat{b}-b)^2\right] \tag{17}$$

follows a F-distribution with 2 and n-3 degrees of freedom. In this case the quantities s_{aa}, s_{bb} and s_{ab} are the elements of the 2×2 matrix $\underline{S}=[\underline{G}'(\underline{H}'\underline{H})^{-1}\underline{G}]^{-1}$, i.e.,

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_{aa} & s_{ab} \\ s_{ab} & s_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{22} & v_{23} \\ v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \tag{18}$$

with v_{ij} the elements of the matrix $(\underline{H}'\underline{H})^{-1}=\hat{\underline{V}}_{\hat{x}}/\hat{\sigma}^2$.

Upon choosing a significance level α(usually $\alpha=0.05$) the corresponding confidence region of the pair (a,b) consists of all points with

$$F \leqslant F_{1-\alpha}(2,n-3) \quad . \tag{19}$$

Note that $F_{1-\alpha}(2,n)=n(\alpha^{-2/n}-1)/2$. The null hypothesis H_o:a=b=0 (no periodicity at or near the assumed frequency f) is rejected at the confidence level $1-\alpha$ if $F > F_{1-\alpha}(2,n-3)$, i.e., if

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\left(s_{aa}\hat{a}^2+2s_{ab}\hat{a}\hat{b}+s_{bb}\hat{b}^2\right) > F_{1-\alpha}(2,n-3) \quad . \tag{20}$$

In this way the zero-amplitude hypothesis H_o:$A=\sqrt{a^2+b^2}$ is rejected whenever the confidence ellipse with circumference given by the equation $F = F_{1-\alpha}(2,n-3)$ fails to cover the origin in the (a,b)-plane, which may then be interpreted in the sense that a periodic oscillation with frequency f is significantly detected in the observations.

Taking f at a number of points in a given frequency interval estimates of the parameter vector $\underline{x}$, associated with the cosine model of arbitrary frequency, are obtained by the unweighted least squares technique, as well as s_{aa}, s_{bb} and s_{ab}. Accordingly the quantity F in the left-hand side of Eq.(20) becomes a function of frequency, representing in this manner the F-spectrum F(f) of the observations. For any f the P-spectrum is defined by the probability

$$P(f) = \text{Prob}\{F(f) > F_{1-\alpha}(2,n-3)\} \quad .$$

The curves F(f) and P(f) give two complementary spectral images of

the time series when varying f in a given frequency interval.

If the data contain a true harmonic wave with frequency f_o the F-spectrum reveals the exact location of the matching period $T_o=1/f_o$ in the shape of a more or less sharp peak centered at $f=f_o$, rising significantly above the chosen level defined by the theoretical threshold $F_{1-\alpha}(2,n-3)$ for the chosen α and indicating that the cosine model with frequency $f=f_o$ is significant at the confidence level $1-\alpha$. In a completely analogous way peaks above the level $1-\alpha$ in the diagram P(f) can be interpreted as identifying inherent periodicities with a probability of $100(1-\alpha)$ % of being correct.

This numerical technique allows an increased resolution in the low-frequency range, although a disadvantage is that it is time-consuming. Obviously the F- and P-spectra become completely inaccurate at the very low frequencies because the normal matrix $\underline{H}'\underline{H}$ for unweighted least squares is nearly singular for $f\approx 0$. This undesirable property concurs with the inevitable fact that long-term behaviour in relatively short data samples is imprecisely modelled. The unrealistic divergence of the F-spectrum near zero frequency can be attenuated by subtracting the arithmetic mean from the sample values y_j since the right-hand side $\underline{\beta}=\underline{H}'\underline{y}$ of the normal equations then reduces to the zero vector. Nevertheless this numerical artifice cannot conceal that the information for large periods is completely defective and that spurious peaks can be created near $f=0$. The only way out consists in extending the observation interval indefinitely.

When the observations contain missing data the use of the least squares spectral estimator is advocated since no explicit interpolations need to be performed, which always involves some degree of subjective judgment. Moreover because the observations are treated sequentially the computer program can be written to be independent of the length of the data sample. In addition this approach is also suited for non-uniformly sampled measurements, as opposed to the traditional methods of power spectrum estimation.

3. The use of weighting functions

In general the covariance matrix $\underline{V}_\varepsilon$ of the model noise in Eq.(5) is not known. From Eq.(8) it is seen that the perturbation mechanism of the model parameters is controlled by the vector $\underline{W}\underline{\varepsilon}$. In case that the weighting matrix $\underline{W}$ is chosen to be diagonal, i.e., $\underline{W}=\mathrm{diag}(w_1,\ldots,w_n)$ with w_j the value of a weighting function w(t) at the time instant t_j, the elements of $\underline{\xi}$ in Eq.(8) may be written as

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} w_j \varepsilon_j \quad , \quad i=1,2,3, \qquad (21)$$

with g_{ij} the elements of the deterministic matrix $(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1}\underline{H}'$.

Suppose that the time origin in Eq.(1) is chosen to be the central point of the observation interval, consisting of n equally spaced measurements without gaps and sampling rate Δt, so that t varies in the interval $-n'\Delta t \leqslant t \leqslant n'\Delta t$, with $n'=(n-1)/2$. Denoting the Dirac distribution by $\delta(t)$ and using the finite Dirac comb

$$\delta_n(t;\Delta t) = \sum_{k=-n'}^{n'} \delta(t-k\Delta t) \tag{22}$$

(Blackman and Tukey, 1959), Eq.(21) can be expressed as

$$\xi_i(t) = g_i(t).w(t).\varepsilon(t) \quad . \tag{23}$$

The transformation of $\underline{\xi}$ in the frequency domain results from the convolution theorem of Fourier transforms

$$\Phi_{\xi_i}(f) = \Phi_{g_i}(f)*\Phi_w(f)*\Phi_\varepsilon(f) \tag{24}$$

with $\Phi(f)$ the Fourier transform of the time series considered; * denotes convolution. From Eq.(24) it follows that the effect on the parameter errors of the distribution of the noise power as a function of frequency, which is described by the residual Fourier spectrum $\Phi_\varepsilon(f)$, is controlled by the properties of the spectral window $\Phi_w(f)$ acting as a weighting function in the frequency domain.

Unweighted least squares intrinsically uses the rectangular data window (box car kernel)

$$\begin{aligned} w_o(t) &= 1 \quad , \quad |t| \leqslant n'\Delta t \quad , \\ &= 0 \quad , \quad |t| > n'\Delta t \end{aligned} \tag{25}$$

as the weighting function on the time axis. In the framework of spectral analysis (Blackman and Tukey, 1959; Jenkins and Watts, 1968) it is known that the spectral window, associated with discrete sampling

$$\Phi_{w_o}(f) = \sum_{k=-n'}^{n'} e^{-2\pi i k f \Delta t} = \frac{\sin n\pi f\Delta t}{\sin \pi f\Delta t} \tag{26}$$

has a narrow bandwidth, thus permitting high resolution but the side lobes are undesirably high (first side lobe 22 % of the main lobe). This disagreeable property has the consequence that the estimated model parameters by least squares will be affected by leakage of the residual power, originating from frequencies remote from the frequencies of the true harmonic constituents, through the side lobes of the frequency window $\Phi_{w_o}(f)$.

Out of a broad variety of spectral convolvers which have superior frequency characteristics but larger bandwidth than the rectan-

gular window (Jenkins and Watts, 1968; Kurita, 1969; Båth, 1974) the so-called hamming window was selected in this context

$$w(t) = (0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi t}{n'\Delta t})\, w_o(t) \quad . \tag{27}$$

Although the bandwidth of the associated spectral window

$$\Phi_w(f) = 0.54\Phi_{w_o}(f) + 0.23[\Phi_{w_o}(f-\frac{1}{n\Delta t}) + \Phi_{w_o}(f+\frac{1}{n\Delta t})] \tag{28}$$

is nearly twice as large as that of the rectangular window it displays prominent convergence properties and side lobe reduction (first side lobe only 2 % of the main lobe) so that energy leakage of the residual power from frequencies, which are at least one bandwidth of $\Phi_w(f)$ apart from the true frequencies, is conveniently suppressed.

When the data set comprises only observations of relatively limited extent period identification at high resolution in the low-frequency interval evidently becomes inaccurate. In case that the time sequence has a strong stochastic appearance the spectral diagrams will display a disturbed aspect which implies that spurious peaks may be created by the noise fluctuations. When the fundamental lines are closely spaced the side lobes of each spectral peak become superimposed upon some of the other lines and introduce period, amplitude and phase errors. This effect is particularly important when a strong line is present since the minor side lobes tend to simulate significant periodic oscillations. Side lobe artefacts are adequately reduced by convenient data windows (Bartlett, hanning, hamming, RBB, Arsac, Parzen).

These inconvenient properties are common to all power spectrum methods. It is obvious that the only guarantee that the lines, rising above the continuous background generated by the coloured noise, correspond to real physical mechanisms is a high signal-to-noise ratio in the spectral peaks. Because the F-spectrum is rooted in a probabilistic base an advantage of this approach is that it is less sensitive to the influence of the red noise since it is in principle 'impossible ' to fit a cosine model significantly to a non-stationary random sequence or stochastic trend (drift).

If the sample was taken at equidistant time points over an integer multiple of the assumed period the relation of the F-spectrum with the periodogram algorithmbecomes obvious. Then the normal matrix of the unweighted least squares becomes $\underline{H}'\underline{H}=\mathrm{diag}(n,\frac{n}{2}\,\frac{n}{2})$ so that $(H'H)^{-1}=\mathrm{diag}(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{2}{n})$ and the estimated model parameters are given by

$$\hat{a}_o=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \quad , \quad \hat{a}=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \cos 2\pi jf\Delta t \quad , \quad \hat{b}=\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \sin 2\pi jf\Delta t \quad .$$

Consequently the F-value in the left-hand side of Eq.(20) reduces to

$$F = \frac{1}{n\hat{\sigma}^2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \cos 2\pi jf\Delta t\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \sin 2\pi jf\Delta t\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{n\hat{\sigma}^2}\left|\sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi ijf\Delta t}\right|^2 \quad .$$

This relationship is approximately valid in the general case for large values of n. F is interpreted to be a measure of the ratio of the sum of squares explained by the regression, which is nothing but the periodogram estimate of the power spectrum, to the residual sum of squares, that is the part of the variance of the observations which is not explained by the cosine model (1).

Finally it has to be admitted that the F-spectrm gives a too optimistic image of the frequency content of the observations. Application of the least squares method to a simple model as in Eq.(1) indeed presupposes that the model errors ε_j are random, additive, mutually uncorrelated and follow a normal probability distribution law with zero mean and constant variance. Methods of statistical inference such as the F-test, are strongly influenced by the presence of residual autocorrelation (Lindley, 1947; Reiersøl, 1950; Durbin, 1954; Johnston, 1972). The importance of this effect is that the significance levels of the F-test are affected because the confidence bands of the model parameters are generally too small. The assumption of independent residuals will have the consequence that the residual variance and accordingly the computed variances of the unknowns will be underestimated, which results in overrated F-values in Eq.(17).

4. Some remarks on the maximum entropy spectrum

In the last decade many researchers have claimed the maximum entropy method (MEM) to be more effective than the more conventional techniques in detecting weak signals. This algorithm is based on the idea of maximizing the entropy or information content of the available data (Burg, 1975). Detailed accounts are presented by Smylie et al. (1973), Ulrych and Bishop (1975) and Ulrych and Clayton (1976). This tecnique has been called 'data adaptive' by Lacoss (1971), since MEM is in fact equivalent to the fitting of an autoregressive (AR) model (also called prediction error filter or PEF) to a random process (Van den Bos, 1971). The interesting part of Burg's idea is that the PEF has the desirable property of adapting itself optimally to the frequency structure of the process in the sense that it aims to

whiten the data samples. In this way the MEM provides good frequency resolution and more realistic power estimates, especially for the short records frequently encountered in practice. Classical power spectrum methods are unable to provide sufficient resolution in such cases.

Nevertheless several shortcomings of the MEM need to be mentioned. Although it seems intuitively reasonable that the data set implicitely should determine an optimum PEF length N, no efficacious method for determining N in terms of the length n of the sample is available, which means that it is difficult in practice to decide unambiguously on the order of the AR model. The FPE- and AIC-criterion (Ulrych and Clayton, 1976) can be used but the results are often equivocal, especially when the data contain several periodic components since it is then indistinct to determine uniquely a minimum in the FPE- and AIC-diagrams. An objective standard for fixing the order N of the PEF is of primary importance because the smoothness and stability of the maximum entropy spectrum are controlled mainly by the choice of N. It is known from experience that a small value of the ratio N/n (e.g., 0.05) of the ME estimate gives a very smoothed and unusable spectrum, whereas a high value of N/n (e.g., 0.5) introduces too many random factors in the resulting spectrum. For high values of N the complex conjugated roots of the AR operator tend to cluster close to the unit circle of the complex z-plane, in this manner simulating ficticious periodic variations. So to speak the autoregressive operator tries to adapt itself to the noise in the observations for large values of N: overfitting of the PEF entails that the MEM 'adapts itself too well to the data set at hand'.

Furthermore Chen and Stegen (1974) observed frequency shifts of the spectral peaks in the ME spectra of synthetic sinusoids depending on the initial phases of the signals. Spontaneous line splitting, depending on the data length and the initial phases, has been observed by Fougère et al. (1976). Courtillot et al. (1977) warn against the interpretation of ME spectra which are obtained for high values of the ratio N/n; they arrive at the empirical conclusion that MEM does not provide reliable estimates of periodicities having a period extending one third of the record length. A serious defect of the MEM is that no realistic confidence limits for the power spectrum estimates are provided. Finally it is remarked that Swingler (1980) concludes that the MEM should not automatically be assumed to be superior to the conventional discrete Fourier transform (DFT) technique for observations in the presence of noise. It is interesting to note that this author expects the DFT error to drop off as n^{-2}, whereas

the MEM only drops off as $(n-1)^{-1}$.

5. Spectral analysis of a group of time series

Although the spectral analysis in this connection will be focussed on a single time series it is interesting to see how the foregoing discussion could be generalized to a global analysis of the fund of measurements of several data sets belonging to the same class of physical entity. The available observations of m time series then constitute a set of ordinates y_{ij}, $i=1,\ldots,m$ obtained at the time instants t_{ij}, $j=1,\ldots,n_i$, where it is assumed that all time sequences refer to the same origin.

The sequential single cosine analysis can be extended to allow inferences concerning common periodicities. A cosine model with frequency selected at a number of points in a given frequency interval is fitted to the observations of sequence number i

$$y_{ij} = a_o + a \cos 2\pi f t_{ij} + b \sin 2\pi f t_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad , \tag{29}$$

where ε_{ij} denotes the model error at the time instant t_{ij}. An estimate of the model parameters $\underline{x}=(a_o,a,b)'$ for the group of m members follows from the combination of the individual least squares estimates $\hat{\underline{x}}_i$ and their covariance matrices $\hat{\underline{V}}_i$.

As a working hypothesis it is supposed that the different time series are uncorrelated and that they represent observations from distributions with the same mean and with correctly specified distributions. Using only the estimates $\hat{\underline{x}}_i$ and the covariance matrices $\hat{\underline{V}}_i$ implies normally distributed estimates. Let $\hat{\underline{x}}$ be the group-mean estimate for which the residual sum of squares is minimized

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} (\hat{\underline{x}}_i - \underline{x})' \hat{\underline{V}}_i^{-1} (\hat{\underline{x}}_i - \underline{x}) \tag{30}$$

(Eadie et al. 1971, p 276). Solving

$$\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = -2 \sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{V}}_i^{-1} (\hat{\underline{x}}_i - \underline{x}) = \underline{0} \tag{31}$$

for $\underline{x}=\hat{\underline{x}}$ gives the estimate

$$\hat{\underline{x}} = (\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{V}}_i^{-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{V}}_i^{-1} \hat{\underline{x}}_i) \tag{32}$$

with covariance matrix

$$\hat{\underline{V}} = (\sum_{i=1}^{m} \hat{\underline{V}}_i^{-1})^{-1} \quad . \tag{33}$$

From Eqs.(6) and (9) it follows that (32) and (33) can be written as

$$\underline{\hat{x}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \underline{H}_i'\underline{W}\underline{H}_i/\hat{\sigma}_i^2\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \underline{\beta}_i/\hat{\sigma}_i^2\right) \quad , \tag{34}$$

$$\underline{\hat{V}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \underline{H}_i'\underline{W}\underline{H}_i/\hat{\sigma}_i^2\right)^{-1} \quad , \tag{35}$$

with $\underline{H}_i$ the observation matrix for time series number i, $\hat{\sigma}_i^2$ the estimated residual variance and $\underline{\beta}_i = \underline{H}_i'\underline{W}\underline{y}_i$ the right-hand side of the normal equations. Note that this discussion can be extended to the combination of the least squares results of general linear models of the form $\underline{y}_i = \underline{H}_i\underline{x}_i + \underline{\varepsilon}_i$.

To elucidate the meaning of this group-mean estimate we consider the special case that $\underline{H}_i'\underline{W}\underline{H}_i \simeq \underline{H}'\underline{W}\underline{H}$ and $\hat{\sigma}_i^2 \simeq \sigma^2$ for all i. In consequence the combined estimate in Eq.(32) is just the unweighted average of the individual estimates

$$\underline{\hat{x}} \simeq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \underline{\hat{x}}_i \tag{36}$$

and the covariance matrix of $\underline{\hat{x}}$ in Eq.(33) reduces to

$$\underline{\hat{V}} \simeq \frac{\hat{\sigma}^2}{m}(\underline{H}'\underline{W}\underline{H})^{-1} \quad . \tag{37}$$

The statistic F, defined by

$$F = \frac{1}{2}[s_{aa}(\hat{a}-a)^2 + 2s_{ab}(\hat{a}-a)(\hat{b}-b) + s_{bb}(\hat{b}-b)^2] \tag{38}$$

follows a F-distribution with 2 and N-3m degrees of freedom, with $N = \sum_i n_i$ the totalnumber of observations in the ensemble. The quantities s_{aa}, s_{bb} and s_{ab} are the elements of the matrix $\underline{S} = (\underline{G}\ \underline{\hat{V}}^{-1}\underline{G})^{-1}$. Extending the reasoning followed for the individual case, F becomes a function of frequency f by computing the expression in Eq.(38) for a=b=0 at a number of points, usually uniformly spaced in a chosen frequency interval. In this way the group F- and P-spectra $F_W(f)$ and $P_W(f)$ are defined for the set of m time series.

Under the hypothesis of ergodicity it is expected that the differences between the individual spectra $F_i(f)$ will be attenuated in the group-mean F-spectrum $F_W(f)$, but that the fundamental features in the complete data set will generate moderately sharp peaks in $F_W(f)$. Note that a peak in $F_W(f)$ indicates the presence of a common periodicity, but nothing can be concluded concerning the individual amplitudes and phases of the accompanying periodic oscillations. This method apparently aims to detect common periodicities and the differences between the model parameters of the separate time series should result from a global harmonic analysis. Using the terminology of the theory of the statistical analysis of variance, $F_W(f)$ is a combined measure of the spectral content of the observations from

within each of the m samples; for this reason $F_W(f)$ will be called the 'within' F-spectrum.

A weighted measure of the spread of the spectral information from the m data sets can be constructed in the following way. For a particular frequency f the least squares analysis of time series number i gives estimates $\underline{\hat{x}}_i=(\hat{a}_{o_i},\hat{a}_i,\hat{b}_i)'$ of the population parameters $\underline{x}=(a_o,a,b)'$, where $a_o=E\{\hat{a}_{o_i}\}$, $a=E\{\hat{a}_i\}$ and $b=E\{\hat{b}_i\}$, together with the estimated variances $s^2_{a_i}$ and $s^2_{b_i}$ of the parameters $\hat{a}_i$ and $\hat{b}_i$ and their covariance $s_{a_ib_i}$. On a polar plot each $(\hat{a}_i,\hat{b}_i)$-pair defines a vector $\underline{\hat{v}}_i$ with the vector's length portraying the amplitude and the vector's direction indicating the time of the highest value of the cosine function with period T. The m resulting $(\hat{a}_i,\hat{b}_i)$-pairs can then be combined to display an elliptical $100(1-\alpha)$ % confidence region in the harmonic dial so that $100(1-\alpha)$ percent of the end points of the individual vectors $\underline{\hat{v}}_i$ could be expected to fall within this area.

Inferences as to the pairs (a,b) may be made by basing a statistical test for a common periodicity on the variability among the individual estimates $(\hat{a}_i,\hat{b}_i)$. An estimate of the group expectation of the parameters (a,b) is readily obtained from the weighted mean $\underline{\hat{v}}=(\hat{a},\hat{b})$, given by

$$\underline{\hat{v}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i\underline{\hat{v}}_i \quad . \tag{39}$$

Considering the $\hat{a}_i$ and $\hat{b}_i$, i=1,...,m, as random samples with means $\hat{a}$ and $\hat{b}$, estimates of the among-series covariance matrix elements of $\hat{a}$ and $\hat{b}$ are given by the estimated variances s^2_a and s^2_b and the covariance s_{ab} of the $\hat{a}_i$ and $\hat{b}_i$

$$\begin{aligned} s^2_a &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i[(\hat{a}_i-\hat{a})^2 + s^2_{a_i}] \\ s^2_b &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i[(\hat{b}_i-\hat{b})^2 + s^2_{b_i}] \\ s_{ab} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i[(\hat{a}_i-\hat{a})(\hat{b}_i-\hat{b}) + s_{a_ib_i}] \quad . \end{aligned} \tag{40}$$

A $100(1-\alpha)$ % confidence ellipse for the frequency f considered of the group of time sequences, expected to cover $100(1-\alpha)$ percent of $(\hat{a}_i,\hat{b}_i)$-pairs is then the set of all points satisfying

$$F \leqslant F_{1-\alpha}(2,m-2) \quad , \tag{41}$$

where F is the computed F-value for the frequency f

$$F = \frac{m(m-2)}{2(m-1)} \frac{1}{1-r_{ab}^2} \left[\left(\frac{\hat{a}-a}{s_a}\right)^2 - 2r_{ab}\left(\frac{\hat{a}-a}{s_a}\right)\left(\frac{\hat{b}-b}{s_b}\right) + \left(\frac{\hat{b}-b}{s_b}\right)^2 \right] \qquad (42)$$

where $r_{ab}=s_{ab}/(s_a s_b)$ stands for the correlation coefficient between $\hat{a}$ and $\hat{b}$ (Anderson, 1958; Corrolary 5.2.1). The null hypothesis H_o: $a=b=0$ can be tested by expressing Eq.(42) as an F-statistic and evaluating it for $a=b=0$ for any frequency chosen. In this way F becomes a function $F_B(f)$ of frequency, which can be interpreted in the following sense: if $F_B(f) > F_{1-\alpha}(2,m-2)$ a statistically significant common periodicity is detected at the confidence level $1-\alpha$. Accordingly $F_B(f)$ will be called the 'between' F-spectrum for the group of m members since it takes account of the variability of the spectral information content among the individual time series.

5. Harmonic analysis

Once a number of periods $T_k=1/f_k$, $k=1,\ldots,p$, are identified by the apparent peaks in the group (or single) F-spectrum at the frequencies $f_1,\ldots,f_p$, a trigonometric model of the form

$$y_{ij} = A_i^o + \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cos 2\pi f_k t_{ij} + b_{ik} \sin 2\pi f_k t_{ij}) + \varepsilon_{ij}$$

$$= A_i^o + \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \cos(2\pi f_k t_{ij} + \phi_{ik}) + \varepsilon_{ij} \qquad (43)$$

is fitted to the data of each time series. The model (43) can be written in the general short-hand $\underline{y}_i = \underline{H}_i \underline{x}_i + \underline{\varepsilon}_i$ with $\underline{x}_i=(A_i^o, a_{i1}, b_{i1}, \ldots, a_{ip}, b_{ip})'$. The weighted least squares analysis, as given by Eq.(6), of the individual time sequences determines estimates $(\hat{a}_{ik}, \hat{b}_{ik})$ of the parameters $a_k=A_k\cos\phi_k$ and $b_k=-A_k\sin\phi_k$ of the common harmonic wave with period T_k from which estimates $(\hat{A}_{ik}, \hat{\phi}_{ik})$ of the amplitude A_k and the phase ϕ_k for time series number i are obtained.

A null amplitude test for each period T_k follows from the general theorem in Eq.(14). Application of this result to the harmonic model (43), i.e., r=2p+1, s=2 and using the 2×(2p+1) matrix

$$\underline{G}' = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \qquad (44)$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow_{2k} \quad \uparrow_{2k+1}$$

it follows that a confidence region for the pair (a_{ik}, b_{ik}) can be computed from $F_k \leq F_{1-\alpha}(2, n_i-2p-1)$, where

$$F_k = \frac{1}{2\hat{\sigma}_i^2}(\hat{a}_{ik}-a_{ik}, \hat{b}_{ik}-b_{ik}) \begin{pmatrix} c_{2k,2k} & c_{2k,2k+1} \\ c_{2k+1,2k} & c_{2k+1,2k+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a}_{ik}-a_{ik} \\ \hat{b}_{ik}-b_{ik} \end{pmatrix} \quad (45)$$

and the c_{ij} are the elements of the inverse $(\underline{H}_i'\underline{W}\underline{H}_i)^{-1}$ of the normal matrix, associated with the model (43). Equation (45) gives p confidence ellipses for the pairs (a_{ik}, b_{ik}). A null amplitude test $A_{ik}=0$ can be executed using Eq.(45), rejecting the null hypothesis if (0,0) is not in the confidence region $F_k=F_{1-\alpha}(2,n_i-2p-1)$. The value of F_k in Eq.(45) for $a_{ik}=b_{ik}=0$ will be refered to as the computed F-value for the period T_k in time series number i.

The m resulting $(\hat{A}_{ik},\hat{\phi}_{ik})$-pairs can then be combined by the technique outlined in Section 4, where now the expression 'a particular frequency f' must be replaced by 'the frequency f_k'. Writing $\hat{a}_k=\hat{A}_k\cos\hat{\phi}_k$ and $\hat{b}_k=-\hat{A}_k\sin\hat{\phi}_k$ the estimated amplitude $\hat{A}_k$ and phase $\hat{\phi}_k$ of the group expectation of the common parameters (A_k,ϕ_k) are readily obtained from the weighted vector mean

$$\underline{\hat{v}}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i \underline{\hat{v}}_{ik} \quad , \qquad (46)$$

with $\underline{\hat{v}}_{ik}$ the vector $(\hat{a}_{ik},\hat{b}_{ik})$. Equations (40) and (42) then refer to the estimated variances, the covariance and computed F-value for the periodicity T_k. The null hypothesis $H_o:A_k=0$ can be tested by evaluating F in Eq.(42) for $a_k=b_k=0$; a statistically significant common periodicity is implied at the $100(1-\alpha)$ % confidence level whenever $F > F_{1-\alpha}(2,m-2)$.

If the T_k-periodicity is concluded to be significant for the group (or single) time series considered this elliptical prediction region in the polar representation can be transformed into a $100(1-\alpha)$ percent confidence interval for the ensemble characteristics A_k and ϕ_k. Applying the general theorem for the variance of a function g of r parameters $x_1,\ldots,x_r$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} v_{ij} \quad , \qquad (47$$

where v_{ij} are the elements of the covariance matrix of the variables x_j (Eadie et al.,1971, p 27), to the functions $g(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}$ and $g(a,b)=tg^{-1}(-b/a)$ gives

$$\begin{aligned} s_{A_k}^2 &= \cos^2\hat{\phi}_k . s_{a_k}^2 + \sin^2\hat{\phi}_k . s_{b_k}^2 - \sin 2\hat{\phi}_k . s_{a_k b_k} \quad , \\ s_{\phi_k}^2 &= (\sin^2\hat{\phi}_k . s_{a_k}^2 + \cos^2\hat{\phi}_k . s_{b_k}^2 + \sin 2\hat{\phi}_k . s_{a_k b_k})/\hat{A}_k^2 \quad . \end{aligned} \qquad (48)$$

6. Application to the records of a superconducting gravity meter

A superconducting gravity meter (SUPER) has operated since April 1982 at the Royal Observatory of Belgium, Brussels (λ = 4°21'29"E, φ = 50°47'55"E,h = 101 m). A set of 22726 hourly readings, corresponding to the observing interval 21/4/1982 to 19/11/1984, has been analyzed by the method of spectral analysis described in Section 2. As the instrument is not calibrated Ducarme (1983) normalizes its results on the local δ-value for the O_1 tidal wave obtained from the results of eleven years of observations with three Askania spring gravimeters, yielding a normalization factor S=0.2922 µgal/mm.

Figure 1 shows the daily means of the observations of the superconducting gravity meter for the observing interval concerned. When we speak of 'daily means' we understand the output of the following procedure. First the time series of hourly values is filtered by the Doodson low-pass filter X_o (Melchior, 1978, p 168), which sufficiently attenuates the contributions of the D, SD and TD tidal wave bands. A nearly identical result follows from the application of the Pertzev combination $X_o^!$. Next the daily means of 24 consecutive filtered hourly data are obtained. Calculating the 24-hourly averages performs a second low-pass filtering of the observations. This technique enables to visualize more clearly the long-term behaviour of the measurements.

Recordings of Earth tides are frequently displaced either because a calibration has been performed or the drift is compensated by executing a correction so as to bring the recording in the middle of the paper. Often the base-line is lost after a missing data interval. Since the observed curve may contain several drift corrections or jumps these discontinuities have to be counteracted by a numerical interference. Suppose that the jumps in the observed record occur at the time instants $t_1^o,\ldots,t_q^o$ with respect to the chosen time origin. Then a discontinuity at the time point t_j^o is described by $a_j u(t-t_j^o)$, where a_j is the value of the jump and $y(t)$ is the Heaviside function

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \quad , \quad t < 0 \quad , \\ &= 1 \quad , \quad t \geqslant 0 \quad . \end{aligned} \tag{49}$$

The drift of the instrumental zero is generally well approximated by a sum of exponential functions which may be interpreted as the 'response of the instrument to its coming into operation' (step response). In addition to this exponential drift an important instrumental correction for the superconducting gravity meter has to be determined, originating from the influence of the variations of the heating voltage of the instrument's thermostat. In this way a conti-

nuous increase in the recording arises which is due to a slight leakage of helium into the vacuum enclosure. When the voltage attains its maximum tolerable value (10 volts) the vacuum is restored by introducing the getter. This operation provokes an instantaneous drift of the gravimeter, thereby allowing the evaluation of the effect of a variation of the heating voltage. Ducarme (private communication) obtains a coefficient of 3 µgal/V. Accordingly the influence of the heating voltage is approximated by a linear function of time. As a result the instrumental drift is modelled by

$$y(t) = A_o + \beta t + \sum_{j=1}^{p} A_j e^{-t/T_j^o} + \sum_{j=1}^{q} a_j u(t-t_j^o) + \varepsilon(t) \quad , \qquad (50)$$

where $\varepsilon(t)$ denoted the residual series (tidal effects).

The model parameters $(A_o, ,A_1,\ldots,A_p,T_1^o,\ldots,T_p^o,a_1,\ldots,a_q)$ are then estimated by the Gauss-Marquardt method of non-linear optimization (Bard, 1974) by minimizing the sum of squares of the differences between the daily values of the observations and the drift model (50), where the time t is measured in days and refers to the origin 21/4/1982.

In Fig.1 a jump (q=1) occurs at the data 26/5/1982 and an initial exponential behaviour (p=1) is apparent after a tentative elimination of the discontinuity by joining the two parts of the recording. The non-linear optimization technique yielded the following estimates of the drift parameters: A_o=333.29 µgal, β=0.05483 µgal/day, a_1=107.27 µgal, t_1^o=35 days, A_1=65.88 µgal and the retardation time T_1^o=85.47 days. The estimate β=0.05483 and the approximating linear trend v_t=4.9160 + 0.03103t for the voltage v_t, when the discontinuities due to the getter are adjusted, gives a value 1.77 µgal/V for the variation of the voltage. Figure 2 compiles the daily means, the drift (dashed curve in the upper part of the diagram) and the tidal residuals, where the contribution of the tidal wave M_f is clearly demonstated. Note that the definition of the trend to be subtracted from the observations is of essential importance for the analysis of the resulting tidal effects and especially will affect the estimated phases of the long-period constituents such as M_f.

After elimination of the instrumental drift a spectral analysis, as explained in Section 2, is performed. Figures 3, 4, 5 and 6 show the F- and P-spectra of the detrended hourly values in the frequency band $0 \leqslant f \leqslant 0.15$ cpd (cycles/day), $0.85 \leqslant f \leqslant 1.15$ cpd, $1.80 \leqslant f \leqslant 2.05$ cpd and $2.8 \leqslant f \leqslant 3$ cpd, respectively, when no weighting function (box car window) is applied to the data. The horizontal line in each diagram indicates the theoretical level $F_{0.95}$ in the F-spectra and the 95 % probability acceptance level in the P-spectra. Note the signifi-

cant spectral peaks at the main tidal waves. From the statistical point of view only the strong tidal lines are significantly accepted at the 95 % confidence level for the observing interval concerned, but for completeness the minor tidal constituents are also indicated. In the long-period band lines at 275 and 172 days are observed. As could be expected the side lobes accompanying the important spectral peaks are severely disturbing the spectra.

To stress the importance of the use of an adequate weighting function the spectral analysis is repeated utilizing the hamming window. It is seen from Figs. 3 to 6 that in this way the minor tidal lines become more distinct and that the side lobes are drastically reduced at the expense of broadening of the spectral peaks. This effect is particularly clear when considering the P-spectra.

The effect of the use of a frequency window on the results of a tidal harmonic analysis is summarized in Table 1. It is remarked that the δ- and κ-factors are nearly the same, whether a data window is applied or not, but is interesting to note that the standard erros are increased when the hamming window is used.

Acknowledgments

The author expresses his indebtedness to Professor P. Melchior for putting the observations of the superconducting gravity meter at his disposal. The careful pretreatment by Dr. B. Ducarme is greatly acknowledged.

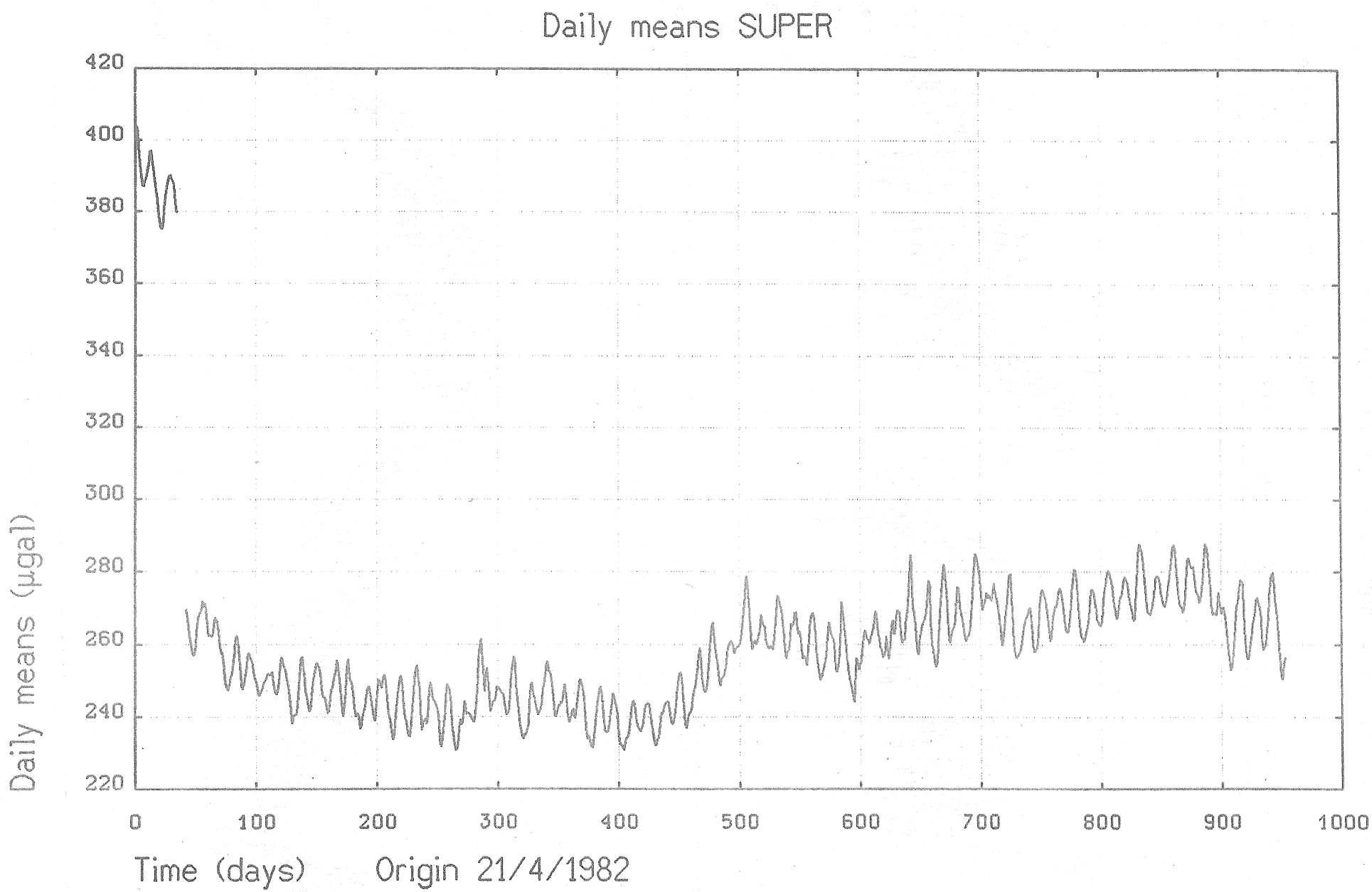


Fig. 1. Daily means of the superconducting gravity meter (21/4/1982-19/11/1984).

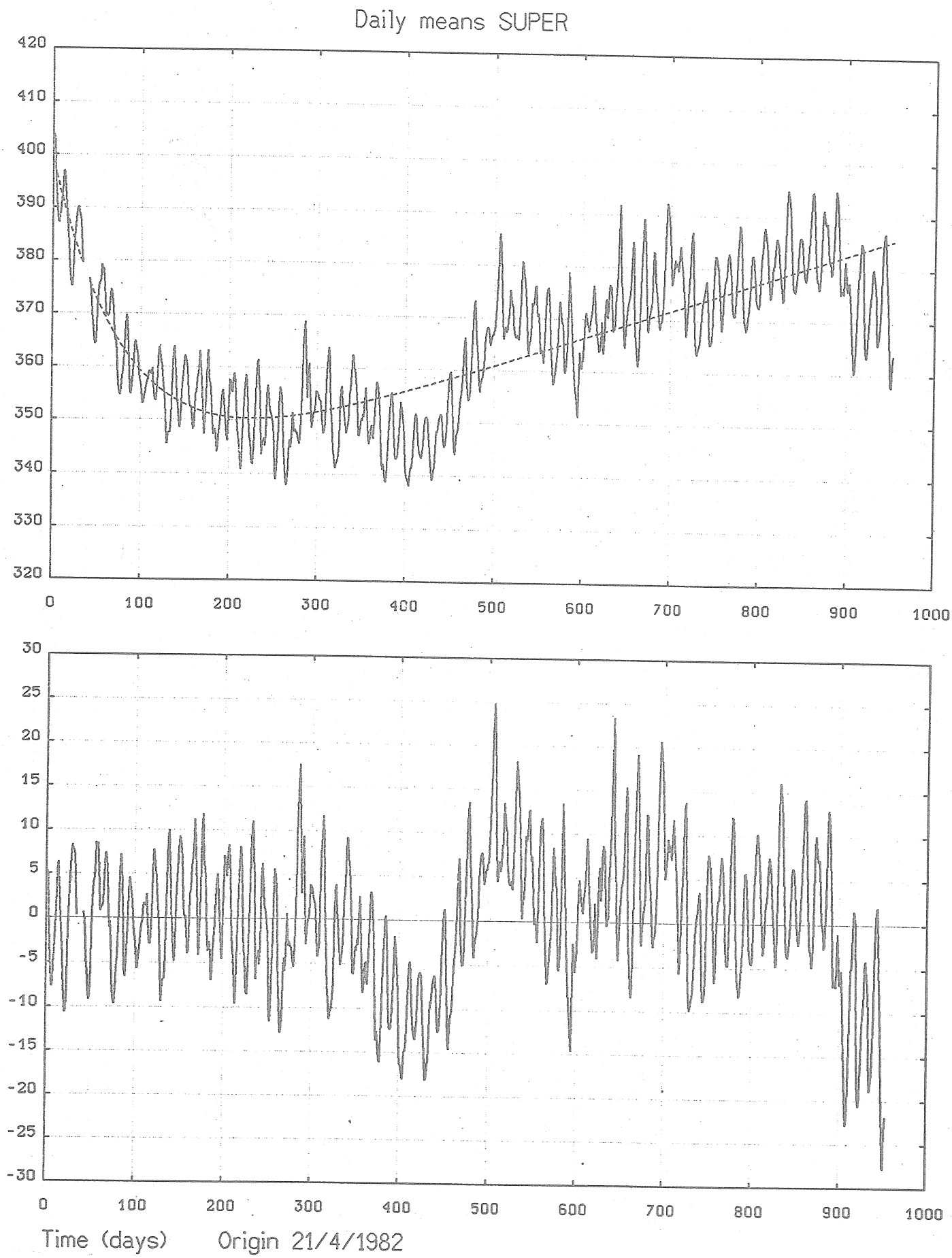
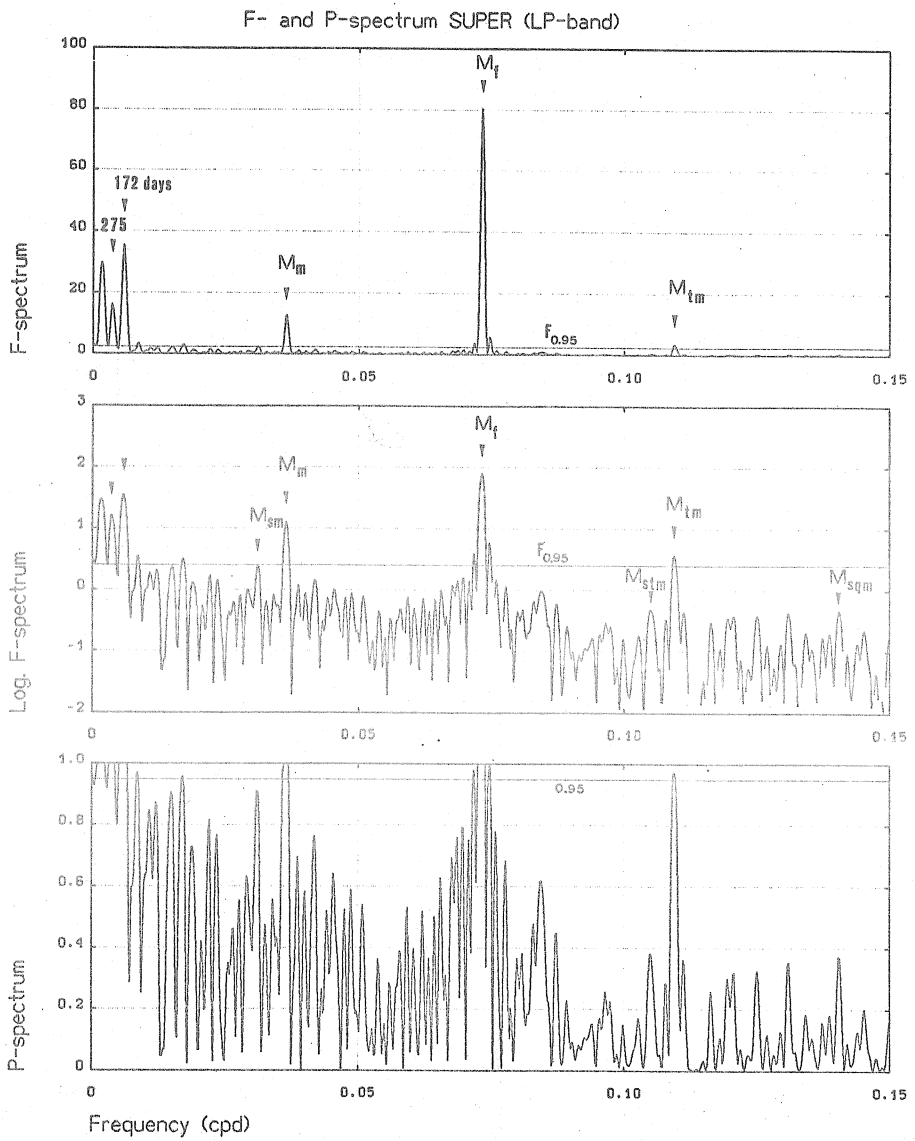
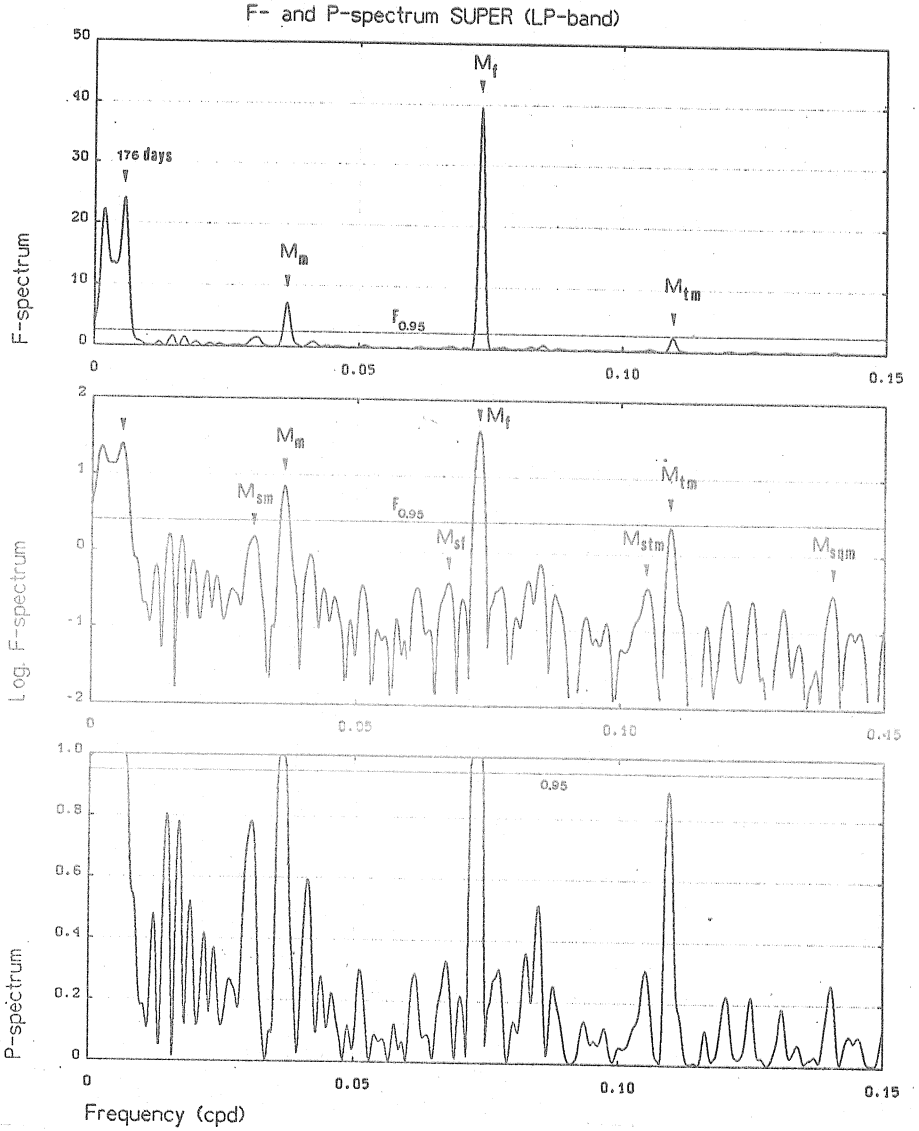


Fig. 2. Daily means, drift and tidal residuals of the superconducting gravity meter.

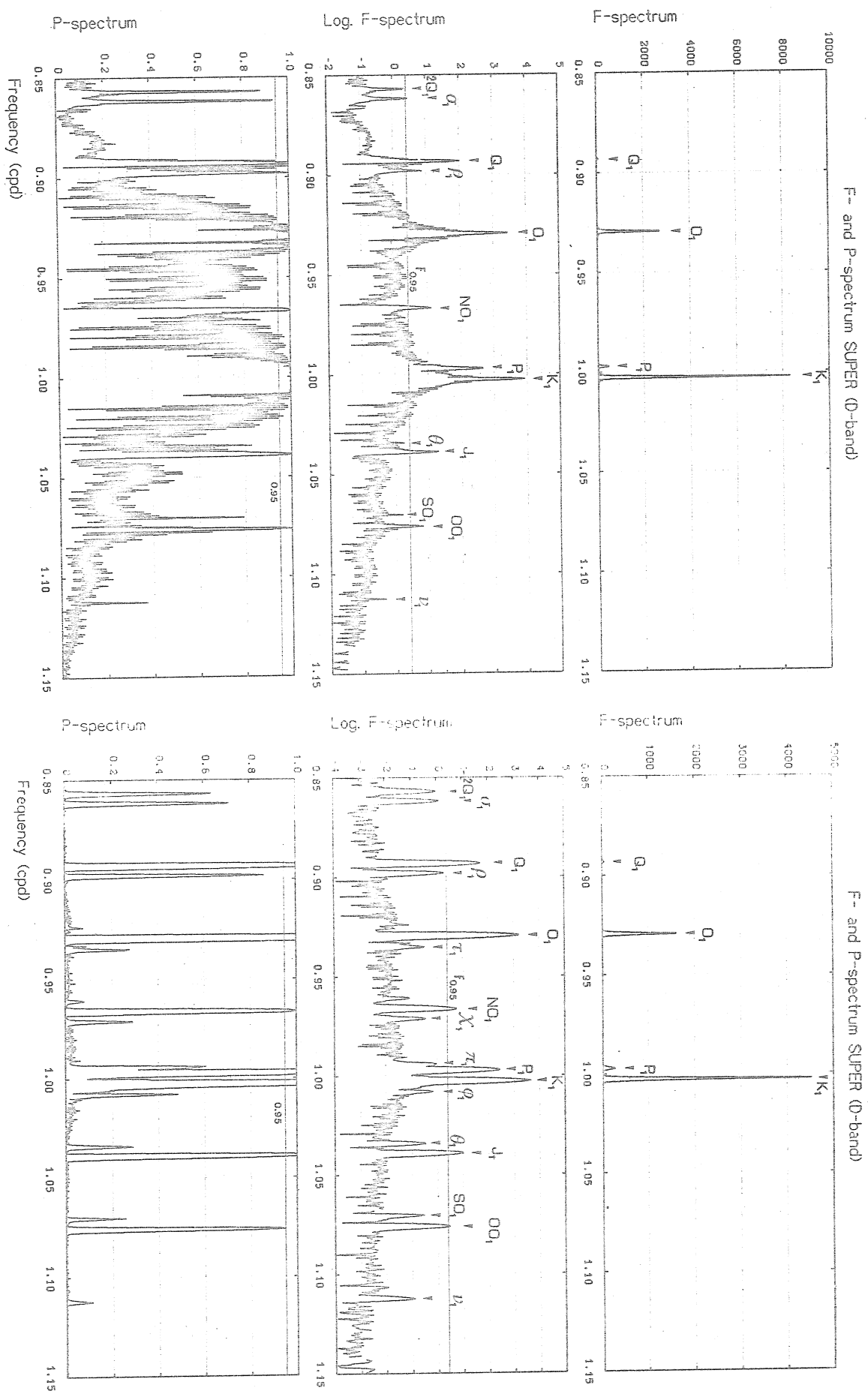


(a) rectangular window



(b) hamming window

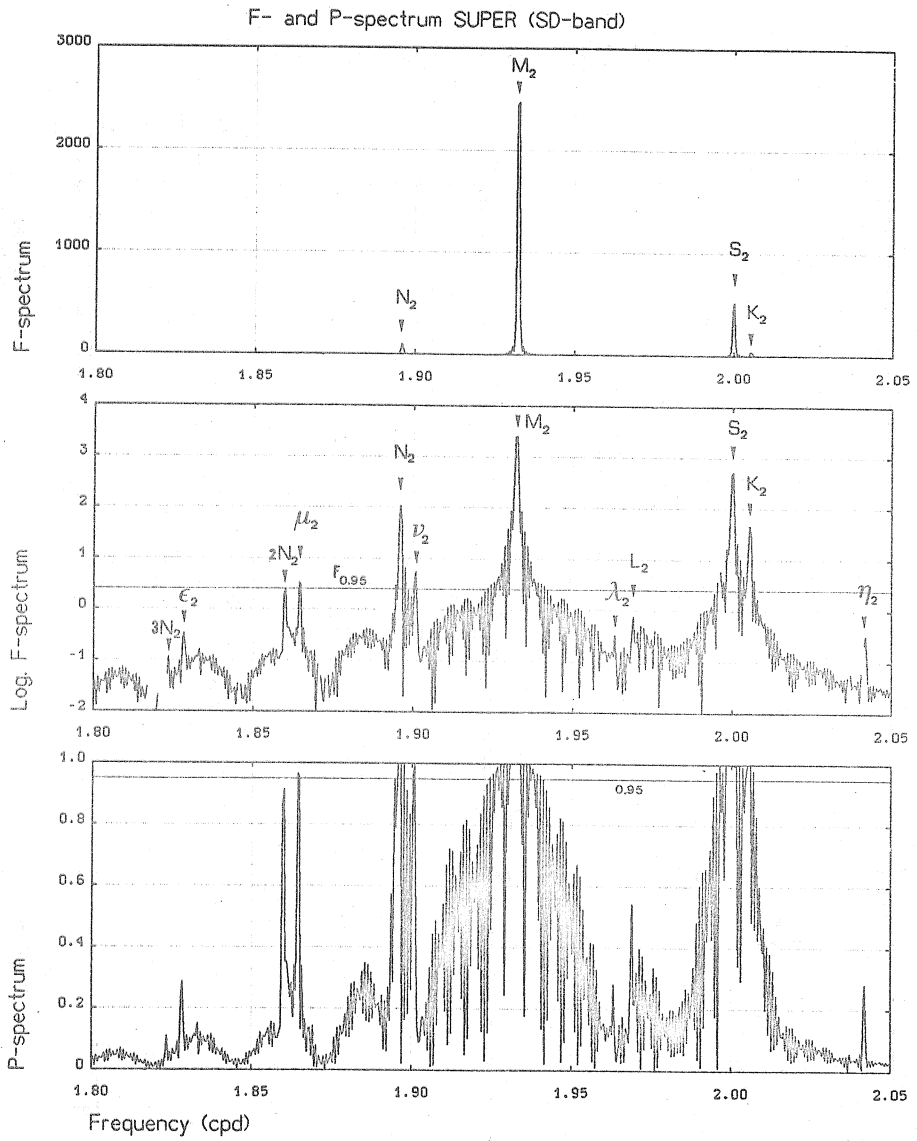
Fig. 3. Spectral analysis of the long-period tidal wave band.



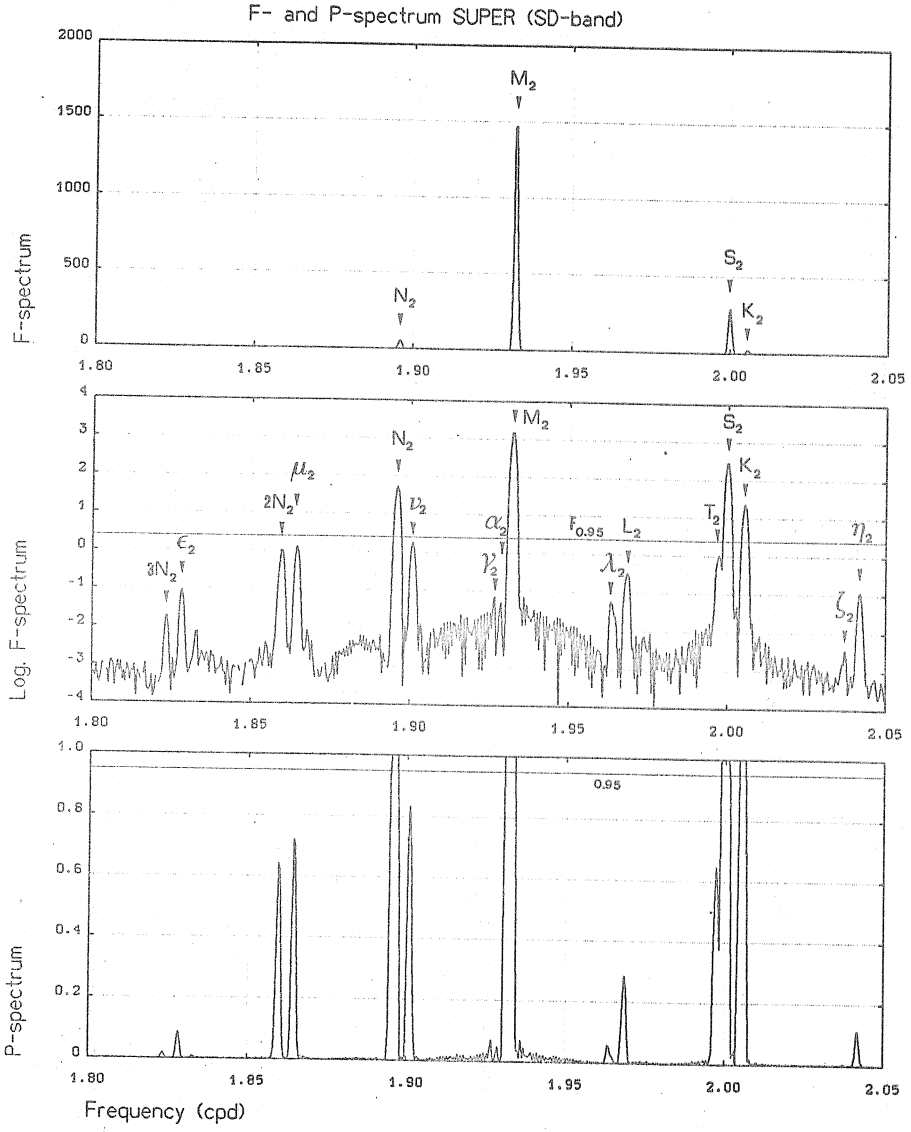
(a) rectangular window

(b) hamming window

Fig. 4. Spectral analysis of the diurnal tidal wave band.

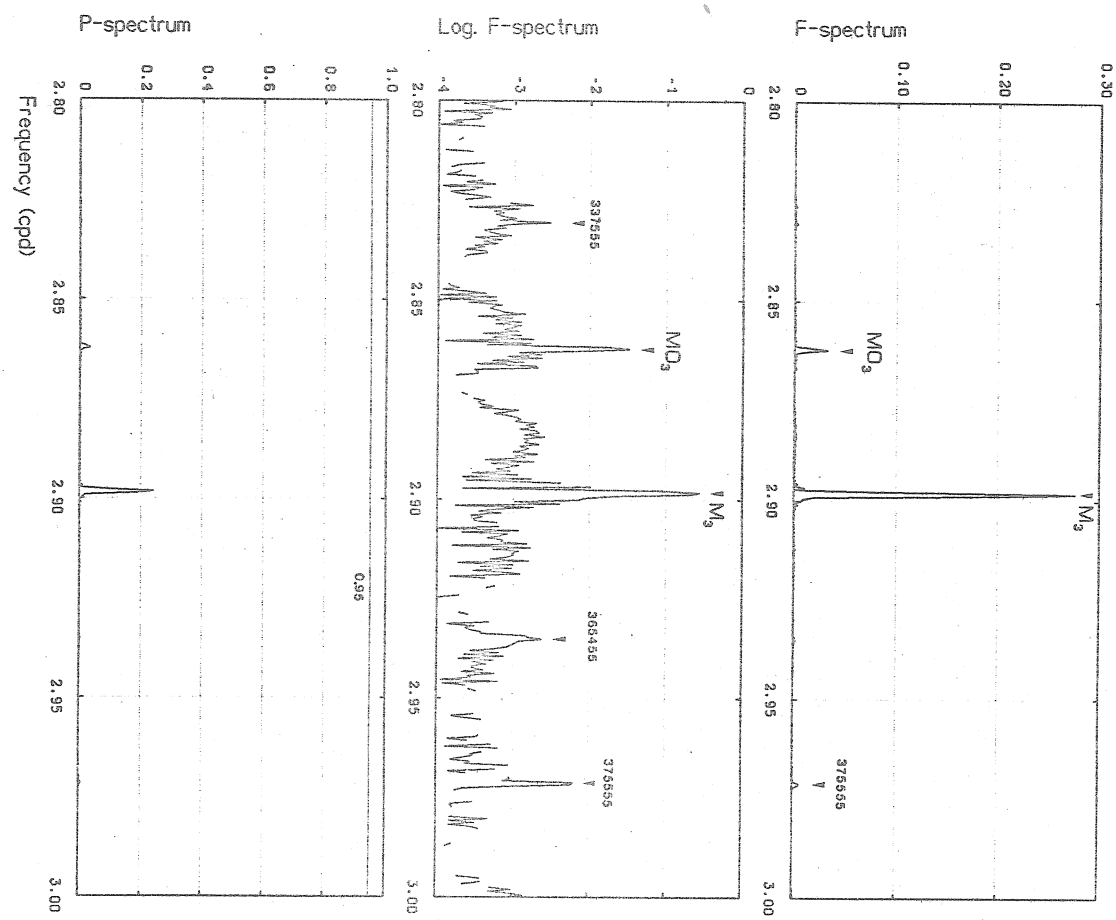


(a) rectangular window

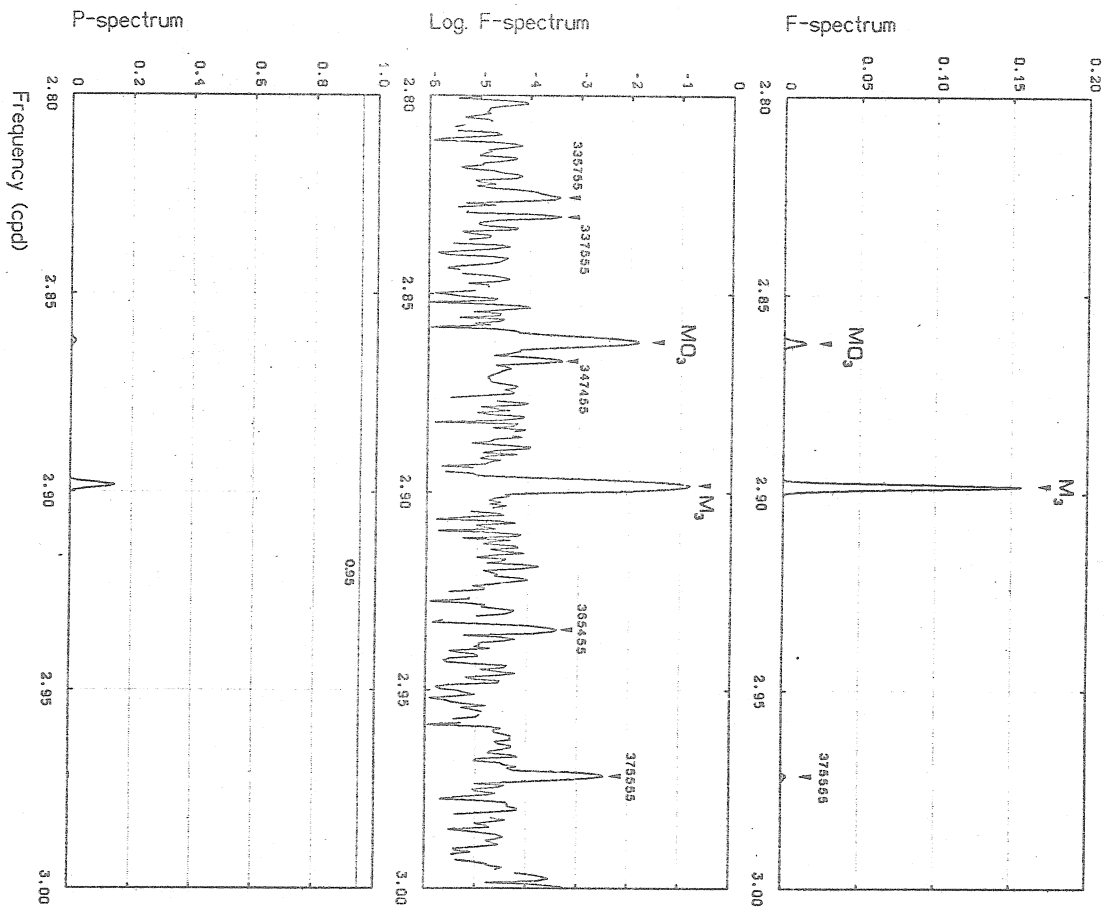


(b) hamming window

Fig. 5. Spectral analysis of the semi-diurnal tidal wave band.



(a) rectangular window



(b) hamming window

Fig. 6. Spectral analysis of the ter-diurnal tidal wave band.

Table 1. Harmonic analysis SUPER (Venedikov method)*

	rectangular window				hamming window			
Tidal wave	δ	$\Delta\delta$	κ	$\Delta\kappa$	δ	$\Delta\delta$	κ	$\Delta\kappa$
Q_1	1.1650	0.0029	-0.233°	0.143°	1.1633	0.0183	-0.177°	0.899°
O_1	1.1622	0.0006	-0.065	0.027	1.1605	0.0035	-0.094	0.173
NO_1	1.1668	0.0073	0.642	0.360	1.1629	0.0504	0.942	2.481
P_1	1.1635	0.0012	0.183	0.061	1.1621	0.0077	0.203	0.382
K_1	1.1499	0.0004	0.254	0.020	1.1491	0.0025	0.254	0.124
ψ_1	1.2723	0.0517	1.799	2.329	1.3099	0.3215	0.506	14.049
φ_1	1.1787	0.0286	2.556	1.390	1.1716	0.1774	3.169	8.670
θ_1	1.1573	0.0374	-1.243	1.850	1.1276	0.2383	-0.875	12.095
J_1	1.1614	0.0065	0.082	0.319	1.1592	0.0402	0.090	1.983
OO_1	1.1716	0.0117	-0.769	0.574	1.1802	0.0771	-1.133	3.737
μ_2	1.1903	0.0077	3.726	0.371	1.1840	0.0673	3.946	3.247
N_2	1.1750	0.0011	2.820	0.055	1.1727	0.0099	2.809	0.483
ν_2	1.1674	0.0064	3.281	0.311	1.1651	0.0555	3.324	2.720
M_2	1.1902	0.0002	2.595	0.011	1.1894	0.0020	2.591	0.096
L_2	1.1591	0.0119	3.850	0.587	1.1603	0.1112	4.051	5.471
T_2	1.2251	0.0082	1.643	0.383	1.2487	0.0714	2.000	3.268
S_2	1.2097	0.0005	1.264	0.023	1.2086	0.0041	1.257	0.200
K_2	1.2050	0.0017	1.390	0.079	1.2011	0.0146	1.375	0.696
MO_3	1.1124	0.0289	-0.087	1.479	1.1737	0.0414	-0.033	2.009
M_3	1.0599	0.0081	0.516	0.432	1.0636	0.0114	0.419	0.609
	σ_D=1.67, σ_{SD}=0.64, σ_{TD}=0.27				σ_D=6.86, σ_{SD}=3.67, σ_{TD}=0.25			

* No corrections for the atmospheric pressure and the indirect oceanic effects are applied.

References

Anderson T.W., An introduction to multivariate analysis, John Wiley and Sons, New York, 1958.

Anderson T.W., The statistical analysis of time series, John Wiley and Sons, New York, 1971.

Bard Y., Nonlinear parameter estimation, Academic Press, New York, 1974.

Båth M., Spectral analysis in geophysics, Elsevier, Amsterdam, 1974.

Blackman R.B. and Tukey J.W., The measurements of power spectra, Dover Publ., New York, 1959;

Burg J.P., Maximum entropy spectral analysis, Ph.D. thesis, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1975.

Chen W.Y. and Stegen G.R., Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, J. Geophys. Res., 79, 3019-3022, 1974.

Cooley J.W. and Tukey J.W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Math. Comput., 19, 297-301, 1965.

Courtillot V., Le Moüel J.L. and Mayaud P.N., Maximum entropy spectral analysis of the geomagnetic activity index aa over a 107-year interval, J. Geophys. Res., 82, 2641-2649, 1977.

Ducarme B., Tidal gravity parameters at Brussels reconfirmed by a superconducting gravity meter, Phys. Earth Planet. Int.,32,1-3, 1983.

Durbin J., Errors in variables, Rev. Inst. Internat. Statist. 22, 23-32, 1954.

Eadie W.T., Dryard D., James F.E., Roos M. and Sadoulet B., Statistical methods in experimental physics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1971.

Fougère P.F., Zawalick E.J. and Radoski H.R., Spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis, Phys. Earth Planet. Int., 12, 201-207, 1976.

Jenkins G.M. and Watts D.G., Spectral analysis and its applications, Holden-Day, San Francisco, 1968.

Johnston J., Econometric methods, Mc. Graw-Hill, New York, 1972.

Kurita T., Spectral analysis of seismic waves. Part 1. Data windows for the analysis of transient waves, Spec. Contrib. Geophys. Inst., Kyoto Univ., 9, 97-122, 1969.

Lacoss R.T., Data adaptive spectral analysis methods, Geophysics, 36, 661-675, 1971.

Lindley D.V., Regression lines and functional relationship, J. Roy. Stat. Soc., 9, 218-244, 1947.

Melchior P., The tides of the planet Earth, Pergamon Press, Oxford, 1978.

Reiersøl O., Identifiability of a linear relation between variables which are subject to error, Econometrics, 18, 375-389, 1950.

Scheffé H., The analysis of variance, John Wiley and Sons, New York, 1958.

Schüller K., Standard tidal analysis and its modification by frequency domain convolution, Proc. 8th Intern. Symp. Earth Tides, Bonn, 94-102, 1977.

Smylie D.E., Clarke G.K.C. and Ulrych T.J., Analysis of irregularities in the Earth's rotation, in Methods of Computational Physics, vol. 13, 391-430, Academic Press, New York, 1973.

Swingler D.N., Burg's maximum entropy algorithm versus the discrete Fourier transform as a frequency estimator for truncated real sinusoids, J. Geophys. Res., 85, 1435-1438, 1980.

Ulrych T.J. and Bishop T.N., Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Rev. Geophys. Space Phys., 13, 183-200, 1975.

Ulrych T.J. and Clayton R.W., Time series modelling and maximum entropy, Phys. Earth Planet. Int., 12, 188-200, 1976.

Van den Bos A., Alternative interpretations of maximum entropy spectral analysis, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-17, 493-497, 1971.

Vaníček P., Approximate spectral analysis by least-squares fit, Astroph. Space Sci., 4, 387-391, 1969.

Traduction

FILTRAGE NUMERIQUE AVEC LIMITES COMPLEMENTAIRES

G.N. Diassamidze, V.F. Pissarenko

Méthodes et algorithmes d'interprétation des données séismologiques
(Séismologie numérique)

Académie des Sciences d'URSS, Institut de Physique de la Terre Schmidt
Publ. 13, pp. 152-156, Moscou 1981

INTRODUCTION

Le filtrage numérique sur 3BM est largement appliqué lors de l'analyse des processus physiques {1}. Souvent les conditions du problème sont telles que le filtre numérique doit satisfaire à des limites spéciales. Par exemple, lors de l'étude des marées terrestres {2, 3} il faut que le filtre numérique élimine la dérive, représentant un polynôme de degré élevé ou même certaines harmoniques qui ne nous intéressent pas et en même temps qu'il ne change pas les autres harmoniques que nous étudions. Des exemples partiels de ce filtrage numérique avec ces limites sont examinés en {3, 4}. Dans le présent travail nous décrirons la méthode de calcul des coefficients des filtres numériques avec limites sur la base d'une approche générale avec utilisation du facteur de Lagrange.

1. POSITION DU PROBLEME.

Nous examinerons les processus temporels numériques entiers discrets. Le filtrage linéaire du processus x(t) a la forme :

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x(t-j), \qquad (1)$$

où y(t) est le processus de sortie; $\{h_j\}$ sont les coefficients du filtre. Introduisons la transformation (formellement) de Fourier des processus x(t), y(t) et de la succession $\{h_j\}$:

$$X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{i\omega t}, \quad Y(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_t(t)\, e^{i\omega t}, \quad H(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{i\omega j}. \qquad (2)$$

La fonction $H(\omega)$ s'appelle caractéristique de fréquence du filtre. Son module $|H(\omega)|$ indique de combien de fois le filtre augmente l'amplitude de l'harmonique de fréquence ω; l'argument $\arg H(\omega)$ donne le déphasage à la sortie du filtre en comparaison avec l'entrée (sur la même fréquence ω). D'après le théorème tiré de (1) nous avons :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \tag{3}$$

Nous étudierons les filtres représentés par l'ensemble final des coefficients h_{-m}, h_{-1}, h_0, h_1 ..., h_n. Nous examinerons le processus d'entrée x(t)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + \sum_{k=1}^{q} b_k \cos(\tilde{\omega}_k t + \psi_k) + \sum_{k=0}^{r} d_k t^k + n(t), \tag{4}$$

où ω_k, $\tilde{\omega}_k$ sont les fréquences connues; p, q, r sont également connus, a_k, b_k, d_k, ϕ_k, ψ_k sont certains coefficients inconnus; n(t) est le processus accidentel stationnaire de valeur moyenne nulle et avec une fonction de corrélation R(τ). La première somme en (4) représente les harmoniques qui nous intéressent, la deuxième les harmoniques mélangées et la troisième la dérive polynomiale.

Nous exigerons que le filtre laisse passer sans altérations chacun des harmoniques cos $(\omega_k t + \phi_k)$ et tous les harmoniques mélangés cos $(\tilde{\omega}_k t + \phi_k)$ et la dérive polynomiale $d_k t^k$ est anéantie.

Nous examinerons l'harmonique arbitraire de fréquence ω_o : a cos $(\omega_o t + \phi)$. En appliquant à celle-ci le filtre, nous obtenons par (1) :

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j a \cos(\omega_0 t + \varphi - \omega_0 j) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \sum_{j=-m}^{n} h_j \cos \omega_0 j + \\ + a \sin(\omega_0 t + \varphi) \sum_{j=-m}^{n} h_j \sin \omega_0 j. \tag{5}$$

Pour que cette fonction donne une harmonique non perturbée a cos $(\omega_o t + \phi)$ il faut que

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j \cos \omega_0 j = 1, \qquad \sum_{j=-m}^{n} h_j \sin \omega_0 j = 0. \tag{6}$$

S'il faut donc que le filtre annule cet harmonique, alors

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j \cos \omega_0 j = 0, \qquad \sum_{j=-m}^{n} h_j \sin \omega_0 j = 0. \tag{7}$$

On peut écrire les conditions (6), (7) respectivement par la caractéristique de fréquence H(ω) :

$$H(\omega_0) = 1, \qquad H(\omega_0) = 0. \tag{8}$$

Nous examinerons maintenant la fonction de degré dt^k de degré arbitraire k. A la sortie du filtre (1) nous obtiendrons par développement du binôme

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j d(t-j)^k = d \sum_{i=0}^{k} C_k^i t^{k-i} \sum_{j=-m}^{n} h_j j^i. \tag{9}$$

Pour que ce polynôme soit identiquement nul, il faut que :

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j j^i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{10}$$

Nous remarquerons que si, par contre, nous voulions conserver le polynôme invariable (par exemple, dans le but d'étudier la dérive), il faudrait exiger au lieu de (10) :

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j = 1, \quad \sum_{j=-m}^{n} h_j j^i = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{11}$$

Pour supprimer toute la dérive il faut que les conditions (10) soient réalisées pour i = 0, 1 ... r. Il est facile d'exprimer les produits de la caractéristique de fréquence H(ω) pour zéro. Cependant, nous obtenons par (2) :

$$H^{(k)}(0) = (\sqrt{-1})^k \sum_{j=-m}^{n} h_j j^k. \tag{12}$$

où $H^{(k)}$ représente la dérivée d'ordre k.
Ainsi, pour supprimer la dérive il faut que

$$H(0) = H'(0) = \ldots = H^{(r)}(0) = 0. \tag{13}$$

En réunissant toutes nos limites dans la caractérisation des fréquences, nous obtenons

$$H(\omega_k) = 1, k = 1, \ldots, p; H(\tilde{\omega}_k) = 0, k = 1, \ldots, q; H^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, r. \tag{14}$$

Chacune des limites de la forme (8) contient deux égalités de la forme (5) ou (7) puisque H(ω) est une fonction complexe. Les limites de la forme (13) contiennent une égalité matérielle. Ainsi, les limites (14) exigent (2p + 2q + r + 1) degrés de liberté. On peut en être satisfait si le nombre des coefficients de filtrage est supérieur ou égal au nombre de degrés de libertés, c'est-à-dire si

$$m + n + 1 \geqslant 2p + 2q + r + 1. \tag{15}$$

Si, en (15), il y a égalité alors les coefficients du filtre H(ω) se déterminent exactement. Si (15) est une inégalité forte alors on employera les degrés de liberté restants pour la minimisation de la perturbation n(τ) à la sortie du filtre.

En supposant que la perturbation soit un bruit blanc avec une variance σ_0^2, nous avons pour fonction de corrélation

$$R(\tau) = \sigma_0^2 \delta(\tau), \tag{16}$$

où $\delta(0) = 1$, $\delta(k) = 0$, $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ La perturbation à la sortie du filtre a la forme :

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j n(t-j). \tag{17}$$

En désignant par E le symbole de l'espérance mathématique, nous obtenons le carré moyen (dispersion) de cette valeur

$$E\left[\sum_{j=-m}^{n} h_j n(t-j)\right]^2 = \sum_{j,\,k=-m}^{n} h_j h_k E n(t-j)\, n(t-k) = \tag{18}$$

$$= \sigma_0^2 \sum_{k,\,j=-m}^{n} h_j h_k \delta(k-j) = \sigma_0^2 \sum_{j=-m}^{n} h_j^2.$$

Ainsi, pour la minimisation de la dispersion de la perturbation à la sortie du filtre il faut minimiser la somme

$$\sum_{j=-m}^{n} h_j^2. \tag{19}$$

Notre problème se formule ainsi : Avec les limites (14), il faut trouver le filtre minimisant (19).

Remarque. Si la perturbation n'est pas un bruit blanc et sa fonction de corrélation $R(\tau)$ est connue alors, au lieu de (19), il faut minimiser la somme

$$\sum_{j,\,k=-m}^{n} h_k h_j R(j-k). \tag{20}$$

Ceci n'apporterait pas de difficultés de principe dans la solution ultérieure du problème. Pour trouver $\{h_j\}$ il faudrait résoudre le système des équations linéaires avec la matrice $\{R(k-j)\}$.

2. SOLUTION DU PROBLEME

Nous résoudrons le problème par la méthode des multiplicateurs indéterminés de Lagrange. Introduisons les notations vectorielles. Soit h - vecteur colonne dont les composantes sont $h_{-m}, \ldots, h_{-1}, h_0, h_1, \ldots, h_n$. Ensuite nous désignerons par f la matrice de dimension $(n+m+1) \times (2p + 2q + r + 1)$:

$$f = \begin{Vmatrix} \cos\omega_1 m \ldots & -\sin\omega_1 m \ldots & \cos\tilde{\omega}_1 m \ldots & -\sin\tilde{\omega}_1 m \ldots & 1 \ldots & (-m)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\omega_1 n \ldots & \sin\omega_1 n \ldots & \cos\tilde{\omega}_1 n \ldots & \sin\tilde{\omega}_1 n \ldots & 1 \ldots & n^r \end{Vmatrix} \tag{21}$$

Soit λ - le vecteur colonne du multiplicateur de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2p+2q+r+1}$. Enfin nous désignerons par δ le vecteur colonne pour lequel les p premières composantes sont égales à l'unité et les autres à zéro. Il n'est pas difficile de vérifier que les limites (14) sur le vecteur h ont la forme

$$f^T h = \delta, \tag{22}$$

où "T" désigne la transposée de la matrice. On peut écrire la somme (19) sous la forme $h^T h$. Nous chercherons le minimum absolu de la forme quadratique suivante :

$$h^T h - \lambda^T f^T h - h^T f \lambda = (h - f\lambda)^T (h - f\lambda) - \lambda^T f^T f \lambda. \tag{23}$$

Le minimum de l'expression (23) est atteint évidemment pour

$$h = f\lambda \tag{24}$$

En substituant (24) dans (22) nous obtenons le système des équations analogue au système des équations normales dans la méthode des moindres carrés

$$f^T f \lambda = \delta \tag{25}$$

Nous désignerons la matrice $f^T f$ symétrique déterminée non négative carrée $(2p + 2q + r + 1) \times (2p + 2q + r + 1)$ par Φ. Si tous les ω_k, $\tilde{\omega}_k$ sont différents alors on peut montrer que Φ est déterminé positivement. De (25) nous obtenons

$$\lambda = \Phi^{-1}\delta. \tag{26}$$

En substituant (26) dans (24) nous trouverons le vecteur h qui résoud notre problème :

$$h = f\Phi^{-1}\delta = f\,(f^T f)^{-1}\delta. \tag{27}$$

A cause de l'importance de la formule (27) nous la réécrirons sous une forme développée. Nous numéroterons à l'aide d'une numération unifiée les indices entrant dans notre problème :

$$\cos \omega_k t = f_k(t), \quad \sin \omega_k t = f_{p+k}(t), \quad k = 1, \ldots, p; \tag{28}$$

$$\cos \tilde{\omega}_k t = f_{2p+k}(t), \quad \sin \tilde{\omega}_k t = f_{2p+q+k}(t), \quad k = 1, \ldots, q; \tag{29}$$

$$t^k = f_{2p+2q+k+1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, r. \tag{30}$$

Alors l'élément de la matrice $\Phi = f^T f$ à la $k^{\text{ième}}$ ligne, $i^{\text{ème}}$ colonne est égal à

$$\varphi_{ki} = \sum_{j=-m}^{n} f_k(j) f_i(j), \quad k, i = 1, \ldots, 2p + 2q + r + 1. \tag{31}$$

Nous désignerons l'ordre de la matrice Φ par $M = 2p + 2q + r + 1$. Nous écrirons le système des équations (25) pour λ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{M} \varphi_{ki}\lambda_i = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant p, \\ 0, & p+1 \leqslant k \leqslant M. \end{cases} \tag{32}$$

En résolvant ce système, nous trouverons $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$. En substituant ensuite cette solution dans (24) nous trouvons le développement cherché

$$h_j = \sum_{k=1}^{M} f_k(j)\lambda_k, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{33}$$

Nous trouverons maintenant l'expression pour le carré moyen à la sortie du filtre dans l'hypothèse que la perturbation est un bruit blanc avec une dispersion σ_0^2 :

$$\sigma_0^2 \sum_{j=-m}^{n} h_j^2 = \sigma_0^2 h^T h.$$

En y substituant (27) au lieu de h nous obtenons

$$\sigma_0^2 h^T h = \sigma_0^2 \delta^T (f^T f)^{-1} \delta. \tag{34}$$

Nous supposerons que la perturbation n'est pas un bruit blanc pur mais a une fonction de corrélation $R(\tau)$. Alors la dispersion de la perturbation à la sortie du filtre est déterminée par (20). L'expression (20) donne la possibilité d'évaluer la perturbation à la sortie du filtre quand l'hypothèse sur le bruit blanc n'est pas réalisée. En particulier, si la perturbation renferme une harmonique "non calculée" par les limites (14) du type $a \cos(\omega_o t + \phi)$, alors dans la fonction de corrélation $R(\tau)$, il y aura un terme $1/2\ a^2 \cos \omega_o t$.

Conformément à (20) à la sortie du filtre le carré moyen de cette harmonique sera égal à :

$$\sum_{j,\,k=-m}^{n} h_j h_k \frac{a^2}{2} \cos[\omega_0 (j-k)] = \frac{a^2}{2} \left\{ \left| \sum_{j=-m}^{n} h_j \cos \omega_0 j \right|^2 + \right. \tag{35}$$

$$\left. + \left| \sum_{j=-m}^{n} h_j \sin \omega_0 j \right|^2 \right\} = \frac{a^2}{2} |H(\omega_0)|^2.$$

Ainsi, l'amplitude de cette harmonique à la sortie du filtre est égale à $a\,|H(\omega_o)|$.

3. REMARQUES PRATIQUES CONCERNANT L'ANALYSE DES MAREES TERRESTRES.

Pour la réalisation pratique de la méthode décrite, il faut que la matrice Φ du système des équations normales soit bien déterminée et loin d'être dégénérée. Pour cela, il faut que les fréquences $\omega_1, \ldots, \omega_p$ des harmoniques qui nous intéressent soient très voisines des fréquences $\tilde{\omega}_1, \ldots \tilde{\omega}_q$ des harmoniques mélangées. En outre, du point de vue du calcul il est souhaitable que l'ordre $(2p + 2q + r + 1)$ de la matrice Φ ne soit pas trop grand. C'est pourquoi, parfois, on donne la préférence à un "représentant" des groupes entiers des harmoniques qui nous intéressent et également des groupes des harmoniques mélangés. Ainsi, par exemple, si, à un moment donné, les ondes de marées diurnes nous intéressent, les ondes semi-diurnes et ter-diurnes y sont mélangées, alors pour ω_1 on prend la fréquence d'une des ondes diurnes et pour $\tilde{\omega}_1, \ldots \tilde{\omega}_q$ quelques ondes parmi les plus grandes des semi-diurnes et des ter-diurnes. En vertu de la caractéristique de continuité de la fréquence $H(\omega)$,

les ondes de fréquences voisines de ω_1 seront amplifiées avec un coefficient d'amplification voisin de l'unité. Les ondes avec des fréquences voisines de $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_q$ seront fortement atténuées. On peut calculer $H(\omega)$ avec le même pas en fréquence et déterminer les coefficients d'amplification et le déphasage sur n'importe quelle fréquence qui nous intéresse. Pour étudier les ondes semi-diurnes en y comprenant les diurnes et les ter-diurnes il faut évidemment calculer le filtre $H(\omega)$ à nouveau.

Parfois il convient d'examiner les filtres symétriques avec $h_j = k_{-j}$, m=n. Ces filtres ne changent pas la phase de n'importe quelle harmonique. Ainsi se réalise automatiquement la seconde condition venant de (6)

$$\sum_{j=-m}^{m} h_j \sin \omega_0 j = 0 \qquad (36)$$

pour n'importe quelle harmonique. L'ordre de la matrice Φ diminue ainsi jusque $(p + q + r + 1)$. Les questions de stabilité de calcul de la méthode décrite requièrent dans la suite une étude attentive.

BIBLIOGRAPHIE

1. Introduction au filtrage numérique R. Bognera, K. Konstantinidissa, M. 1 Mir, 1976.

2. MELCHIOR P., Marées terrestres. M. Mir, 1968.

3. VENEDIKOV A.P., Analyse des enregistrements de marées terrestres. Bull. N° 1. Groupe de travail III de la Commission KAPG - Budapest. 1978, pp. 1 à 47.

4. MOLTEKAN G.M., RAMOUCHNII V.V., Méthodes de filtrage du signal à longue période sur de courts intervalles de temps. Dans le livre : Analyse en machine des données séismiques numériques. M. Naouka 1974, pp. 130 à 159 (Calcul de Séismol.; Publ. 7).

Traduction

DETERMINATION DU PARAMETRE DE MAREE TERRESTRE ℓ D'APRES LES DONNEES EXTENSOMETRIQUES

L.A. Latinina

Physique de la Terre, Izv. Ac. des Sc. URSS, n° 8, pp. 60-66, 1984

Les déplacements horizontaux provoqués par les marées sont proportionnels au nombre de Shida-Lambert ℓ. L'étude théorique a donné la valeur suivante des nombres h et ℓ pour l'onde O_1 : pour les modèles de M.S. Molodenskii I et II h = 0,617 - 0,614, ℓ = 0,0905 - 0,0809 {1} pour les modèles de Gilbert-Dziewonski-Anderson et autres, calculés par Wahr {2} h = 0,602 - 0,603, ℓ = 0,0839 - 0,0846.

Ce nombre se détermine expérimentalement avec une précision insuffisante pour l'étude de la structure interne de la Terre. Il existe trois méthodes de mesure :

a) l'écart de la verticale par rapport à l'axe de rotation de la Terre, méthode astronomique
b) les déformations linéaires des couches de la Terre, méthode extensométrique
c) les déformations de volume dans la Terre, d'après la variation du niveau de l'eau dans les cavités souterraines.

Les résultats obtenus d'après les déformations de volume ont un caractère qualitatif. Les écarts mesurés par rapport à l'axe de la Terre sont proportionnels au facteur Λ :

$$\Lambda = 1 + k - \ell \qquad (1)$$

Le résumé des données de 14 observatoires astronomiques avec des séries d'observations atteignant jusqu'à 54 ans a donné le résultat {3} : Λ = 1,13 et l'erreur quadratique de Λ n'est pas inférieure à ± 0,10. En substituant en (1) la valeur de k 0,31 nous obtiendrions pour ℓ l'estimation 0.18 ± 0.10.

L'erreur sur la détermination de k est sensiblement moindre que l'erreur de Λ et on n'en tient pas compte ici. Les dernières données de l'observatoire astronomique de Paris {4} ont donné le résultat suivant :

$$\Lambda = 1,05 \pm 0,15 \quad \text{et} \quad \ell = 0,24 \pm 0,15$$

Ainsi, la précision de la méthode astronomique est basse bien que ses résultats ne dépendent pas des déformations locales et pourraient, avec

une diminution des erreurs de mesure et des effets océaniques, donner des caractéristiques représentatives pour la Terre.

Notre travail se rapporte aux résultats d'analyse des déformations de marées linéaires mesurées par les extensomètres. La difficulté réside dans le fait que les déformations enregistrées sont soumises à une forte action du relief, de la structure géologique, de la cavité. Les amplitudes observées des ondes de marées diffèrent de dix à cent pourcent des amplitudes théoriques (5). Pour cette raison les chercheurs considèrent que l'utilisation des données extensométriques offre peu de perspectives (6). Nous ne partageons pas cette opinion. La précision de la détermination des caractéristiques de la marée s'élève d'un ordre si l'on fait un calcul assez complet des effets indirects de la marée. La précision des cartes cotidales, l'augmentation des possibilités de technique de calcul garantissent un progrès ultérieur dans cette direction. Il est important également que les observations extensométriques se fassent en de nombreux points. On peut s'attendre à ce que la moyenne des résultats obtenus permette d'éliminer d'une façon décisive les effets indirects et d'obtenir les valeurs des paramètres h et ℓ représentatives pour la Terre.

Procédés de détermination des nombres h et ℓ d'après le déformations de marées linéaires

Les expressions des composantes horizontales de la déformation de marée pour les ondes M_2 et O_1 pour les directions NS ($e_{\theta\theta}$), EW (e_{ϕ}) et d'azimut α ($e_{\alpha\alpha}$) sont les suivantes :

$$e_{\theta\theta}=A[h\sin^2\theta+2l\cos 2\theta]\cos 2H \tag{2}$$

M_2 $$e_{\varphi\varphi}=A[h\sin^2\theta-2l(1+\sin^2\theta)]\cos 2H \tag{3}$$

$$e_{\alpha\alpha}=A[h\sin^2\theta+2l(m^2\cos^2\theta-n^2-\sin^2\theta)]\cos 2H+ \tag{4}$$

$$+A[4lmn\cos\theta]\sin 2H;\quad A=38{,}222\cdot 10^{-9}, \tag{5}$$

O_1 $$e_{\theta\theta}=B[h-4l]\sin 2\theta\cos H \tag{6}$$

$$e_{\varphi\varphi}=B[h-2l]\sin 2\theta\cos H \tag{7}$$

θ est la colatitude, H est l'angle horaire de la Lune, a est le rayon moyen de la Terre, m = cos α, n = sin α. Les nombres de h et ℓ peuvent être déterminés par différentes paires d'équations (2) - (7) P. Melchior et B. Ducarme ont proposé un procédé de détermination de ces nombres pour une seule composante de la déformation et pour l'une seule des ondes M_2 ou O_1 si l'azimut de mesure ne correspond pas avec l'une des directions principales (NS, EW). Cette composante (4) ou (7) représente la somme des deux ondes, en phase avec le potentiel de la force génératrice de marée et en quadrature de phase.

En séparant d'après les données d'observation ces deux ondes et en rapportant leurs amplitudes aux valeurs théoriques provenant de (4) ou par (7) nous obtenons deux équations pour la détermination des nombres h et ℓ {7}.

Les nombres h et ℓ peuvent être déterminés également pour une seule composante de la déformation provenant des combinaisons des ondes M_2 et O_1 {(2) et (5) ou (3) et (6)}. Enfin on peut combiner les données de deux appareils orientés différemment et utiliser les équations (2) et (3) ou (5) et (6) etc ...

Lequel de ces procédés est le plus précis ?
P. Melchior considère que pour la combination des ondes M_2 et O_1 apparaissent des erreurs supplémentaires à cause de la différence de résonance des nombres h et ℓ dans l'onde O_1 {7}. Cependant l'onde O_1 est éloignée de la résonance et pour elle la variation de résonance des nombres h et ℓ ne dépasse pas 1 %. A cette étape de recherches on peut négliger cette erreur. Les grandes erreurs sont liées à l'influence de l'océan, des hétérogénéités topographiques et géologiques. Elles ne se relèvent par aucun des procédés énumérés. Plus loin nous effectuerons les calculs par tous les procédés et nous comparerons leurs résultats.

Les valeurs hℓ et h/ℓ d'après les données des observations extensométriques.

Nous donnons dans la table 1 les données des 27 observatoires pour lesquels nous avons des publications suffisamment détaillées. Les amplitudes observées et les phases des ondes M_2 et O_1 sont corrigées des effets indirects si ces derniers sont calculés pour un point donné. On a calculé d'après les amplitudes observées les nombres h et ℓ et h/ℓ (table 1,2). Le premier procédé - d'après une seule composante de la déformation et pour l'onde M_2, le deuxième procédé - pour une seule composante de la déformation et selon l'onde O_1, le troisième procédé - pour une composante de la déformation et d'après les combinaisons des ondes M_2 et O_1 - le quatrième procédé - pour l'onde M_2 pour les deux composantes de la déformation et le cinquième pour l'onde O_1 pour deux composantes de la déformation.

TABLE 1

Relation des nombres h à ℓ d'après les données d'extensomètres

Stations			Azimut de l'appareil en degrès	$\frac{h}{\ell}$
Amagaze	Japon	{9}	107,5	9,05
Idem			17,5	7,81
Osakayama	Japon	{10}	128,0	6,44
"			38,0	5,90
			173,0	7,52
Kamitakara	Japon	{11}	45,0	5,70
"			0,0	4,77*
			135,0	7,19
Elliot	USA	{6}	45,0	7,09
Pinon Flat	USA	{6}	0,0	7,21
Idem			90,0	7,64
"			135,0	6,45
Mine	USA	{6}	23,0	7,64
Id.			74,0	8,33
"			137,0	7,21
Round Mountain	USA	{6}	35,5	6,74
Id.			108,0	6,88
"			167,5	6,72
Poorman Mine	USA	{12}	173,0	6,06
Flat River		{6}	0,0	7,60
Id.			90,0	8,06
"			135,0	6,91
Ogdenburg	USA	{6}	29,5	7,03
Id.			48,5	7,50
"			132,0	6,81
Queensburg	Angleterre	{13}	45,0	5,60*
Id.			135,0	5,80
Schiltach	RFA	{14}	2,00	5,10
Id.			61,0	7,13
"			120,0	7,53
Cooney	Australie	{15}	67,0	8,70
Id.			163,5	10,20
"			53,0	8,70
Walferdange	Luxembourg	{16}	38,0	6,25
Id.			7,5	6,98
Tiefenort	DDR	{17}	0,0	5,70
Id.			90,0	6,97
Inkerman, Crimée	URSS	{18}	6,0	6,90
Tbilissi	Géorgie	{19}	150,0	7,25
Id.			60,0	5,20
Ingouri	Géorgie	{20}	172,0	5,30
Talgar	Kazakstan	{21}	3,0	8,69
Tourgen	"	{22}	38,0	8,10
Id.			147,0	7,00
Garm	Tadjikistan	{23}	2,5	9,80
Id.			98,5	6,50
Tchausal	Tadjikistan	{24}	17,5	8,70
Id.			111,0	5,17
Sari-Pour-Tadjikistan		{25}	177,0	13,10
Tchildora	Tadjikistan	{26}	82,0	6,80
Id.			171,0	7,60
Kondara	Tadjikistan	{27}	105,0	10,00
Id.			15,0	7,70
Protvino	URSS	{28}	0,0	7,63
Id.			90,0	8,87
Obninsk	URSS	{29}	0,0	5,73*

Table 2

Moyennes des valeurs observées h, ℓ, h/ℓ

Procédé de calcul	h	l	h/l	ℓ pour h = 0,611
1	0,615±0,035	0,096±0,004	6,88±0,31	0,089±0,004
2	0,658±0,045	0,090±0,007	7,64±0,37	0,080±0,004
3	0,595±0,045	0,080±0,005	7,54±0,29	0,081±0,003
Среднее			7,40±0,20	0,0826±0,0022
4	0,598±0,035	0,086±0,012	9,90±1,44	0,062±0,009
5	0,672±0,074	0,102±0,022	5,59±0,56	0,109±0,011

Les deux premiers procédés ne fonctionnent pas pour une orientation des appareils NS et EW (α = 0 ou 90°) le troisième procédé ne fonctionne pas pour α = 45°. Les deux premiers procédés ont été utilisés dans les cas d'installation des appareils dans des directions faisant un angle plus grand que 10° avec les directions principales. Le troisième procédé a été utilisé pour les appareils installés dans un azimut différent de 45° de pas moins de 10°.

Nous donnons dans la table 1 les valeurs moyennes de h/ℓ à partir des valeurs obtenues par les trois premiers procédés (ou leur partie). Le signe * indique les valeurs qui sont obtenues d'après les valeurs observées de ℓ et avec la valeur donnée de h. Elles ne sont pasprises en compte lors du calcul des valeurs moyennes de la table 2. Avec les valeurs appliquées ici des nombres k = 0,611 et ℓ = 0,083 leur rapport de h/ℓ est égal à 7,36.

Les écarts des valeurs observées par rapport à la valeur théorique sont grands et le désaccord de ces valeurs d'un point à l'autre point et en fonction de l'azimut est également important. Les valeurs moyennes des valeurs observées h/ℓ des nombres k et ℓ sont données dans la table 2. Dans le calcul des moyennes, les valeurs maximale et minimale sont rejetées.

Les procédés 1, 2 et 3 étaient de précision variée. Les erreurs quadratiques moyennes des nombres h et ℓ de 6 à 8 %, et les valeurs h/ℓ, de 4 à 5 %. Pour la valeur moyennée h/ℓ l'erreur est de moins de 3 %. Les procédés 4 et 5 donnent des erreurs plus grandes allant jusque 15 %. On a obtenu par les trois premiers procédés les valeurs h, ℓ et h/ℓ différant à peu près de 10 % en fonction des valeurs théoriques. Les différences lors du calcul par le procédé 4 et 5 atteignent 30 %. Il s'agit apparemment de ce que l'influence des hétérogénéités est sensiblement différente dans les différentes directions. En outre, la précision des procédés 4 et 5 est faible à de hautes et basses

latitudes et pour une orientation ne fût-ce que d'un des appareils dans une direction voisine de la direction principale. Dans la suite nous ne nous servirons pas des résultats de ces deux procédés.

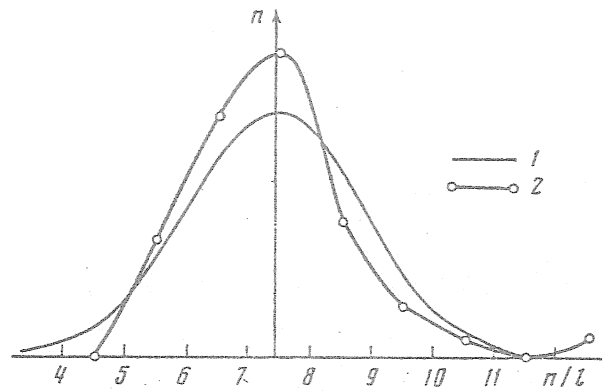
La moyenne de la valeur h/ℓ se détermine avec le plus de précision d'après les données de la table 2. Sa valeur de 7,40 est voisine de la valeur théorique : 7,36. Nous nous servirons du fait que le nombre h est déterminé avec assez de précision par les observations gravimétriques et est pris maintenant comme égal à 0,611 et nous calculons le nombre ℓ d'après les valeurs observées h/ℓ et le nombre h donné. Les valeurs correspondantes de ℓ sont données dans la table 2. Pour la valeur $(h/\ell)_{moy.}$, moyenne d'après toutes les données des observations et selon tous les procédés de calcul, la valeur correspondante ℓ est égale à 0,0826 ± 0,0022. Elle est voisine de la valeur théorique pour les modèles actuels de la Terre.

Estimation de l'intervalle crédible pour ℓ.

La valeur de ℓ, moyennée d'après toutes les données des observations concorde pratiquement avec la valeur théorique. Il est important d'éclaircir combien est significative cette concordance.

La valeur moyenne est déterminée pour une Terre solide (sans océan) sphériquement symétrique. Les écarts des valeurs observées à la moyenne sont provoqués par un grand nombre de facteurs indépendants : la charge de l'océan, les particularités régionales et locales de structure, le relief, la cavité. On peut considérer les valeurs h/ℓ obtenues par le réseau mondial de stations comme indépendantes puisque les effets océaniques sont différents dans les différentes régions et que les effets d'hétérogénéité sont différents sur de petites distances. Les valeurs obtenues pour différents azimuts en un même point sont indépendantes puisque les effets indirects ne sont pas les mêmes dans différentes azimuts.

Deux des trois valeurs obtenues par les trois premiers procédés de calcul sont également tout à fait indépendantes puisque les champs des tensions dans les ondes M_2 et O_1 sont différemment perturbés par les effets indirects. Les valeurs accidentelles de ce genre, représentées par la somme du nombre de valeurs accidentelles indépendantes, sont soumises à une répartition voisine de la normale (8).



Courbe de la répartition des valeurs observées h/ℓ (2) et courbe de la répartition normale (1).

Nous vérifierons l'hypothèse sur la répartition normale des valeurs h/ℓ : la figure 2 montre la courbe de répartition de ces valeurs et la courbe de répartition normale, avec la valeur observée correspondante et la dispersion. L'accord est satisfaisant. L'hypothèse d'une répartition normale est vérifiée à l'aide du critère de concordance χ^2 pour lequel on considère la statistique :

$$X^2 = \sum (f_i - F_i)^2 / F_i;$$

f_i est ici le nombre de valeurs observées h/ℓ se trouvant dans la ième série F_i est le nombre attendu pour une densité normale de la répartition. L'hypothèse sur la répartition normale de la valeur accidentelle h/ℓ est prise au niveau de la valeur $\alpha = 0{,}05$.

L'estimation de la valeur moyenne propre de la valeur accidentelle d'après une moyenne choisie $(h/l)_{moy}$. vis à vis de 100 (1-α) % de confiance a la forme

$$(h/l)_{cp} - t_{N-1,\,\alpha/2} s/\sqrt{N} \leqslant (h/l)_0 < (h/l)_{cp} + t_{N-1,\,\alpha/2} s/\sqrt{N};$$

où t est le coefficient de répartition de student, s est la dispersion. Pour une donnée d'un intervalle de confiance de 90 % ($\alpha/2 = 0{,}05$) et du choix du volume N = 53 nous obtenons l'estimation

$$7{,}40 - 0{,}33 \leqslant (h/l)_0 < 7{,}40 + 0{,}33.$$

La moyenne réelle de la valeur accidentelle $(h/\ell)_0$ doit être la caractéristique globale de la Terre. Sa précision de détermination est d'autant plus élevée que la dispersion des valeurs observées est moindre et que plus grand est le volume du choix. L'abaissement de la dispersion est atteint par l'augmen-

tation de la précision des mesures et par l'élimination des effets indirects, l'augmentation du volume du choix par l'introduction de nouvelles données expérimentales.

Conclusion

Les déformation linéaires de marée de la Terre subissent une forte influence des hétérogénéités de l'écorce terrestre c'est pourquoi les paramètres de marées terrestres calculés d'après les données d'une seule station extensométrique ne sont pas représentatives pour la Terre dans son entièreté mais grâce au fait que les effets indirects sont différents en différents points et azimuts de mesure, l'hypothèse sur la répartition normale des valeurs observées ℓ est statistiquement valable. Cela veut dire que la valeur moyenne de ℓ_o obtenue pour un grand nombre de points d'observations, affranchie des effets indirects est une caractéristique globale de la Terre. Les estimations faites d'après les données de 53 mesures indépendantes ont donné pour h/ℓ la valeur $7,40 \pm 0,20$. Pour une valeur donnée 0,611 du nombre de Love h, le nombre de Shida-Lambert était égal à $\ell = 0,0826 + 0,0022$. Cette valeur observée ℓ correspond pratiquement avec la valeur théorique calculée pour les modèles actuels de la Terre ($\ell = 0,083 - 0,084$).

L'opinion pessimiste de certains chercheurs sur le peu de perspectives dans la détermination du nombre global ℓ d'après les données extensométriques semble donc non fondée. Au stade actuel des recherches, la précision de la détermination du nombre ℓ d'après les données extensométriques est de plus d'un ordre plus élevée que la précision des déterminations astronomiques.
Il n'y a que le calcul des effets indirects dans tous les observatoires qui permettra de diminuer de 2 à 3 fois la dispersion des valeurs observées. La possibilité d'augmentation de la précision de ℓ est l'augmentation du nombre de sites d'observations et la réalisation des observations dans plusieurs azimuts. La diminution, dans un avenir très proche, tout à fait réelle, de l'erreur de détermination de 2 à 3 fois permet d'utiliser cette caractéristique de la Terre pour des recherches globales.

BIBLIOGRAPHIE

1. Molodenskii M.S., Théorie de la nutation et des marées terrestres diurnes. Dans le livre Marées Terrestres et nutation. M. Edit. Ac. des Sc. D'URSS. 1961. pp. 3 à 25.

2. Wahr J.M., Body tides on an elliptical rotating elastic and oceanless earth. Geophys. J., 1981, v. 64, n° 3, pp. 677 à 703.

3. Melchior P., Marées terrestres. M. Mir. 1968, p. 482.

4. Capitaine N., Chollet F., Débarbat S., A new determination of the tidal coefficient Λ from latitude observations with the Paris astrolable. 4th International Symposium Geodesy and Physics of the Earth, Karl-Marx-Stadt, 1980. Proceedings, part 1, Potsdam, 1981, pp. 53 à 54.

5. Latinina L.A., Karmaleyeva R.M., Mesures déformographiques. M. Naouka 1978. p. 154.

6. Berger J., Beaumont C., An analysis of tidal strain observations from the United States of America. II. The inhomogeneous tide. - Bull. Seismol. Soc. Amer., 1976, v. 66, n° 6, pp. 1821 à 1846.

7. Melchior P., Ducarme B., The ratio ℓ/h : a simple method for the prospection of tidal deformations of cavities in the Earth's crust. - Bull. Geod., 1976, v. 50, pp. 137 à 138.

8. Bendar D., Pirsol A., Mesure et analyse des processus accidentels. M. Mir 1974, p. 463.

9. Takemoto S., Effects of local inhomogeneities on total strain measurements. Bull. Disast. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ. 1981, v. 31, pt 4, n° 284, pp. 211 à 237.

10. Hashida M., Shicetomi K, Topographic effects of the Earth tidal strain at Osakayama. - J. Geod. Soc. Japan, 1981, v. 27, pt. 1, pp. 11 à 22.

11. Nakagawa I., Dot H., Oike K., Shida's number obrained by extensometric observations in Kamitakara, Japan. Symp. Marees Terr. Strasbourg, 1969, Observatoire Roy. Belgique 1970, pp. 150 à 153.

12. Levine J., Harrison J.C., Earth tide strain measurements in Poorman Mine, near Boulder, Colorado. - J. Geoph. Res., 1975, v. 81, pp. 2543 à 2555.

13. Bilham R.G., King G.C.P., McKenzie D.P., Inhomogeneous tidal strains in Queenbury tunnel, Yorkshire. - Geophys. J. Astron. Soc., 1974, v. 37, pp. 217 à 226.

14. Beavan J., Bilham R., Emter D., King G., Observations of strain enhancement across a fissure. - Deutsche Geod. Komm. Akad. Wiss. Reihe. B., München, 1979, n° 231, pp. 47 à 58.

15. Tanaka T., Sydenham P.H., The Earth tides at Cooney Geophysical observatory in Armidale, Eastern Australia. - Proceedings of the 8th International symposium on Earth tides. Bonn, 1977, Inst. Theoret. Geodäsie der Universität Bonn, pp. 510 à 529.

16. Ducarme B., Flick J., Melchior P., van Ruymbeke M., Tidal deformations measured with gravimeters, clinometers extensometers at the underground laboratory at Walferdange. - Proc. 8th International symposium on Earth tides, Bonn, 1977, Inst. Theor. Geodasie der Universität Bonn, p. 661 à 677.

17. Latynina L.A., Karmaleeva R.M., Harwardt H., Simon D., Uber die Ergebnisse von strainmetervergleichsregistrierungen in Tiefenort. Proceeding 4th symp. Geodesy and Physics of the Earth, GDR, Karl-Marx-Stadt, 1980, pt III, pp. 676 à 692.

18. Boulatsen V.G., Déformations de marées et lentes de l'écorce terrestre d'après les données des observations extensométriques à Inkerman (Crimée). Publ. Rotation et déformations de marées de la Terre, Kiev Naoukava Doumka, 1975, pp. 9 à 15.

19. Kartvelichvili K.Z., Etude des marées terrestres d'après les observations à Tbilissi, 1978, p. 168.

20. Balavadze B.K., Abashidze V.G., Jarinov N.A. et autres. Analyse des déformations de marées de l'écorce terrestre d'après les observations déformographiques à la station d'Ingourie. Ac. des Sc. de Géorgie. 1980. T. 98, n° 3, pp. 573 à 576.

21. Latinina L.A., Karmaleyeva R.M., Sur le lien des paramètres des déformations de marées terrestres avec la séismicité dans la région de Alma-Ata. Dans le livre : Mouvements actuels de l'écorce terrestre dans les polygônes géodynamiques. M. Radio et liaison, 1981, pp. 16 à 20.

22. Latinina L.A., Tikhomirov A.V., Sur les variations des déformations de marées avant les tremblements de terre. Dans le livre : Déformations lentes de la Terre et sa rotation. M. Radio et liaison, 1984.

23. Latinina L.A., Karmaleyeva R.M., Déformations de marées dans l'Observatoire de Harm Tadjikistan. Izv. Ac. des Sc. URSS. Physique de la Terre, 1981, n° 12, pp. 84 à 87.

24. Latinina L.A., Sur les déformations de marées dans la station Tchoussal Tadjikistan. Dans le livre : Etude des marées terrestres M. Naouka, 1980, pp. 207 à 214.

25. Latinina L.A., Chychkina T.P., Sur l'intensité des mouvements de marées et tectoniques dans la zone de la fracture Sourkovskii. Izv. Ac. des Sc. URSS. Physique de la Terre, 1978, n° 6, pp. 67 à 92.

26. Jarinov N.A., Sur les déformations de la surface de la Terre à la station de Tchilodara. Dans le livre : mouvements actuels de l'écorce terrestre. Novossibirsk : Inst. Géol. et Géoph. Ac. des Sc. d'URSS 1976, pp. 142 à 153.

27. Latinina N.A., Rissaeva S.D., Sur les variations des déformations de marées avant les tremblements de Terre. Izv. Ac. des Sc. URSS. Physique de la Terre. 1975, pp. 84 à 87.

28. Karmaleyeva R.M., Latinina N.A., Egorova G.A., Résultats des observations des déformations de marées de la surface terrestre à la station de Protvino (plate-forme Russe). Dans le livre : Etude des marées terrestres M : Naouka, 1980. pp. 200 à 206.

29. Tchernokaï J.P., Danilov V.Y., Kartvelichvili K.Z., Kokhreidze A.K., Mirianachvili V.Y., Déformographe pour l'enregistrement des variations de marées et séismiques. Comm. Ac. des Sc. de Géorgie, 1978, T. 89, n° 2, pp. 353 à 356.

TRANSFORMATION OF NINE LACOSTE ROMBERG GRAVIMETERS IN FEEDBACK SYSTEMS

by

M. Van Ruymbeke

Observatoire Royal de Belgique
Avenue Circulaire 3
1180 Bruxelles

INTRODUCTION

Since 1973 the Royal Observatory of Belgium has installed more than 80 stations over the world for the measurement of the tidal gravity variations.

For this purpose, two types of gravimeters were used, Geodynamics and LaCoste Romberg (LCR). We are concerned here only with the LCR.

The precision achieved with such instruments operated during 6 months at each place allows to compare observed and calculated oceanic interactions to a precision of 0.3 to 0.5 microgal (Melchior & al. 1981).

The key for this confidence in the results is a perfect maintenance, an exact timer, a quick exchange of records and informations and a carefull treatment of the data's.

The control of the instrumental characteristics is obtained from the calibrations defined in the Bruxelles fundamental station (Ducarme, 1975) and is insured by identical conditions of installation of the gravimeters (levelling) at each station.

For the sensitivity determination of the LCR instruments, we displace the beam by alternate rotations of the micrometer at intervals of twenty minutes. This time interval is necessary to minimize the lag effect of the springs.

Such an interval calibration procedure is very sensitive to accidental tilts of the instrument and some perturbations sometimes do occur.

Moreover the instrumental phase lags in the diurnal and semidiurnal bands are considerably affected by the levelling of the gravimeter.

We follow here the theory of astaticized gravimeters as given in Melchior (1978, 1983).

The main constrain is to keep constant the value of the angle α that the gravimeter frame makes with the vertical OZ.

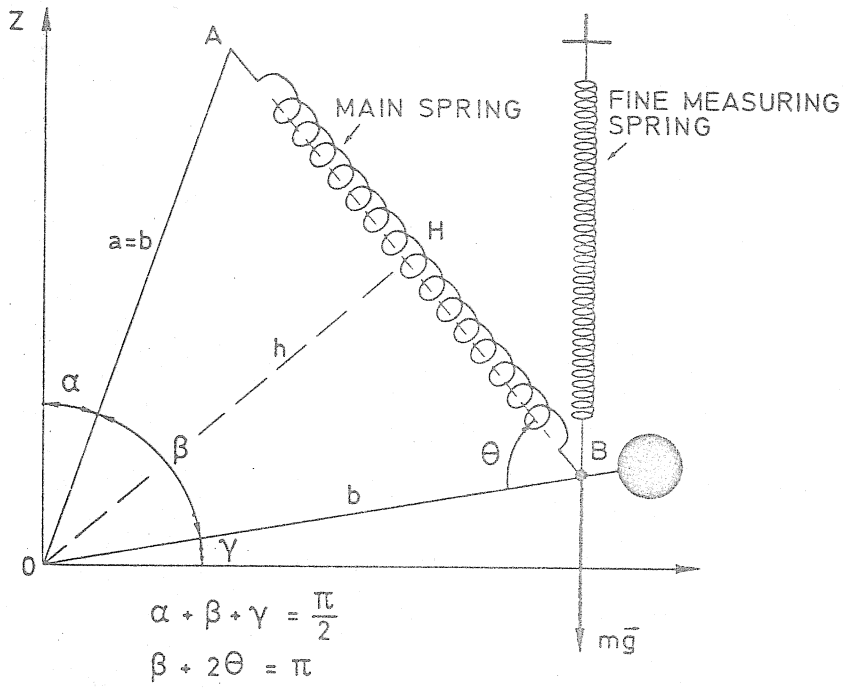


Figure 1.

Then the sensitivity is constant and the standard conditions defined for the rheological model of the LCR instruments in Bruxelles are achieved.

To fix α is equivalent to fix γ if we assume that β is constant and that the position of the beam inside the capacitive transducer has no mechanical and electronical drift.

To achieve transverse and longitudinal levellings, we determine the peak of the parabolas (Melchior, fig. 9.4, page 271, 2nd edition 1983) thus adjusting the gravimeter at these positions which correspond to a γ minimum.

We pointed out (Van Ruymbeke , 1980) the effect of diurnal temperature variations on the bubble length and on the drift of its center position for a LCR on the field.

Figure 2 shows the variations of the sensitivity as a function of longitudinal tilt while Figure 3 represents the parabolas for the longitudinal level as a function of the chosen reading line. It is seen that, in this direction the variation of the sensitivity with tilts produces an asymmetrical response of the instrument.

When the conditions of the station are severe the accuracy is limited by the instrumental parameters shift.

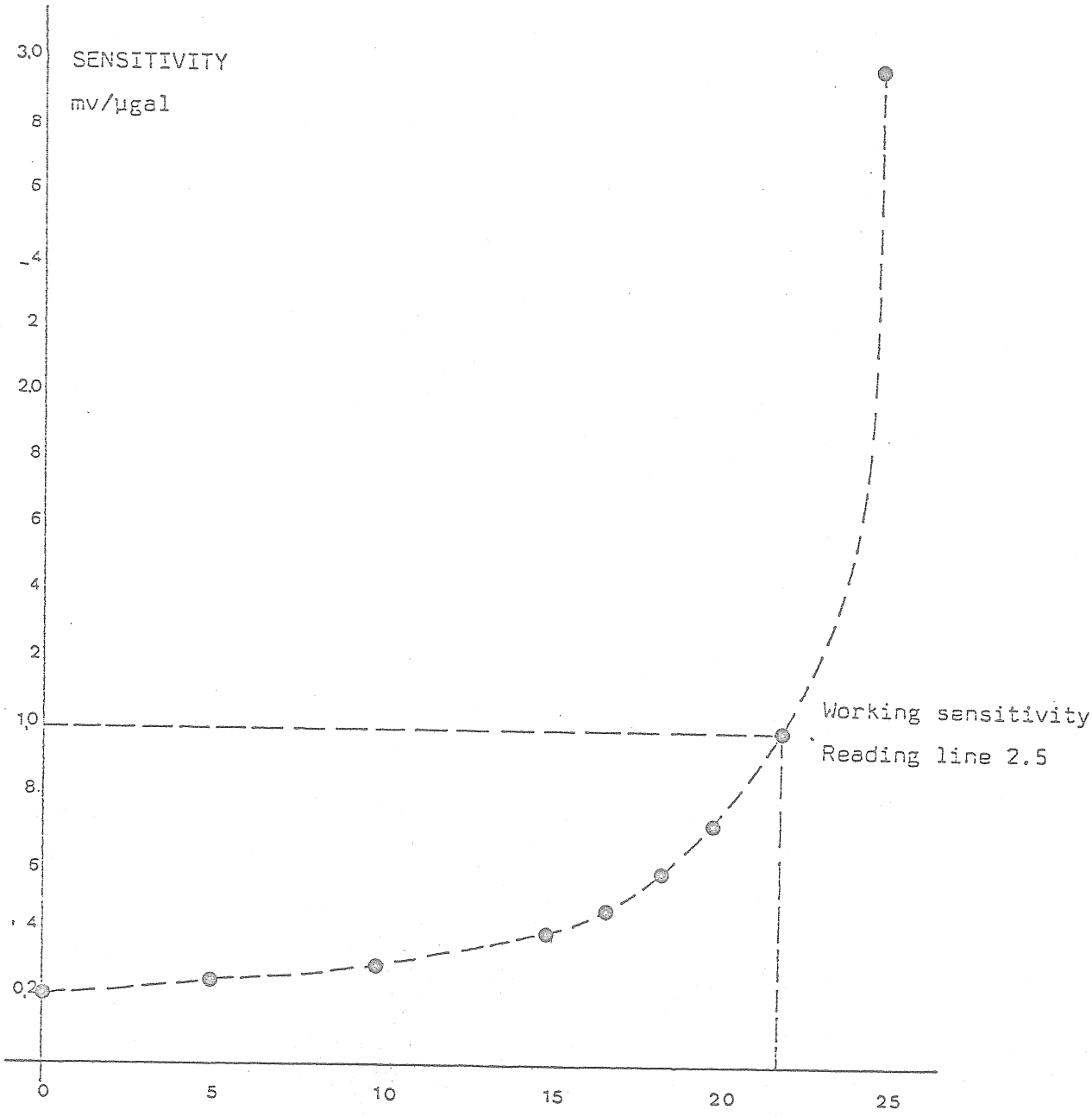


Fig. 2

Variation of the sensitivity as a function of longitudinal tilt.

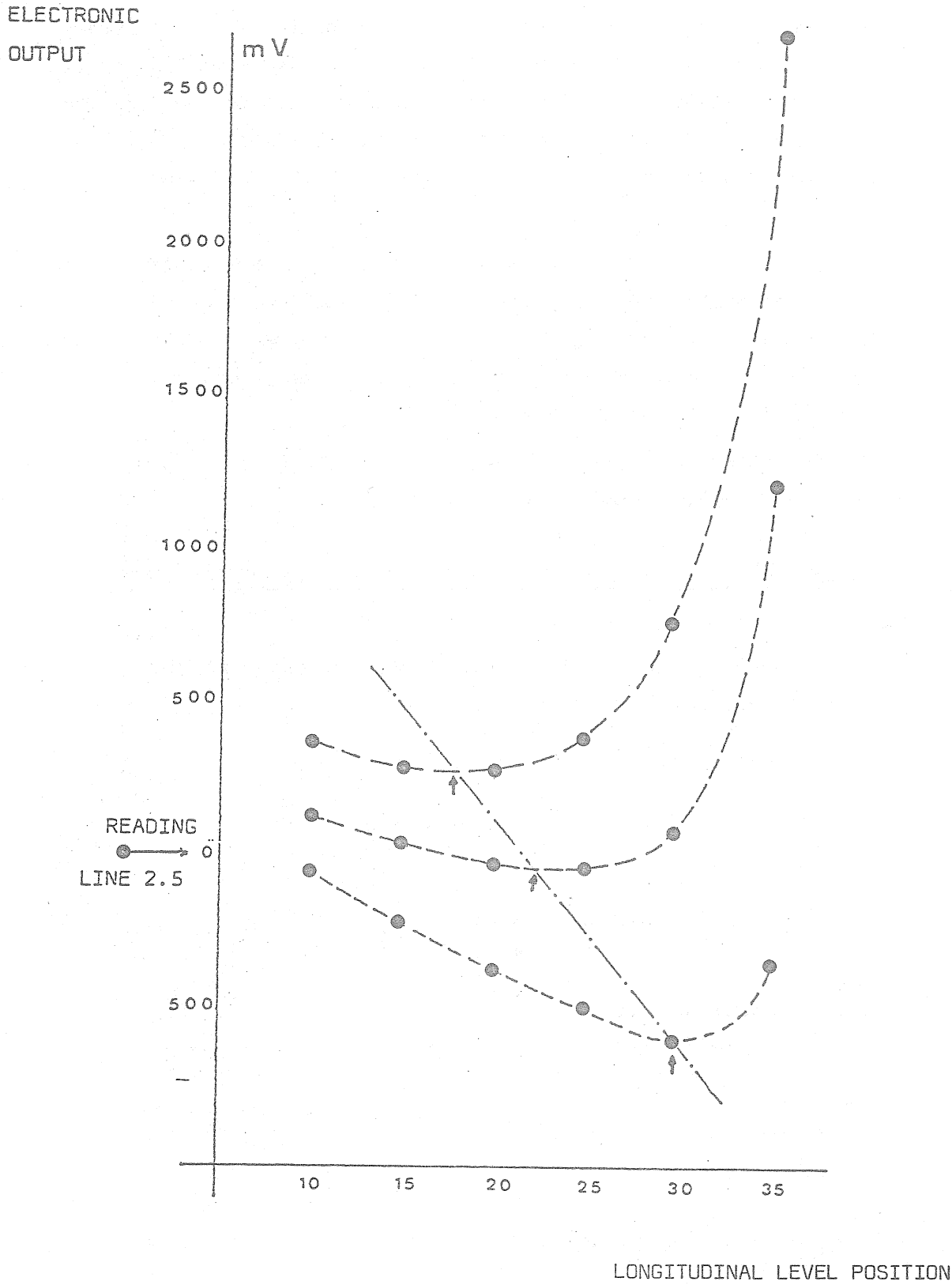


Fig. 3

Parabola for the longitudinal level as a function of the reading line.

The zero-method avoids these difficulties related with the determination of the constants. This improvement can be achieved with LCR instruments. In that case the angle β indeed remains constant and so does the length of the springs as well. The delay due to the rheological deformation of the spring's molecular network consequently disappears and the phase lags become negligible.

For the LCR, it is easy to apply an external DC bias voltage to the fixed plates of the capacitive transducer. Then two electrostatic forces are induced between these plates and the beam. The modulation of the bias signals is usable to feedback the gravimeter and becomes the measurement of the vertical tidal force acting on the beam.

Furthermore the design of the CPI card of the LaCoste Romberg is well adapted to a transformation into a feedback system.

THEORETICAL MODEL FOR THE ELECTROSTATIC FORCES INSIDE A CAPACITOR BRIDGE TRANSDUCER.

The parameters used in the equations for the electrostatic forces in a capacitor bridge are represented on figure 4.

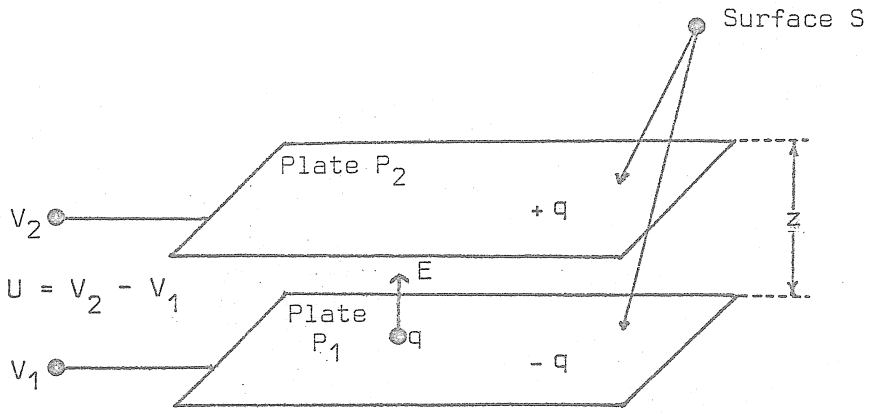


Figure 4: Parameters used to define the force between two plates of a capacitor.
z is the distance
S is the surface
V_1 and V_2 are the potentials applied to the plates P_1 and P_2.

If a voltage V is applied on a plate P, an electrostatic field $\vec{E}$ is generated all around it, such as

$$\vec{E} = - \text{grad } V \tag{1}$$

An electrical charge q in this field undergoes a force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -q \text{ grad } V \tag{2}$$

The energy stored when this charge is moved from the infinite to P is :

$$W = + q \int_{\infty}^{P} \text{grad } V \, dz = +qV \tag{3}$$

Thus, for two interacting charges q_1 and q_2 the energy is

$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

V_1 and V_2 being the potential of the charges. One has to divide by a factor 2 because it is equivalent to displace q_1 or q_2 to infinite and with only one charge away, the interaction disappears.

A generalization to a number of charges n gives :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i \tag{5}$$

and, for a continuous distribution of charges in a volume M :

$$W = \frac{1}{2} \int_M V (q) \, dq \tag{6}$$

In the case of a capacitor (figure 4) one has:

$$U = V_2 - V_1$$

$$\text{and} \qquad W = \frac{1}{2} \int_S (V_2 - V_1) \, dq \tag{7}$$

Introducing the capacitance

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_o \frac{S}{z} \tag{8}$$

we can write :

$$W = \frac{1}{2} QU = (\frac{1}{2} \varepsilon_o SU^2) \frac{1}{z} \tag{9}$$

z is the distance between the plates

The electrostatical force between the plates is:

$$F = - \frac{dW}{dz} = + \frac{1}{2} \varepsilon_o SU^2 \frac{1}{z^2} \tag{10}$$

For the LaCoste Romberg system (figure 5) two forces are acting inside the transducer

$$F_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_o S (V_2 - V_1)^2 / (z_o + dz)^2 \tag{11}$$

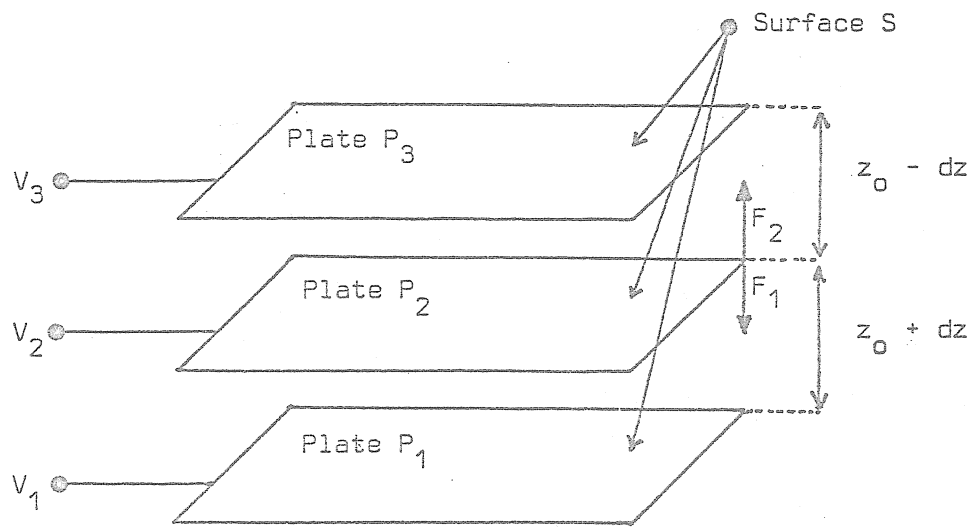
$$F_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_o S (V_3 - V_2)^2 / (z_o - dz)^2 \tag{12}$$

The resultant force, acting on the beam, is

$$F = F_2 - F_1 = \frac{\varepsilon_o S}{2} \left[\left(\frac{V_3 - V_2}{z_o - dz} \right)^2 - \left(\frac{V_2 - V_1}{z_o + dz} \right)^2 \right] \tag{13}$$

We put

$C_o = \frac{\varepsilon_o S}{z_o}$ the value of the two capacitances for a centered position.



The plates P_1 and P_3 are fixed to the frame of the gravimeter. The plate P_2 is fixed to the beam and moves with it. F_1 and F_2 are the forces acting on P_2. $z_o - dz$ and $z_o + dz$ are the distances between the plates.

Figure 5.

$V_2 = 0$ (connected to the ground)

$$V_1 = V_o - V \tag{14}$$

$$V_3 = V_o + V \tag{15}$$

$$F = \frac{\varepsilon_o S}{2}\left[\left(\frac{V_o + V}{z_o - dz}\right)^2 - \left(\frac{V_o - V}{z_o + dz}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2 C_o}{z_o}\left[\frac{V_o V + \frac{1}{2}(V_o^2 + V^2)\frac{dz}{z_o} + V_o V (\frac{dz}{z_o})^2}{1 - 2(\frac{dz}{z_o})^2 + (\frac{dz}{z_o})^4}\right] \tag{16}$$

By neglecting the term $(\frac{dz}{z_o})^2$, we obtain

$$F = \frac{2 C_o}{z_o}(V_o V + \frac{1}{2}(V_o + V)^2 \frac{dz}{z_o}) . \tag{17}$$

For a centered transducer,

$$dz = 0 \tag{18}$$

and

$$F = \frac{2 C_o V_o}{z_o} V \tag{19}$$

This equation confirms the linearity of an electrostatic force in a centered capacitor bridge {R. Moore, W. Farrell, 1970}.

Unfortunately the condition of centering is limitative for a number of LCR systems as the position of the chosen reading line does not generally correspond to the center of the capacitive transducer. Then a term proportional to the square of the feedback voltage introduces a non linearity.

A method developped by Harrison and Sato {1983} solves this problem. If we replace in (13) V_1 and V_3 by

$$V_1 = V_o - (1 - k) V \tag{20}$$

$$V_3 = V_o + (1 + k) V \tag{21}$$

we obtain

$$F = \frac{\varepsilon_o S}{2}\left[\left(\frac{V_o + (1+k) V}{z_o - dz}\right)^2 - \left(\frac{V_o - (1-k) V}{z_o + dz}\right)^2\right] \tag{22}$$

$$= \frac{2 C_o}{z_o}\left((1 + 2k\frac{dz}{zo}) V_o V + [k + (1+k^2)\frac{dz}{z_o}] V^2 + \frac{dz}{zo} V_o^2\right) \tag{23}$$

$$= X V + Y V^2 + Z$$

with

$$X = \frac{2\,C_o}{z_o}\left(1 + 2k\,\frac{dz}{z_o}\right) V_o \qquad \text{(acting force)} \qquad (24)$$

$$Y = \frac{2\,C_o}{z_o}\left(k + (1+k^2)\,\frac{dz}{z_o}\right) \qquad \text{(non linear term)} \qquad (25)$$

$$Z = \frac{2\,C_o}{z_o}\,\frac{dz}{z_o}\,V_o^2 \qquad \text{(Bias force)} \qquad (26)$$

X, Y and Z are constant for a fixed dz. For dz = 0 and k = 0

$$X = \frac{2\,C_o}{z_o}\,V_o$$

and

$$F = \frac{2\,C_o}{z_o}\,V_o\,V$$

which is equation (19).

If dz is not negligible, it is possible to choose a value of k which cancels Y:

$$\frac{dz}{z_o}\,k^2 + k + \frac{dz}{z_o} = 0 \qquad (27)$$

if

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\,dz^2/z_o^2}}{2\,dz/z_o}$$

and for small values of dz we select the solution

$$k \cong \frac{-1 + (1 - 2\,dz^2/z_o^2)}{2\,dz/z_o}$$

$$\cong -dz/z_o \qquad (28)$$

k is thus proportional to the relative excentering of the reading line.

For an adjustment of Y = 0 the sensitivity of the instrument to the changes of electrostatic field is

$$\frac{dF}{dV} = \frac{2\,C_o}{z_o}\left(1 + 2\,k\,\frac{dz}{z_o}\right) V_o \qquad (29)$$

Because k and $\frac{dz}{z_o}$ are small, the sensitivity is almost constant for the variations of the gains (1+k) and (1-k). For this reason it is appropriate to adjust only the gain of one bias signal, keeping the second one constant. As the forces are proportional to the square of the voltages we can also change the sign of the polarisation voltage on one plate. In such a case the two voltages for the bias applied to the capacitance bridge are

$$V_1 = -(V_o - V) \qquad (30)$$

$$V_3 = V_o + (1+k)\,V \qquad (31)$$

If we apply the same potential on the two plates i.e. V = 0, the induced force in the transducer becomes

$$F = Z = \frac{2 C_o}{z_o} V_o^2 \frac{dz}{z_o} \qquad (32)$$

This gives the possibility to measure dz and to center the beam by changing the reading line in order to minimize the reaction of the gravimeter to a same DC signal sent on the two plates.

THE VRL 8350 ELECTRONIC OF THE FEEDBACK SYSTEM FOR A LACOSTE-ROMBERG GRAVIMETER.

The design of the electronic circuit (figure 6) is adapted for LaCoste-Romberg model D and G gravimeters. A first preamplifier receives the signal Z coming from the gravimeter through a low pass-filter and a resistor bridge is used to adjust the sensitivity. the FEEDBACK switch (F.B.) allows a short circuit. of the input of the differential full floating preamplifier. We define the preamplified output signal S_1 by :

$$S_1 = \sigma Z \qquad (33)$$

σ is a function of the filter and of the gain fixed by G1.

This signal S_1 is refered to the ground. With this amplifier all types of LaCoste's electronics are therefore usable.

An amplifier with a unit gain produces the signal S_2 named Test Signal.

The signal S_1 is also sent to a second differential amplifier with a gain 10 at the input (+). A very stable reference DC voltage S_6 is connected to the (-) input of the same component. The signal S_3 corresponding to V_1 is such as :

$$S_3 = 10 \ (S_1 - S_6) \qquad (34)$$

The signal S_1 is also sent through an adjustable bridge to an inverting amplifier with an output signal S_4 :

$$S_4 = - (1+k) S_1 \qquad (35)$$

k = adjustable parameter

This signal is connected to the (-) input of a differential amplifier with a gain 10 which has its (+) input at the reference S_6 voltage.

Its output signal S_5 corresponding to V_3 is defined by

$$S_5 = 10 \ (S_6 - S_4) = 10 \ \{S_6 + (1+k) S_1\} \qquad (36)$$

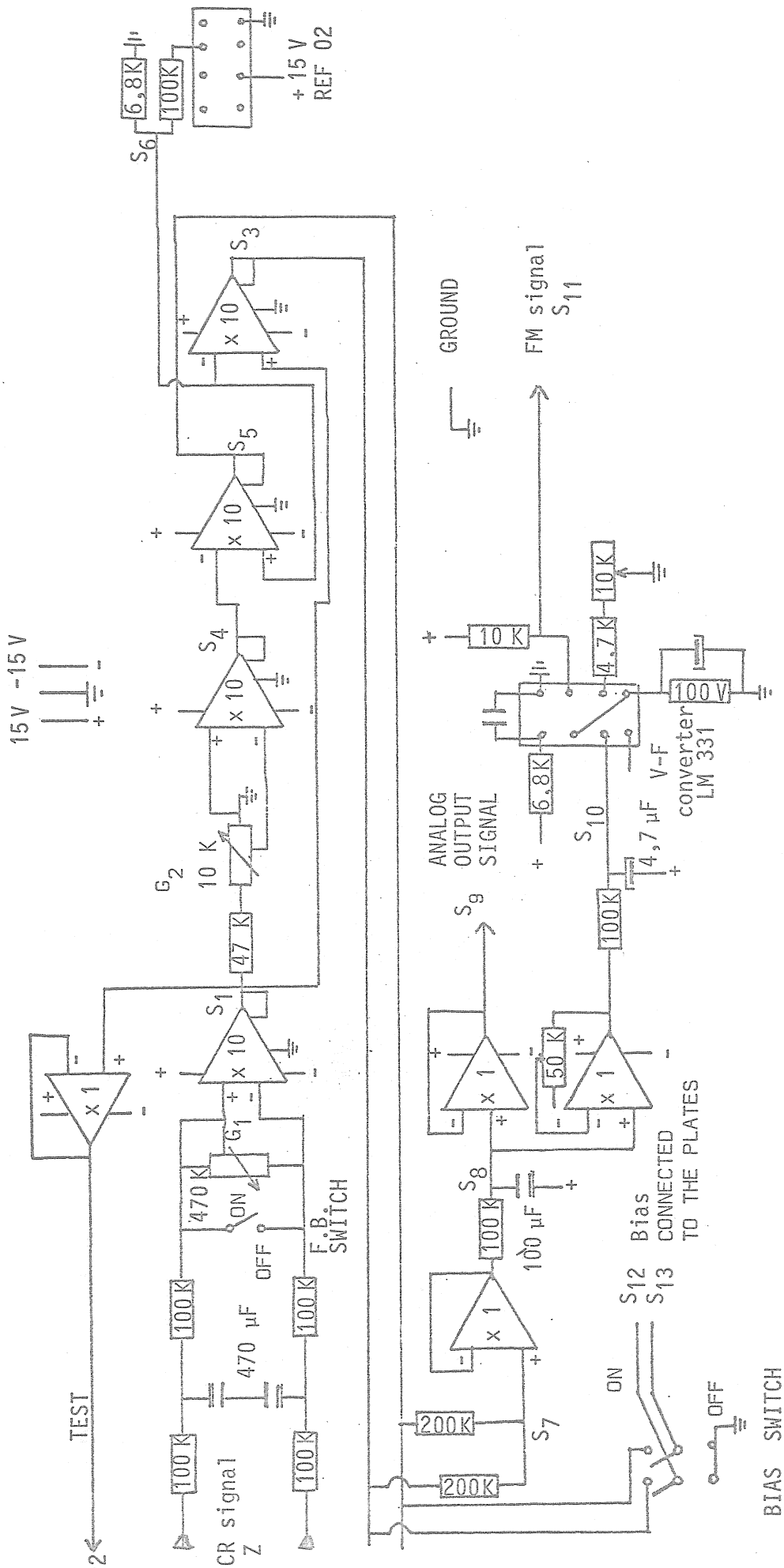

15 V -15 V
TEST
S2
LCR signal Z
100 K
470 µF
470 K
ON
OFF
F.B. SWITCH
G1
G2
10 K
47 K
S1
S3
S4
S5
S6
S7
S8
S9
S10
S11
S12
S13
x 1
x 10
6,8K
100K
+ 15 V REF 02
GROUND
FM signal
ANALOG OUTPUT SIGNAL
10 K
4,7 K
100 V
4,7 µF
V-F converter LM 331
50 K
200K
Bias CONNECTED TO THE PLATES
BIAS SWITCH

Figure 6

A double switch enables the connection of the two plates of the gravimeter capacitive transducer simultaneously to the ground or to the feedback signal S_3 and S_5.

At first the gravimeter is working in the classic mode ($V_1 = V_2 = V_3$). Then the feedback signals are operated: the variations of V_1 and V_3 could be positive or negative depending on the input signal connection.

With an averaging resistor bridge, the output voltage S_7 is

$$S_7 = (S_3 + S_5) / 2 \qquad (37)$$

$$= 10 (S_1 - S_6 + S_6 + (1+k) S_1) / 2$$

$$= 10 (1 + k/2) . S_1 \qquad (38)$$

The electronic gain may be defined as the arithmetic mean of the gains of the S_3 and S_5 signals:

$$G_o = 10\sigma(1 + k/2) \qquad (39)$$

Let us consider a variation of gravity Δg.

When the gravimeter is out of feedback it will produce an angular displacement $\Delta\gamma$ (fig.1) and a corresponding signal Z at the electronics output with

$$Z = A \Delta g$$

A: amplification factor (V/µgal) of the gravimeter.

If we switch on the feedback, the beam will recenter in such a way that at equilibrium the residual signal is

$$Z_E = \frac{S_7}{G_o} = \frac{C}{G_o} \Delta F \qquad (40)$$

with C: ratio between voltage and electrostatic force (V/µgal).

The feedback does not compensate the total displacement as a residual signal Z_E is required to produce the differential force F and

$$Z_E = A \Delta g_R$$

where Δg_R is the uncompensated part of the gravity change.

As

$$\Delta F = \Delta g - \Delta g_R$$

we obtain

$$\frac{Z_E G_o}{C} = \frac{Z}{A} - \frac{Z_E}{A}$$

$$\frac{Z}{Z_E} = 1 + \frac{A\,G_o}{C} = G \qquad (41)$$

which gives the gain of the feedback system. It increases with the electronic gain but depends also on the amplification factor of the gravimeter.

S_7 is transformed through a low pass filter into S_8 and boostered for the registration to the analog output S_9.

S_8 is also transformed into a frequency modulated signal S_{11} for digital integration (Van Ruymbeke and al, 1978).

We use for S_6 a voltage of about 330 millivolts. With the F.B. switch "off" and the bias switch connected on the S_3 and S_5 signals,

$$S_{12} = -3.3 \text{ volt}$$

$$S_{13} = +3.3 \text{ volt}$$

When a signal Z is applied at the electronics input and if the F.B. switch is "on" the bias voltages S_3 and S_5 become:

$$S_3 = (-10\,S_6 + 10\,\sigma\,Z) \text{ volt}$$

$$S_5 = (+10\,S_6 + 10(1+k)\,\sigma\,Z) \text{ volt}$$

PROCEDURE TO INSTALL THE VRL 8350 ON A LACOSTE-ROMBERG GRAVIMETER

It is necessary, at first, to open the gravimeter to reach the CPI card. One disconnects the two resistors of one megohm at the extremities in contact with the pins 5 and 6.

A two shielded channels wire is soldered on these resistors and the shield connected to the ground of the CPI card. (figure 7). The CPI card is

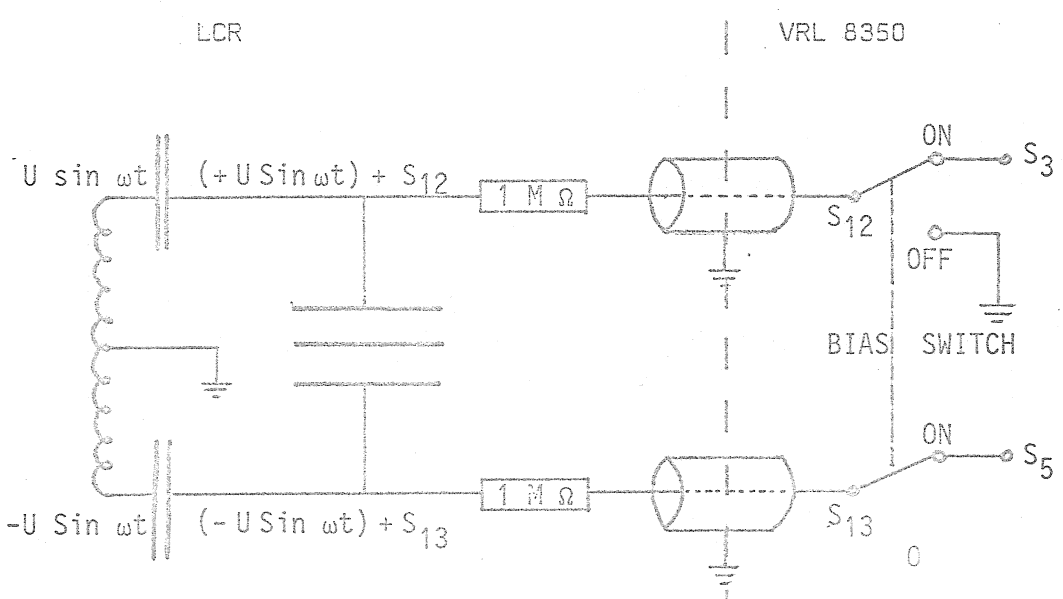


Figure 7

reinstalled inside the LCR with a short circuit between the shield and the two free ends of the wire.

A check of the sensitivity and a new leveling confirm that the gravimeter is unchanged after the modification.

The second step consists of soldering the wire to the bias switch of the VRL 8350 electronics placed in the OFF position (grounded plates).

When this operation is completed one connects the gravimeter output to the electronics with the F.B. switch "off" (short circuit of S_1).

The gain potentiometer G_1, in parallel with the F.B. switch, must be zeroed and after one minute the bias switch will be put "on" to send the bias voltages S_3 and S_5 to S_{12} and S_{13}.

Generally a small correction due to the effect described in (32) is necessary to recenter the voltmeter on the top plate of the gravimeter.

Turning slowly the gain potentiometer G_1 with the F.B. switch "on" two kinds of reactions exist:

- with a positive feedback, the gravimeter is sent in full scale position and one has to invert the position in the bias switch (S_3 to S_{13} and S_5 to S_{12})
- with a negative small gain feedback, the beam position remains centered.

After this preliminary setting, it is now necessary to adjust the gain of the feedback (potentiometer G1) and the linearity parameter k (potentiometer G2).

With a recorder connected to the signal S_2 (Test output) at full scale sensitivity of 2 volt one checks the stability of the system increasing step by step the gain G_1. We select an optimal damping (figure 8).

Let us call E the change of voltage at the test point S_2 for a given rotation of the micrometer with the feedback switch on.

We obtain a value E_1 (fig. 9) when the gravimeter is operating out of feedback (bias switch off) and a much smaller value E_2 (fig. 10) when the gravimeter is put in the feedback mode (bias switch on).

The gain G is given by

$$G = \frac{E_1}{E_2} \qquad (42)$$

It is possible to increase the gain of the CPI electronics as well as the gain G1 (equ. 41). It will improve the signal to noise ratio.

For a gravimeter with a free period of 24 seconds, a gain G = 14 seems to be the best compromise.

We can now adjust the linearity.

All these operations were made with the same gains on S_3 and S_5 output. With the record of the Analog Output S_9 (figure 11), the linearization is achieved by adjustment of the potentiometer defining the differential gain k.

We compare the deflection from the central position for +400 and -400 µgal calibrations. When the two amplitudes are the same, the procedure is repeated with +100 and -100 µgal to check the adjustment.

A series of displacements with steps of 100 µgal gives a final confirmation of the linearization . (figure 12).

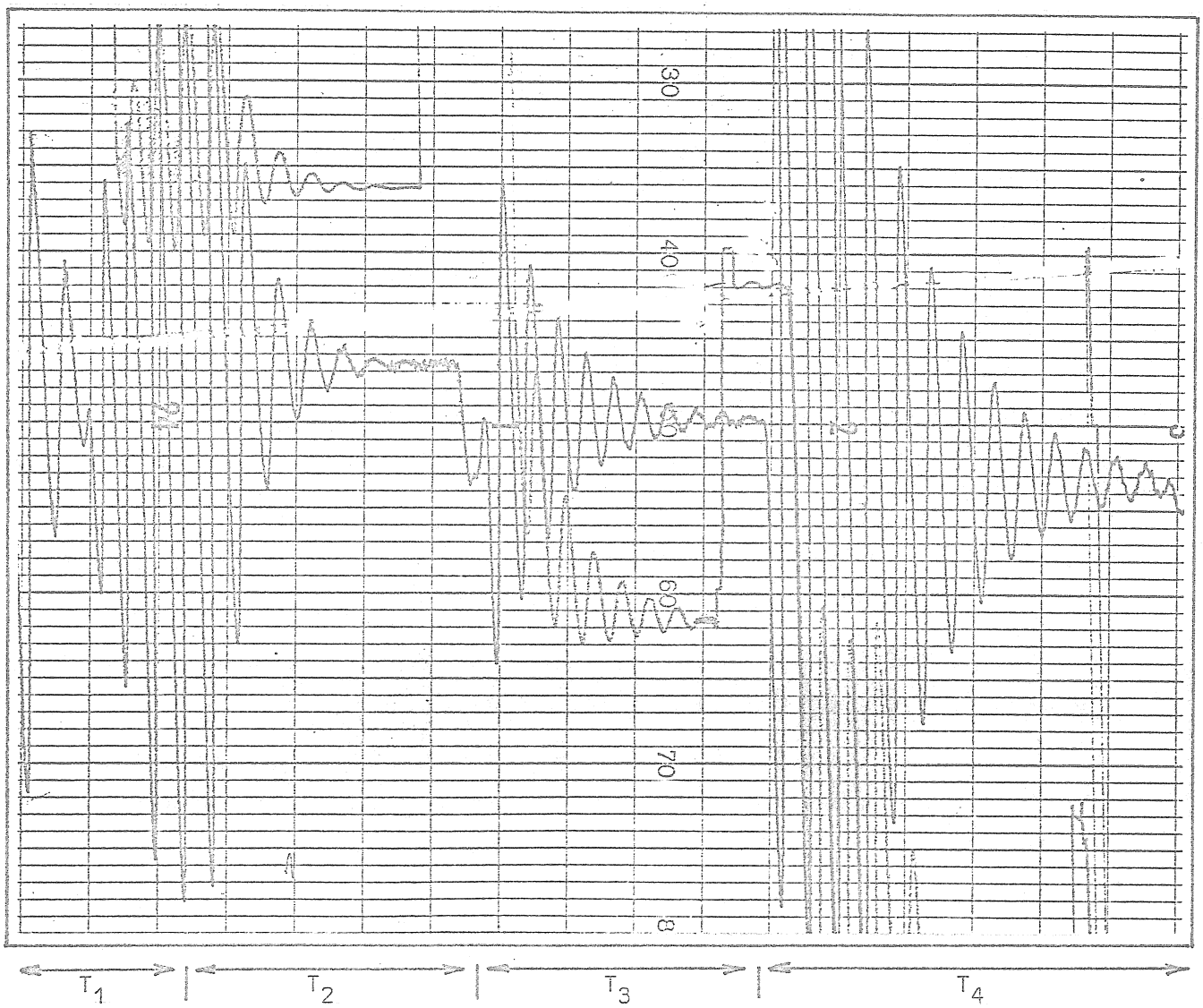


Figure 8 : T_1 : gain is too high and the amplitude of the oscillations is increasing

T_2 : gain is too low

T_3 : gain is higher, but not optimised

T_4 : gain should be good.

With the residual signal S_2, we check the damping of the beam motion after a micrometer rotation. The aspect corresponding to the T_4 portion of the record corresponds to a value of 14 for the gain of the feedback loop.

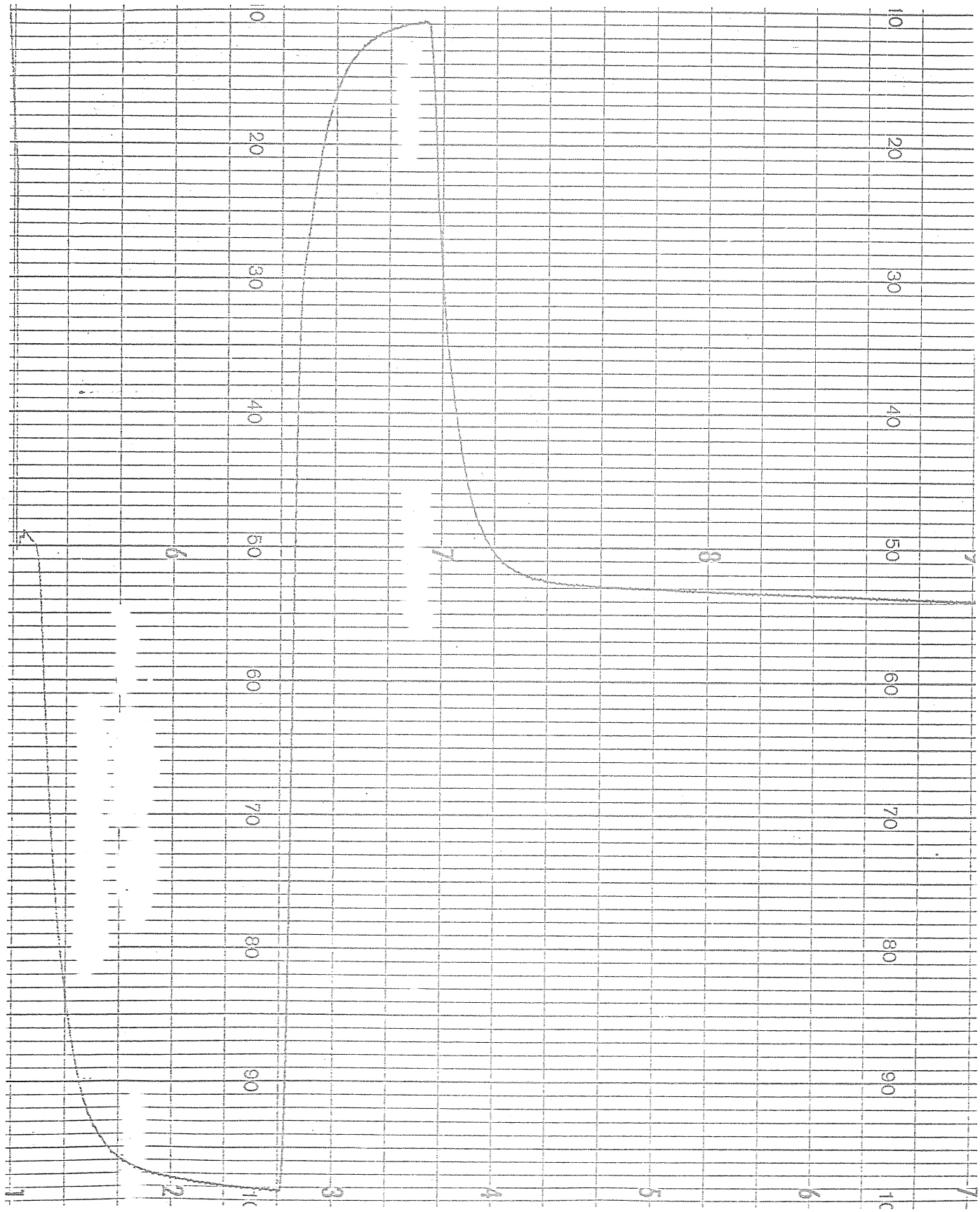


Figure 9 : A 300 µgal calibration without feedback

The speed of the recorder is 1 cm/1 minute.

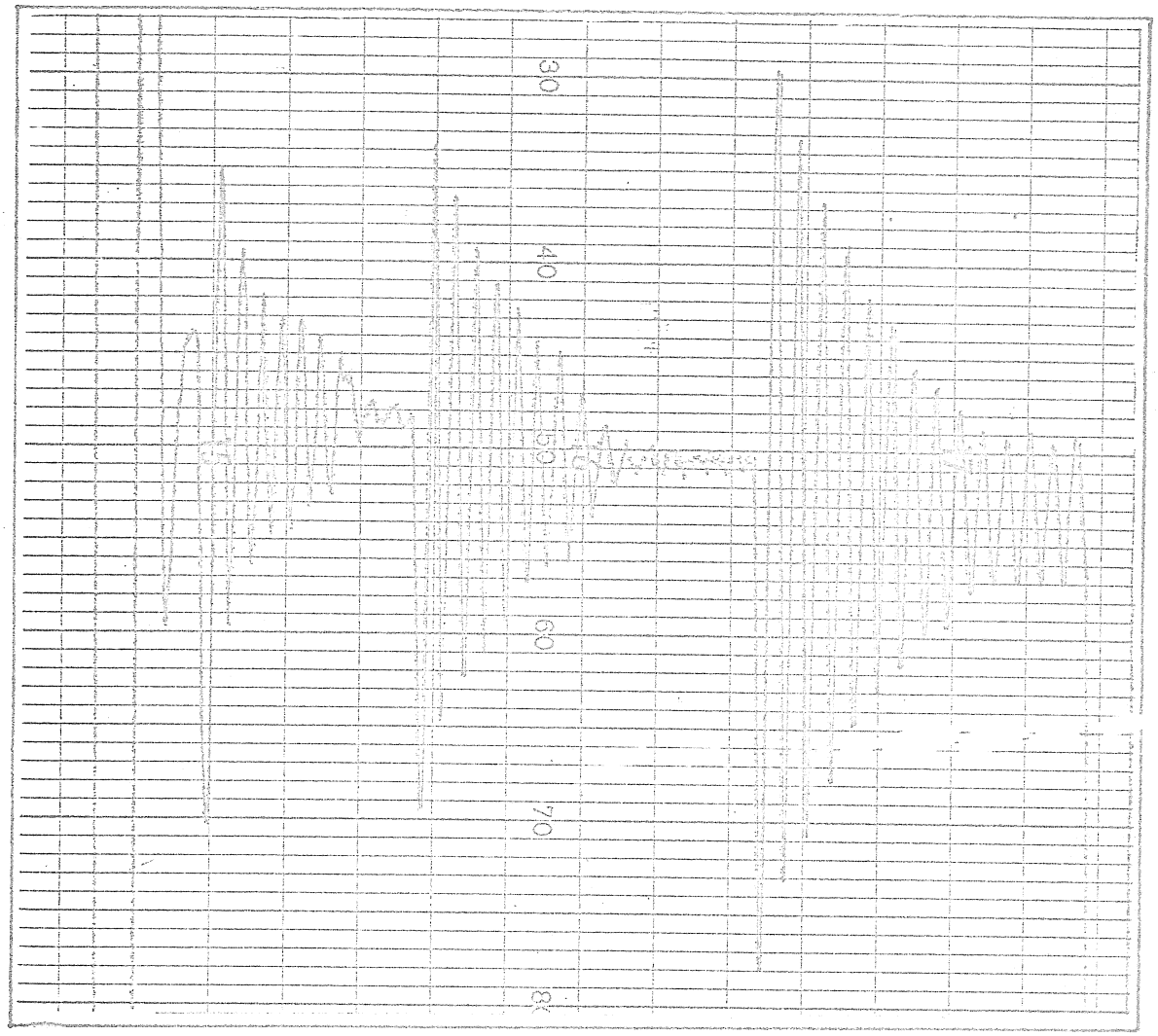


Figure 10 : The residual motion of the beam for two 400 microgal micrometer rotations is recorded at the test output S_2 : The damping seems to change in the last part of the record. The curve appearance after the first two rotations is similar. After a third rotation there is a residual oscillation of the undamped beam.

FIRST RESULTS OBTAINED WITH LACOSTE-ROMBERG GRAVIMETERS EQUIPED WITH THE VRL 8350 ZERO METHOD SYSTEM.

Up to now, nine gravimeters have been transformed into feedback instruments.

We firstly have implemented our system at the Royal Observatory of Belgium on the LCR 336, LCR 402 and LCR 487.

The tables 1, 2 and 3 give the results of the analysis of registrations made at the Bruxelles station.

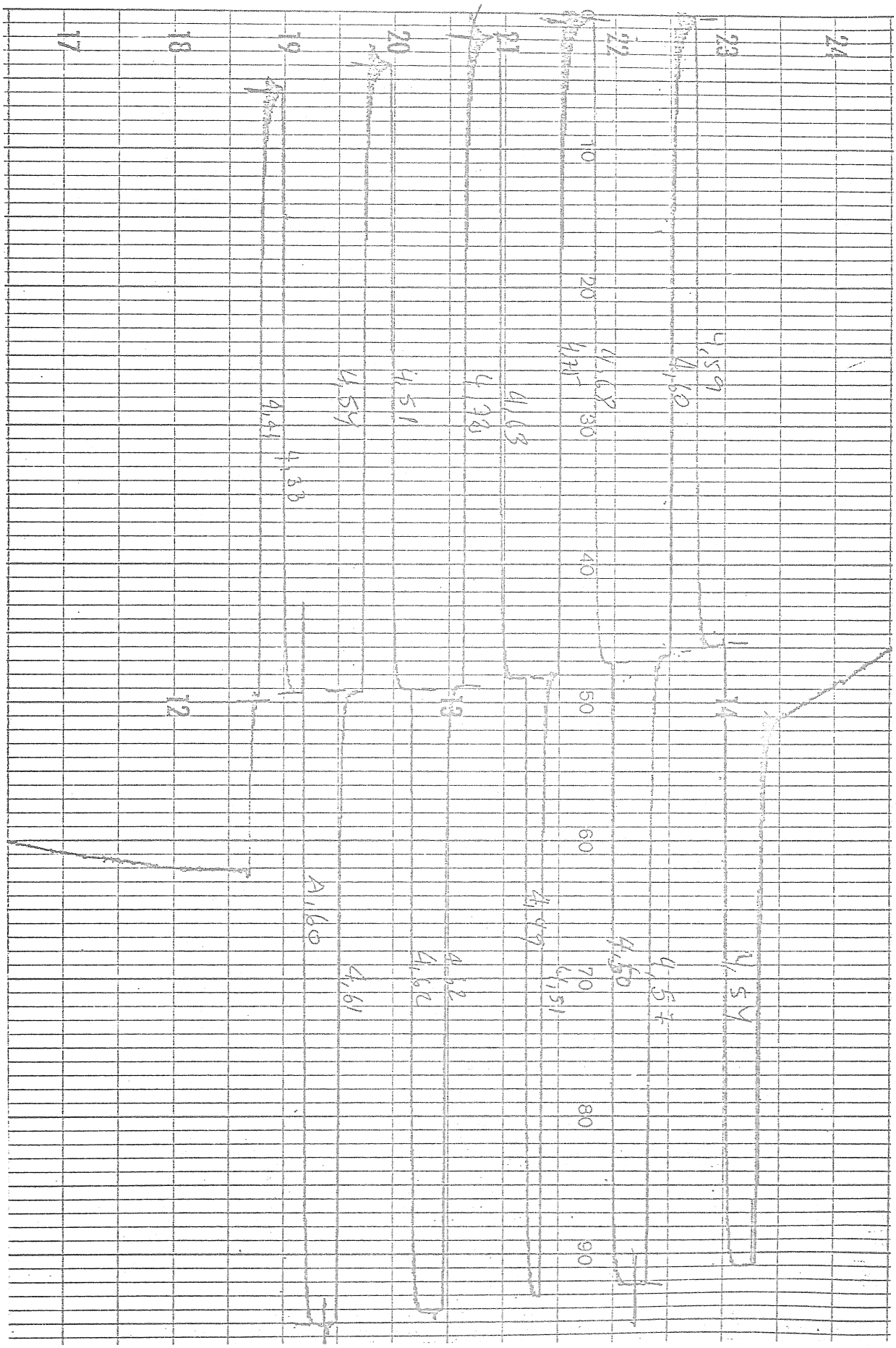
The series were normalized to obtain for the wave O_1 an amplitude factor 1.1610 which defines the Bruxelles fundamental station (Ducarme, 1975).

The normalization factors were

for LCR 336 : 0.99154

for LCR 402 : 1.01000

for LCR 487 : 1.01326



S_9 analog output is recorded at a 5 volt full scale sensitivity to adjust the linearization. After a small change of the gain by the potentiometer acting on S_4 signal (figure 6), we compare the displacements for +40 divisions and -40 divisions rotations of the micrometer. An adjustment with less than 1% discrepency between these displacements is accepted as good enough.

Figure 11

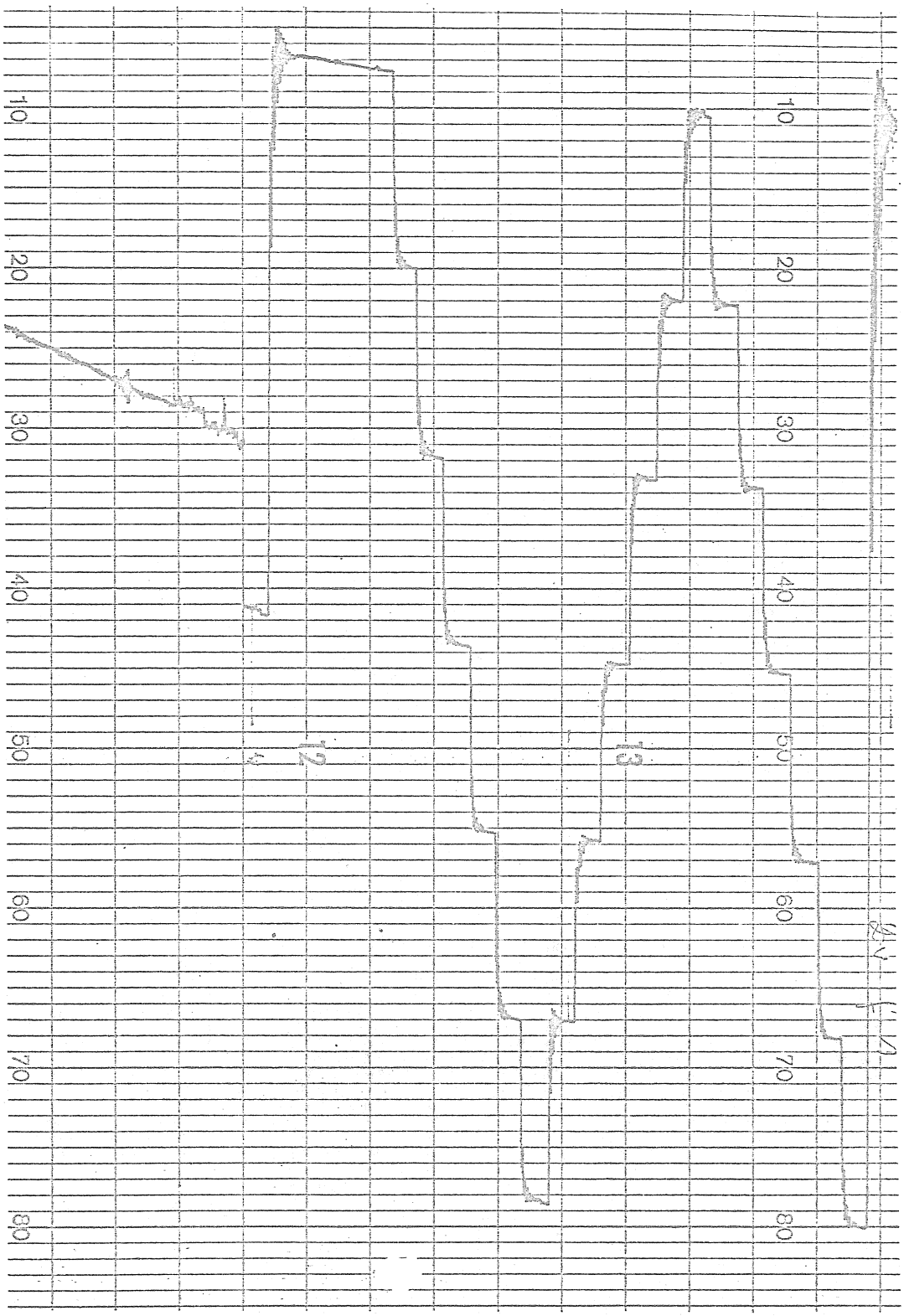


Figure 12 : Step by step 100 µgal calibrations
Sensitivity 5 volts f.s.

Table 1

TRANS WORLD PROFILES BRUSSELS FUNDAMENTAL STATION

STATION 0201 BRUXELLES-UCCLE COMPOSANTE VERTICALE BELGIQUE
50 47 55 N 04 21 29 E H 101 M P 4M D 90KM 981 117 301
BASSIN EOCENE DE BRUXELLES SUR LE CAMBRIEN DU MASSIF DU BRABANT.
SABLES LUTETIENS.
OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE DEPT.1 P.MELCHIOR
GRAVIMETRE LA COSTE-ROMBERG 336,ASSERVISSEMENT ELECTRONIQUE M.VAN RUYMBEKE,
AJUSTEMENT DE LINEARITE PAR METHODE SATO-HARRISON
CALIBRATION LA COSTE - ROMBERG
INSTALLATION M. VAN RUYMBEKE
MAINTENANCE R. LAURENT,J. JEAN

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
COMPUTING CENTER INTERNATIONAL CENTER FOR EARTH TIDES/FAGS/ BRUSSELS
COMPUTER SPERRY-UNIVAC 1100/81 PROCESSED ON 84/ 1/26

INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS
NORMALISATION FACTOR .99154

G336 831020/831129 8312 2/831220 831224/831228 84 1 1/84 111

TIME INTERVAL 85.0 DAYS 1920 READINGS 4 BLOKS

WAVE GROUP ARGUMENT	N	WAVE	ESTIMATED AMPL.	R.M.S.	AMPL. FACTOR	R.M.S.	PHASE DIFF.	R.M.S.	RESIDUE AMPL.	PHASE
133.-139.	30	Q1	6.79	.12	1.1637	.0210	.775	1.034	.09	75.3
143.-149.	26	O1	35.35	.11	1.1610	.0035	.085	.171	.07	45.9
161.-168.	33	P1S1K1	49.25	.09	1.1500	.0021	.283	.108	.58	24.7
243.-248.	24	N2	6.77	.04	1.1787	.0078	2.193	.375	.28	68.6
252.-258.	26	M2	35.74	.04	1.1906	.0013	2.626	.065	1.86	61.8
267.-277.	21	S2K2	16.89	.04	1.2093	.0029	1.064	.137	.75	24.6
335.-375.	16	M3	.36	.02	.9735	.0575	-4.914	3.336	.05	-139.4

STANDARD DEVIATION D 3.08 SD 1.09 TD .57 MICROGAL
O1/K1 1.0096 1-O1/1-K1 1.0733 M2/O1 1.0255
CENTRAL EPOCH TJJ= 2445669.0

Table 2

TRANS EUROPEAN PROFILE STATION BRUXELLES

STATION 0201 BRUXELLES-UCCLE COMPOSANTE VERTICALE BELGIQUE
50 47 55 N 04 21 29 E H 101 M P 4M D 90KM 981 117 301
BASSIN EOCENE DE BRUXELLES SUR LE CAMBRIEN DU MASSIF DU BRABANT.
SABLES LUTETIENS.
OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE DEPT.1 P.MELCHIOR
GRAVIMETRE LA COSTE-ROMBERG 402,ASSERVISSEMENT ELECTRONIQUE M.VAN RUYMBEKE,
AJUSTEMENT DE LINEARITE PAR METHODE SATO-HARRISON
CALIBRATION LA COSTE - ROMBERG
INSTALLATION M. VAN RUYMBEKE
MAINTENANCE R. LAURENT,J. JEAN

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
COMPUTING CENTER INTERNATIONAL CENTER FOR EARTH TIDES/FAGS/ BRUSSELS
COMPUTER SPERRY-UNIVAC 1100/81 PROCESSED ON 84/ 5/ 7

INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS
NORMALISATION FACTOR 1.01000

G402 84 1 3/84 1 9 84 113/84 115 84 119/84 2 6 84 2 9/84 217

TIME INTERVAL 47.0 DAYS 1008 READINGS 4 BLOKS

WAVE GROUP ARGUMENT	N	WAVE	ESTIMATED AMPL. R.M.S.	AMPL. FACTOR	R.M.S.	PHASE DIFF.	R.M.S.	RESIDUE AMPL.	PHASE
133.-139.	30	Q1	6.70	.19	1.1489	.0327	.212	1.623	.07	158.2
143.-149.	26	O1	35.36	.21	1.1610	.0069	.103	.343	.08	50.3
161.-168.	33	P1S1K1	49.55	.18	1.1569	.0042	-.068	.211	.83	-4.1
243.-248.	24	N2	6.85	.05	1.1915	.0080	2.603	.387	.36	60.9
252.-258.	26	M2	35.79	.05	1.1921	.0018	2.655	.084	1.90	60.9
267.-277.	21	S2K2	16.72	.05	1.1969	.0039	1.365	.190	.65	38.0
335.-375.	16	M3	.39	.03	1.0363	.0858	-3.683	4.689	.03	-116.5

STANDARD DEVIATION D 4.32 SD 1.01 TD .62 MICROGAL
O1/K1 1.0036 1-O1/1-K1 1.0265 M2/O1 1.0267
CENTRAL EPOCH TJJ= 2445725.0

Table 3

TRANS WORLD PROFILES BRUSSELS FUNDANENTAL STATION

STATION 0201 BRUXELLES-UCCLE COMPOSANTE VERTICALE BELGIQUE
50 47 55 N 04 21 29 E H 101 M P 4M D 90KM 981 117 301
BASSIN EOCENE DE BRUXELLES SUR LE CAMBRIEN DU MASSIF DU BRABANT.
SABLES LUTETIENS.
OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE DEPT.1 P.MELCHIOR
GRAVIMETRE LACOSTE ROMBERG 487,ASSERVISSEMENT ELECTRONIQUE M.VAN RUYMBEKE,
AJUSTEMENT DE LINEARITE PAR METHODE SATO-HARRISON
CALIBRATION BRUXELLES - STATION FONDAMENTALE
INSTALLATION M. VAN RUYMBEKE
MAINTENANCE M.VAN RUYMBEKE-B.DUCARME-J.JEAN-R.LAURENT

LEAST SQUARE ANALYSIS / VENEDIKOV FILTERS ON 48 HOURS / PROGRAMMING B.DUCARME
POTENTIAL CARTWRIGHT-TAYLER-EDDEN / COMPLETE DEVELOPMENT
COMPUTING CENTER INTERNATIONAL CENTER FOR EARTH TIDES/FAGS/ BRUSSELS
COMPUTER SPERRY-UNIVAC 1100/81 PROCESSED ON 84/ 9/26

INERTIAL CORRECTION PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF ANGULAR SPEEDS
NORMALISATION FACTOR 1.01326

G487 84 331/84 4 2 84 515/84 523 84 527/84 531 84 6 3/84 611 84 619/84 623
G487 84 628/84 630 84 7 4/84 7 4 84 714/84 714 84 717/84 8 4 84 8 9/84 817
G487 84 821/84 823

TIME INTERVAL 147.5 DAYS 1872 READINGS 11 BLOKS

WAVE GROUP ARGUMENT	N	WAVE	ESTIMATED AMPL.	R.M.S.	AMPL. FACTOR	R.M.S.	PHASE DIFF.	R.M.S.	RESIDUE AMPL.	RESIDUE PHASE
133.-139.	30	Q1	6.55	.14	1.1236	.0232	.408	1.187	.21	167.4
143.-149.	26	O1	35.35	.13	1.1610	.0042	.228	.207	.15	70.2
161.-168.	33	P1S1K1	49.50	.11	1.1557	.0026	.163	.132	.79	10.3
243.-248.	24	N2	6.75	.06	1.1749	.0112	3.857	.548	.46	81.3
252.-258.	26	M2	35.78	.06	1.1920	.0021	2.519	.100	1.82	59.6
267.-277.	21	S2K2	16.95	.07	1.2138	.0048	1.344	.229	.85	28.1
335.-375.	16	M3	.42	.04	1.1164	.0959	-.742	4.881	.02	-16.4

STANDARD DEVIATION D 3.54 SD 1.57 TD .93 MICROGAL
O1/K1 1.0045 1-O1/1-K1 1.0336 M2/O1 1.0267
CENTRAL EPOCH TJJ= 2445863.0

Then the following δ factors have been obtained for the M_2 wave :

for LCR 336 : δ = 1.1906
for LCR 402 : δ = 1.1921
for LCR 487 : δ = 1.1920

while the Superconducting gravimeter (Sup. G) similarly normalized gives for the M_2 wave {Ducarme, 1983} :

δ = 1.1905

We obtain a fair agreement between the four instruments for the ratios O_1/K_1 and M_2/O_1 (Table 4), for the phases of M_2 and O_1 waves (Table 5). This last point is of special importance as these three instruments have no instrumental phase lag correction. The Table 6 shows that the small residual vectors agree very well.

The LCR 336 was installed successively at Bruxelles, Niamey and Arlit (Niger).

In spite of the transportation by airplanes to Niger and by bus inside this country, the calibration factors (Table 7) show a very long term stability.

Table 4 - Amplitude ratios

	LCR 336	LCR 402	LCR 487	Sup. G.
O_1/K_1	1.0096	1.0036	1.0045	1.0115
M_2/O_1	1.0255	1.0267	1.0267	1.0246

Table 5 - Phases

	LCR 336	LCR 402	LCR 487	Sup. G.
O_1	0.085°	0.103°	0.228°	-0.092°
M_2	2.626°	2.655°	2.519°	2.448°

Table 6 - Observed residual vector (Molodensky model)

	LCR 336	LCR 402	LCR 487	Sup. G.
O_1	0.07 µgal 45.4°	0.08 µgal 50.3°	0.15 µgal 70.2°	0.10 µgal -33.9°
M_2	1.86 µgal 61.8°	1.90 µgal 60.9°	1.82 µgal 59.6°	1.76 µgal 59.9°

Table 7

Calibration of LCR 336

Station	Epoch	cm/100 µgal(*)
Bruxelles	83-10-25	4,99
	83-11-04	5,00
	83-11-14	4,96
	83-12-07	4,95
	83-12-14	4,94
	83-12-22	4,96
	84-01-11	4,79 (**)
Niamey (Niger)	84-01-22	4,81
	84-01-23	4,78
	84-01-23	4,81
	84-01-24	4,79
	84-01-27	4,72
	84-02-03	4,77
	84-02-08	4,79
	84-02-15	4,83
	84-02-22	4,81
	84-02-29	4,74
	84-03-18	4,78
	84-03-27	4,82
	84-04-03	4,74
	84-04-12	4,79
	84-04-18	4,79
	84-04-19	4,71
	84-04-25	4,71
	84-05-09	4,74
	84-05-17	4,71
	84-05-18	4,72
	84-05-24	4,77
	84-05-31	4,71
	84-06-07	4,78
Arlit (Niger)	84-06-16	4,76
	84-06-22	4,87
	84-06-29	4,81
	84-07-20	4,83
	84-08-09	4,79

The calibrations made at Bruxelles (84-01-11) and Arlit (84-08-09) give a sensitivity of 4,79 cm/100 µgal (2 volt full scale on the recorder corresponds to 25 cm).

(*) red on the recorder for a 2 volt full scale sensitivity.
(**) change of full scale sensitivity of the recorder.

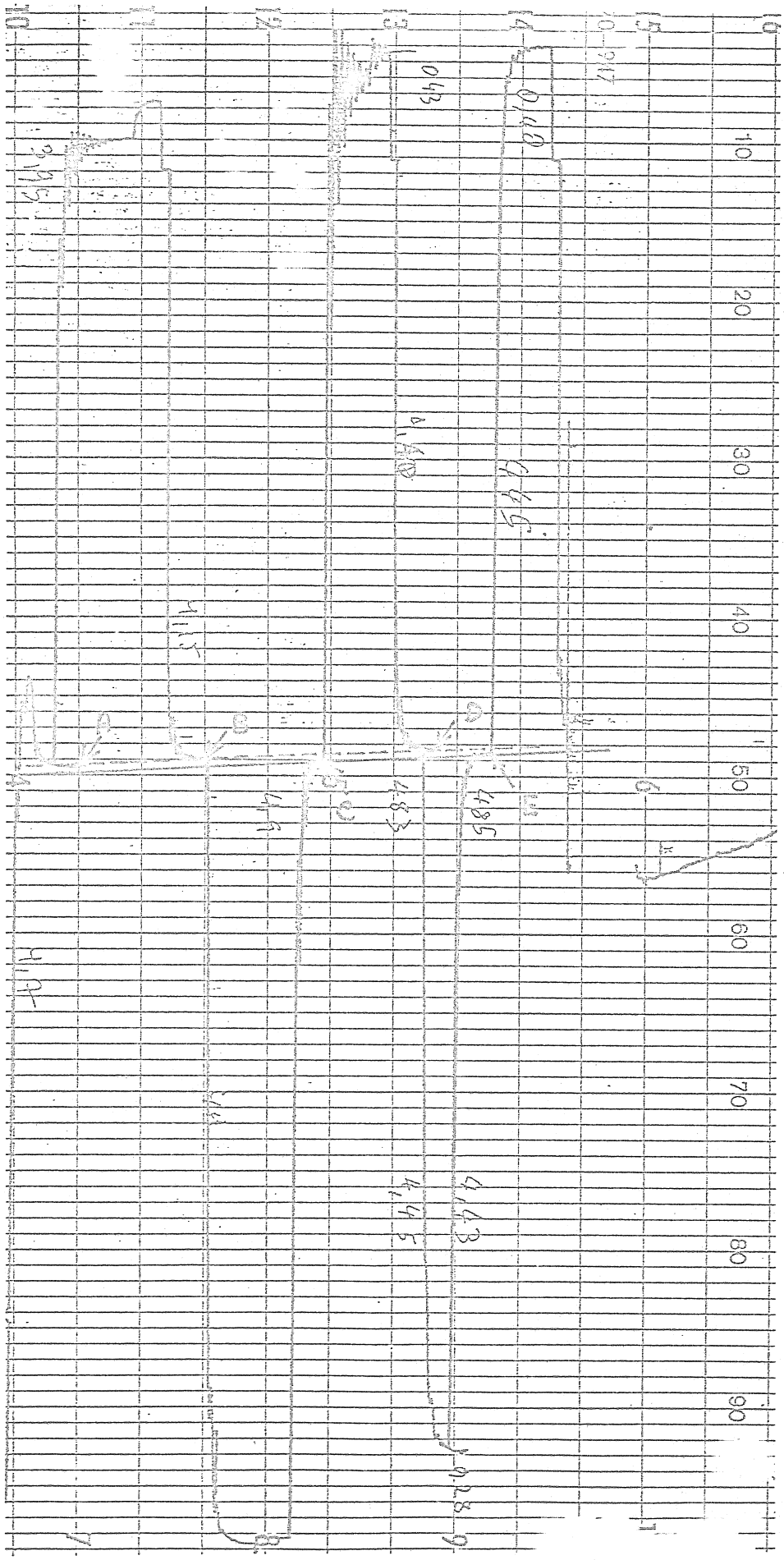


Figure 13

5 volt full scale for 25 cm.

SOME REMARKS ABOUT OUR EXPERIENCE

The gravimeter's beam does not return exactly at the same position for a same clockwise or counterclockwise micrometer rotation even with a backlash compensation.

The pen's positions on the record (figure 13) after displacements induced by increasing micrometer rotations (A, B & D) and decreasing ones (C & E) are systematically different by about 2 microgals.

Such an effect limits the accuracy of micrometer adjustments.

This effect appears in most of our transformed LCR's.

The levelling procedure of a feedback LCR is the same as it was before the transformation.

If the gravimeter sticks out of scale due to some strong earthquake, one has to switch "off" the feed back switch F.B. for one minute and to gently tap the top of the gravimeter. When the pen of the recorder comes back and reaches the central position, switch "on" F.B. to reactivate the feedback.

The $\pm$ 15 volt power supply for the VRL 8350 is a DC-DC converter with a 10 to 15 volt input connected in parallel with the LCR battery back up supply.

Additional remark

The theoretical model of the Tidal LaCoste-Romberg gravimeter ET is described in full details in the "Diplomarbeit" of Arnold Brodscholl, presented in the Geophysikalisches Institut der Universität Karlsruhe in June 1982. We have been pleased to receive a copy of this important work.

Special attention is paid there to the characteristics of these instruments for recording long period seismic waves (3 to 80 minutes) as used in the IDA project.

The principle of the electronics (op. cit. figure 3.1.1 page 34) is different from our system.

The comparison of our own figure 8 with the figure 3.4.10 (page 80) of Brodscholl thesis shows that the gain we have choosen is very close to the gain with which the limit of stability is achieved. (figure 3.4.11 page 82).

It thus appears that the amplitude and phase responses for tidal periods look similar between our limited gain and a maximum gain.

ACKNOWLEDGMENTS

We would recall that this work started after a contact with T. Sato in Mizusawa (Japan) and the reading of the paper he has written with J.C. Harrison {1983}.

The discussions with P. Melchior, B. Ducarme, C. Poitevin (Royal Observatory of Belgium) and J.V. Larson as well as the experimental work made with R. Vieira and C. De Toro at Madrid (Spain) and with E. Ratton at Curitiba (Brazil) were important for the definition of the problems.

R. Laurent has contributed to the tests and the mounting of the VRL 8350 electronics with the author.

BIBLIOGRAPHY

DUCARME, B., 1975.
A fundamental station for Trans World Tidal Gravity Profiles.
Phys. Earth Planet. Inter., 11, p. 119-127.

DUCARME, B., 1983.
Tidal gravity parameters at Brussels reconfirmed by a superconducting gravity meter.
Phys. Earth Planet. Inter., 32, p. 1-3.

HARRISON, J., SATO, T., 1983.
Implementation of electro-static feedback with a LaCoste-Romberg Model G gravity meter.
EOS 64, n° 18 : p. 204.
Journ. Geoph. Res. 89, n°B9: p. 7957.

MELCHIOR, P., 1978, 1983.
The Tides of the Planet Earth.
Pergamon Press.

MELCHIOR, P., MOENS, M., DUCARME, B. and VAN RUYMBEKE, M., 1981.
Tidal loading along a Profile Europe - East Africa - South Asia - Australia and the Pacific Ocean.
Phys. Earth Planet. Inter., 25, p. 71-106.

MOORE, R., FARRELL, W., 1970.
Linearization and calibration of electrostatically Feedback Gravity meters.
Journal of Geophysical Research, Vol. 75, N° 5, p. 928-932.

VAN RUYMBEKE, M., DUCARME, B., 1978.
Introduction of voltage to frequency converters as long term integrators adapted to data acquisition.
BIM, N° 79, p. 4812-4814.

VAN RUYMBEKE, M., 1980.
Sensitivity adjustement and levelling of LaCoste-Romberg gravimeters.
Bull. Inform. Bureau Gravim. Internat. N° 46, p. 71-78.

Traduction

VARIATIONS DE MAREES DE LA PESANTEUR EN URSS

N.N. Pariiskii, S.N. Barsenkov, V.A. Volkov, D.G. Gridniev,
M.V. Kouznetsov, L.V. Kouznetsova, B.P. Pertsev,
Iou K. Saritcheva, P. Varga, S. Sekivron.

(Etude des marées terrestres, Naouka 1980, pages 65-84).

Les mesures systématiques des variations de marées de la pesanteur ont commencé en URSS lors de la deuxième année géophysique internationale en 1957 quand l'Institut de Physique de la Terre de l'Ac. des Sc. d'URSS a reçu quatre gravimètres "Askania" GS-11. Les premières observations ont été faites par Z.N. Aksentieva en 1955 à Poltava avec un modèle perfectionné du vieux gravimètre Graf.

Nous n'incluons dans notre résumé que les observations faites par la méthode actuelle pour 21 points, commençant depuis la fin de 1959. Les premières observations à Poulkovo, Krasnaïa Pakhra, Alma Ata et Tbilissi ne sont pas inclues dans ce résumé parce qu'on ne tenait pas encore compte alors de la non linéarité des galvanomètres; les étalonnages étaient faits rarement et on ne tenait pas compte de leur variation avec le temps ce qui a pu conduire à des erreurs systématiques.

Lors des observations on a utilisé 13 gravimètres : six GS-11, trois GS-12, deux GS-15, un-BN-07 (Askania transformé par le Professeur Bonatz en système capacitif) un gravimètre à Quartz SKG construit par D.G. Gridniev. Les travaux ont été faits par les collaborateurs de l'Institut de Physique de la Terre de l'Ac. des Sc. d'URSS (Moscou), de l'Observatoire gravimétrique de Poltava de l'Ac. des Sc. d'Ukraine (Poltava) et de l'Institut de Géologie et de Géophysique de l'Ac. des Sc. URSS (Novossibirsk). Ont pris part également aux observations dans les stations de Poulkovo et Obninsk, les collaborateurs de l'Institut Géophysique de l'Etat Hongrois Eötvös et également de l'Institut de Géodésie, de Topographie et de Cartographie de Tchécoslovaquie (Prague).

Outre les données publiées antérieurement on a inclus dans le présent résumé deux nouvelles séries d'observations à Alma-Ata (Talgar) (1821 jours) six séries d'observations à Obninsk (1724 jours) et les observations par trois gravimètres à Poulkovo (525 jours).

Pour tous les points on a fait à nouveau la moyenne avec différents poids et on a introduit de petites corrections comme il est montré plus loin. Trois points voisins en Crimée (Simféropol, Bakhtchissaraï et Yalta) qui donnaient des résultats similaires, ont été réunis en un seul (Crimée).

Les détails de la réduction et les résultats des analyses en chaque point, pour des séries séparées, pour des travaux publiés précédemment, ont été donnés dans la série de tirés à part de l'Inst. de Phys. de la Terre de l'Ac. des Sc. d'URSS et de l'Observatoire Gravimétrique de Poltava.

Le résumé général des données utilisées est donné dans la table 1. La disposition des sites d'observation des variations de marées de la pesanteur et des inclinaisons sur le territoire d'URSS a été donné sur le graphique.

On a soumis en tout à l'analyse 16.136 jours d'observations et la plupart par plusieurs méthodes d'analyse.

Les références (1 à 29) sont données dans la table 2.

Répartition des stations de marées sur le territoire de l'URSS.

1. - Stations gravimétriques de marées
2. - Stations clinométriques de marées.

Table 1

Durée des observations dans les différentes stations

Station	Période d'observations	Nombre d'appareils jour	Nombre d'appareils année	Gravimètres	Nombre de séries
Alma-Ata (Talgar)	XI 1961 – VI 1977	6719	18,40	GS-11 № 126, 134, 167; GS-12 № 186	15
Tachkent	XI 1959 – V 1960	358	0,98	GS-11 № 126, 134	2
Frounze	X 1960 – IV 1961	422	1,16	GS-11 № 126, 134	2
Novossibirsk	VI 1966 – V 1970	989	2,71	GS-12 № 186	4
Krasnaïa Pakhra	III 1965 – XI 1977	1285	3,52	GS-11 № 124; GS-12 № 180; СКГ; СКГ-М	7
Obninsk	VI 1967 – IV 1976	2129	5,83	GS-11 № 124, 135; GS-15 № 220, 221 GS-12 № 190; BN-07	9
Poulkovo	V 1976 – I 1977	525	1,44	GS-15 № 220; BN-07; GS-12 № 201	3
Poltava	V 1964 – VI 1974	1310	3,59	GS-11 № 159; GS-12 № 185	3
Simféropol	I 1965 – VI 1966	467	1,28	GS-11 № 159	1
Yalta	VIII 1966 – V 1968	651	1,78	GS-11 № 159	1
Bakhtchissaraï	VIII 1968 – VI 1971	926	2,54	GS-11 № 159; GS-12 № 185	3
Kiev	VIII 1960 – V 1961	355	0,97	GS-11 № 126, 134	2
	En tout	16136	44,20		

Table 2

Résumé des valeurs δ et $\Delta\phi$ pour des séries de réduction séparées

N° du gravimètre	Début de l'époque	Nombre de jours	δ			$\Delta\phi°$					Source
			M_2	S_2	K_1	O_1	M_2	S_2	K_1	O_1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			Talgar					Talgar			
126	11.XI 1961 r.	572	1,1681 ± 46	1,1764 ± 81	1,1522 ± 71	1,1748 ± 94	-0,61 ±0,21	-2,70 ±0,33	-0,03 ±0,36	0,29 ±0,39	[1]
134	11.XI 1961 r.	568	1,1582 ± 56	1,1380 ± 115	1,1510 ± 128	1,1570 ± 95	-0,35 ±0,30	-1,44 ±0,22	0,48 ±0,78	-0,13 ±0,48	[1]
126	VIII 1963 r.	355	1,1525 ± 66	1,1554 ± 129	1,1337 ± 84	1,1438 ± 66	-0,67 ±0,20	-1,38 ±0,86	-0,89 ±0,51	0,52 ±0,27	[2]
126	I 1965 r.	361	1,1605 ± 52	1,1383 ± 57	1,1267 ± 46	1,1518 ± 80	-0,37 ±0,16	-0,78 ±0,20	0,01 ±0,16	0,22 ±0,33	[3]
134	XI 1964 r.	390	1,1813 ± 80	1,1802 ± 110	1,1540 ± 110	1,1690 ± 105	-0,35 ±0,16	0,36 ±0,56	0,98 ±0,54	0,07 ±0,48	[3]
126	XII 1965 r.	362	1,1354 ± 73	1,1223 ± 98	1,1008 ± 100	1,1248 ± 79	-0,37 ±0,25	-0,58 ±0,48	0,21 ±0,17	0,12 ±0,32	[4]
126	XI 1966 r.	207	1,1495 ± 70	1,1353 ± 50	1,1187 ± 100	1,1418 ± 80	0,23 ±0,20	-0,58 ±0,40	0,71 ±0,60	0,52 ±0,40	[5]
134	XI 1966 r.	207	1,1732 ± 80	1,2033 ± 80	1,1260 ± 110	1,1750 ± 160	0,25 ±0,30	0,56 ±0,50	2,38 ±0,90	1,07 ±0,60	[5]
134	X 1970 r.	280	1,1783 ± 91	1,1983 ± 127	1,1469 ± 144	1,1800 ± 86	-0,22 ±0,20	-0,50 ±0,38	0,21 ±0,29	0,47 ±0,33	[6]
167	VIII 1967 r.	677	1,1527 ± 33	1,1560 ± 67	1,1449 ± 95	1,1630 ± 128	0,12 ±0,16	2,10 ±0,32	-0,80 ±0,48	-0,29 ±0,63	[7]
167	VIII 1969 r.	294	1,1660 ± 67	1,1629 ± 133	1,1319 ± 62	1,1560 ± 57	-0,73 ±0,23	0,02 ±0,36	0,13 ±0,46	0,08 ±0,30	[7]
167	XI 1971 r.	237	1,1568 ± 27	1,1589 ± 56	1,1393 ± 41	1,1623 ± 60	-1,23 ±0,11	-1,25 ±0,23	-0,56 ±0,69	-0,32 ±0,29	[7]
167	VII 1972 r.	165	1,1617 ± 30	1,1558 ± 50	1,1431 ± 50	1,1592 ± 70	-1,11 ±0,13	-0,11 ±0,25	-0,97 ±0,25	-0,35 ±0,35	[7]
167	XII 1972 r.	1642	1,1635 ± 20	1,1650 ± 20	1,1431 ± 27	1,1695 ± 36	-0,54 ±0,06	-0,07 ±0,10	0,29 ±0,13	0,01 ±0,14	[8]
186	I 1974 r.	356	1,1401 ± 40	1,1403 ± 88	1,1140 ± 93	1,1415 ± 132	-0,20 ±0,20	0,70 ±0,44	1,44 ±3,47	-0,60 ±0,60	[9]
			Tachkent					Tachkent			
126	XI 1959 r.	179	1,1477 ± 36	1,1345 ± 52	1,1190 ± 57	1,1490 ± 66	-1,27 ±0,12	-0,53 ±0,27	-0,15 ±0,21	0,32 ±0,24	[10]
134	XI 1959 r.	179	1,1363 ± 38	1,1333 ± 50	1,1243 ± 38	1,1473 ± 87	-1,35 ±0,12	-1,99 ±0,26	0,03 ±0,16	-0,63 ±0,16	[10]

1	2		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				Frounze					Frounze			
126	XI	1960 г.	195	1,1614 ± 59	1,1342 ± 74	1,1387 ± 76	1,1629 ± 62	-0,57 ±0,18	-0,38 ±0,38	0,11 ±0,35	1,02 ±0,48	[11]
134	X	1960 г.	227	1,1451 ± 50	1,1138 ± 82	1,1170 ± 60	1,1420 ± 82	-0,65 ±0,12	-3,44 ±0,46	0,38 ±0,32	0,57 ±0,38	[11]
				Novossibirsk					Novossibirsk			
186	XII	1966 г.	187	1,1291 ± 40	1,1228 ± 190	1,0832 ± 80	1,1193 ± 90	0,26 ±0,36	0,92 ±0,37	1,30 ±0,58	0,54 ±0,59	[12]
186	II	1967 г.	304	1,1472 ± 120	1,1298 ± 180	1,1070 ± 110	1,1143 ± 120	0,28 ±0,48	2,21 ±0,74	1,26 ±0,73	-0,26 ±0,50	[12]
186	III	1968 г.	203	1,1301 ± 90	1,1338 ± 170	1,1000 ± 80	1,1173 ± 120	0,63 ±0,61	-0,88 ±0,84	0,10 ±0,87	-1,36 ±0,82	[12]
186	X	1969 г.	295	1,1371 ± 120	1,1248 ± 220	1,1231 ± 80	1,1353 ± 170	0,00 ±0,52	-1,02 ±0,89	0,29 ±0,87	-0,04 ±0,88	[12]
				Krasnaïa Pakhra					Krasnaïa Pakhra			
124	XII	1968 г.	77	1,2132 ± 150	1,1960 ± 250	1,1633 ± 280	1,2184 ± 290	11,32 ±0,60	-0,32 ±1,50	-0,15 ±0,90	0,18 ±2,00	[13]
180	X	1968 г.	124	1,2034 ± 80	1,1357 ± 150	1,2042 ± 150	1,1944 ± 100	-0,40 ±0,50	-2,50 ±1,25	-0,01 ±1,00	-0,20 ±0,55	[13]
СКГ	III	1965 г.	60	1,2002 ± 70	1,1838 ± 100	1,1201 ± 130	1,1514 ± 100	-0,10 ±0,85	-2,30 ±0,85	-1,50 ±1,30	0,80 ±0,80	[14]
СКГ	30.XII	1965 г.	31	1,1690 ± 100	1,2250 ± 140	1,1242 ± 180	1,1414 ± 140	-0,20 ±1,20	-1,10 ±1,22	0,60 ±2,05	0,30 ±1,10	[15]
180	9.X	1967 г.	105	1,1712 ± 80	1,1739 ± 160	1,1161 ± 170	1,1293 ± 110	0,08 ±0,50	-0,81 ±1,25	-0,17 ±0,86	-0,17 ±0,55	[16]
180	5.XII	1970 г.	733	1,1873 ± 50	1,1930 ± 110	1,1281 ± 70	1,1514 ± 50	-0,50 ±0,20	-1,70 ±0,50	-0,40 ±0,40	0,00 ±0,40	[17]
СКГ	1.VIII	1970 г.	156	1,1798 ± 48	1,1834 ± 93	1,1266 ± 84	1,1567 ± 151	-0,73 ±0,20	-2,22 ±0,45	-0,54 ±0,42	-0,84 ±0,38	[18]
				Obninsk					Obninsk			
124	28.VI	1967 г.	152	1,1617 ± 60	1,1597 ± 120	1,1293 ± 130	1,1303 ± 210	-0,48 ±0,40	0,38 ±0,70	-0,05 ±0,70	-1,52 ±1,00	[19]
135	27.XII	1968 г.	132	1,1708 ± 25	1,1936 ± 53	-1,1387 ± 50	1,1529 ± 80	0,80 ±0,40	-2,20 ±0,70	0,10 ±0,30	0,60 ±0,40	[19]
220	27.IV	1973 г.	121	1,1874 ± 60	1,1911 ± 140	1,1544 ± 120	1,1586 ± 50	-0,55 ±0,20	-0,83 ±0,50	0,11 ±0,50	0,04 ±0,20	[20]
190	22.I	1973 г.	333	1,1510 ± 95	1,1603 ± 220	1,1322 ± 82	1,1751 ± 121	-0,32 ±0,47	-4,13 ±0,99	-0,59 ±0,62	0,15 ±0,83	[21]
BN-07	22.VIII	1975 г.	235	1,1963 ± 28	1,1853 ± 43	1,1427 ± 44	1,1643 ± 47	-0,29 ±0,09	-0,21 ±0,18	-0,09 ±0,24	-0,28 ±0,19	[21]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
135	III 1971 г.	303	1,2116 ± 70	1,1936 ± 102	1,1536 ± 60	1,1808 ± 76	0,15 ±0,20	-0,74 ±1,77	-0,28 ±0,50	0,55 ±0,62	[22]
135	10.II 1974 г.	423	1,1942 ± 86	1,1985 ± 84	1,1534 ± 80	1,1693 ± 54	0,70 ±0,17	0,06 ±0,34	0,28 ±0,20	0,46 ±0,24	[22]
220	28.VIII 1974 г.	202	1,1861 ± 40	1,1524 ± 100	1,1298 ± 66	1,1614 ± 69	-0,32 ±0,21	1,22 ±0,55	0,24 ±0,48	-0,33 ±0,20	[22]
221	30.VIII 1975 г.	228	1,1939 ± 86	1,2000 ± 139	1,1433 ± 102	1,1618 ± 118	-0,29 ±0,23	-2,28 ±0,43	-1,21 ±0,37	-0,37 ±0,50	[22]
	Poulkovo							Poulkovo			
220	25.V 1976 г.	236	1,1790 ± 32	1,1722 ± 70	1,1426 ± 66	1,1623 ± 54	-0,27 ±0,20	1,56 ±0,42	-0,87 ±0,30	-0,40 ±0,30	[23]
BN-07	13.V 1976 г.	161	1,1848 ± 28	1,1713 ± 110	1,1408 ± 53	1,1558 ± 56	-1,06 ±0,19	-0,66 ±0,32	-1,56 ±0,20	-0,76 ±0,45	[23]
201	13.V 1976 г.	128	1,1769 ± 57	1,1851 ± 132	1,1438 ± 68	1,1572 ± 128	-0,52 ±0,31	-0,73 ±0,66	-1,19 ±0,34	-0,99 ±0,56	[23]
	Poltava							Poltava			
159	6.IX 1961 г.	810	1,1829 ± 50	1,1771 ± 210	1,1454 ± 106	1,1770 ± 66	0,97 ±0,20	0,73 ±0,40	0,36 ±0,22	0,37 ±0,28	[24]
159	27.XI 1973 г.	365	1,1812 ± 34	1,2101 ± 72	1,1408 ± 65	1,1561 ± 94	0,22 ±0,12	-0,29 ±0,12	-0,41 ±0,33	0,19 ±0,23	[25]
185	13.IV 1974 г.	135	1,1833 ± 59	1,2044 ± 117	1,1459 ± 186	1,1474 ± 285	0,08 ±0,21	1,27 ±0,40	1,46 ±0,66	-0,30 ±1,01	[25]
	Simféropol							Simféropol			
159	VIII 1964 г.	467	1,1747 ± 49	1,2474 ± 152	1,1489 ± 127	1,1543 ± 104	-0,40 ±0,20	0,00 ±0,80	1,00 ±0,40	0,40 ±0,50	[26]
	Yalta							Yalta			
159	VI 1966 г.	651	1,1704 ± 43	1,1789 ± 122	1,1041 ± 86	1,1405 ± 73	0,30 ±0,20	4,30 ±0,90	0,80 ±0,20	0,20 ±0,20	[26]
	Bakhtchissaraï							Bakhtchissaraï			
185	VIII 1968 г.	926	1,1689 ± 22	1,1689 ± 118	1,1315 ± 94	1,1620 ± 59	0,07 ±0,17	-4,48 ±0,33	-0,87 ±0,39	0,82 ±0,49	[27] [28]
	Kiev							Kiev			
124	23.XII 1960 г.	175	1,1882 ± 150	1,2336 ± 260	1,1315 ± 250	1,1476 ± 190	0,02 ±0,40	0,88 ±0,60	-0,15 ±0,30	2,50 ±0,50	[29]
135	4.VIII 1960 г.	180	1,2002 ± 130	1,2432 ± 450	1,1571 ± 50	1,1722 ± 310	0,70 ±0,70	-0,10 ±1,10	0,50 ±0,80	0,80 ±0,90	[29]

Les valeurs obtenues par l'analyse harmonique au spectrale du facteur gravimétrique et du retard de phase $\Delta\phi$ ont été corrigées au préalable des erreurs instrumentales : retards de phase de l'instrument provoqués par le retard fondamental du galvanomètre enregistreur et petite correction à l'amplitude déterminée par ce retard, également la petite correction du tour du micromètre (inégalité de distance entre les traits de la ligne de mesure exactement de 100 divisions du micromètre). Ces corrections sont données dans la table 3; la correction Lecolazet-Wenzel de réduction à la normale ellipsoïdale (30) est donnée dans la table 4.

Table 3

Corrections instrumentales Δ aux valeurs δ et $\Delta\phi$

Gravimètre	$\delta \cdot 10^4$				$\Delta(\Delta\phi^\circ)$				Corrections au tour de vis
	M_2	S_2	K_1	O_1	M_2	S_2	K_1	O_1	
GS-11 № 124	37	39	10	8	4,32	4,48	2,25	2,08	-80
GS-11 № 126	13	14	3	3	2,53	2,62	1,31	1,22	-60
GS-11 № 134	20	21	6	5	2,98	3,08	1,55	1,44	-90
GS-11 № 135	12	12	0	0	2,10	2,20	1,10	1,00	-14
GS-12 № 180	0	0	0	0	0,10	0,10	0	0	60
GS-15 № 220*	0	0	0	0	1,85	1,92	0,96	0,89	
BN-07*	0	0	0	0	0	0	0	0	
GS-15 № 221*	4	5	0	0	1,29	1,34	0,62	0,58	
GS-11 № 167	0	0	0	0	0,22	0,23	0,11	0,10	-20
GS-11 № 159*	6	6	1	1	1,74	1,80	0,90	0,83	
GS-12 № 185*	2	2	1	0	1,13	1,17	0,58	0,54	
GS-12 № 186*	4	4	0	0	1,40	1,47	0,73	0,68	
СКГ*	0	0	0	0	0	0	0	0	
GS-12 № 201*	153	167	39	35	8,87	9,17	4,63	4,29	
GS-11 № 190*	21	20	6	5	3,34	3,34	1,67	1,67	

* Lors des observations avec ce gravimètre les corrections du tour de vis ont été prises en considération lors de l'étalonnage

Table 4

Corrections à la normale ellipsoïdale et correction d'inertie

Stations	Correction à la normale ellipsoïdale				Correction d'inertie			
	M_2	S_2	K_1	O_1	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata (Talgar)	37	37	-3	-3	-35	-37	-13	-12
Tachkent	34	34	-5	-5	-35	-37	-13	-12
Frounze	36	35	-3	-3	-35	-37	-13	-12
Novossibirsk	51	51	13	12	-33	-36	-12	-10
Obninsk	53	53	13	13	-33	-36	-12	-10
Krasnaïa Pakhra	53	53	13	13	-33	-36	-12	-10
Poulkovo	59	59	19	19	-33	-35	-11	-10
Poltava	46	46	6	6	-34	-36	-12	-11
Crimée	39	39	-1	-1	-34	-37	-13	-12
Kiev	48	50	7	7	-34	-36	-12	-11

Les données observées contiennent également l'influence des forces d'inertie : le site d'observation oscille à cause des variations de marées par rapport à la Terre en rotation, alors pour l'interprétation géophysique des déformations de marées, il faut déduire l'influence de ces forces d'inertie.

Les formules pour le calcul de la force d'inertie, de la force de Coriolis et des forces d'accélération centrifuge sont données dans l'article de N.N. Pariiskii et B.P. Pertsev (31). Les valeurs numériques de corrections aux valeurs δ et $\Delta\phi$ dues à l'influence des forces d'inertie sont données dans la table 4.

Comme l'a remarqué S.M. Molodenskii, les forces d'inertie provenant de la nutation doivent influencer également les ondes diurnes. Le calcul des corrections correspondantes est donné en (31). Nous tenons compte de cette correction qui ne dépend pratiquement pas de la latitude, à la fin du travail.

Les corrections aux valeurs δ et $\Delta\phi$ dues à l'influence des marées océaniques des zones lointaines (plus de 1300 km) ont été calculées par B.P. Pertsev sur la base des cartes originales de K.T. Bogdanov et V.A. Magarik corrigées de la conservation du volume général des masses d'eau (33). Le calcul de l'influence des zones proches pour la Crimée, Poltava et Poulkovo n'a pas été fait car les marées dans la Mer Noire et la Baltique sont faibles. Le résumé des corrections aux marées océaniques est donné dans la table 5.

Table 5

Corrections dues aux marées océaniques

Station	$\delta \cdot 10^4$				$\Delta\phi''$			
	M_2	S_2	K_1	O_1	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata (Talgar)	- 77	36	46	26	0,53	0,43	-0,31	-0,16
Tachkent	-125	10	75	42	0,42	0,52	-0,40	-0,21
Frounze	- 93	27	54	30	0,51	0,47	-0,34	-0,18
Novossibirsk	- 36	50	9	5	0,40	0,17	-0,18	-0,15
Obninsk	-164	-55	26	39	-0,30	0,46	-0,08	-0,12
Krasnaïa Pakhra	-163	-54	26	38	-0,30	0,46	-0,08	-0,13
Poulkovo	-238	-78	15	46	-0,45	0,89	-0,06	-0,14
Poltava	-171	-77	36	41	-0,27	0,39	-0,11	-0,09
Crimée	-164	-89	49	45	-0,31	0,28	-0,13	-0,09
Kiev	-186	-92	31	42	-0,36	0,40	-0,10	-0,10

Nous donnons dans la table 6, par sites, les valeurs pondérées moyennes δ et $\Delta\phi$ pour les quatre ondes principales avec des poids proportionnels au nombre de jours d'observations par appareil, avec toutes les corrections indiquées précédemment, outre les corrections dues à l'influence des océans et leurs erreurs quadratiques moyennes. Les erreurs sont obtenues selon l'accord des séries séparées de l'observation (voir table 2).

Les analyses ont été faites par différentes méthodes : Pertsev, Venedikov, Matveyev, Lecolazet et spectrale. On a pris les résultats moyens obtenus d'après quelques méthodes qui diffèrent peu l'une de l'autre.

Table 6

Valeurs moyennes de δ et $\Delta\phi$ par stations avec poids proportionnels au nombre de jour d'observations par appareil dans chaque série et avec toutes les corrections, excepté l'influence des océans.

Stations	δ				$\Delta\phi''$			
	M_2	S_2	K_1	O_1	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata	1,1602	1,1592	1,1384	1,1607	-0,41	-0,31	+0,19	+0,06
(Talgar)	± 26	± 67	± 46	± 45	± ,13	± ,33	± ,26	± ,13
Tachkent	1,1420	1,1338	1,1214	1,1487	-1,31	-1,31	-0,11	-0,10
	± 52	± 11	± 27	± 13	± ,04	± ,73	± ,02	± ,42
Frounze	1,1526	1,1232	1,1270	1,1517	-0,61	-2,03	+0,26	+0,78
	± 81	± 102	± 108	± 104	± ,04	±1,52	± ,14	± ,22
Novossibirsk	1,1373	1,1278	1,1059	1,1221	+0,26	+0,37	+0,74	-0,27
	± 42	± 30	± 80	± 51	± ,13	± ,82	± ,31	± ,36
Obninsk	1,1851	1,1767	1,1430	1,1653	+0,01	-1,05	-0,16	+0,02
	± 68	± 58	± 34	± 44	± ,16	± ,58	± ,17	± ,20
Krasnaïa	1,1883	1,1815	1,1359	1,1582	-0,34	-1,70	-0,37	-0,08
Pakhra	± 42	± 102	± 99	± 86	± ,19	± ,22	± ,13	± ,14
Poulkovo	1,1803	1,1751	1,1423	1,1591	-0,57	+0,32	-1,16	-0,65
	± 23	± 40	± 8	± 21	± ,20	± ,79	± ,21	± ,20
Poltava	1,1825	1,1891	1,1442	1,1681	+0,67	+0,50	+0,26	+0,25
	± 16	± 109	± 15	± 81	± ,27	± ,36	± ,37	± ,14
Crimée	1,1707	1,1904	1,1267	1,1534	+0,04	-0,66	+0,09	+0,53
	± 16	± 221	± 120	± 66	± ,21	±2,69	± ,62	± ,20
Kiev	1,1943	1,2385	1,1445	1,1601	+0,36	+0,38	+0,18	+1,65
	± 60	± 48	± 128	± 123	± ,11	± ,24	± ,32	± ,85

Nous indiquons dans la table 8 les moyennes pour chaque site à partir des deux procédés de pondération (voir table 6 et 7) avec introduction des corrections dues à l'influence des océans. En outre, nous donnons dans cette table les valeurs moyennes de δ et $\Delta\phi$ par groupes de stations obtenues avec les poids $p = 1/\varepsilon^2$, où ε est l'erreur quadratique moyenne. Les erreurs données pour ces moyennes sont calculées d'après l'accord des résultats pour les stations séparées en tenant compte des poids :

$$\epsilon = \sqrt{\Sigma \Delta_i^2 P_i / (n-1) \Sigma P_i},$$

où n est le nombre de stations entrant dans le groupe; Δ_i est l'écart des données de la station en fonction de la moyenne du groupe.

La plupart des séries a été analysée par les deux méthodes. Nous donnons dans la table 7 les moyennes par sites, avec des poids inversement proportionnels aux carrés des erreurs quadratiques moyennes obtenues par analyse de séries séparées. On a introduit également toutes les corrections excepté les corrections dues aux océans.

Table 7

Valeurs moyennes δ et $\Delta\phi$ par stations avec des poids inversement proportionnels aux carrés des erreurs quadratiques moyennes des séries ($p = 1/\varepsilon^2$).

Stations	δ			
	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata (Talgar)	1,1590 ± 23	1,1579 ± 46	1,1377 ± 28	1,1591 ± 36
Tachkent	1,1423 ± 57	1,1339 ± 08	1,1227 ± 24	1,1488 ± 11
Frounze	1,1519 ± 80	1,1250 ± 101	1,1253 ± 105	1,1553 ± 100
Novossibirsk	1,1313 ± 29	1,1284 ± 25	1,1028 ± 88	1,1195 ± 35
Obninsk	1,1830 ± 50	1,1831 ± 46	1,1440 ± 29	1,1641 ± 29
Krasnaïa Pakhra	1,1864 ± 47	1,1671 ± 163	1,1330 ± 92	1,1552 ± 76
Poulkovo	1,1818 ± 23	1,1741 ± 35	1,1421 ± 09	1,1590 ± 22
Poltava	1,1820 ± 07	1,2061 ± 62	1,1424 ± 16	1,1693 ± 74
Crimée	1,1700 ± 14	1,1916 ± 222	1,1230 ± 126	1,1536 ± 68
Kiev	1,1950 ± 59	1,2360 ± 42	1,1561 ± 49	1,1543 ± 109

Table 7 (finale)

Stations	$\Delta\phi$			
	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata (Talgar)	-0°55 ± 10	-0°38 ± 23	+0°10 ± 13	+0°10 ± 08
Tachkent	-1,31 ± ,04	-1,29 ± ,73	-0,04 ± ,09	-0,34 ± ,44
Frounze	-0,62 ± ,04	-1,65 ±1,50	+0,26 ± ,13	+0,74 ± ,22
Novossibirsk	+0,27 ± ,12	+0,70 ± ,57	+0,90 ± ,30	-0,16 ± ,35
Obninsk	-0,13 ± ,14	-0,38 ± ,29	-0,01 ± ,15	-0,04 ± ,13
Krasnaïa Pakhra	-0,46 ± ,19	-1,88 ± ,21	-0,41 ± ,12	-0,25 ± ,19
Poulkovo	-0,66 ± ,26	+0,04 ± ,74	-1,32 ± ,21	-0,59 ± ,17
Poltava	-0,35 ± ,24	-0,09 ± ,32	+0,22 ± ,34	+0,25 ± ,09
Crimée	0,00 ± ,20	-2,99 ±2,04	+0,54 ± ,24	+0,30 ± ,15
Kiev	+0,19 ± ,29	+0,66 ± ,41	-0,07 ± ,29	+2,10 ± ,72

Comme nous le montre la table 8, deux groupes de stations européennes donnent pour les ondes M_2, K_1 et O_1 des résultats voisins :

Pour l'onde M_2 $\quad \delta(II) - \delta(III) = +0,0049$ (0,42 %)

Pour l'onde O_1 $\quad \delta(II) - \delta(III) = +0,0011$ (0,09 %)

Pour l'onde K_1 $\quad \delta(II) - \delta(III) = -0,0030$ (0,26 %)

Table 8

Moyenne des tables 6 et 7 en tenant compte des corrections de l'influence des océans

Stations	δ			
	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata	1,1519±35	1,1622± 58	1,1426± 40	1,1625± 41
Tachkent	1,1297±68	1,1328± 09	1,1145± 36	1,1446± 18
Frounze	1,1429±86	1,1268±102	1,1316±108	1,1565±102
Novossibirsk	1,1307±38	1,1331± 33	1,1053± 84	1,1213± 43
Ier groupe	1,1408±60	1,1334± 25	1,1254± 83	1,1444± 62
Obninsk	1,1676±81	1,1744± 55	1,1451± 33	1,1686± 38
Krasnaïa Pakhra	1,1711±76	1,1689±144	1,1370± 96	1,1605± 82
Poulkovo	1,1572±82	1,1668± 46	1,1437± 10	1,1636± 27
IIème groupe	1,1656±42	1,1699± 26	1,1438± 5	1,1650± 18
Poltava	1,1551±67	1,1899± 89	1,1469± 20	1,1728± 79
Crimée	1,1536±53	1,1821±223	1,1297±124	1,1580± 69
Kiev	1,1760±64	1,2280± 55	1,1534± 89	1,1614±117
IIIème groupe	1,1607±71	1,2160±128	1,1468± 21	1,1639± 48
IIème + IIIème groupes	1,1625±40	1,1864±111	1,1443± 9	1,1648± 16
IIème + IIIème et Ier groupe	+0,0217±72	+0,0530±114	+0,0189± 83	+0,0204± 64

Table 8 (fin)

Stations	$\Delta\phi^\circ$			
	M_2	S_2	K_1	O_1
Alma-Ata	+0,05±,22	+0,09±,31	-0,17±,22	-0,08±,11
Tachkent	-0,86±,16	-0,78±,75	-0,48±,14	-0,43±,44
Frounze	-0,11±,17	-1,37±1,52	-0,08±,18	+0,58±,23
Novossibirsk	+0,66±,18	+0,71±,70	+0,64±,31	-0,37±,36
Ier groupe	-0,13±,33	+0,03±,26	-0,21±,19	-0,06±,16
Obninsk	-0,36±,18	+0,08±,39	-0,16±,16	-0,13±,16
Krasnaïa Pakhra	-0,70±,21	-1,33±,27	-0,47±,12	-0,29±,16
Poulkovo	-1,07±,27	+1,07±,82	-1,30+,21	-0,76±,19
IIème groupe	-0,62±,19	-0,74±,57	-0,52±,27	-0,35±,18
Poltava	-0,06±,28	+0,59±,36	+0,13±,36	+0,16±,12
Crimée	-0,14±,22	-1,04±,32	+0,19±,43	+0,33±,18
Kiev	-0,08±,23	+0,92±,35	-0,04±,30	+1,78±,78
IIIème groupe	-0,10±,02	+0,74±,18	+0,07±,07	+0,24±,15
IIème + IIIème groupes	-0,39±15	-0,10±42	-0,43±18	-0,06±16
IIème + IIIème et Ier groupe				

Remarque : 1) les moyennes par groupes sont prises avec les poids $p = 1/\varepsilon^2$.

2) les erreurs moyennes données dans les tables 6 et 7 sont augmentées à cause des erreurs de détermination de la correction de l'influence des océans prise conventionnellement égale à 1/3 de la correction elle-même.

Les résultats pour l'onde S_2 ne s'accordent pas bien à cause probablement des influences de température. Dans la suite nous l'éliminerons de la discussion. Les valeurs moyennes de δ pour toutes les stations européennes diffèrent systématiquement des valeurs de δ pour les quatre sites asiatiques (groupe 8). En moyenne avec les poids $p = 1/\varepsilon^2$, δ (Europe) - δ (Asie) = +0,0205 ± 0,0007 (1,77 %). On a obtenu une très petite erreur sans doute à cause de la coïncidence accidentelle des résultats d'après trois ondes.

Si nous ajoutons aux ondes diurnes K_1 et O_1 les corrections de l'influence du noyau liquide respectivement +0,0220 et +0,0007 et également les corrections de M.S. Molodenskii de l'influence des forces d'inertie de nutation ne dépendant pas de la latitude du site, +0,0033 pour l'onde K_1 et +0,0031 pour l'onde O_1, alors, pour les trois ondes principales, δ et leurs moyennes simples (moyenne avec les poids $p = 1/\varepsilon^2$) auront les valeurs suivantes :

Sites	M_2	O_1	K_1	Moyenne
Européens	1,1625	1,1686	1,1696	1,1669
Asiatiques	1,1408	1,1482	1,1507	1,1466

Si nous faisons la moyenne du groupe des stations avec des poids proportionnels au nombre de jours appareil d'observations dans la station, alors nous obtiendrons

Sites	M_2	O_1	K_1	Moyenne
Européens	1,1620	1,1682	1,1655	1,1652
Asiatiques	1,1480	1,1604	1,1620	1,1568

La différence de pondération par cette méthode est sensiblement plus petite.

Si nous attribuions à chaque station un poids égal, alors on obtiendrait les résultats suivants :

Sites	M_2	O_1	K_1	Moyenne
Européens	1,1634	1,1680	1,1679	1,1664
Asiatiques	1,1388	1,1500	1,1400	1,1429

Avec cette moyenne la différence est plus grande.

Il convient de noter que les résultats les plus sûrs, obtenus à Alma-Ata (Talgar), donnent une différence sensiblement plus petite avec les sites européens. De plus, jusqu'à présent, les résultats obtenus à Novossibirsk le sont par un seul appareil. A présent on fait à Novossibirsk des observations simultanées avec quatre gravimètres.

Les différences entre $\delta(M_2)$ et $\delta(O_1)$ s'expliquent probablement dans une mesure importante par l'imprécision des cartes cotidales et respectivement par l'imprécision des corrections de l'influence des marées océaniques.

Table 9

Valeurs $\delta(O_1) - \delta(K_1)$ pour différents sites (en tenant compte de l'influence des océans)

Stations	Nombre d'appareils	$\Delta=\delta(O_1)-\delta(K_1)$	ϵ_Δ	Corrections calendée de l'influence des océans
Alma-Ata	4	+0,0199	±0,0057	-0,0020
Tachkent	2	+0,0301	±0,0040	-0,0033
Frounze	2	+0,0249	±0,0144	-0,0024
Novossibirsk	1	+0,0160	±0,0094	-0,0004
Obninsk	4	+0,0235	±0,0050	+0,0013
Poulkovo	3	+0,0199	±0,0029	+0,0031
Krasnaïa Pakhra	3	+0,0235	±0,0126	+0,0012
Poltava	2	+0,0259	±0,0081	+0,0005
Crimée	2	+0,0283	±0,0142	-0,0004
Kiev	2	+0,0080	±0,0147	+0,0011
Moyenne	$(p\sim 1/\epsilon^2)$	+0,0227	±0,0011	
	$(p \sim N)$	+0,0207	±0,0014	
	$(p = 1)$	+0,0220	±0,0020	

Table 10

Moyenne de $\delta\phi$ pour différents points

Sites	p_1		p_2	
	$\Delta\phi(M_2, S_2)$	$\Delta\phi(O_1, K_1)$	$\Delta\phi(M_2, S_2)$	$\Delta\phi(O_1, K_1)$
Européens	$-0^\circ,10\pm0^\circ,02$	$+0^\circ,03\pm0^\circ,07$	$-0^\circ,33\pm0^\circ,09$	$-0^\circ,13\pm0^\circ,09$
Asiatiques	-0,03±0,20	-0,12±0,12	-0,03±0,20	-0,12±0,12
Moyenne				
$(p = 1/\epsilon^2)$	-0,10±0,02	-0,01±0,06	-0,28±0,11	-0,13±0,07
$(p = N)$	-0,06±0,10	-0,03±0,07	-0,17±0,11	-0,12±0,08
$(p = K)$	-0,07±0,10	-0,05±0,07	-0,21±0,11	-0,13±0,08

Remarque : p_1 est la moyennisation des groupes II et III avec les poids $p = 1/\epsilon^2$ et la moyenne des deux ondes avec $p = 1/\epsilon^2$ et $\epsilon_{moy.} = 1/\sqrt{\Sigma}_p$.
p_2 est la moyenne des groupes II et III avec poids p = N (N est le nombre de jours appareil d'observations), $\epsilon_{moy.} = 1/\sqrt{\Sigma}_p$ et la moyenne des deux ondes avec $p = 1/\epsilon^2$ et $\epsilon_{moy.} = 1/2\ \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$.
K est le nombre de sites européens et asiatiques.

On sait que M.S. Molodenskii a calculé, pour un modèle de la Terre avec un noyau externe liquide et interne solide (modèle II), l'influence du noyau liquide sur les valeurs de δ pour les différentes ondes (34). Il a obtenu $\delta(O_1) - \delta(K_1) = +0,022$.

Nous avons déja découvert cette différence dans les observations de 1959 à 1960 à Tachkent et ensuite à Frounze en 1960-1961 (10, 11). Dans notre résumé cette différence pour les sites séparés est donnée dans la table 9.

On y a introduit toutes les corrections, en incluant aussi les corrections dues aux océans mais comme dans toutes les valeurs de δ données précédemment, pour les ondes diurnes on n'a pas introduit les corrections inertielles en relation avec les mouvements de nutation calculés plus tard par S.M. Molodenskii (32).

$$\Delta\delta(O_1)=+0{,}00311, \quad \Delta\delta(K_1)=+0{,}00327, \quad \Delta[\delta(O_1)-\delta(K_1)]=-0{,}00016.$$

En en tenant compte nous obtenons en moyenne, pour tous les sites

$$\delta(O_1)-\delta(K_1)=+0{,}0225\pm0{,}0011,$$

ce qui concorde avec la théorie de M.S. Molodenskii et correspond à $\delta(O_1)/\delta(K_1)=1{,}0197$.

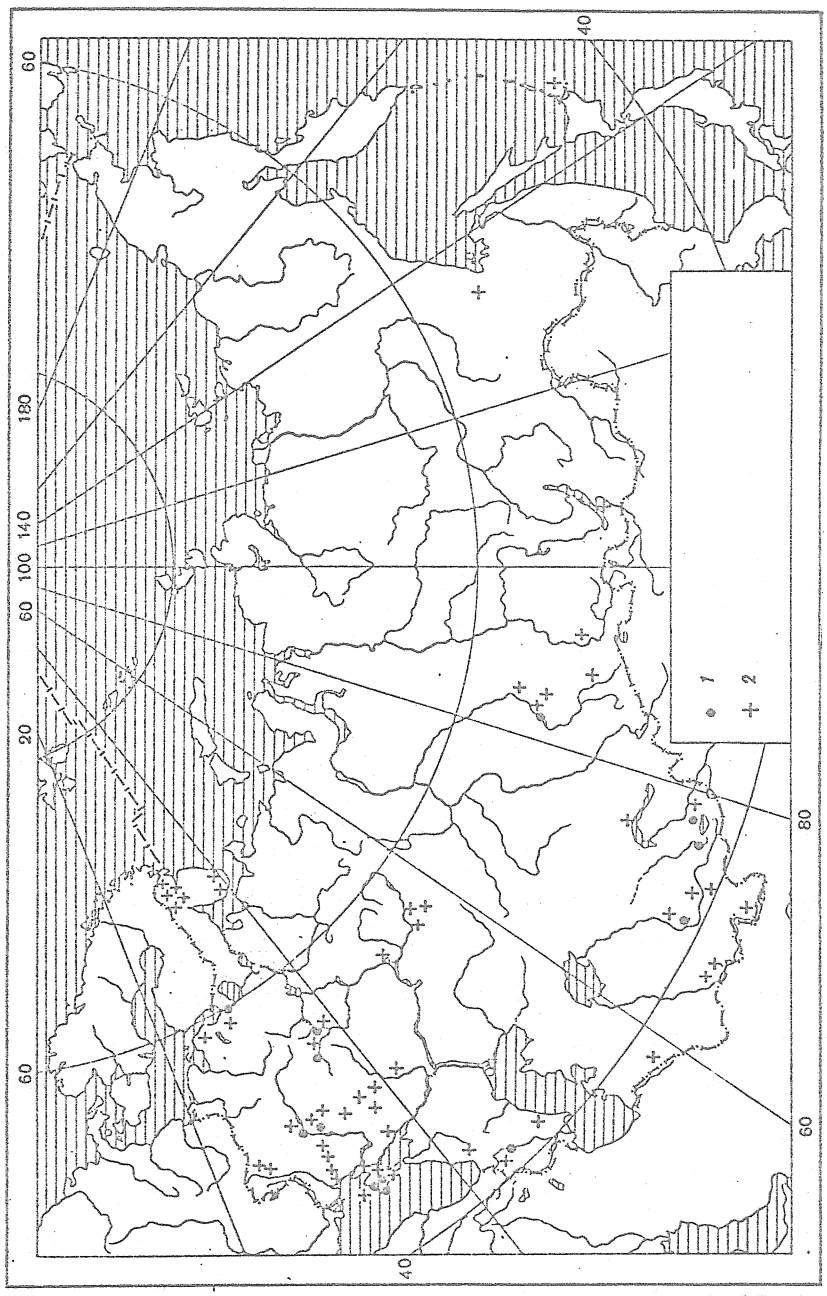
Pour la plupart des analyses les ondes K_1 et P_1 n'ont pas été séparées mais habituellement lors des analyses de séries d'une durée d'une demi année ou d'une année l'influence de l'onde P_1 s'élimine pratiquement en moyenne.

Le retard de phase $\Delta\phi$ par rapport à la marée théorique pour une Terre absolument rigide (voir table 8) est donné dans la table 10.

En moyenne par différents procédés de pondération $\Delta\phi\ (M_2, S_2) = -0{,}15 \pm 0{,}09$, $\Delta\phi(O_1, K_1) = -0{,}08 \pm 0{,}07$.

La précision de la détermination de $\Delta\phi$ n'est pas encore suffisante pour parler de façon sûre de l'absence régionale de retard pour les groupes européen et asiatique de stations. Les retards obtenus ne permettent pas de juger de l'application ou de la non application des modèles rhéologiques de la structure de la Terre. Il ne faut également pas juger des valeurs du facteur rhéologique Q pour toute la Terre d'après les données d'une petite partie de la surface de la Terre sur laquelle sont réparties nos stations (voir figure). Les données obtenues peuvent présenter un intérêt pour l'étude ultérieure des hétérogénéités globales horizontales des propriétés élastiques du manteau (35).

Pour comparer avec les modèles théoriques de la structure interne de la Terre d'après les valeurs observées de δ il faut encore construire des modèles tenant compte de la contraction de la Terre, dont la théorie de calcul est donnée dans le travail de M.S. Molodenskii (36) mais cette comparaison exige un réseau global de stations de marées.



Расположение приливных станций на территории СССР

1 – гравиметрические приливные станции; *2* – наклономерные приливные станции

BIBLIOGRAPHIE

1. Барсенков С.Н., Волков В.А., Гриднев Д.Г. и др. Приливные измерения силы тяжести в Талгаре, определенные скользящим методом по 19-месячным наблюдениям двумя гравиметрами. – В кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 1967, с. 62-110.
2. Барсенков С.Н., Волков В.А., Кузнецов М.В., Парийский Н.Н. Наблюдения приливных измерений силы тяжести в Талгаре I в 1963-1964 гг. – В кн.: Методика измерения земных приливов и медленных деформаций земной поверхности. М.: Наука, 1970, с. 3-25.
3. Барсенков С.Н., Волков В.А., Кузнецов М.В. и др. Приливные измерения силы тяжести в Талгаре II. – В кн.: Методика измерения земных приливов и медленных деформаций земной поверхности. М.: Наука, 1970, с. 26-73.
4. Барсенков С.Н., Волков В.А., Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Парийский Н.Н. Приливные изменения силы тяжести в Талгаре в 1966 г. – В кн.: Медленные движения земной коры. М.: Наука, 1972, с. 53-78.
5. Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Парийский Н.Н. Результаты полугодового ряда наблюдений за приливными вариациями ускорений силы тяжести в Талгаре в 1967 г. – В кн.: Медленные движения земной коры. М.: Наука, 1972, с. 79-112.
6. Парийский Н.Н., Барсенков С.Н., Волков В.А., Гриднев Д.Г., Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Перцев Б.П., Шибаев Ю.Ф. Приливные изменения силы тяжести в Талгаре по многолетним наблюдениям. – В кн.: Приливные деформации Земли. М.: Наука, 1975, с. 5-23.
7. Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Парийский Н.Н., Шибаев Ю.Ф. Результаты шестилетних наблюдений приливных вариаций силы тяжести гравиметром "Аскания" № 167 в Талгаре. – В кн.: Приливные деформации Земли. М.: Наука, 1975, с. 24-42.
8. Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Парийский Н.Н., Шибаев Ю.Ф. Наблюдения земных приливов на станции Алма-Ата (Талгар) гравиметром "Аскания" GS-11 № 167 в 1973-1977 гг. – Наст. сборник, с. 96-101.
9. Кузнецов М.В., Кузнецова Л.В., Сарычева Ю.К., Парийский Н.Н. Шибаев Ю.Ф. Сравнение двух приливорегистрирующих гравиметров "Аскания" по наблюдениям в Алма-Ате (Талгар). – Наст. сборник, с. 85-95.
10. Парийский Н.Н., Гриднев Д.Г., Барсенков С.К., Сарычева Ю.К., Крамер М.К. Приливные изменения силы тяжести в Ташкенте. – В кн.: Изучение земных приливов. М.: Изд-во АН СССР, 1963, № 3, с. 9-39.
11. Барсенков С.Н., Волков В.А., Гриднев Д.Г., Парийский Н.Н. Приливные изменения ускорений силы тяжести во Фрунзе. – В кн.: Изучение земных приливов. М.: Наука, 1964, с. 3-30.
12. Saritcheva Yu.K. Les résultats de l'analyse des variations de la force de pesanteur à Novosibirsk. – In: Proc. of the 7th Intern. symp. on the Earth Tides. Budapest: Akad. KIADO, 1976, p. 755-762.
13. Гриднев Д.Г., Иванова М.В., Волков В.А. Наблюдения приливных изменений силы тяжести в Красной Пахре. – В кн.: Изучение приливных деформаций Земли. М.: Наука, 1973, с. 44-49.
14. Гриднев Д.Г. Регистрация приливных изменений ускорений силы тяжести в Красной Пахре стационарным кварцевым гравиметром с фотоэлектрической записью показаний. – В кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 1967, с. 111-118.
15. Гриднев Д.Г., Прохоровский Г.С. Наблюдения приливных изменений силы тяжести кварцевым специальным гравиметром в Красной Пахре в 1965-1966 гг. – В кн.: Методика измерений земных приливов и медленных деформаций земной поверхности. М.: Наука, 1970, с. 100-109.
16. Гриднев Д.Г., Иванова М.В., Доброхотов Ю.С. Наблюдения приливных изменений ускорений силы тяжести на станции Красная Пахра гравиметром GS-12 № 180. – В кн.: Медленные движения земной коры. М.: Наука, 1972, с. 113-122.
17. Гриднев Д.Г., Барсенков С.Н. Наблюдения приливных изменений силы тяжести в Красной Пахре гравиметром GS-12 № 180 с кварцевым внешним гальванометром. – В кн.: Приливные деформации Земли. М.: Наука, 1975, с. 57-69.
18. Гриднев Д.Г., Крамер М.В. Наблюдения приливных изменений ускорения силы тяжести в Красной Пахре гравиметром СКГ-М. – Наст. сборник, с. 153-161.
19. Волков В.А., Гусева Ф.П., Доброхотова Ю.С., Иванова М.В. Приливные изменения силы тяжести в Обнинске. – В кн.: Изучение приливных деформаций Земли. М.: Наука, 1973, с. 50-59.

20. Волков В.А., Барсенков С.Н., Гусева Ф.П., Засимов С.С., Парийский Н.Н. Первые результаты регистрации земных приливов в Обнинске гравиметром "Аскания" GS-15. – В кн.: Приливные деформации Земли. М.: Наука, 1975, с. 43-56.
21. Волков В.А., Варга П., Барсенков С.Н., Гусева Ф.П. Советско-венгерские измерения земных приливов в Обнинске. – Наст. сборник, с. 125-136.
22. Волков В.А., Барсенков С.Н., Гусева Ф.П., Засимов С.С., Крамер М.В., Иванова М.В., Оганесян Ш.С. Регистрация приливных изменений силы тяжести в Обнинске в 1970-1976 гг. – Наст. сборник, с. 102-124.
23. Волков В.А., Барсенков С.Н., Засимов С.С. и др. Наблюдения приливных изменений ускорений силы тяжести в Пулкове в 1976-1977 гг. – Наст. сборник, с. 137-152.
24. Дычко И.А. Приливные изменения силы тяжести в Полтаве. – В кн.: Вращение и приливные деформации Земли. Киев: Наукова думка, 1970, вып. 1, с. 192-198.
25. Корба П.С., Баленко В.Г., Дычко И.А., Шляховой В.П., Токарь В.И. Приливные изменения силы тяжести в Полтаве в 1973-1974 гг. – В кн.: Вращение и приливные деформации Земли. Киев: Наукова думка, 1976, вып. 8, с. 19-23.
26. Корба С.П., Корба П.С. Результаты обработки наблюдений приливных вариаций силы тяжести в Симферополе и Ялте методом Венедикова. – В кн.: Вращение и приливные деформации Земли. Киев: Наукова думка, 1972, вып. 4, с. 54-65.
27. Корба П.С. Приливные вариации силы тяжести в Бахчисарае в 1968-1971 гг. – В кн.: Вращение и приливные деформации Земли. Киев: Наукова думка, 1973, вып. 5, с. 16-23.
28. Pariiskj N.N., Pertsev B.P., Saricheva Yu.K. et al. A note concerning regional variationas in the gravity factor δ. – In: Proc. of the 7th Intern. on the Earth Tides. Budapest: Akad. Kiado, 1976, p. 571-576.
29. Доброхотов Ю.С., Лысенко В.И. Наблюдение приливных изменений силы тяжести в Киеве. – В кн.. Изучение земных приливов. М.: Изд-во АН СССР, 1963, № 3, с. 40-53.
30. Венцель Х.Г. Поправка к анализам приливов для приведения к нормали эллипсоида. – Информационный бюллетень по земным приливам, Брюссель, 1974, № 68, с. 3784-3790.
31. Парийский Н.Н., Перцев Б.П. Влияние инерционных сил на наблюдаемые приливные изменения силы тяжести и наклонов. – Наст. сборник, с. 22-35.
32. Молоденский С.М. Влияние вынужденной нутации Земли на результаты приливных наблюдений. Наст. сборник, с. 36-41.
33. Перцев Б.П. Влияние морских приливов на гравиметрические приливные наблюдения в Восточной Европе. – Труды 3-го Международного симпозиума "Геодезия и Физика Земли". Веймар, 1977, с. 493-498.
34. Молоденский М.С. Теория нутации и суточных приливов. – В кн.: Земные приливы и нутация Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 3-25.
35. Молоденский С.М. Приливы в сферически-несимметричной Земле. – Наст. сборник, с. 5-21.
36. Молоденский М.С. Теория приливов в упругой земле с учетом членов порядка сжатия. – Изв. АН СССР. Физика Земли, 1974, с. 3-8.

Traduction

PROCEDURE ELARGIE LIMITE EN FREQUENCE LORS DE L'EVALUATION DES AMPLITUDES DES HARMONIQUES PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES.

G.N. Dipassamidze, V.F. Pissarenko

Séismologie numérique - Publ. 14, pp. 164-170, Moscou 1982.
Académie des Sciences d'URSS. Institut de Physique de la Terre Schmidt.

INTRODUCTION

Dans beaucoup de problèmes de géophysique (par exemple l'analyse des marées terrestres) on doit évaluer les amplitudes et les phases d'harmoniques ayant des périodes connues. Les observations sont données sur un certain intervalle de temps limité. Si, outre les harmoniques, les observations renferment un bruit (pratiquement cela arrive toujours ainsi), évaluer les amplitudes et les phases à partir d'un intervalle limité d'observation devient de plus en plus difficile, si l'on veut examiner des harmoniques de fréquences de plus en plus voisines. En d'autres termes, pour un niveau donné de perturbations et un intervalle d'observations on ne peut pratiquement pas évaluer les amplitudes des harmoniques de fréquences trop voisines parce que l'erreur d'estimation dépassera les valeurs recherchées. Dans le présent travail nous étudierons qualitativement cet effet et nous introduirons la conception de la procédure élargie limite pour la fréquence.

1. ESTIMATION DES AMPLITUDES POUR DEUX HARMONIQUES EFFECTIFS.

Nous examinerons le processus accidentel discret y(k) constitué par la somme de deux harmoniques et du bruit n(k) :

$$y(k) = a_1 \cos(\omega_1 \Delta t k + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 \Delta t k + \varphi_2) + n(k). \quad |k| \leqslant n. \qquad (1)$$

où a_1, a_2 sont les amplitudes : ϕ_1, ϕ_2 sont les phases; ω_1, ω_2 les fréquences, Δt est l'intervalle de temps. Nous supposons que le bruit n(k) est blanc c'est-à-dire qu'il représente une succession gaussienne de valeurs accidentelles indépendantes ayant une valeur moyenne nulle et une dispersion σ^2. Le nombre d'observation en (1) est égal à $2n+1$.

Nous transcrirons (1) sous la forme

$$y(k) = A_1 \cos(\omega_1 \Delta t k) + A_2 \cos(\omega_2 \Delta t k) + B_1 \sin(\omega_1 \Delta t k) + B_2 \sin(\omega_2 \Delta t k) + n(k), \quad |k| \leqslant n, \tag{2}$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 désignent respectivement les amplitudes $a_1 \cos \phi_1$, $a_2 \cos \phi_2$, $a_1 \sin \phi_1$, $a_2 \sin \phi_2$.

Nous séparerons en (2) les parties paire $y_1(k)$ et impaire $y_2(k)$:

$$y_1(k) = \frac{y(k) + y(-k)}{2} = A_1 \cos(\omega_1 \Delta t k) + A_2 \cos(\omega_2 \Delta t k) + \frac{n(k) + n(-k)}{2}, \tag{3}$$

$$y_2(k) = \frac{y(k) - y(-k)}{2} = B_1 \sin(\omega_1 \Delta t k) + B_2 \sin(\omega_2 \Delta t k) + \frac{n(k) - n(-k)}{2}$$

Les processus $n_1(k) = \{n(k) + n(-k)\}/2$ et $n_2(k) = \{n(k) - n(-k)\}/2$ sont des bruits blancs indépendants avec une dispersion $\sigma^2/2$. Le processus $y_1(k)$ est examiné dans l'intervalle $0 \leq k \leq n$, et $y_2(k)$ sur l'intervalle $1 \leq k \leq n$. Puisque l'asymptote nous intéresse pour $n \to \infty$ on peut négliger l'observation au point $k = 0$ et nous examinerons (3) et (4) dans le même intervalle de temps $1 \leq k \leq n$.

Nous étudierons les estimateurs par moindres carrés $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ obtenus respectivement par les solutions (3), (4) pour $1 \leq k \leq n$. Ces estimateurs $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ doivent minimiser la somme des carrés

$$\sum_{k=1}^{n} [y_1(t) - \hat{A}_1 \cos(\omega_1 \Delta t k) - \hat{A}_2 \cos(\omega_2 \Delta t k)]^2 = \min. \tag{5}$$

Cette minimisation conduit, comme on le sait {1} au système d'équations :

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 (\cos \omega_1, \cos \omega_1) + \hat{A}_2 (\cos \omega_2, \cos \omega_1) &= (y_1, \cos \omega_1), \\ \hat{A}_1 (\cos \omega_1, \cos \omega_2) + \hat{A}_2 (\cos \omega_2, \cos \omega_2) &= (y_1, \cos \omega_2). \end{aligned} \tag{6}$$

où sont notés entre parenthèses les produits scalaires de vecteurs correspondants, par exemple :

$$\begin{aligned} (\cos \omega_1, \cos \omega_2) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(\omega_1 \Delta t k) \cos(\omega_2 \Delta t k), \\ (y_1, \cos \omega_1) &= \sum_{k=1}^{n} y_1(k) \cos(\omega_1 \Delta t k). \end{aligned} \tag{7}$$

nous désignerons par D_1 le déterminant du système (6). Alors

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{D_1} [(y_1, \cos \omega_1)(\cos \omega_2, \cos \omega_2) - (y_1, \cos \omega_2)(\cos \omega_2, \cos \omega_1)]. \tag{8}$$

En substituant dans (8) l'expression (3), au lieu de $y_1(k)$, nous obtenons

$$\hat{A}_1 = A_1 + \frac{1}{D_1} [(n_1, \cos \omega_1)(\cos \omega_2, \cos \omega_2) - (n_1, \cos \omega_2)(\cos \omega_2, \cos \omega_2)]. \tag{9}$$

Le second terme de (9) représente l'erreur accidentelle de l'estimateur de $\hat{A}_1$ par la méthode des moindres carrés, nous la désignerons par ξ_1. Il n'est pas difficile de calculer l'espérance mathématique $E(\xi_1)$ et la dispersion Var (ξ_1) du fait que n_1 (k) est un bruit blanc avec une dispersion $\sigma^2/2$:

$$E\xi_1 = 0, \quad \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{(\cos\omega_2, \cos\omega_2)}{D_1}. \tag{10}$$

Nous verrons que la dispersion ξ_1 est égale à la valeur $\sigma^2/2$ multipliée par l'élément supérieur gauche de la matrice opposée à la matrice du système (6). Nous trouverons de façon analogue

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{D_2}[(y_2, \sin\omega_1)(\sin\omega_2, \sin\omega_2) - (y_2, \sin\omega_2)(\sin\omega_2, \sin\omega_1)], \tag{11}$$

où le déterminant D_2 est obtenu en changeant les cosinus en sinus dans D_1. De même comme

$$\begin{aligned}\hat{B}_1 &= B_1 + \frac{1}{D_2}[(n_2, \sin\omega_1)(\sin\omega_2, \sin\omega_2) - (n_2, \sin\omega_2)(\sin\omega_2, \sin\omega_1)] = \\ &= B_1 + \eta_1, \quad E\eta_1 = 0, \quad \operatorname{Var}\eta_1 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{(\sin\omega_2, \sin\omega_2)}{D_2}.\end{aligned} \tag{12}$$

on peut montrer que pour $n \to \infty$

$$\text{Var } n_1/\text{Var } \xi_1 \to 1$$

régulièrement pour ω_1, ω_2 pour n'importe quelle quantité limitée de paires (ω_1, ω_2). C'est pourquoi on peut considérer qu'asymptotiquement pour $n \to \infty$ et avec une précision jusqu'aux termes les plus petits à l'ordre le plus élevé :

$$\text{Var } \xi_1 = \text{Var } n_1 \tag{13}$$

nous désignerons (13) par V.

Comme estimateur de a_1^2 en (1) il est naturel de prendre $\hat{a}_1^2$:

$$\hat{a}_1^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{B}_1^2. \tag{14}$$

Il est facile de trouver l'espérance mathématique et la dispersion $\hat{a}_1^2$ en utilisant l'hypothèse gaussienne du bruit n (k) :

$$E\hat{a}_1^2 = A_1^2 + B_1^2 + 2V = a_1^2 + 2V = a_1^2\left(1 + \frac{2V}{a_1^2}\right), \tag{15}$$

$$\operatorname{Var}\hat{a}_1^2 = 4V(a_1^2 + V). \tag{16}$$

Si $n \to \infty$ il est facile de montrer que

$$V = \frac{\sigma_2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{17}$$

et, dans ce cas

$$E\hat{a}_1^2 \to a_1^2, \quad \operatorname{Var}\hat{a}_1^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Si on approche la fréquence ω_2 vers la fréquence ω_1 c'est-à-dire si

$$|\omega_2 - \omega_1| \to 0, \tag{19}$$

alors $D_1 \to 0$, $D_2 \to 0$; Var $\hat{a}_1^2 \to \infty$.

Cela signifie que pour une différence assez faible dans (19), quand il y a du bruit, on ne peut mesurer l'amplitude a_1^2 par la méthode des moindres carrés puisque la dispersion (16) peut devenir aussi grande qu'on veut.

Ainsi pour déterminer une solution aux limites possible, on a en appelant la limite $|\omega_2 - \omega_1|$ pour $n \to \infty$, la capacité de résolution des deux harmoniques (1) avec des amplitudes a_1 et a_2 :

$$a_1^2 \geqslant C(\mathrm{Var}\,\hat{a}_1^2)^{1/2}, \quad a_2^2 \geqslant C(\mathrm{Var}\,\hat{a}_2^2)^{1/2}, \tag{20}$$

où C est une certaine constante. La détermination (17) garantit que les écarts standard des estimateurs $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ seront au moins de 1/C fois plus grands que les amplitudes elles-mêmes. On peut montrer qu'ainsi les déplacements relatifs $2V/a_1^2$, $2V/a_2^2$ des estimateurs $\hat{a}_1^2$, $\hat{a}_2^2$ déterminés par la formule (15) seront limités par les expressions

$$\frac{2V}{a_1^2} \leqslant \frac{\sqrt{C^2+1}-C}{C}, \quad \frac{2V}{a_2^2} \leqslant \frac{\sqrt{C^2+1}-C}{C}.$$

Ainsi la condition (20) garantit une précision suffisante des estimateurs de $\hat{a}_1^2$, $\hat{a}_2^2$. Le choix de la constante C présente un certain arbitraire comme cela arrive dans de pareilles déterminations. Cependant cet arbitraire n'a pas grande importance. Nous prenons C = 2. Nous avons ainsi :

$$\frac{2V}{a_1^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}-2}{2} \approx 0{,}12, \quad \frac{2V}{a_2^2} \leqslant 0{,}12. \tag{21}$$

Trouvons maintenant la valeur limite de la différence $|\omega_2 - \omega_1|$ à laquelle satisfont les inégalités (21) c'est-à-dire que nous obtiendrons la procédure de solutions aux limites sous un aspect évident. Soit la différence $|\omega_2 - \omega_1|$ diminuent avec l'accroissement n. Nous désignerons cette différence par δ et nous proposerons que

$$\delta n \to 0, \quad n \to \infty \tag{22}$$

Nous verrons plus loin que cette hypothèse est valable et sous cette condition on atteint la procédure de solution aux limites.

En utilisant les formules de sommations trigonométriques {2} et la condition (22), on peut séparer le terme principal dans les déterminants D_1 et

D_2 :

$$D_i = \frac{\delta^2 (\Delta t)^2 n^4}{12} + O(n^3), \quad i = 1,2.$$

tenant compte de ce que

$$(\cos\omega_2, \cos\omega_2) = \frac{n}{2} + O(1), \quad (\sin\omega_2, \sin\omega_2) = \frac{n}{2} + O(1),$$

nous obtenons par (10) :

$$V = \frac{3\sigma^2}{[n^5 (\delta\Delta t)^2]}. \tag{23}$$

Nous déterminerons la longueur de l'intervalle d'observation en secondes par T : T = Δt2n. Alors on peut écrire (23) sous la forme

$$V = 24\sigma^2 \frac{\Delta t}{T} \frac{1}{(T\delta)^2}. \tag{24}$$

on peut écrire les conditions (21) :

$$\delta \geqslant \frac{20}{T} \frac{\sigma}{a_1} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}, \tag{25}$$

$$\delta \geqslant \frac{20}{T} \frac{\sigma}{a_2} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Après avoir désigné la plus petite des deux amplitudes a_1 et a_2 par a, nous obtiendrons par (25), (26) la procédure de solution aux limites

$$|\omega_2 - \omega_1| = \frac{20}{T} \frac{\sigma}{a} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

On en déduit que $\delta = |\omega_2 - \omega_1|$ décroit comme $T^{-3/2}$, en d'autres termes comme $n^{-3/2}$. Par conséquent, l'hypothèse (22) est réalisée effectivement. Si nous voulons exprimer la procédure de solution aux limites en hertz, il faut diviser (27) par 2π :

$$|f_2 - f_1| = \frac{10}{\pi T} \frac{\sigma}{a} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

La formule (28) donne aussi le résultat requis.

2. ESTIMATION DES AMPLITUDES COMPLEXES.

Nous examinerons la somme des deux harmoniques complexes sur le fond du bruit blanc, complexe et gaussien :

$$z(k) = u_1 \exp(i\omega_1 \Delta t k) + u_2 \exp(i\omega_2 \Delta t k) + N(k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

ainsi EN (k) = 0, $E|N(k)|^2 = \sigma^2$, $|u_1| = a_1$, $|u_2| = a_1$, arg $u_1 = \phi_1$, arg $u_2 = \phi_2$. Au lieu du système (6) nous obtiendrons par moindres carrés le système :

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 (\exp\omega_1, \exp\omega_1) + \hat{u}_2 (\exp\omega_2, \exp\omega_1) &= (z, \exp\omega_1), \\ \hat{u}_1 (\exp\omega_1, \exp\omega_2) + \hat{u}_2 (\exp\omega_2, \exp\omega_2) &= (z, \exp\omega_2), \end{aligned} \tag{30}$$

où, par exemple

$$(z, \exp\omega_1) = \sum_{k=1}^{n} z(k) \exp(-i\omega_1 \Delta t k). \tag{31}$$

Pour $\hat{u}_1$, nous obtenons par (30) de façon analogue l'égalité (9)

$$\hat{u}_1 = u_1 + \frac{1}{\Delta}[(N, \exp\omega_1)(\exp\omega_2, \exp\omega_2) - (N, \exp\omega_2)(\exp\omega_2, \exp\omega_1)], \tag{32}$$

où le déterminant Δ du système (30) a la forme

$$\Delta = n^2 - \left| \frac{\exp[i(\omega_2 - \omega_1)\Delta tn] - 1}{\exp[i(\omega_2 - \omega_1)\Delta t] - 1} \right|^2. \tag{33}$$

La dispersion du second terme en (32) est égale à

$$\sigma^2 \ (n/\Delta). \tag{34}$$

A nouveau l'expression (34) est l'élément gauche supérieur de la matrice transposée du système (30) multipliée par σ^2.

Nous verrons par (32) que dans le cas complexe, l'estimation de $\hat{u}_1$ par moindres carrés, pour l'amplitude u_1, est non déplacée alors que pour le cas réel elle n'a été qu'asymptotiquement non déplacée pour $n \to \infty$.

Comme procédure de solution aux limites, nous déterminerons cette différence des fréquences $|\omega_2 - \omega_1|$ afin que les dispersions doublées des estimations u_1, u_2 ne dépassent pas les carrés correspondants des modèles d'amplitudes :

$$2\operatorname{Var}\hat{u}_1 \leqslant |u_1|^2, \quad 2\operatorname{Var}\hat{u}_2 \leqslant |u_2|^2. \tag{35}$$

En désignant, comme précédemment la plus petite des deux amplitudes a_1, a_2 par a, et considérant (35), (34) nous obtenons

$$2\sigma^2 \frac{n}{\Delta} \leqslant a^2. \tag{36}$$

Nous supposerons comme précédemment que

$$|\omega_2 - \omega_1| n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{37}$$

Alors, avec (33), on peut diviser le terme principal

$$\Delta = n^2 - \left[\sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)\Delta tn}{2} / \sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)\Delta t}{2}\right]^2 = \frac{n^4(\omega_2 - \omega_1)^2\Delta t^2}{12} + O(n^3). \tag{38}$$

En substituant (38) en (36) nous obtenons une procédure de solution aux limites

$$|\omega_2 - \omega_1| = \frac{\sigma}{a}\frac{\sqrt{24}}{n^{3/2}\Delta t} = \frac{\sigma}{a}\frac{8\sqrt{3}}{T}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}, \tag{39}$$

où, comme précédemment, $T = 2n\Delta t$. En passant aux fréquences exprimées en hertz nous aurons

$$|f_2 - f_1| = \frac{4\sqrt{3}}{\pi T}\frac{\sigma}{a}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/2}. \tag{40}$$

Nous examinerons, sans entrer dans le détail, le cas où le bruit N (k) est obtenu à l'aide de comptages discrets du processus standard de Gauss $\overline{N}$ (t) avec un temps continu. Nous désignerons par B (τ) la fonction de corrélation du processus $\overline{N}$ (t) et la densité spectrale par F (f) :

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\exp(-2\pi i f\tau)\,df,\quad F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\exp(2\pi i f\tau)\,d\tau.$$

Nous supposons que

$$N(k) = \overline{N}(\Delta t k) \tag{41}$$

Ainsi la fonction de corrélation R (k) du processus N (k) est

$$R(k)=EN(k+j)N^*(j)=E\overline{N}(\Delta t[k+j])\,\overline{N}^*(\Delta tj)=B(\Delta tk). \tag{42}$$

La densité spectrale Φ(f) du processus N (k) s'exprime par F (f) de la façon suivante

$$\begin{aligned}\Phi(f)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k)\exp(2\pi ifk)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(\Delta tk)\exp(2\pi ifk)=\\&=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[2\pi ik(f-\nu\Delta t)]d\nu=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\times\\&\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2\pi[f-\nu\Delta t-n])\,d\nu=\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{f-k}{\Delta t}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

La formule (43) décrit le phénomène d'application des fréquences {3}. Si on suppose que le spectre F (f) ne contient pas de fréquences à l'intérieur du champ (- 1/2 Δt, 1/2 Δt), alors

$$\Phi(f)=\frac{1}{\Delta t}F(f). \tag{44}$$

En appliquant la méthode des moindres carrés au processus (29), où N (k) est le processus décrit plus haut (41), on peut démontrer dans certaines conditions de régularité appliquées à la fonction F (f) que la dispersion de l'estimation $\hat{a}_1$ est égale à

$$\Phi(\Delta t f_1)\frac{n}{\Delta}, \tag{45}$$

où $f_1 = 2\pi\omega_1$. En comparant (45) avec (34) nous verrons qu'au lieu de la dispersion σ^2 apparaît la valeur du spectre Φ(Δt f_1) au point Δtf_1. Pour une procédure de solution aux limites au lieu de (40) nous obtenons

$$|f_2-f_1|=\frac{2\sqrt{6}}{\pi T}\left[\frac{2\Delta t\,\Phi(\Delta tf_1)}{a^2T}\right]^{1/2}. \tag{46}$$

en supposant que le processus de départ $\overline{N}$ (t) soit limité à la bande des fréquences (-1/2 Δt, 1/2 Δt) et en se servant de la formule (44) nous obtenons

$$|f_2-f_1|=\frac{2\sqrt{6}}{\pi T}\left[\frac{2F(f_1)}{a^2T}\right]^{1/2}. \tag{47}$$

on peut interpréter la valeur 2F (f_1)/T comme l'énergie du bruit dans la bande des fréquences (-1/T, 1/T) déterminée par une fenêtre temporelle égale à

l'intervalle d'observation. Ainsi, l'expression entre crochets en (47) représente le rapport bruit/signal.

On voit par (47) que la procédure de solution aux limites ne dépend pas de Δt. C'est exact à la condition que le spectre du bruit F (f_1) soit égal à zéro à l'intérieur de l'intervalle (-1/2 Δt, 1/2 Δt). Ainsi, l'intervalle de discrétisation en temps Δt doit être choisi le plus grand possible, satisfaisant à la condition mentionnée. Si on prend Δt plus petit que la valeur maximale pour T fixé, alors la procédure de solution ne s'améliore pas et le volume de calcul croît puisque $n = T/2\Delta t$ grandit. Si on prend Δt plus grand que la valeur admise, alors le spectre de fond $\Phi(f)$ augmentera à cause de l'application des fréquences (43).

Nous voyons que la procédure de solution aux limites pour le cas complexe (39) diffère de la procédure de solution aux limites pour le cas matériel (27) uniquement par un facteur peu important, à peu près égal à 1,45. Les calculs dans le cas complexe se simplifieront fortement.

3. CAS DE TROIS HARMONIQUES COMPLEXES OU PLUS

Nous examinerons le cas des trois harmoniques complexes ayant des fréquences égales à

$$\omega_3 = \omega_1 + 2\delta, \quad \omega_2 = \omega_1 + \delta, \tag{48}$$

$$z(k) = u_1 \exp(i\omega_1 \Delta t k) + u_2 \exp(i\omega_2 \Delta t k) + u_3 \exp(i\omega_3 \Delta t k) + N(k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{49}$$

Dans ce cas la dispersion de l'estimateur $\hat{u}_1$ de l'amplitude u_1 est égale à la valeur σ^2 multipliée par l'élément d'angle supérieur gauche de la matrice inverse par rapport à la matrice

$$\| (\exp \omega_i, \exp \omega_j) \|, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{50}$$

Après des calculs assez compliqués nous obtenons

$$\operatorname{Var} \hat{u}_1 = \sigma^2 \frac{180}{n^5 (\delta \Delta t)^4}. \tag{51}$$

Par les conditions (35) nous trouverons la procédure de solution aux limites pour l'estimation de l'amplitude u_1 :

$$|\omega_2 - \omega_1| = 2\,(720)^{1/4} \frac{1}{T} \left(\frac{\sigma}{|u_1|}\right)^{1/2} \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{1/4}. \tag{52}$$

Lors de l'estimation de l'amplitude u_2 par la moyenne des trois harmoniques on obtient la procédure de solution deux fois plus grande que (52).

Nous verrons que dans le cas des trois harmoniques la procédure de

solution se détériore : (52) diminue comme $T^{-5/4}$ au lieu de $T^{-3/2}$ pour les deux harmoniques. En outre, le rapport bruit/signal $\sigma/|u_1|$ entre en (52) au degré 1/2 au lieu du premier degré pour les deux harmoniques. On peut penser que pour le cas de r harmoniques, la procédure de solution sera encore plus mauvaise. Dans ce cas la dispersion de l'estimateur $\hat{u}$, de l'amplitude u_1 est égale à la dispersion du bruit multipliée par l'élément gauche supérieur de la matrice inverse par rapport à la matrice.

$$\| (\exp \omega_i,\ \exp \omega_j) \|,\ i, j = 1, \ldots, r. \tag{53}$$

Il n'est pas facile apparemment de calculer l'élément indiqué. A titre d'hypothèse basée sur des réflexions d'analogie nous proposerons la formule pour la procédure de solution aux limites dans le cas où r est en accord avec la fréquence des harmoniques :

$$|\omega_2 - \omega_1| = C(r)\frac{1}{T}\left(\frac{\sigma}{a}\right)^{\frac{1}{r-1}}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^{\frac{1}{2r-2}}, \tag{54}$$

où C(r) est une certaine constante. De la formule (54) il résulte que pour de grandes valeurs de r la procédure de solution d'après l'ordre de la valeur s'approche de 1/T - procédure de solution habituelle de l'analyse spectrale introduite par Rayleigh {4} pour trouver des fréquences inconnues.

CONCLUSION

On a proposé une procédure de solution en fréquence pour la méthode des moindres carrés basée sur les conditions du type (17), (35), qui garantissent la qualité satisfaisante des estimateurs des amplitudes correspondantes (petitesse du déplacement et de la dispersion). Partant de (17), (35) on a obtenu les expressions évidentes (27), (28), (39) pour la procédure de solution aux limites dans le cas de deux harmoniques. On a examiné séparément le cas des harmoniques réels et complexes. En présence de certaines harmoniques, la procédure de solution se détériore comme on l'a vu sur l'exemple des trois harmoniques (52). Les formules données pour la procédure de solution peuvent servir d'orientation lors du choix de l'intervalle d'observation nécessaire pour une estimation assez précise des amplitudes et des phases des harmoniques ayant des fréquences proches et connues. Nous noterons encore que le problème examiné dans notre travail est étroitement lié au problème de la recherche d'une procédure de solution aux limites en fréquence pour les estimations de la vraisemblance maximale. La différence par rapport à {5} consiste dans le fait que nous avons étudié le cas où les fréquences des harmoniques sont considérées comme connues alors qu'en {5} les fréquences sont supposées inconnues.

BIBLIOGRAPHIE

1. Linnik You. V. Méthode des moindres carrés et bases de la théorie de réduction des observations.
M. Phys. Math., 1962, p. 349.

2. Gradtchmein J.S., Rigik J.M., Table des intervalles des sommes, séries et produits.
M. Phys. Math., 1963, p. 1100.

3. Vanns D., Jenkins G., Analyse spectrale et son application M.
Mir 1971, publ. 7, p. 311; 1972, publ. 2, p. 287.

4. Rayleigh. Phil. Mag., 1881. 11. p. 214.

5. Jelankina T.S., Pissarenko V.F., Powsner T.A., Proutchkina F.M., Procédure élargie de l'analyse spectrale.
Etude de séismicité et du modèle de la Terre.
M. Naouka, 1976, pp. 185 à 197. (Calcul. seismol.; publ. 9).