MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N° 92

15 OCTOBRE 1984

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR

Observatoire royal de Belgique

Avenue Circulaire 3

1180 Bruxelles

TABLE DES MATIERES

p.

H.-J. DITTFELD
Final results of an eight years gravimetric registration series and the calibration problems. 6054

V.G. GOLOUBITSKII, P.S. MATVEYEV, I. IOU BOGDAN, A.D. KRIVONOSS, E.A. SLOVINSKAIA (traduction)
Résultats de l'analyse harmonique des observations clinométriques au point de "Peregonovka" pour 1974 à 1978. 6069

A.P. VENEDIKOV (traduction)
Analyse des enregistrements de marées terrestres 6078

A.G. CAMACHO, M.J. SEVILLA
The Molodensky problem for an homogeneous liquid core 6121

P.S. MATVEYEV, E.Y. EVTOUCHENKO, G.S. DOUBIK (traduction)
Détermination des paramètres des inclinaisons de marées à "Khartsisk" et à "Simféropol". 6132

LI RUI-HAO, CHEN DONG-SHENG, FU ZHAO-ZHU, JIAN DA-XI (Translation)
Investigation of rheological model for the quartz spring gravimeters 6148

FINAL RESULTS OF AN EIGHT YEARS GRAVIMETRIC REGISTRATION SERIES AND THE CALIBRATION PROBLEMS

by Hans-Jürgen Dittfeld

Academy of Sciences of the GDR
Central Institute for Physics of the Earth, Potsdam

SUMMARY

Digital Earth tide records were carried out since March 1974 at the Potsdam Gravimetric Observatory using the Askania gravimeter GS 15 N° 222.

63.341 hourly readings, measured until February 1982, were analysed. The inner accuracy of the main tidal amplitude factors was ± 0.0002 ... ±0.0009, that of the phases ± 0°.01 ... ± 0°.04. The mean square error of an hourly reading was m_o = ± 0.66 microgal x).

As the absolute level of the resulting tidal amplitudes is very important for model discussions and it is considerably influenced by the calibration constant the calibration procedures including their reliability are thoroughly discussed.

The final results for the entire series are compared with model values. Temporal variations of the tidal parameters were determined by overlapping partial analyses of more than 10.000 readings. The results are compared with those of corresponding data of the Earth tide station Pecny/CSSR.

INTRODUCTION

At present the accuracy of the gravimetric Earth tide parameters for the main tidal waves is mostly estimated to be in the order of 10^{-4}. This is the error calculated in the course of the harmonic analysis, representing the inner accuracy only for single series of modern gravimeters. But the results of measurements carried out at the same site simultaneously with several instruments may differ up to 0.5 %. - Thus have to be critically discussed the calculated errors. First of all one has to look into the 'outer accuracy' which may be up to ten times lower than indicated by the analysis results, in particular owing to the calibration problems.

x) 1 microgal = 10^{-8} m . s^{-2}.

In the following the tidal record obtained at the Potsdam Gravimetric Observatory will serve as an example to illustrate some questions in relation to these facts.

THE CALIBRATIONS

Earth tide measurements have been made since 1974 with the Askania gravimeter GS 15 N° 222 having a mean scale value of about 0.029 microgal/digit. To check the sensitivity of the registration and its stability, the record was calibrated in intervals of about ten days during the first three years, but later on monthly. Each calibration consists of more than twenty shifts of the gravimeter beam. For the calibrations by means of the measuring screw (spindle) holds for the resulting scale value :

$$E_s = f(z) \cdot R \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta z_i}{\Delta y_i} \quad .$$

$f(z) = A + B.Z$ scale value function of the gravimeter determined by measurements on a field calibration base {1} with an accuracy of $3 \cdot 10^{-4}$.

R Run correction of the micrometer scale, for this instrument determined to about 0.9965 in the measuring range

Δz_i difference of the gravimeter readings

Δy_i corresponding difference of the output signals

Since the gravimeter is equipped with an electromagnetic calibration device we obtain an additional scale value

$$E_e = k \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta I_i}{\Delta y_i} \quad .$$

ΔI_i difference of the current in the electromagnetic coils causing consecutive positions of the beam

Δy_i corresponding output difference in digits

k transformation factor of the device in microgal / microampere.

While the reading accuracy of the spindle position is about ± 0.001 scale division or ± 0.5 microgal, the measuring accuracy of the current in the coils ± 0.1 microampere or ± 0.04 microgal if a digital voltmeter is used. So the electromagnetic calibrations are practically free of human errors and with n=20 displacements their inner accuracy is ± 0.04 % ... 0.43 % instead of ± 0.29 % ... 1.89 %

in the case of the spindle calibrations. On average the corresponding error values were ± 0.18 % and ± 0.57 % respectively. But sometimes the results of individual calibrations are outside these error ranges : The E_s values vary within ± 3 % and the E_e not more than ± 1 %. Therefore calibrations by means of the spindle were very seldom carried out between 1976 and 1979.

Only the results of the electromagnetic calibrations were used for the conversion of the hourly readings into the microgal scale. The E_e values were linearily interpolated between consecutive calibration days. In this way the occurring random variations of the scale value are mostly included in the data and the error estimation during the harmonic analysis takes them into account.

Consequently, the absolute level of the final results depends on the accuracy of the factor k, which was given by the producer as

$$k = 0.4222 \text{ microgal/microampere.}$$

During the measuring period this factor was continuously checked by comparison of both kinds of calibrations using the relation

$$k_{new} = k_{old} \cdot \frac{E_s}{E_e} .$$

Taking a great number of calibrations in this way and averaging the results, the disadvantages of single spindle calibrations may be partly avoided.

Between November 1973 and May 1975, k_{new} was calculated from 39 pairs of spindle and electromagnetic calibrations. The shifts of the gravimeter beam were chosen corresponding to a registration range of about 280 microgal. Therefore, the influence of a warming up inside the gravimeter caused by the electric losses in the coils was avoided too. The current was below ± 500 microampere in every case. The resulting weighted mean

$$k_{73/75} = (0.42335 \pm 0.000\ 78) \text{ microgal/microampere}$$

was used for the evaluation of the eight years tidal registration, but its relative error of about $\pm 1.84 \cdot 10^{-3}$ is not fully satisfying in comparison with the inner accuracy of $\pm 2.10^{-4}$ ... 9.10^{-4} for the amplitude factors of the main tidal waves resulting from the harmonic analysis. Therefore the rate of spindle calibrations has been increased since 1979 and every position of the measuring screw has been read three times independently by two observers. Taking the results obtained by every observer as single calibrations and excluding the measurements with analogous recording 186 electromagnetic and 90 spindle calibrations were made in the period between March 1974 and December 1983. Averaged values

k_{new} were determined for certain time intervals, and clearly significant deviations did not appear between them as to be seen in table I :

Table I. Mean results of the calibration measurements (in brackets : number of calibrations during the period).

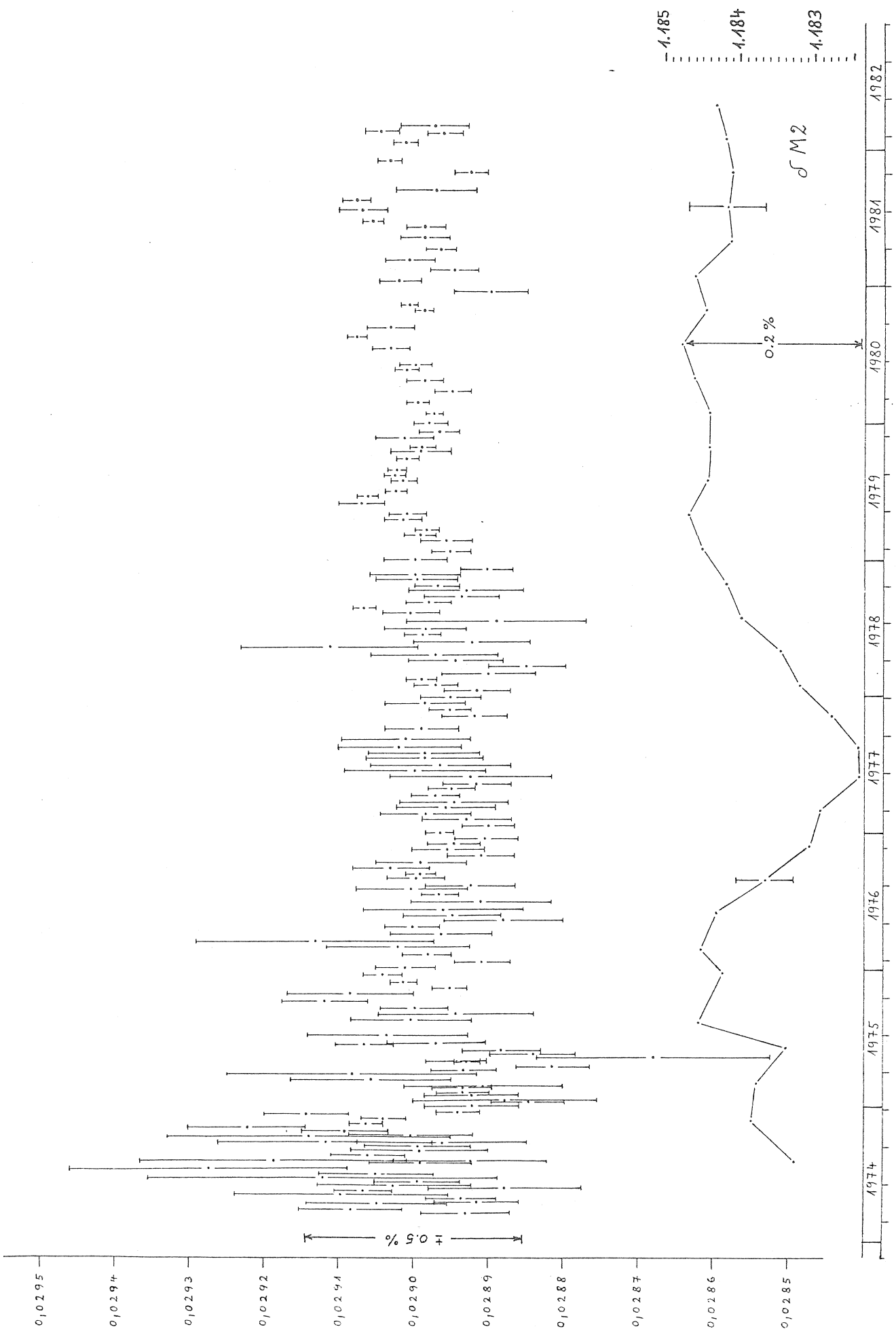
Period	Weighted mean values microgal/digit		k gal/amp	m_k/k	$k-k_{73/75}$
	$10^2 \cdot E_e$	$10^2 \cdot E_s$		± %	%
1974/75	2.9039 (56) ±.0010	2.9032 (13) ±.0087	0.42324 ±.00127	0.30	-0.026
1976/78	2.8974 (64) ±.0006	2.9005 (8) ±.0160	0.42380 ±.00233	0.55	+0.107
1979/80	2.9008 (31) ±.0006	2.8964 (19) ±.0083	0.42270 ±.00122	0.29	-0.152
1981/82	2.9037 (24) ±.0012	2.8782 (35) ±.0056	0.41963 ±.00064	0.20	-0.879
1983	2.8955 (11) ±.0006	2.9016 (15) ±.0060	0.42424 ±.00088	0.21	+0.212
1974/83 Total	2.9005 (186) ±.0004	2.8924 (90) ±.0034	0.42217 ±.00050	0.119	-0.279
1974/83 Medians	2.8995 ±.0006	2.8968 ±.0054	0.42295 ±.00079	0.186	-0.093

Most of the variations of individual E_e values do not exceed the range of ± 0.5 % (Fig. 1a). Systematic temporal trends of the results of spindle calibrations were not found (Fig. 1b). Nevertheless, there seems to be something like a minimum of the k values in 1981/82 though within the frame of the possible statistical fluctuations.

Furthermore, the amplitudes of the main tidal waves have been used to get an independent impression whether the sensitivity is stable : Real changes of the sensitivity would be reflected in common variations of the δ-factors. If such common trends do not exist it may be concluded that the fluctuations of the mean k values have only statistical character and that deviations from each other do not become significant until the error of the mean values is decreased for statistical reasons.

Using gliding and overlapping partial analyses, each for a period of

Fig. 1a GS 15 No. 222
Scale values of the electromagnetic calibrations and σ M2



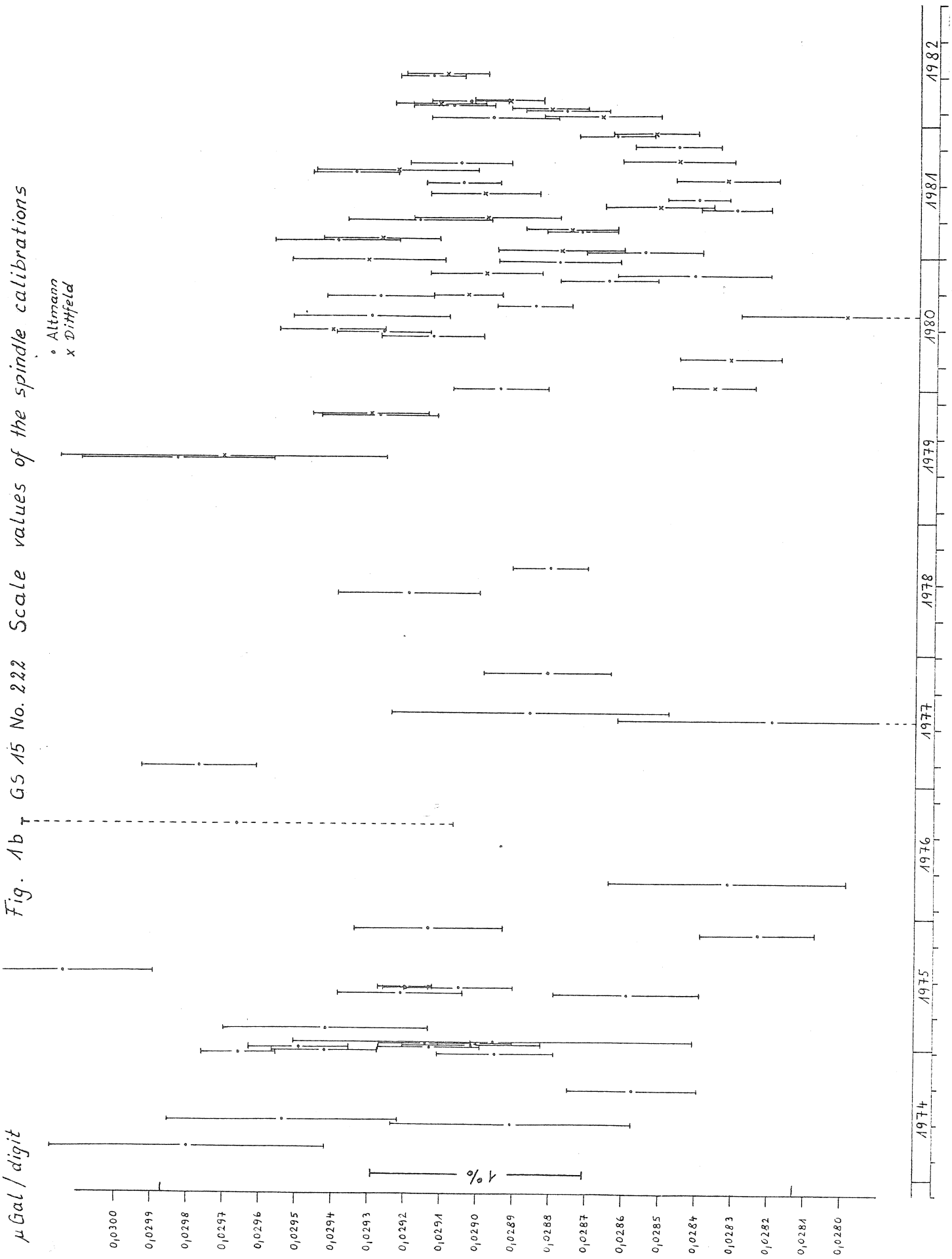


Fig. Ab 7 GS 15 No. 222 Scale values of the spindle calibrations
µGal / digit
• Altmann
x Dittfeld
1 %
0,0300
0,0299
0,0298
0,0297
0,0296
0,0295
0,0294
0,0293
0,0292
0,0291
0,0290
0,0289
0,0288
0,0287
0,0286
0,0285
0,0284
0,0283
0,0282
0,0281
0,0280
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982

about 15 months (processed for 19 wave groups and shifted by steps of 90 days), the temporal trend of the resulting amplitude factors has been investigated : The maximum variations of the δ-factors of the main tidal waves are smaller than 0.51 %, and they do not appear in the same periods of time :

Table II. Minimum and Maximum δ-factors in partial analyses (The given month includes the central day of the corresponding analysis, the data of 1974 are left out account because of a 180 days break in the record at Potsdam).

	Minimum	Maximum	Difference/%	
O1	1.1499 - July 1978	1.1558 - Jan. 1981	0.509	Fig. 3
K1	1.1375 - Nov. 1976	1.1427 - Feb. 1976	0.453	
M2	1.1824 - Aug. 1977	1.1849 - July 1980	0.212	Fig. 1a
S2	1.1862 - Aug. 1976	1.1922 - Okt. 1981	0.507	

Moreover the temporal variations of these amplitudes are not correlated with the calibration results, and there are no similar trends indicating changes of the sensitivity. So the factor k is assumed as a constant for the period 1974 until 1983

- because most of the fluctuations of the partial k values are not significant and caused by the spindle calibrations only,
- because the annual mean values of the electromagnetic calibrations are stable within a range of ± 0.15 %,
- because the main tidal amplitudes vary in a different way.

After the discussion of the stability the validity of the used k value has to be considered : A deviation of the final k value against $k_{73/75}$ was visible only on the basis of the great number of measurements and eight years after the first determination. The coefficient derived from weighted mean values of 186 electromagnetic and 90 spindle calibrations (that means altogether about 5500 shifts of the gravimeter beam) is about 0.279 % lower than $k_{73/75}$. Moreover, its relative error of $\pm 1.19 \cdot 10^{-3}$ is somewhat smaller. But it is not very satisfactory that the error bar of the 1974/83 result overlaps only a little the error bar of $k_{73/75}$.

Now it has to be tested whether the necessary assumptions are fulfilled for calculating the mean values : As to be seen from Fig. 2 the results of both kinds of calibrations rather badly fits the Gaussian normal distribution around the weighted mean values. So the median values, given in the last line of Table I, have to be regarded as the most probable results instead of the weighted mean values {3}. The difference between $k_{74/83}$, calculated from the

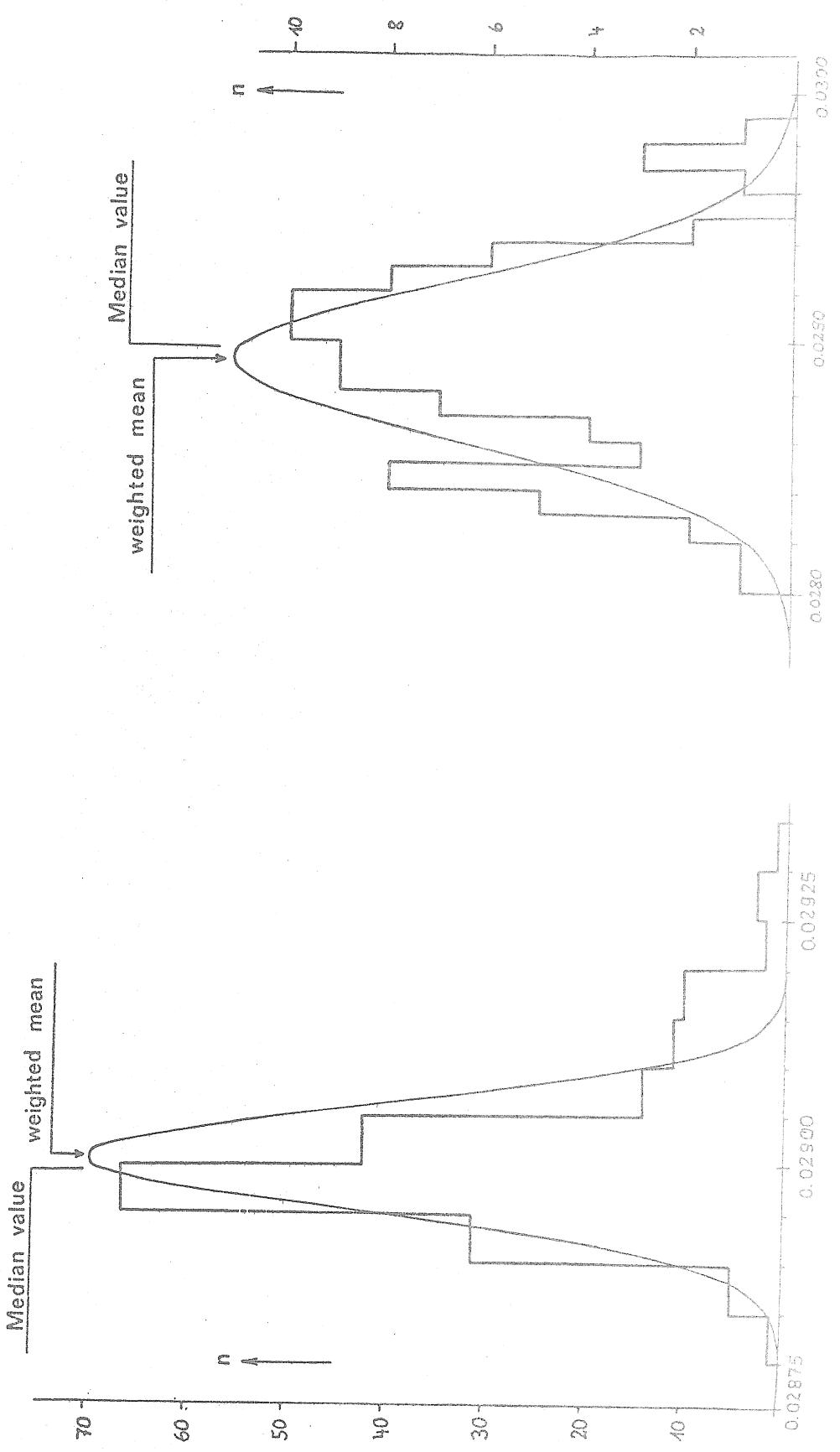


Fig. 2 GS15 No.222 digital - Potsdam 1974 - 1983

Electromagnetic calibrations
N = 186
$\sigma = 5.3586 \cdot 10^{-5}$

Spindle calibrations
N = 90
$\sigma = 3.2304 \cdot 10^{-4}$

median values, and $k_{73/75}$ is $-9.3 \cdot 10^{-4}$ only and this new factor certainly fits the older one within the frame of the error bars. Therefore, there is no reason to change the calibration factor or the scale of the whole series but the absolute accuracy of the amplitudes may finally given by about ± 0.2 %, more exactly by $\pm 1.86 \cdot 10^{-3}$.

THE FINAL RESULTS

After the critical view on the calibration problems we give the final results of the measuring period March 1974 until February 1982. (Since February 1982 the gravimeter has been installed in a new station at a distance of about 150 meters from the older one and the measuring conditions have been improved). In Table III the results of the eight years tidal registration in Potsdam are listed on the basis of processing at the ICET :

TABLE III. GS15 N° 222 digital, Potsdam 1974 - 1982.
Final and corrected results of the series.

Wave	Analysis result DUCARME/ICET		Indirect effect corrected SCHWID./ICET		Air pressure influence corrected too	
	δ	x°	δ	x°	δ	x°
Q1	1.1479 ±.0027	-0.337 ±.136	1.1536	-0.152	1.1522	-0.207
O1	1.1523 ±.0005	+0.033 ±.025	1.1566	-0.073	1.1559	-0.089
P1	1.1489 ±.0009	+0.342 ±.046	1.1474	+0.200	1.1493	-0.077
K1	1.1401 ±.0003	+0.192 ±.017	1.1379	+0.073	1.1383	-0.015
N2	1.1794 ±.0010	+1.911 ±.048	1.1592	+0.078	1.1590	+0.065
M2	1.1853 ±.0002	+1.205 ±.009	1.1566	-0.206	1.1563	-0.209
S2	1.1896 ±.0004	+0.347 ±.019	1.1628	-0.056	1.1588	-0.815
K2	1.1880 ±.0018	+0.225 ±.086	1.1622	-0.056	1.1576	-0.500
δO1-δK1	0.0122 ±.0006		0.0187		0.0176	
δO1-δM2	-0.0330 ±.0005		-0.0000		-0.0004	
	N = 59.664 hrs.		σ_d = 2.02		σ_{sd} = 0.81	

After correcting the indirect effect of the oceans (Calculation of the ICET based on SCHWIDERSKI maps) a further correction was applied by subtracting a vector $\{\alpha A_p ; x_p\}$ which was calculated by a CHOJNICKI-analysis of the air pressure at the station during the whole registration period. A coefficient $\alpha = -0.719$ microgal/mbar was assumed for the gravimeter as estimated in {4}. But the significance of the air pressure waves in tidal frequencies is rather eak except in the case of S2.

For comparison with the WAHR model the results of the analysis programme CHOJNICKI/A15H are used not containing the inertial correction and the orientation towards the ellipsoid :

Table IV. GS15 N° 222 digital, Potsdam 1974-1982. Comparison with the WAHR model.

Wave	Analysis result[+] CHOJNICKI/A15H		Indirect effect corrected SCHWID./ICET		Air pressure influence corrected too		WAHR model δ_m
	δ	x°	δ	x°	δ_c	x°	$(\delta_c-\delta_m)/\delta_m$
Q1	1.1512 ±.0023	-0.31 ± .11	1.1568	-0.12	1.1555	-0.18	1.1469 +0.750%
O1	1.1521 ±.0004	0.00 ± .02	1.1564	-0.11	1.1557	-0.12	1.1469 +0.767%
P1	1.1504 ±.0008	+0.35 ± .04	1.1489	+0.21	1.1508	-0.07	1.1419 +0.779%
K1	1.1397 ±.0003	+0.20 ± .01	1.1375	+0.08	1.1379	-0.01	1.1269 +0.976%
N2	1.1789 ±.0010	+1.83 ± .05	1.1588	-0.01	1.1586	-0.02	1.1453 +1.161%
M2	1.1841 ±.0002	+1.20 ± .01	1.1554	-0.21	1.1551	-0.22	1.1453 +0.856%
S2	1.1885 ±.0004	+0.36 ± .02	1.1617	-0.04	1.1577	-0.80	1.1453 +1.083%
K2	1.1885 ±.0018	+0.18 ± .09	1.1607	-0.10	1.1561	-0.55	1.1453 +0.943%
δO1-δK1	0.0124 ±.0005		0.0189		0.0178		0.0200
δO1-δM2	0.0320 ±.0004		0.0010		0.0006		0.0016

N = 62.619 hrs $m_o = \pm 0.654$ µgal $\sigma_d = 1.949$ $\sigma_{sd} = 0.325$

[+] The whole listing of the results /45 wave groups/ is available upon request from the author's institution.

In tables III and IV the air pressure correction leads to a better fitting of the δ-factors but not of the phase shifts xS2 and xK2. Taking the coefficient $\alpha_{th} \approx -0.3$ microgal/mbar which may be expected for geophysical reasons and thus neglecting the instrumental air pressure response the same fact may be shown but not with such a clearness.

The remaining differences against the Earth models are significant and cannot be explained by systematical errors of the measurement : The arithmetical mean deviation of the eight δ-factors in table IV from the WAHR model is + 0.914 %. That is about five times more than the 'absolute' error probability of ± 0.19 % and very near to the corresponding deviation of 1 % reported by MELCHIOR and DE BECKER {7}. The eight corrected δ-factors of table III are, on an average, -0.248 % smaller in comparison with the model MOLODENSKY I and - 0.667 % smaller than those estimated by the MOLODENSKY II model. Furthermore the differences (δO1 - δM2) are nearer to the - 0.0008 value of the MOLODENSKY models and all the three models require higher values for the difference (δO1 - δK1) than those measured, that means, a stronger influence of the resonance of the liquid outer core of the Earth.

TEMPORAL VARIATIONS OF TIDAL PARAMETERS

Nevertheless, there are some phenomena not included in the models and also not so influenced by calibration problems. They are of particular geophysical interest if, at different stations with independent gravimeters, there are similar features which may be caused by the Earth, indicating global or regional effects. In the first line these are the temporal variations of the tidal parameters characterizing the resonance of the liquid outer core. These variations are only detectable if the mean square error of an hourly reading of the series is sufficiently below one microgal. Such variations observed during the Potsdam series are compared with the corresponding results of a measurement at Pecny station / CSSR obtained with the gravimeter GS15 N° 228 : The final results (m_o = ± 0.730 microgal) of the eight main δ-factors at Pecny differ from final Potsdam results by amounts between + 0.0037 (δQ1 and δK2) and - 0.0008 (δN2) if the loading corrections are applied.

The programme of the partial analyses was just the same as that for the Potsdam measurement. Figure 3 shows an apparent correlation between the variations of the δO1 parameters from both the stations (+ 0.51 % at Potsdam between July 1978 and January 1981) and an anticorrelation to the length of the say (LoD) {6}. Similar facts, for the first time mentioned by LECOLAZET {5}, have not been observed for other constituents of the tidal potential in our series of partial analyses, and one should be careful in the interpretation of the normalized

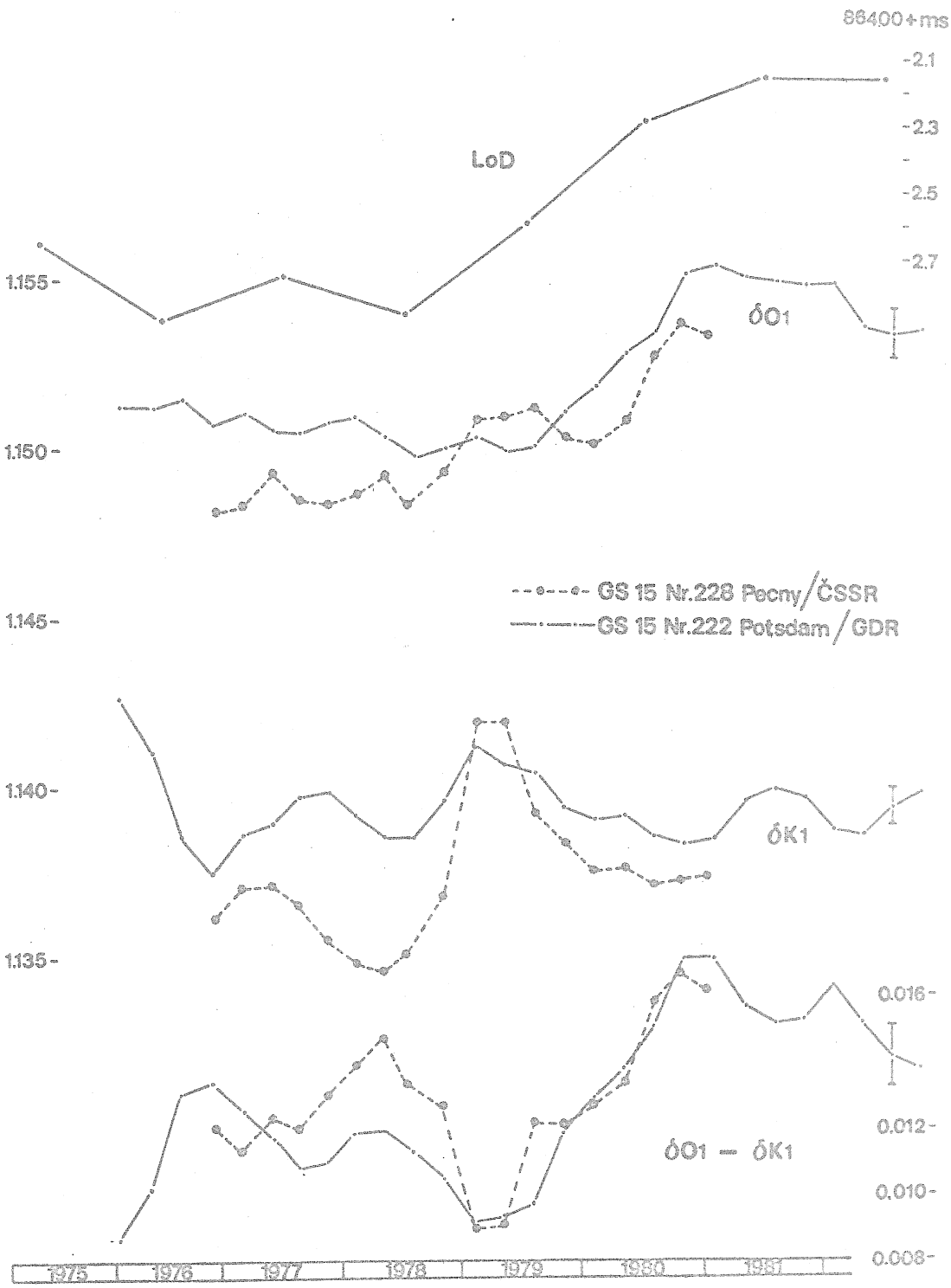


Fig. 3. Temporal variations of the main diurnal tidal parameters as detected by partial analyses for different stations and the length of the day (LoD).

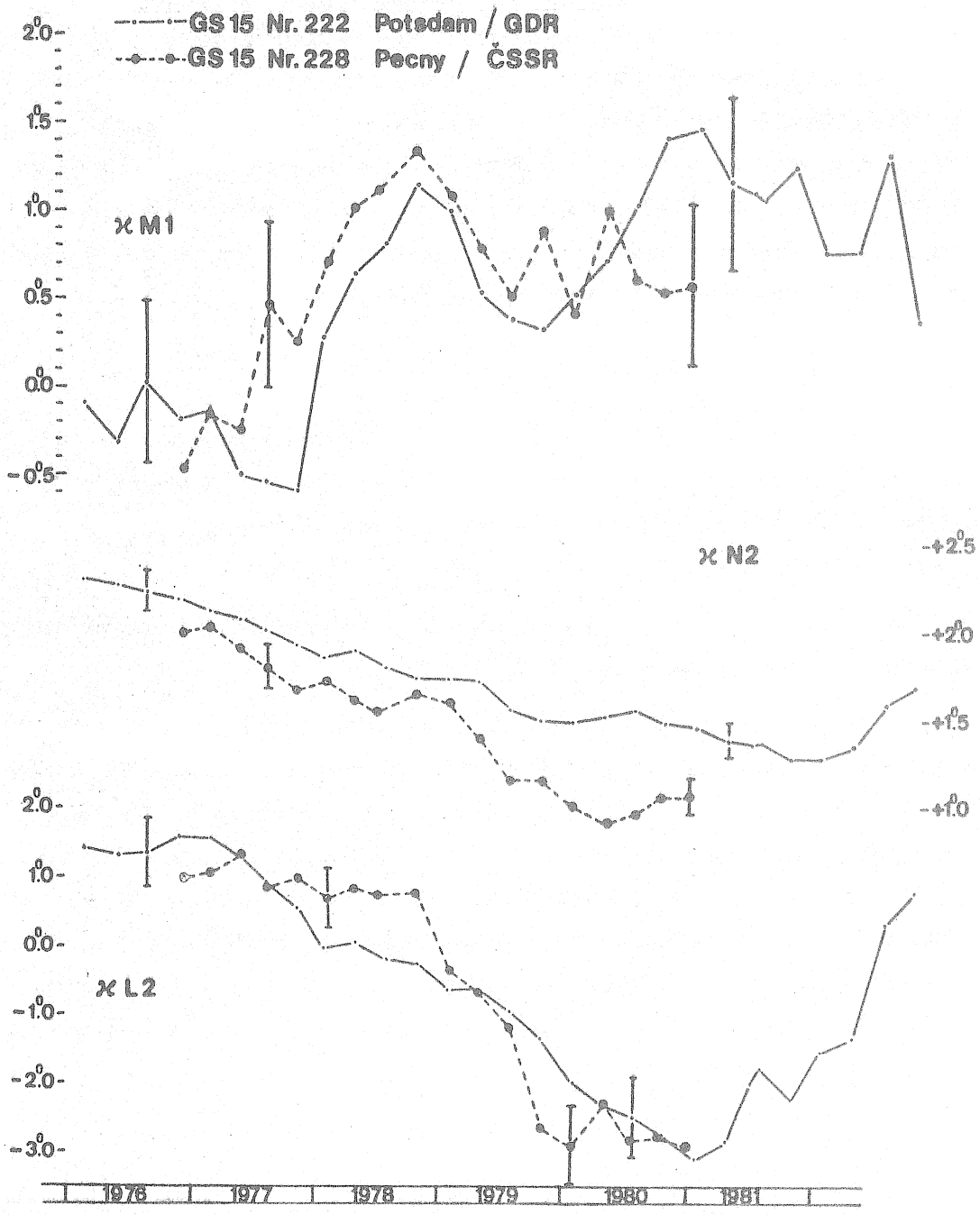


Fig. 4. Temporal variations of tidal phase lags in the partial analysis results.

factors $\delta_i/\delta O1$ in model discussions if $\delta O1$ is affected itself.

Another interesting fact is the significant temporal drift of the phase shifts xM1, xN2 and xL2 observed at Pecny station as well as in Potsdam and therefore not an effect of a single measurement (Fig. 4). Other phases are not affected in this way and therefore a drift in the quartz clock controlled timing of the registrations may be excluded. The presented results of partial analyses by the CHOJNICKI programme A15H, including the error estimation based on residuals, are confirmed by corresponding analyses of the same data with VENEDIKOV's VM74 method {8}. Thus, they are surely not an effect of processing. It should be noticed that the waves in Fig. 4 contain the term p, the perigeum of the moon, in the development of their potential.

CONCLUSIONS

Not only the accuracy of the analysis results but also the 'outer accuracy' of the calibration of the record is sufficient for discussions of model parameters if there is made every effort to investigate the reliability of the calibration constant.

The given measurement shows deviations of characteristic parameters against those of the models between - 0.25 % and + 0.91 %.

The results contain some significant effects not predicted by the Earth models. So we need tidal measurements for practical purposes. As an important conclusion it may be stated that because of the variation of the main tidal parameters - also in analyses with more than 10.000 hourly readings - the results of tidal measurements at the same station but in different periods of time may differ by amounts outside the error bars of the analysis methods used at present. Therefore for very accurate tidal gravity corrections we need tidal measurements not only in the same region but also during the same time in which a gravimetric high precision network is measured.

ACKNOWLEDGEMENTS :

This work was essentially supported by the colleagues of the department of gravimetry at the Central Institute for Physics of the Earth. Data processing was made at the computing centre of the Central Institute for Astrophysics.

Thanks are due to Dr. T. CHOJNICKI/Warsaw for supporting the installation of his programme and Dr. A. VENEDIKOV for processing analyses at the computing laboratory in Sofia.

The series of the Pecny station was made available due to the kind support of Dr. Z. SIMON/Prague.

Finally we thank the members of the ICET for the tidal analyses and for the calculation of the corrections of the indirect effect on the basis of SCHWIDERSKI's investigations.

REFERENCES

{1} SIMON, Z., BROZ, J. et al : Calibration of the Askania Earth tide gravimeters.
Sb. vyzk. Praci, VUGTK,
R. 3, Sv. 12, pp. 15-29, Praha 1977.

{2} DITTFELD, H.-J. : Digital Earth tide registrations at Potsdam 1974-1978.
Study of the Earth tides,
Bull. N° 3, pp. 32-55, Budapest 1980.

{3} TAUBENHEIM, J. : Statistische Auswertung geophys. und meteorolog.
Daten. Akad. Verlagsgesellsch. Geest und Portig,
pp. 166-168, Leipzig 1969.

{4} DITTFELD, H.-J., SIMON, Z. et al : Earth tide observations by Askania gravimeters at the Geodetical Observatory Pecny.
Publ. of the Hung. geophys. Inst. 'Roland Eötvös', Budapest 1976.

{5} LECOLAZET, R. : On a correlation between diurnal gravity tides and the Earth' rotation rate.
Proc. of the 9th Int. Symp. on Earth tides, pp. 527-530, New York 1981.

{6} BIH, Rapport annuel pour 1975, 1976, 1982. Paris 1976, 1977, 1983.

{7} MELCHIOR, P., DE BECKER, M. : A discussion of world-wide measurements of tidal gravity with respect to ...
Physics of the Earth and planetary interiors, 31, pp. 27-35,
Amsterdam 1983.

{8} VENEDIKOV, A.P. : Analysis of Earth tidal data.
Proc. of the 8th Int. Symp. on Earth tides, pp. 129-152, Bonn 1979.

RESULTATS DE L'ANALYSE HARMONIQUE DES OBSERVATIONS CLINOMETRIQUES AU POINT DE "PEREGONOVKA" POUR 1974 A 1978

V.G. Goloubitskii, P.S. Matveyev, I. Iou Bogdan,
A.D. Krivonoss, E.A. Slovinskaïa

Rotation et déformations de marées de la Terre, N° 14 - 1982, pp. 23-31

Conformément au programme d'observations des marées terrestres clinométriques le long du profil Soumi-Kherson proposé dès le début des années 1960 {1 à 3,9}, on a réalisé, au site de Peregonovka de la région de Kokliaskii, près de Poltava, de septembre 1974 à octobre 1978, des observations clinométriques continues afin de déterminer les paramètres γ et $\Delta\phi$ représentatifs pour cette région.

En 1974 on avait déjà onze points clinométriques suivant ce profil. Pour neuf d'entre eux on a obtenu des valeurs définitives et pour les deux autres des valeurs provisoires des paramètres caractérisant les ondes de marées les plus importantes.

La particularité remarquable des premiers résultats obtenus était l'évidence de l'inégalité $\gamma_{NS} < \gamma_{EW}$ propre à la marée terrestre semidiurne pour la grande majorité des points d'observation.

A côté des effets indirects des marées océaniques on peut indiquer, parmi les causes possibles de ce genre d'inégalité, certains effets indirects d'origine tectonique comme les influences des fractures de l'écorce terrestre. C'est pourquoi il est logique de les constater le long du profil Soumi-Kherson et dans des points situés dans différentes conditions géologiques et tectoniques. Ceci exige qu'on accorde une grande attention au choix du site de chaque nouveau point clinométrique. La préférence donnée à la région "Peregonovka" (avant d'autres) n'a pas été donnée tout de suite mais seulement parce qu'elle est située à proximité de la zone du bord sud de la fracture du Dniepr-Donetz.

Cette circonstance a offert aux chercheurs une possibilité favorable non seulement d'acquérir de nouvelles données expérimentales mais aussi d'y relever l'effet de l'influence supposée de cette fracture sur la déformation des marées.

La description de l'équipement et les caractéristiques de l'appareil clinométrique, les conditions de réalisation des observations et la qualité du

matériel d'observation obtenu sont donnés dans le travail {4}.

Le site d'observation est une galerie spécialement creusée à une profondeur de 12 m, équipée de clinomètres photoélectriques Ostrovskii {5}. La paire de clinomètres de ce type utilisé pendant quatre années d'observations comporte les appareils 08 et 09 à l'aide desquels on avait fait précédemment une série de trois ans d'observations à la station clinométrique "Soudievka" {6}.

A "Peregonovka" l'appareil 08 a enregistré la composante N-S ($\alpha_{08} = 0°$) et l'appareil 09 la composante E-W ($\alpha_{09} = 90°$).

La méthode d'observation et la méthode de réduction des observations diffèrent peu des méthodes appliquées précédemment en d'autres points du profil Soumi-Kherson. Une seule différence importante est liée au passage du système d'alimentation électrique des spots des générateurs photo depuis des batteries d'accumulateurs de grande puissance vers un système plus progressif d'alimentation par des stabilisateurs électroniques.

Nous donnons ici les résultats de l'analyse harmonique de toutes les observations de bonne qualité qu'on a réussi à obtenir au cours des quatre années. Par le terme d'observation de qualité, nous entendons un enregistrement régulier, si possible continu, si ce n'est sur la durée de toute la série d'observations, au moins en intervalles séparés dont la durée n'est pas inférieure à un mois. La quantité des interruptions courtes (ne dépassant pas un jour) doit être également minimale de sorte que leur rétablissement par interpolation ne conduise pas à une augmentation considérable du volume de travail. Ensuite, dans les enregistrements il faut examiner soigneusement l'allure de la courbe d'inclinaison enregistrée avec les particularités individuelles qui lui sont caractéristiques (périodicité semidiurne, inégalités diurnes, etc ...). Si à l'examen visuel de l'enregistrement de l'inclinaison de marée enregistrée on découvre que l'allure normale est perturbée par l'onde diurne thermique S_1 ou par d'autres perturbations de n'importe quelle origine l'enregistrement correspondant doit être rejeté.

Un examen détaillé de tous les enregistrements a permis de retenir 8 séries mensuelles pour la composante N-S et 18 séries mensuelles pour la composante E-W. La cause de la faible qualité des observations provient de la forte perturbation due à l'onde diurne S_1 engendrée par des déformations thermiques élastiques près de la surface du sol dans les environs du point d'observation. Nous noterons que cette onde perturbatrice est très irrégulière aussi bien en amplitude qu'en phase.

L'analyse harmonique a été faite d'après le schéma de 30 jours de P.S. Matveyev {7} permettant la détermination des paramètres γ et $\Delta\phi$, des huit ondes Q_1, O_1, N_1, M_1, N_2, M_2, S_2 et μ_2.

Les calculs ont été faits sur EVM EC-1020 avec le programme écrit par B.S. Doubik. Ce programme introduit la transformation en mesure angulaire des ordonnées horaires y_t mesurées en millimètres, la détermination et le calcul des sauts Δ_j dans les ordonnées n''_t, l'estimation de la précision des ordonnées.

Les valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenues pour chacune des séries sont données dans les tables 1 et 2. Le signe "plus" pour les valeurs des phases $\Delta\phi$, dans ces tables comme aussi dans tous les autres résumés de nos résultats publiés après 1975, correspond à un retard de l'inclinaison de marée observée par rapport à sa valeur théorique calculée dans l'hypothèse de la Terre absolument rigide. Les dates des premiers jours des séries correspondantes sont données dans les premières colonnes de ces tables par un code à six chiffres (année, mois, jour).

TABLE 1 : Paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenus à "Peregonovka" : Ondes diurnes.

Début de la série ($t_0 = 0^h UT$)	Q_1		O_1		K_1		M_1	
	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
				Composante NS (appareil 08)				
74II25	0,093	−50,2I°	I,064	−I9,93°	0,839	−2,86°	I0,438	+73,90°
7504I0	5,325	+24,73	0,6I3	+I96,43	4,II7	+9,3I	I7,478	+I88,75
75I1II	I0,485	−60,93	I,904	+3,65	I,436	−27,28	27,662	−I49,6I
7604I0	5,503	−3,59	0,995	+I03,07	I,975	+3I,97	5,I04	+46,27
76I0I7	6,488	−52,94	I,I72	−24,II	0,228	+85,84	I2,6I0	+I35,42
76I026	I,70I	−99,22	0,I99	−I59,0I	0,57I	−I4,72	4,I66	+I95,74
77I0I2	I5,705	+5I,84	4,882	+83,I4	3,688	+57,02	92,I67	+I45,24
77II04	4,329	+96,02	I,I98	+I4,78	I,659	−29,46	28,706	+3I,06
				Composante EW (appareil 09)				
7409I2	I,60I	+48,25°	0,866	+I5,82°	I,885	+85,II°	2,558	−99,90°
74I007	0,774	+I68,58	0,70I	−I8,35	I,272	+25,95	6,I35	+II4,I6
74II0I	I,370	+0,79	0,593	+0,2I	0,782	−I3,23	2,297	+I8,73
74II26	0,374	+I32,50	0,723	−5,54	0,629	−I7,32	2,I5I	+44,47
7507I0	I,633	+50,83	0,328	+60,57	0,6I4	+I4,35	I,II0	+24,75
75I009	I,333	+I47,8I	0,675	+62,68	0,905	−I7,79	0,253	−I44,62
75IIII	0,I52	−77,20	0,970	+40,27	0,686	−20,05	3,928	+0,52
7604I0	I,I23	+37,6I	0,770	−3,I8	0,783	+28,28	0,3I6	−37,24
760504	0,283	+I08,85	0,555	−I4,I9	0,647	−8,95	2,250	+II3,04
760528	0,4I9	+3,07	0,735	−7,24	0,552	−54,88	2,098	−4I,25
7606I0	I,I75	+58,73	0,848	−4,85	0,368	−74,83	2,584	+I35,60
760721	I,278	−I34,50	0,8I4	+26,25	0,I97	−3I,28	0,345	+II2,83
7608I4	0,938	−6,79	I,075	+9,56	0,728	−I,9I	9,745	+28,37
760827	2,443	−I2,30	I,202	+I4,9I	0,875	−I0,65	7,5I7	+25,97
760929	0,969	−29,89	0,729	+I,6I	0,9I2	−I8,25	0,442	+I42,93
76I024	0,462	−20,II	0,8I9	+0,0I	0,736	−I7,02	I,238	−I0,38
77I0I0	0,686	+5,72	0,646	−I,67	0,909	−I6,97	3,208	+24,60
77II04	I,I56	−9,60	0,670	−I6,47	0,74I	−I3,65	I,020	−42,50

TABLE 2 : Paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenus à "Peregonovka" : Ondes semidiurnes

Début de la série ($t_0 = 0^h UT$)	N_2		M_2		S_2		ν_2	
	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
			Composante NS (appareil 08)					
74II25	0,497	-2,40°	0,733	-6,I7°	0,822	-2,38°	3,00I	+26,25°
7504I0	0,56I	+20,58	0,693	-3,95	I,038	-4,72	I,06I	-59,I4
75IIII	0,552	-3,55	0,650	-6,75	0,859	+2,75	I,900	+I8,27
7604I0	0,570	+II,99	0,598	-4,2I	0,870	+I0,93	I,I7I	-I6,03
76I0I7	0,453	-23,94	0,679	-3,84	0,847	-0,70	I,53I	-40,87
76I026	0,607	-I4,8I	0,700	-3,66	0,828	-2,8I	2,674	-2I,I8
77I012	0,862	-I9,29	0,7II	-9,63	0,727	-2,58	I,994	-25,84
77II04	0,53I	+3,88	0,682	-2,83	0,803	-3,85	0,930	-59,I6
			Composante EW (appareil 09)					
7409I2	0,74I	+8,64°	0,7I4	+0,89°	0,249	-50,93°	0,846	+7I,48°
74I007	0,825	-4,79	0,698	-I,72	0,235	-I8,0I	I,422	+I2,29
74II0I	0,774	-9,7I	0,697	-3,42	0,4II	-4,26	I,I86	+4I,38
74II26	0,693	-22,84	0,669	-I,9I	0,438	+0,I3	I,485	+I50,56
7507I0	0,505	-I3,70	0,688	-I,55	0,648	-3,4I	I,943	+45,I7
75I009	0,699	+4,68	0,729	-4,24	0,4I6	+I5,37	I,8I6	+2I,70
75IIII	0,7I9	-5,94	0,70I	-5,3I	0,398	+8,42	2,494	+67,69
7604I0	0,794	+I,48	0,733	-4,44	0,478	+I9,47	0,574	-0,I4
760504	0,644	-5,64	0,707	-2,3I	0,368	+5,50	0,599	+93,00
760528	0,799	-2,49	0,7I9	-8,23	0,438	-25,08	0,433	+I3I,50
7606I0	0,877	-3,02	0,750	-7,53	0,566	-22,27	0,86I	+92,I6
760721	0,629	+5,67	0,7I4	-2,20	0,433	-8,49	0,298	+3,66
7608I4	0,99I	+5,I4	0,739	-8,09	0,457	+0,7I	I,7I4	-53,27
760827	0,73I	+9,02	0,762	-9,85	0,366	+2,5I	I,097	-I02,79
760929	0,740	-I,33	0,73I	-3,97	0,497	+6,I7	0,737	+28,84
76I024	0,8II	-5,62	0,7II	-3,65	0,523	-3,68	0,759	+62,58
77I0I0	0,68I	-0,54	0,729	-3,I8	0,703	-I,39	0,355	-44,38
77II04	0,678	+I,80	0,729	-2,I0	0,656	+3,25	I,I8I	-43,66

Comme instant initial de chaque série analysée on a pris l'heure zéro du premier jour de cette série (en temps universel). Le petit trait en dessous du symbôle de l'onde K_1 montre que les valeurs obtenues γ et $\Delta\phi$ pour celle-ci peuvent renfermer des apports perturbateurs sensibles de l'onde diurne thermique S_1 et de l'onde diurne de marée P_1.

Les moyennes vectorielles de γ et $\Delta\phi$ ont été calculées avec estimation de leur précision. Les résultats sont donnés dans la table 3 où, à côté des valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ et leurs erreurs quadratiques moyennes, sont données également les valeurs théoriques des amplitudes H_T des ondes déterminées, exprimées en millisecondes d'angle. Par n on désigne le nombre de séries mensuelles dont les résultats ont été utilisés pour la moyenne.

On peut constater que la précision des valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ caractérisant les ondes diurnes dans la direction méridienne est extrêmement basse. Si on prend en considération la position géographique du site "Peregonovka" {4} il n'y a là rien d'étonnant puisque dans la zone des latitudes moyennes il n'est pas possible pratiquement de garantir une détermination sûre des paramètres γ_s et $(\Delta\phi)_s$ à cause de la faible amplitude des ondes diurnes en composante NS. Mais ici, il n'y a pas de doute que cela n'est pas la seule raison. Lors de la comparaison des résultats obtenus pour les ondes semi-diurnes N_2, M_2 et S_2 on constate aussi une baisse de la précision pour la composante N.S et

TABLE 3 : Moyennes vectorielles γ et $\Delta\phi$ pour le site "Peregonovka" d'après les données des observations clinométriques pour 1974 à 1978 (méthode Matveyev).

Onde	NS (n = 8)			EW (n = 18)		
	H_T angle m.sec	γ	$\Delta\varphi$	H_T angle m.sec	γ	$\Delta\varphi$
Q_1	0,I65	3,5594 ± I,2774	+4,93° ±36,47	0,942	0,5I50 ±205I	+I9,75° ±I6,70
O_1	0,862	0,873I ±505I	+47,57 ±3I,I3	4,920	0,7I20 ± 552	+7,97 ± 4,8I
$\bar{K}_1$	I,2I2	I,5428 ±4355	+I5,86 ±I6,33	6,920	0,5347 ± 677	-0,28 ±II,3I
M_1	0,068	I5,2957 ± 9,4478	+I43,87 ±3I,26	0,387	I,6458 ±6I95	+34,80 ±I8,[illegible]
N_2	I,496	0,5607 ± 4I0	-4,I8 ± 5,8I	I,982	0,734I ± 262	-I,[illegible] ± I,78
M_2	7,820	0,6803 ± I44	-5,I6 ± 0,85	I0,352	0,7I69 ± 50	-4,I0 ± 0,69
S_2	3,638	0,8463 ± 309	-0,43 ± I,87	4,8I6	0,4463 ± 326	-3,46 ± 3,[illegible]
μ_2	0,239	I,5552 ±2957	-I3,70 ±II,30	0,3I7	0,595I ±I869	+36,02 ±I8,66

aussi un écart de ces valeurs lors de leur comparaison par ondes. Tout cela résulte du volume insuffisant des données d'observations et également d'une perturbation générale des résultats obtenus par l'onde diurne thermique S_1. L'influence perturbatrice de cette onde dans la direction EW se fait sentir apparemment à un moindre degré.

Cependant, pour cette composante, les erreurs quadratiques moyennes relatives des paramètres γ et $\Delta\phi$ de l'onde M_2 ne sortent pas des limites d'un pourcent ce qui correspond au niveau de précision des résultats atteints par nous dans la plupart des sites du profil Soumi-Kherson.

Pour vérifier les résultats obtenus (table 3) on a décidé de les soumettre à une réduction de contrôle suivant la méthode de Venedikov {10}. Cette méthode garantit une détermination tout à fait sûre des paramètres des ondes de marées terrestres les plus importantes même en présence d'interruptions. Le choix et la préparation des données d'observations ont été faits à nouveau. Parmi ceux déjà soumis à l'analyse d'après le schéma {7} (série de 26 mois) on a choisi les fragments d'enregistrement perturbé qu'il convenait de garder. D'autre part, à cet ensemble on a inclu les intervalles de deux jours qu'à cause de leur isolement il n'était pas possible d'inclure dans la réduction d'après le schéma {7}.

En tout on a préparé pour l'analyse par la méthode de Venedikov deux groupes de données d'observations perturbées au minimum par l'onde météorologique, soit 256 et 526 jours pour les appareils 08(NS) et 09(EW) respectivement. Les calculs ont été faits sur EVM EC-1020 avec le programme de B.S. Doubik. Les

résultats de l'analyse sont donnés dans la table 4.

TABLE 4 : Paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenus à "Peregonovka" pour 1974 à 1978 (Méthode Venedikov).

Onde	NS (N = 256)			EW (N = 526)		
	H_T angle m.sec	γ	$\Delta\varphi$	H_T angle m.sec	γ	$\Delta\varphi$
Q_1	0,I65	3,5607 ± I,3485	-I6,59° ±2I,58	0,942	0,5346 ±2573	-8,00° ±27,0I
O_1	0,862	0,6II9 ±3I2I	-20,06 ±28,93	4,920	0,602I ± 507	+0,8I ± 4,74
M_1	0,068	I,364I ± 2,5620	+43,63 ±I06,88	0,387	0,I50I ±5389	-I8,22 ±20I,55
P_1	0,40I	2,9077 ±6796	-28,66 ±I3,38	2,290	0,7735 ± 933	-55,02 ± 6,78
K_1	I,2I2	0,4298 ±2493	-45,I0 ±33,00	6,920	0,4777 ± 344	+3,06 ± 4,06
J_1	0,068	2,8728 ± 2,8367	+I04,85 ±56,II	0,387	0,5024 ±6346	+I0,03 ±7I,06
$2N_2$	0,I98	I,34I3 ±3739	+I,74 ±I5,86	0,262	0,7237 ±2077	-I0,26 ±I6,08
N_2	0,497	0,6680 ± 752	-I3,26 ± 6,39	I,982	0,6778 ± 4I3	-6,82 ± 3,4I
M_2	7,820	0,6559 ± I53	-4,95 ± I,35	I0,352	0,7I95 ± 79	-3,74 ± 0,62
L_2	0,22I	I,3206 ±4I42	-2I,26 ±I7,83	0,292	0,9436 ±2045	-22,77 ±I2,I5
S_2	3,638	0,9099 ± 403	+6,66 ± 2,52	4,8I6	0,5459 ± I74	+I,49 ± I,80
K_2	0,990	0,7627 ±I796	+I6,28 ±I3,4I	I,3II	0,4748 ± 803	+I9,77 ± 9,49

En comparant les résultats obtenus pour les ondes diurnes O_1 et K_1 par des méthodes différentes, il faut noter que les valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ dans la table 4 sont plus précises que les valeurs correspondantes dans la table 3. On peut considérer ceci comme la preuve que lors de la préparation des données pour la méthode Venedikov on a réussi à choisir deux ensembles d'ordonnées plus qualitatives. Il n'est pas exclu également qu'ici soit apparu un des mérites de la méthode de Venedikov garantissant une détermination sûre des paramètres de marées terrestres même pour des observations présentant des interruptions arbitraires. Cependant, devient alors incompréhensible, la divergence des erreurs sur les valeurs du paramètre γ des ondes O_1 et K_1 obtenues par cette méthode pour la direction EW (table 4). D'autant plus que les valeurs correspondantes de ce paramètre obtenues d'après le schéma de Matveyev (table 3) sont en bon accord entre elles car elles ne sortent pas des limites de l'intervalle défini par leurs erreurs quadratiques moyennes.

La comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes pour les trois ondes semidiurnes les plus importantes (N_2, M_2, S_2) de la composante EW témoigne d'une égale précision par l'une et l'autre méthode. Cependant pour la composante NS l'application de la méthode de Matveyev a permis d'obtenir les valeurs des paramètres des trois ondes semidiurnes avec des erreurs relatives

nettement plus petites que celles que garantit l'application de la méthode de Venedikov (table 3 et 4) bien que le volume des données d'observation analysées soit dans les deux cas le même. Nous pouvons constater ici le très bon accord dans les valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenus par les deux méthodes pour l'onde M_2. A la station "Peregonovka" l'inégalité azimutale $\gamma_s < \gamma_w$ est vérifiée.

Comme poids $(P_x)_j$ des paramètres γ_i et $(\Delta\phi)_i$ on a pris les valeurs inverses des carrés de leurs erreurs quadratiques moyennes. Ainsi

dans la direction NS $\gamma_{NS} = 0{,}6689 \pm 104$, $(\Delta\phi)_S = -5{,}10° \pm 0{,}72$;

dans la direction EW $\gamma_{EW} = 0{,}7176 \pm 42$, $(\Delta\phi)_W = -3{,}90° \pm 0{,}46$;

Les observations ont été faites par la même paire de clinomètres Ostrovokii {5} qui, de 1971 à 1973 ont été utilisés pour les observations à "Soudievka" {6}. A la suite de deux étalonnages de contrôle des appareils 08 et 09 faits après la fin des observations (en mars 1973 et en janvier 1974) on a découvert de petits écarts des valeurs réelles de la constante électrodynamique et des valeurs du courant de l'impulsion de contrôle I_{KI} de ces appareils. Pour corriger les résultats obtenus à "Soudievka" il faut multiplier les valeurs finales (moyennées) du paramètre γ obtenues pour les appareils 08 (NS) et 09 (EW) respectivement par les facteurs correcteurs : $K_{08} = 0{,}99924$, $K_9 = 0{,}97721$ {6, p. 4}. Dans la phase définitive de la réalisation de la partie expérimentale de ce travail, nous avons évidemment été intéressés de savoir si, dans la période de 1974 à 1979, les constantes I_o et I_{ki} des appareils 08 et 09 n'avaient pas subi de nouvelles variations qui exigeraient des corrections aux résultats obtenus à "Peregonovka" puisqu'ici lors de la déduction de ces derniers, comme également au point "Soudievka" on a utilisé les valeurs originales de I_o et I_{ki}. Dans ce but, en juin 1977 et en juillet 1979, ces appareils ont été étalonnés par deux fois sur la plateforme clinométrique de l'Observatoire Gravimétrique de Poltava. Les résultats de ces étalonnages ont montré que de 1974 à la fin de la période des observations, les variations relatives des constantes I_o et I_{ki} des appareils 08 et 09 n'ont pas dépassé 0,5 %. En tenant compte de celles-ci les facteurs correctifs pour la correction des amplitudes de tous les résultats obtenus de 1974 à 1979 à "Peregonovka" était $K_{08} = 0{,}99300$ et $K_{09} = 0{,}97975$. Les valeurs de γ données plus haut dans les tables 1 à 4 sont déjà corrigées par ces facteurs.

On peut tirer comme conclusions principales de ce travail :

1. L'analyse harmonique de séries de 26 mois à "Peregonovka", de 1974 à 1979, a permis de déterminer de nouvelles valeurs des paramètres des marées terrestres γ et $\Delta\phi$ caractérisant les cinq ondes les plus importantes dans les inclinaisons de marées au point d'observation : O_1 et K_1 dans la direction EW; N_2, M_2 et S_2 dans les directions NS et EW.
   Pour contrôler et augmenter la sûreté des résultats obtenus on a fait l'analyse par deux méthodes à peu près aussi précises. Les deux variantes sont en bon accord.

2. La précision des valeurs finales obtenues pour les paramètres γ et $\Delta\phi$ caractérisant l'onde M_2 dans la direction EW était plus élevée d'un pourcent, ce qui correspond tout à fait aux exigences actuelles. Cependant la précision de détermination des paramètres correspondants de cette même onde dans la direction NS était à peu près de 50 % plus basse ce qui s'explique par l'insuffisance du volume des données d'observation. Une recommandation s'impose donc d'elle même quant à l'utilité de la réalisation d'une série supplémentaire d'observations clinométriques au point de "Peregonovka".

BIBLIOGRAPHIE

{1} MATVEYEV P.S., Anomalies des inclinaisons de marées de la surface de la Terre à Poltava et Schmakovo d'après les données des observations pour 1958 à 1959.
Bull. d'Inf. du Comité Géophysique International de l'Ac. des Sciences d'Ukraine, Géophysique et Astronomique, 1963, N° 5, pp. 25 à 32.

{2} MATVEYEV P.S., BOGDAN I. You., Observations des inclinaisons de la surface de la Terre aux points du profil Soumi-Kherson en 1964 à 1967.
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1970. Publ. 2, pp. 8 à 17.

{3} MATVEYEV P.S., Développement de l'idée de A. Ya. Orlov sur l'étude des inclinaisons de marées de la surface de la Terre dans les travaux de l'Observatoire Gravimétrique de Poltava.
Dans le livre : Géodynamique et Astrométrie - bases, méthodes, résultats.
Kiev : Naoukova Doumka, 1980, pp. 27 à 52.

{4} BOGDAN I. You, GOLOUBITSKII V.G., MATVEYEV P.S., Observations clinométriques à la station "Peregonovka".
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1977. Publ. 9, pp. 12 à 14.

{5} OSTROVSKII A.E., Clinomètre avec enregistreur photoélectrique.
Etude des marées terrestres. 1961. N° 2, pp. 41 à 75.

{6} MATVEYEV P.S., OSTROVSKII A.E., GOLOUBITSKII V.G. et autres, Résultats de l'analyse harmonique des observations clinométriques à la station de Soudievka pour 1971 à 1973.
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1975. Publ. 7, pp. 3 à 9.

{7} MATVEYEV P.S., Analyse harmonique d'une série mensuelle des observations de marées terrestres.
Dans le livre : Marées terrestres. Kiev. Naoukova Doumka, 1966, pp. 51 à 79.

{8} MATVEYEV P.S., Remarques sur la moyenne des résultats de l'analyse harmonique des marées terrestres.
Travaux de l'Observatoire gravimétrique de l'Ac. des Sc. d'Ukraine, 1963, 12, pp. 115 à 124.

{9} MATVEYEV P.S., L'étude anomalis des inclinaisons de marée de la surface terrestre en Ukraine.
Marées terrestres. Bull. inform. Assoc. Int. Geod. Commis. perman. marées terrestres. 1963, N° 34, pp. 1055-1059.

{10} VENEDIKOV A.P., Une méthode pour l'analyse des marées terrestres à partir d'enregistrement de longueur arbitraire.
Commun. Observ. Roy. Belg., 1966, N° 250, Ser. Geoph., N° 71, pp. 463-485.

Traduction

ANALYSE DES ENREGISTREMENTS DE MAREES TERRESTRES

A.P. VENEDIKOV

Institut Géophysique
Sofia, Bulgarie.

I. INTRODUCTION

Le procédé d'analyse des enregistrements des marées terrestres doit répondre à deux exigences fondamentales :

a) garantir l'évaluation des paramètres recherchés avec une précision maximum

b) fournir ces estimations avec une évaluation correcte de la précision.

Le spectre des phénomènes de marée étant connu on peut utiliser la méthode des moindres carrés qui satisfait ces exigences.

Malheureusement ce n'est pas si simple. Il existe certaines particularités d'enregistrements qui nous obligent à chercher des schémas spécifiques {1 ÷ 8} de l'application de méthode des moindres carrés. Ce schéma a été élaboré dans la méthode {9 ÷ 12} que nous désignons plus loin par M65.

Nous examinerons deux phases principales de M65.

1. Le spectre de la marée contient une très grande quantité d'ondes. Ainsi quelle que soit la longueur de l'enregistrement donné, elles forment des groupes d'ondes de fréquences voisines - ce sont des bandes étroites du spectre à l'intérieur desquelles les ondes individuelles ne sont pratiquement pas différenciées. Si nous utilisons les inconnues du type

$$X = H \cos Q \qquad \text{et} \qquad Y = -H \sin Q \tag{1}$$

comme précédemment on ne peut inclure dans les équations d'observations qu'une onde de chaque groupe. Par conséquent ces équations ne seront pas une modélisation très précise.

Dans M65 cette difficulté a été surmontée par l'introduction des inconnues

$$\xi = \delta \cos \kappa \qquad \text{et} \qquad \eta = -\delta \sin \kappa \tag{2}$$

où δ est le rapport entre l'amplitude observée et théorique et κ la différence entre la phase observée et théorique. Nous proposons comme cela a été fait pour les ondes homologues de Lecolazet {13} que, dans un groupe donné, δ et κ soient considérés comme constants alors que d'un groupe à

l'autre ils puissent varier. Ainsi, le nombre des inconnues diminue sensiblement et on peut inclure toutes les ondes dans les équations. L'utilisation des inconnues (2) a rendu possible la réduction d'enregistrements arbitrairement longs avec des interruptions arbitraires.

2. Les mesures fournissent des valeurs horaires (VO) qui renferment des erreurs d'observation. Pour certaines erreurs, par exemple pour les erreurs de lecture et pour le bruit microséismique, on peut supposer qu'elles sont indépendantes (bruit blanc).

Nous supposons qu'il existe des perturbations accidentelles agissant lentement c'est-à-dire un bruit non blanc, telles les ondes météorologiques variables, la dérive instrumentale, etc ... On peut représenter ces perturbations comme composantes de la dérive instrumentale. On peut supposer que les moyens possibles pour éliminer la dérive ne seront pas efficaces car elle a un caractère accidentel et en même temps peut renfermer des fréquences voisines des fréquences de marée. Par conséquent en (VO) il y a des erreurs dépendantes à cause de l'élimination incomplète de la dérive et dans les résultats de l'analyse de VO nous avons une certaine influence de ces erreurs qu'on peut appeler influence résiduelle de la dérive. Il est tout à fait possible que cette influence soit différente pour les ondes diurnes et semi diurnes.

Sur la base de ces hypothèses, il faut compléter et préciser les exigences formulées plus haut à savoir :

(a) ramener au minimum l'influence des erreurs aussi bien indépendantes que dépendantes c'est-à-dire aussi de l'influence résiduelle de la dérive

(b) fournir une estimation de la précision reflétant aussi bien l'influence des erreurs dépendantes que l'influence de la dérive

(c) évaluer en particulier la précision des groupes d'ondes principaux.

La dérive s'élimine au moyen d'un filtrage sur des intervalles ne se recouvrant pas. Les valeurs filtrées sont réduites comme des observations directes à la place des lectures horaires. Les résidus de dérive dans les valeurs filtrées sont considérés comme des erreurs d'observation. par conséquent l'erreur quadratique moyenne des observations doit rendre compte de ces résidus et de l'influence des erreurs indépendantes.

L'estimation de la précision des résultats de l'analyse se fait à partir de l'erreur quadratique moyenne des observations. Par conséquent elle tient compte aussi de l'influence résiduelle de la dérive.

Dans M65 on utilise différents filtres pour les ondes diurnes, semi diurnes et ter diurnes. Ils donnent trois ensembles différents de valeurs

filtrées qui sont réduites indépendamment par la méthode des moindres carrés. On obtient ainsi une estimation de la précision pour chacun des trois différents types d'ondes.

A partir de 1974 on a commencé à appliquer une nouvelle méthode (M74) qui est une généralisation de M65. Dans M74 on conserve en principe les deux phases principales de M65 indiquées plus haut. Les nouveaux éléments les plus importants sont les suivants :

1. Le procédé de composition des filtres et le filtrage même sont une application de la méthode des moindres carrés sur les données de l'intervalle filtré. Les valeurs filtrées fournissent des inconnues qu'on obtient avec estimation de leurs poids. Dans la réduction suivante, par moindres carrés, on tient compte de ce poids conformément à la variation de précision de l'enregistrement dans le temps.

2. L'enregistrement donné est réduit par application de différents filtres qui éliminent les différentes représentations de la dérive. On obtient quelques variantes parmi lesquelles on choisit le résultat optimal, à savoir celui qui a la plus petite erreur quadratique moyenne. Nous nous libérerons ainsi de la nécessité d'émettre une hypothèse sur la meilleure représentation de la dérive que nous essayerons d'obtenir par la réduction.

3. On examine le filtrage avec une séparation complète et incomplète des types principaux d'ondes.

4. La détermination des ondes à longue période est possible.

5. Avec le filtrage pour la détermination des ondes de marées on applique des filtres pour la détermination de la valeur de la dérive et de sa première dérivée au centre de l'intervalle filtré.

6. On utilise le développement complet du potentiel de marée {14, 15} en tenant compte de la correction mentionnée en {16}.

Nous nous sommes efforcés de présenter ici l'algorithme aussi détaillé que possible en espérant faciliter son utilisation pratique sans rentrer dans les détails mathématiques.

I. NOTATIONS FONDAMENTALES ET EQUATIONS.

Nous utilisons les notations suivantes :

- L - Valeurs horaires des enregistrements
- S - La composante de marée des enregistrements
- S_v - Les ondes de marées ou le spectre de la marée du type v (v = 1, 2, 3 et 4 respectivement pour les ondes diurnes, semi diurnes, ter diurnes et à longue période)
- D - La marche instrumentale
- D_a - La représentation ou l'approximation de D
- D_r - L'approximation de D par un polynome de degré r
- e - Le bruit ou erreur d'observation
- e_o - Le bruit blanc ou erreur indépendante.

Si on leur ajoute entre parenthèses la notation de l'époque donnée, il s'agit des valeurs que prennent les valeurs correspondantes pour cette époque. Ensuite nous utiliserons souvent l'époque T + t.

Nous désignons par I (N, T) l'intervalle d'enregistrement d'époque centrale T qui renferme N valeurs L (T +t). Ici t représente le temps en heures avec le début à t = 0, correspondant avec l'époque T et qui prend les valeurs suivantes :

$$t = -n, -(n-1), \ldots +(n-1), +n; \quad n = (N-1)/2 \qquad (1)$$

Pour la facilité N doit être un nombre pair de sorte que n et t soient des nombres entiers + 0.5 et T + t des nombres entiers (nous proposons que T se mesure également en heures). Si par exemple N = 48 nous aurons

$$t = -23.5, -22.5, \ldots -0.5, +0.5, \ldots +22.5, +23.5 \qquad (2)$$

En général nous parlerons d'un intervalle individuel I (N, T) comme s'il était à une époque fixée. En réalité nous prendrons en considération l'ensemble des intervalles pour lesquels T prend différentes valeurs c'est-à-dire que nous considèrerons effectivement T comme variable. Pour simplifier les notations nous n'ajouteront pas d'indices à T même désignant les différentes valeurs discrètes de T_i. Le choix T = 0 n'a pour nous pas d'intérêt.

Pour L (T + t) nous avons l'équation suivante

$$L(T+t) = S(T+t) + D(T+t) + e(T+t) \qquad (3)$$

Ici comme dans la suite, quand nous rencontrons la notation t, il faut considérer la succession de toutes les valeurs N (1). Ainsi (3) représente effectivement le système des N équations.

Nous utiliserons les notations matricielles.

en bas _ désigne un vecteur colonne. Si $A_{i,k}(t)$ représente une certaine fonction de l'argument t, alors $\underline{A}_{i,k}$ représente :

$$\underline{A}_{i,k} = \left\| A_{i,k}(t) \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{i,k}(-n) \\ A_{i,k}(-n+1) \\ \vdots \\ A_{i,k}(+n) \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

Dans ce cas l'argument t manquant du côté gauche varie verticalement de haut en bas, du côté droit. D'après la même règle nous désignerons comme vecteur les colonnes de l'ensemble des valeurs avec indices arbitraires. Si U_i (i = 1, ... m) représente l'ensemble, nous aurons

$$\underline{U} = \left\| U_i \right\| = \left\| \begin{matrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{matrix} \right\| \qquad (5)$$

Pareillement à (4) nous déterminons les vecteurs colonne :

$$\begin{aligned} &\underline{L}(T) = \|L(T+t)\| \quad , \quad \underline{S}(T) = \|S(T+t)\| \quad , \quad \underline{D}(T) \quad \|D(T+t)\| \\ &\underline{S}_v(T) = \|S(T+t)\| \quad , \quad \underline{D}_a(T) = \|D_a(T+t)\| \quad , \quad \underline{D}_r(T) = \|D_r(T+t)\| \qquad (6) \\ &\underline{e}(T) = \|e(T+t)\| \quad , \quad \underline{e}_o(T) = \|e_o(T+t)\| \quad , \end{aligned}$$

comme contenant toutes les valeurs L, S et ainsi de suite pour I (N, T).

Le signe = désignera une matrice. Si nous avons l'ensemble de m_k fonctions $A_{i,k}(t)$ alors $\underline{\underline{A}}_k$ est :

$$\underline{\underline{A}}_k = \left\| A_{i,k}(t) \right\| = \left\| \underline{A}_{1,k} \cdots \underline{A}_{m_k,k} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{1,k}(-n) \cdots A_{m_k,k}(-n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1,k}(+n) \cdots A_{m_k,k}(+n) \end{matrix} \right\| \qquad (7)$$

Dans ce cas, l'argument t a la priorité comme indice de ligne et l'indice i qui manque dans $\underline{\underline{A}}_k$ varie comme indice de colonne. Si nous avons les valeurs dépendant de t, alors les indices changeront comme d'habitude par exemple:

$$\underline{\underline{R}} = \left\| R_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{m1} & \cdots & R_{mm} \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

Les composantes $S(T+t)$, $D(T+t)$, (plus précisément $D_a(T+t)$ peuvent être représentées comme combinaisons linéaires des fonctions dépendant uniquement de t avec des coefficients dépendant uniquement de T.

$A_{i,k}(t)$ sera utilisé pour la désignation générale de ces fonctions. Elles sont paires et impaires et pour la représentation de ces deux types nous introduisons un indice k qui prend les valeurs :

$$\begin{aligned} k &= k_1 = 1, 3, 5 \\ k &= k_2 = 2, 4, 6 \end{aligned} \qquad (9)$$

Si $k = k_1$ nous avons des fonctions paires et si $k = k_2$ nous avons des fonctions impaires.

Pour obtenir des expressions uniformes et des formules pour les fonctions paires et impaires nous utiliserons les valeurs :

$$\overline{q}_k = (-1)^{k+1} \qquad q_k = (q_k - 1)/2 \cdot \pi/2 \qquad (10)$$

Nous avons

$$A_{i,k}(t) = \overline{q}_k \cdot A_{i,k}(-t) \qquad (11)$$

Comme nous le verrons dans la suite, l'indice k sera utilisé aussi pour la désignation des différentes variantes de représentation de D conformément à différentes variantes des filtres. A l'aide de (10) nous aurons des opérations uniformes pour obtenir des filtres pairs ou impairs. A l'ordinateur, il est aisé de les obtenir successivement dans un seul cycle. Ainsi pour k = 1 nous obtiendrons la première variante des filtres pairs, pour k = 2 la première variante des filtres impairs, pour k=3 nous obtiendrons la variante suivante des filtres pairs, pour k = 4 la variante suivante des filtres impairs et ainsi de suite.

Nous examinons l'aspect concret des fonctions $A_{i,k}(t)$ dans (3).

1. La représentation S.

Nous avons

$$S(T+t) = \sum_{j=1}^{s} H_j \cos(Q_j + w_j T + w_j t) \quad , \qquad (12)$$

où H_j est l'amplitude observée, Q_j est la phase observée pour l'époque initiale $T = 0$ et w_j est la vitesse angulaire de l'onde de marée d'indice j et S est le nombre d'ondes de marées. Nous noterons

$$X_{j,k}(T) = H_j \cos (Q_j + w_j T - q_k) \tag{13}$$

$$\underline{X}_k(T) = \left\| X_{j,k}(T) \right\|$$

et

$$C_{j,k}(t) = \left\| \cos (w_j t + q_k) \right\|$$

$$\underline{C}_{j,k} = \left\| C_{j,k}(t) \right\| \tag{14}$$

$$\underline{\underline{C}}_k = \left\| \underline{C}_{1,k} \cdots \underline{C}_{s,k} \right\|$$

Alors

$$S(T+t) = \sum_k \sum_j X_{j,k}(T)\, C_{j,k}(t)$$

$$\underline{S}(T) = \sum_k \sum_j X_{j,k}(T)\, \underline{C}_{j,k} \tag{15}$$

$$\underline{S}(T) = \sum_k \underline{\underline{C}}_k \cdot \underline{X}_k$$

Ici, comme plus loin, le symbole $\sum_k$ designe la sommation suivant les deux valeurs de l'indice k : $k = k_1$ et k_2.

2. Représentation de D à l'aide des polynomes D_r.

Nous utiliserons l'approximation suivante

$$D(T+t) \simeq D_r(T+t) = \sum_{j=0}^{r} d_j(T)\, P_j(t) \tag{16}$$

où $d_j(T)$ représentent les coefficients inconnus dépendant de T et

$$P_j(t) = (t/n)^j \tag{17}$$

Dans M65 et M74 pour obtenir D_a nous ajoutons à D_r certaines composantes de marées.

En faisant varier r dans (16) nous obtenons différentes variantes de la représentation de D et les différentes variantes des filtres. Nous déterminerons les valeurs k_1 et k_2 de l'indice k en fonction de r comme cela est indiqué

dans la table 1.

TABLE 1

r	k_1	k_2	$\underline{\underline{P}}_{k_1}$	$\underline{\underline{P}}_{k_2}$
1	1	2	$\underline{P}_0$	$\underline{P}_1$
2	3	2	$\underline{P}_0$, $\underline{P}_2$	$\underline{P}_1$
3	3	4	$\underline{P}_0$, $\underline{P}_2$	$\underline{P}_1$, $\underline{P}_3$
4	5	4	$\underline{P}_0$, $\underline{P}_2$, $\underline{P}_4$	$\underline{P}_1$, $\underline{P}_3$
5	5	6	$\underline{P}_0$, $\underline{P}_2$, $\underline{P}_4$	$\underline{P}_1$, $\underline{P}_3$, $\underline{P}_5$

Nous conviendrons que l'indice j dans la combinaison j, k_1 prendra les valeurs paires de 0 à $k_1 - 1$ et dans la combinaison j, k_2 il prendra les valeurs impaires de 1 à $k_2 - 1$. Alors (16) peut être représenté comme la somme des fonctions paires et impaires de la façon suivante :

$$D_r(T+t) = \sum_k \sum_j d_{j,k}(T)\, P_{j,k}(t) \tag{18}$$

Nous noterons

$$\begin{aligned} \underline{P}_{j,k} &= \left\| P_{j,k}(t) \right\| , \\ \underline{\underline{P}}_k &= \left\| \underline{P}_{j,k} \right\| , \\ \underline{d}_k(T) &= \left\| d_{j,k}(T) \right\| . \end{aligned} \tag{19}$$

Les matrices $\underline{\underline{P}}_k$ contiendront les composantes $\underline{P}_{j,k}$ qui sont indiquées dans la table 1. Alors (18) peut être représenté par :

$$\begin{aligned} \underline{D}_r(T) &= \sum_k \sum_j d_{j,k}(T)\, \underline{P}_{j,k} \\ &= \sum_k \underline{\underline{P}}_k \cdot \underline{d}_k(T) \end{aligned} \tag{20}$$

3. Représentation de $\underline{L}$.

Nous nous tournerons vers l'équation cherchée (3). Ici il faut introduire les représentations D et S des deux précédents points et nous obtenons ainsi les équations d'observation

$$L(T+t) = \sum_k \sum_i X_{i,k}(T) \cdot C_{i,k}(t) + \sum_j d_{j,k}(T) \cdot P_{j,k}(t) \quad , \tag{21}$$

$$\underline{L}(T) = \sum_k \sum_i X_{i,k}(T) \cdot C_{i,k} + \sum_j d_{j,k}(T) \cdot \underline{P}_{j,k} = \sum_k \underline{\underline{C}}_k \cdot \underline{X}_k + \underline{\underline{P}}_k \cdot \underline{d}_k$$

On utilisera aisément les désignations uniformes $A_{i,k}(t)$ pour les fonctions $P_{j,k}$ et pour les fonctions périodiques $C_{j,k}$. C'est pourquoi nous introduirons la matrice

$$\underline{\underline{A}}_k = \left\| \underline{\underline{P}}_k \quad \underline{\underline{C}}_k \right\| \quad , \tag{22}$$

qui contient les colonnes des matrices $\underline{\underline{P}}_k$ et $\underline{\underline{C}}_k$. Nous désignerons par m_k le nombre de colonnes $A_{i,k}$ dans (22), par $Z_{i,k}(T)$ $(i = 1, \ldots m_k)$ les paramètres qui correspondent à ces colonnes et

$$\underline{Z}_k(T) = \left\| Z_{j,k}(T) \right\| \tag{23}$$

Ce vecteur colonne relie les colonnes $\underline{X}_k(T)$ et $\underline{d}_k(T)$. Nous obtenons alors la représentation générale de (3) :

$$L(T+t) = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} Z_{j,k}(T) \cdot A_{j,k}(t) + e(T+t)$$

$$\underline{L}(T) = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} Z_{j,k}(T) \cdot \underline{A}_{j,k} + \underline{e}(T) \tag{24}$$

$$= \sum_k \underline{\underline{A}}_k \cdot \underline{Z}_k(T) \cdot + \underline{e}(T)$$

Les colonnes $\underline{A}_{j,k}$, $\underline{P}_{j,k}$, $\underline{C}_{j,k}$ et $L(T)$ peuvent être considérées comme vecteurs de dimension N dans l'espace euclidien. C'est pourquoi nous les appellerons souvent simplement vecteurs. L'équation (24) représente le vecteur $\underline{L}(T)$ comme la combinaison linéaire provenant des vecteurs $\underline{A}_{j,k}$ que nous appellerons aussi composantes $\underline{L}(T)$.

II. FILTRE NUMERIQUE LINEAIRE.

Le filtre numérique linéaire (nous utiliserons ensuite uniquement le mot filtre) est désigné comme suit :

$$\underline{F}_{i,k} = \left\| F_{i,k}(t) \right\| = \left\| \begin{matrix} F_{i,k}(-n) \\ F_{i,k}(-n+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{i,k}(+n) \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

où $F_{i,k}(t)$ représentent N valeurs que nous appelons coefficients du filtre, que nous multiplierons par une certaine fonction déterminée pour les valeurs discrètes t(II,1) (les chiffres romains dans les références désignent le numéro de section, et les chiffres arabes le numéro de l'équation à l'intérieur de la section).

Nous n'utiliserons que les filtres pair et impair c'est-à-dire les filtres avec les coefficients qui sont des fonctions paires ou impaires de l'argument t. Le type du filtre se détermine en fonction de l'indice k comme dans la section précédente.

Nous examinerons simultanément l'ensemble de m_k filtres du type donné k qui forment la matrice

$$\underline{\underline{F}}_k = \left\| \underline{F}_{1,k} \cdots \underline{F}_{m_k,k} \right\| \qquad (2)$$

Le résultat de l'application des filtres (2) fournit m_k des valeurs

$$\underline{U}_k(T) = \underline{\underline{F}}_k \overset{*}{} \underline{L}(T) = \left\| U_{i,k}(T) \right\| \qquad (3)$$

où

$$U_{i,k}(T) = \underline{F}_{i,k} \overset{*}{} \underline{L}(T) = \sum_{t=-n}^{+n} F_{i,k}(t) \cdot L(T+t) \qquad (4)$$

Ici * désigne la matrice transposée. Si les colonnes sont considérées comme vecteurs alors * désigne le produit scalaire. En (4) nous prenons T comme variable, * a alors le sens de produit de contraction.

Nous appelons le produit scalaire

$$R_{ij,k} = \underline{F}_{i,k} \overset{*}{} \underline{A}_{j,k} \qquad (5)$$

facteur d'amplification ou réponse du filtre $\underline{F}_{i,k}$ par rapport à la composante A_{jk}. Le facteur amplification des filtres du type donné par rapport aux compo-

santes de l'autre type identiquement à zéro c'est-à-dire

$$\underline{F}_{i,k_1} * \underline{A}_{j,k_2} = \underline{F}_{i,k_2} * \underline{A}_{j,k_1} = 0 \qquad (6)$$

On caractérise l'effet du filtre sur les différentes composantes L par $R_{ij,k}$. Si dans (4) nous remplaçons $\underline{L}(T)$ provenant de (II, 24) nous obtenons

$$U_{i,k}(T) = \sum_j R_{ij,k} \; Z_{j,k}(T) + \underline{F}_{i,k} * \underline{e}(T) \; . \qquad (7)$$

Si $R_{ij,k} = 0$ la composante $A_{j,k}$ n'intervient pas dans (7) et c'est pourquoi nous dirons que le filtre élimine cette composante. Ainsi par exemple l'égalité (6) peut être paraphrasée en disant que le filtre du type donné élimine toutes les composantes possibles d'un autre type.

Si $R_{ij,k} \neq 0$ nous dirons que le filtre renforce la composante $\underline{A}_{j,k}$ avec le facteur $R_{ij,k}$.

Voyons maintenant l'influence des filtres sur la marée (II, 12). En utilisant les notations (II, 13) et (II, 14), nous avons

$$U_{i,k}(T) = \underline{F}_{i,k} * \underline{S}(T) = \sum_{j=1}^{s} R_{ij,k} \; X_{j,k}(T) = \qquad (8)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} R_{ij,k} \; H_j \cos (Q_j + w_j T - q_k) \; ,$$

où

$$R_{ij,k} = \underline{F}_{i,k} * \underline{C}_j \qquad (9)$$

est le facteur d'amplification du filtre pour l'onde j. En comparant (8) avec (II, 12) nous voyons que $U_{i,k}(T)$, comme la fonction T, est du même type que $S(T + t)$. Ainsi $U_{i,k}(T)$ représente la somme des mêmes ondes de marées. Les amplitudes sont multipliées par le facteur d'amplification et les phases se conservent, si le filtre est pair, mais varie de $\frac{\pi}{2}$, si le filtre est impair.

Voyons maintenant quel effet a le filtre sur D_r. Nous avons

$$U_{i,k}(T) = \underline{F}_{i,k} * \underline{D}_r(T) = \sum_j d_{j,k}(T) \; R_{ij,k} \; , \qquad (10)$$

où

$$R_{ij,k} = \underline{F}_{i,k} * \underline{P}_{j,k} \; . \qquad (11)$$

La représentation de D par D_r (II.16) peut-être envisagée comme le développement de D en série de Taylor en I (N,T) autour du point T. Alors

$$d_{j,k}(T) = (n^j/j!)\, D^{(j)}(T) \tag{12}$$

où $D^{(j)}(T)$ représente la j ème dérivée de D au point T.

Si

$$R_{ij,k} = \begin{cases} 1 (j=l) \\ 0 (j \neq l) \end{cases} \tag{13}$$

alors

$$D^{(l)}(T) = (l!/n^l)\, U_{i,k}(T) \tag{14}$$

c'est-à-dire que le filtre renforçant la fonction de degré l et éliminant les autres degrés avec les ondes de marées, peut être utilisé pour estimer la dérivée D d'ordre l.

En particulier, si l=0, on peut utiliser le filtre pour déterminer les valeurs D pour l'époque T c'est-à-dire pour le milieu I (N,T).

En (7), outre les termes représentant les transformations de S et D_r, nous avons encore un terme représentant l'influence des erreurs d'observation e. Ce terme représente l'erreur de la valeur filtrée que nous désignerons comme suit :

$$g_{i,k} = \underline{F}_{i,k}^{\ *}\ \underline{e}(T) \tag{15}$$

si nous supposons que l'espérance mathématique de e est égale à zéro, nous aurons, pour la dispersion $U_{i,k}(T)$:

$$\sigma^2_{i,k} = E(g^2_{i,k}) = \underline{F}_{i,k}^{\ *}\ E(\underline{e}\ \underline{e}^*)\ \underline{F}_{i,k} \tag{16}$$

où E désigne l'espérance mathématique. Nous ne connaissons pas malheureusement la matrice de covariance $E(\underline{e}\ \underline{e}^*)$. Il n'y a qu'une manière d'obtenir une certaine estimation de (16) c'est, pour l'effet des filtres sur les erreurs, de remplacer les erreurs réelles e par les erreurs indépendantes e_o, pour lesquelles

$$E(\underline{e}_o\ \underline{e}_o^*) = I \cdot \sigma_o^2 \tag{17}$$

où I est la matrice unitaire et σ_o^2 est la dispersion de e_o. Alors

$$\sigma^2_{i,k} = \sigma_o^2 / p_{i,k}\ , \tag{18}$$

où

$$p_{i,k} = 1/(\underline{F}_{i,k}^{\ *}\ \underline{F}_{i,k})\ . \tag{19}$$

La valeur (19) sera appelée poids du filtre.

Si nous remplaçons le filtre $\underline{F}_{i,k}$ par a $\underline{F}_{i,k}$ où a est un nombre arbitraire différent de zéro, tous les facteurs sont multipliés par a et $\sigma_{i,k}$ est multiplié par $|a|$. Il est clair que cette substitution ne change rien et que nous pouvons résoudre arbitrairement le problème de la normalisation des filtres. En M65 nous les avons normalisés de telle sorte que leurs poids (19) soit égal à l'unité. Nous poserons ici pour la composante donnée le facteur d'amplification égal à l'unité.

IV. REMPLACEMENT DES LECTURES HORAIRES PAR DES VALEURS FILTREES.

L'équation de départ (II.3) pour n'importe quel calcul ou pour l'ensemble de tous les calculs peut être écrite sous la forme :

$$L = S + D + e \qquad (1)$$

Il semble (1) que le procédé le plus naturel et le plus correct d'application de la méthode des moindres carrés consiste en la réduction directe de cette équation en remplaçant D par une fonction convenable (par exemple par un polynome) avec des paramètres inconnus. Il semble cependant que ce procédé ne soit pas tout à fait correct ou au moins qu'on puisse craindre qu'il ne soit pas correct. L'application directe de la méthode des moindres carrés sur L implique l'hypothèse que e est un bruit blanc c'est-à-dire nous avons à travailler avec

$$L = S + D + e_o \qquad (2)$$

Si, en réalité, e diffère de e_o il faut considérer que la différence entre e et e_o est incluse dans D. Cela signifie que les perturbations accidentelles possibles de l'enregistrement, qui agissent lentement au niveau d'une heure ou même qui sont des oscillations de basse fréquence en comparaison avec la fréquence d'un cycle/heure ou plus d'un cycle/heure doivent être incluses dans D. Ainsi les ondes météorologiques variables, les autres influences météorologiques ou climatiques, les influences hydrologiques et maritimes, les perturbations urbaines, les variations accidentelles de la sensibilité, les interruptions soudaines et les variations dans l'allure de la dérive, les perturbations du réseau électrique, etc ...

Par conséquent D, dans (2), est un bruit non stationnaire avec des propriétés stochastiques mal connues. Il est douteux qu'on puisse trouver une fonction D_a assez bien approchée pour ce bruit. Cela devient tout à fait impossible si nous avons affaire à des ondes météorologiques. Par conséquent on peut toujours espérer la présence d'un résidu

$$\Delta D_a = D - D_a \qquad (3)$$

et, avec (2), nous devons travailler avec l'équation

$$L = S + D_a + e \quad , \qquad e = e_o + \Delta D_a \quad , \qquad (4)$$

où e est le bruit de corrélation interne. Il nous semble que le mieux qu'on puisse espérer pour les propriétés de e est la stationarité. Cependant ce n'est pas très probable. Même dans ce cas nous pouvons nous attendre à des ennuis car nous pouvons avoir, dans e, des fréquences de marées provenant de la variation des ondes météorologiques (les ondes météorologiques constantes sont inclues dans S et si l'enregistrement est assez long on peut les séparer des autres ondes de marées). La présence de ces ondes exerce une influence D_a sur les résultats de la réduction L différente suivant les différents types d'ondes S_v (v = 1, ... 4) d'où vient notre exigence (B) de I (les chiffres romains représentent les renvois aux partages).

L'application correcte de la méthode des moindres carrés en (4) est encore possible si nous connaissons la fonction d'autocorrélation de e. Malheureusement on ne l'a pas encore déterminée jusqu'à présent et il nous semble douteux qu'on puisse trouver un procédé pour sa détermination correcte. L'ignorance de cette fonction, c'est-à-dire l'hypothèse que $e = e_o$, n'est pas si dangereuse par rapport à l'exigence (a) de I. Puisque nous avons une très grande quantité d'observations nous obtiendrons toujours nos résultats avec une haute précision. La réduction immédiate de L évalue la précision à l'aide de l'erreur quadratique moyenne d'une valeur horaire et nous obtenons de cette façon la même estimation de précision pour tous les S_v, alors qu'ils renferment une influence différente de D_a. Dans le meilleur des cas nous obtiendrons des erreurs quadratiques moyennes réduites pour les ondes de plus basse fréquence.

L'élimination préliminaire de D à l'aide d'un filtre glissant, par exemple le filtre de Pertsev {20}, n'améliore pas la situation. Ce filtre n'élimine qu'un certain modèle D_a de sorte qu'on peut avoir de nouveau quand même des résidus (3). Ainsi le filtrage introduit une corrélation supplémentaire en e; on peut espérer un effet d'amortissement des données et par là on peut obtenir des erreurs quadratiques moyennes réduites.

Nous examinerons à présent le procédé à l'aide duquel nous nous efforçons de contourner en M65 et en M74 cette situation désagréable.

L'enregistrement est partagé en intervalles égaux I (N,T) sans recouvrement ce qui veut dire que N est constant (en M65, N = 48) et T change par N heures ou par plus de N heures si nous avons une interruption. Nous travaillons avec (1) ou avec (2), avec la représentation (4) pour I (N,T), avec l'équation

(II, 3) en remplaçant D par D_r comme dans (II, 21). Nous écrivons cette équation sous la forme :

$$\underline{L}(T) = \sum_v \underline{S}_v(T) + \underline{D}_r(T) + \underline{e}(T) \qquad (5)$$

Nous voudrions déterminer les paramètres des ondes du type donné v. Puisque nous supposons ou au moins nous nous doutons que nous pouvons avoir des ondes météorologiques avec des fréquences de marées qui peuvent varier d'intervalle en intervalle, il est naturel qu'on veuille affranchir les résultats pour S_v de l'influence des ondes $S_l (l \neq v)$ encore en I (N,T). C'est pourquoi dans la représentation D_a nous incluons outre D_r, certaines ondes représentant S_l avec les paramètres $X_{i,k}(T)$ (II, 13) qui peuvent varier librement d'intervalle à intervalle.

Ainsi nous remplaçons (5) par

$$\underline{L}(T) = \underline{S}_v(T) + \underline{D}_a(T) + \underline{e}(T) \quad , \quad \underline{e}(T) = \underline{e}_o(T) + \Delta \underline{D}_a(T) \qquad (6)$$

où

$$\underline{D}_a(T) = \underline{D}_r(T) + \sum_{l \neq v} \underline{S}_l(T) \quad , \quad \Delta \underline{D}_a(T) = \underline{D}(T) - \underline{D}_a(T) \qquad (7)$$

Sur la base de la solution (6) nous composons une paire de filtres $\underline{F}_{v,k_1}$ et $\underline{F}_{v,k_2}$ (k_1 et k_2 se déterminent en fonction de r d'après la table 1) qui éliminent D_a et qui renforcent S_v. L'application de ces filtres sur I (N,T) donne une paire de valeurs

$$U_{v,k}(T) = \underline{F}^*_{v,k} \underline{L}(T) = \underline{F}^*_{v,k} \underline{S}_v(T) + g_{v,k}(T) \qquad (8)$$

$$(k = k_1, k_2)$$

Ces valeurs ont été désignées en M65 par M et N; nous examinons les observations directes des ondes du type v avec des erreurs d'observation $g_{v,k}(T)$. Ces dernières renferment une autre influence ΔD_a avec l'influence e_o. Les filtres, comme nous verrons dans les chapitres suivants ont un poids maximum de sorte que l'influence e_o est minimale.

Ensuite nous supposons qu'au cours de un ou plusieurs jours ΔD_a varie de façon accidentelle de sorte que $g_{v,k}(T)$ pour les différents intervalles soient accidentelles et avec une dépendance assez faible. Nous montrons dans VI qu'on peut supposer que la corrélation entre U_{v,k_1} et U_{v,k_2} est insignifiante. C'est pourquoi nous réduisons ces valeurs comme des observations indépendantes. Les équations d'observation sont composées en utilisant (III, 8) et les inconnues du type (1,2).

La méthode des moindres carrés nous donne l'erreur quadratique moyenne des observations c'est-à-dire des valeurs $U_{v,k}(T)$. Par conséquent elles doivent évaluer les erreurs $g_{v,k}$ qui comprennent aussi l'influence du reste de la tendance ΔD_a. La précision des résultats est estimée par l'erreur quadratique moyenne des observations; par conséquent, dans notre cas, elle comprendra aussi l'influence de la tendance D. Puisque nous avons différents filtres, différentes valeurs et équations (8) pour les différents types d'ondes v, nous aurons différentes représentations de D_a, une influence différente de ΔD_a sur les résultats et les différentes estimations respectives de la précision.

En M65 nous avons utilisé la représentation fixe D par D_a (7). On a justement noté en {21} qu'en M65 on n'élimine qu'un polynôme du second degré. Il est tout de même plus précis d'ajouter aussi les fréquences de marées éliminées. On peut cependant se poser la question de savoir s'il est mieux d'éliminer un degré plus élevé et augmenter l'influence du bruit blanc e_o ou de se borner au degré plus bas et pourquoi pas le second degré. Il nous semble qu'on ne peut répondre à priori à cette question. A la représentation D est liée directement la longueur des intervalles, il se pose donc aussi la question du choix de cette longueur.

C'est pourquoi nous examinons en M74 l'application simultanée de l'ensemble des variantes de filtres qui éliminent les différents degrés r. On peut considérer r comme le numéro de la variante donnée et les indices k_1 et k_2 qui sont déterminés d'après la table 1 - les numéros des variantes correspondantes des filtres pairs et impairs.

Par comparaison de l'erreur quadratique moyenne des résultats on peut choisir les résultats optimaux et la variante optimale des filtres. Ainsi nous réalisons la détermination à posteriori de la meilleure (ou moins mauvaise) représentation de D.

En outre on expérimente en M74 différentes longueurs d'intervalles comme aussi différentes variantes d'admittance, la séparation complète et incomplète des types principaux des ondes de marées lors du filtrage.

V. CONSERVATION DE L'INFORMATION LORS DU REMPLACEMENT DES LECTURES HORAIRES PAR LES VALEURS FILTREES.

Le remplacement de L par $U_{v,k}(T)$ diminue sensiblement le nombre d'observations. Pour déterminer les ondes d'un type donné v nous avons N/2 fois moins de valeurs filtrées que le nombre de lectures horaires. Il peut en résulter un doute : ne perdons nous pas une partie importante de l'information

contenue dans l'enregistrement ?

Nous montrerons dans ce chapitre qu'on peut construire des filtres tels que les estimations obtenues par la réduction de $U_{v,k}$ soient à peu près équivalentes aux estimations qu'on peut obtenir lors de la réduction directe de L. Enfin, l'estimation de la précision varie si ΔD_a existe réellement. Toutefois s'il apparaît que nos hypothèses sur la présence de ΔD_a ne sont pas correctes alors l'estimation de la précision obtenue par la réduction de $U_{v,k}$, doit être à peu près la même que la précision obtenue par la réduction de L. En d'autres mots, nous montrerons ici que nous avons la garantie que tous nos doutes sur la présence de ΔD_a sont superflus c'est-à-dire que les erreurs e sont indépendantes.

Il faut considérer avant tout qu'une diminution du nombre des observations n'a en soi pas d'importance si l'enregistrement n'est pas trop court. Si nous réduisons un enregistrement d'une durée d'un mois, nous aurons à peu près 60 valeurs de $U_{v,k}$ pour chaque type d'ondes : le nombre de degrés de liberté sera supérieur à 50. Les critères statistiques habituels, par exemple le coefficient de Student, ont des propriétés asymptotiques et varient peu au-delà de 30 degrés de liberté.

Nos réflexions suivantes sont basées sur {8}. Dans ce travail, comme dans la méthode de Horn {1}, on a réalisé une application directe de la méthode des moindres carrés sur L, sans élimination préliminaire de D.

La méthode de Horn est basée sur le modèle (IV, 2) où D est représenté par le polynôme D2 avec des coefficients constants inconnus pour tout l'enregistrement. Puisqu'on ne peut choisir préalablement le degré du polynôme on prévoit une variation de r pour le choix de la représentation optimale de D. On considère un enregistrement sans interruptions. Il sera donc très difficile d'utiliser cette méthode pour la réduction des longs enregistrements comportant des interruptions.

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent nous considérons que cette approche est imparfaite puisqu'elle nous conduit au modèle (IV, 4) avec des erreurs dépendantes. En fait le degré du polynôme D_r a beau être élevé, on peut supposer qu'il ne représentera pas bien les composantes accidentelles D, en particulier les ondes météorologiques variables. C'est pourquoi en {8} comme aussi en M65 et M74 nous avons préféré travailler avec le modèle (IV, 6) c'est-à-dire de chercher l'approximation D sur des intervalles courts et indépendants.

Nous verrons ce que l'on obtient si nous réduisons immédiatement L en utilisant (IV, 6). Nous écrirons (IV, 6) sous la forme :

$$\underline{L}(T) = \sum_k \sum_{i=1}^{m} X_{i,k}(T)\, \underline{C}_{i,k} + \sum_k \sum_j Z_{j,k}(T)\, \underline{A}_{j,k} \qquad (1)$$

La seconde somme représente ici D_a sous une forme générale. La première somme représente les ondes de marées d'un type donné S_r en utilisant (II, 13). Pour poursuivre notre but il est utile de remplacer $X_{i,k}(T)$ par des inconnues du type (I, 1), comme suit :

$$X_{i,k}(T) = X_i\, c_{i,k}(T) + Y_i\, s_{i,k}(T) \qquad (2)$$

où

$$X_i = H_i \cos Q_i \quad \text{et} \quad Y_i = - H_i \sin Q_i \qquad (3)$$

(H_i est l'amplitude observée et Q_i la phase observée pour l'époque T = 0) et

$$c_{i,k}(T) = \cos (w_i T - q_k), \quad s_{i,k}(T) = \sin (w_i T - q_k) \ . \qquad (4)$$

Nous obtenons les équations d'observations :

$$\underline{L}(T) = \sum_i X_i \cdot \sum_k c_{i,k}(T)\, \underline{C}_{i,k} + \sum_i Y_i \cdot \sum_k s_{i,k}(T)\, \underline{C}_{i,k} + \qquad (5)$$

$$+ \sum_k \sum_j Z_{j,k}\, \underline{A}_{j,k}$$

Ici, outre les inconnues cherchées X_i et Y_j, nous avons un grand nombre d'inconnues $Z_{j,k}$ qui nous sont nécessaires. Pour se débarrasser d'elles nous faisons la transformation suivante : nous remplaçons les vecteurs $\underline{C}_{i,k}$ par les filtres $\underline{F}_{i,k}$ qui satisfont aux conditions

$$\underline{F}_{i,k} = b_o\, \underline{C}_{i,k} + \sum_j b_j\, \underline{A}_{j,k} \qquad (6)$$

où les coefficients b_j sont déterminés de telle sorte que $\underline{F}_{i,k}$ satisfassent à

$$\underline{F}_{i,k}^{*}\, \underline{C}_{i,k} = 1 \qquad (7)$$

et

$$\underline{F}_{i,k}^{*}\, \underline{A}_{j,k} = 0 \qquad (8)$$

En d'autres mots, $\underline{F}_{i,k}$ renforce l'onde d'indice i avec un facteur 1 et élimine toutes les composantes D_a. Le filtre satisfaisant à ces conditions peut être obtenu comme opérateur résolvant l'équation

$$\underline{L}(T) = \sum_k U_{i,k}(T)\, \underline{C}_{i,k} + \sum_k \sum_j Z_{j,k}(T)\, \underline{A}_{j,k} + \underline{e}(T) \qquad (9)$$

qui représente à peu près L en I(N,T). Ainsi pour réaliser (7) et (8) il faut que

$$U_{i,k}(T) = \underline{F}_{i,k}^{*} \underline{L}(T) \quad . \tag{10}$$

Pour satisfaire à (6) il faut obtenir cette solution par la méthode des moindres carrés c'est-à-dire en réalisant la condition :

$$\underline{e}(T)^{*} \underline{e}(T) = \text{Min.} \tag{11}$$

Pour le coefficient b_o en (6) nous obtenons, en tenant compte de (7) et (8)

$$b_o = \underline{F}_{i,k}^{*} \underline{F}_{i,k} = 1/p_{i,k} \tag{12}$$

où $p_{i,k}$ est le poids du filtre comme déterminé dans le chapitre III.

Si nous exprimons $\underline{C}_{i,k}$ de (6) par les autres vecteurs et si nous remplaçons en (5) nous obtenons une nouvelle équation

$$\begin{aligned} \underline{L}(T) = & \sum_i X_i \sum_k c_{i,k}(T)\, p_{i,k}\, \underline{F}_{i,k} \\ & + \sum_i Y_i \sum_k s_{i,k}(T)\, p_{i,k}\, \underline{F}_{i,k} \\ & + \sum_j \sum_k Z'_{j,k}(T)\, \underline{A}_{j,k} + \underline{e}(T) \end{aligned} \tag{13}$$

où les inconnues X_i et Y_i restent les mêmes et $Z_{j,k}$ se transforment en $Z'_{j,k}$. Puisque en $\underline{F}_{i,k}$ les vecteurs $\underline{A}_{j,k}$ sont orthogonaux, lors de la composition des équations normales nous obtiendrons deux systèmes indépendants, l'un pour X_i et Y_i et l'autre pour $Z'_{j,k}(T)$ pour tous les T.

Lors de la composition des équations normales nous aurons une somme du second degré. Au début nous ferons la somme à l'intérieur de chaque I(N,T) c'est-à-dire que nous formerons des produits scalaires entre les vecteurs F_i. Nous avons ainsi :

$$P_{j,k} \cdot \underline{F}_{i,k}^{*} \underline{F}_{j,k} = \underline{F}_{i,k}^{*} \underline{C}_{j,k} = R_{ij,k} \tag{14}$$

Ensuite nous ferons la somme suivant les intervalles. Nous noterons la dernière opération

$$[\ ] = \sum_T \tag{15}$$

où T prend les valeurs pour l'ensemble de tous les I(N,T).

Les équations normales seront

$$\sum_k p_{i,k} \left[c_{i,k}(T)\, U_{i,k}(T)\right] =$$

$$= \sum_j X_j \sum_k p_{i,k}\, R_{ij,k} \left[c_{i,k}(T)\, c_{j,k}(T)\right] +$$

$$+ \sum_j Y_j \sum_k p_{i,k}\, R_{ij,k} \left[c_{i,k}(T)\, s_{j,k}(T)\right] ,$$

$$\sum_k p_{i,k} \left[s_{i,k}(T)\, U_{i,k}(T)\right] =$$

$$= \sum_j X_j \sum_k p_{i,k}\, R_{ij,k} \left[s_{i,k}(T)\, c_{j,k}(T)\right] +$$

$$+ \sum_j Y_j \sum_k p_{i,k}\, R_{ij,k} \left[s_{i,k}(T)\, s_{j,k}(T)\right] , \qquad (16)$$

$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

où n représente le nombre d'ondes du type v qui participent dans (1). Nous verrons maintenant quelles seront les équations normales où, au lieu de L, nous prenons à titre d'observations les valeurs (10) pour une certaine valeur fixe de l'indice i. Pour simplifier les notations nous considérerons que cette valeur correspond au numéro v du type d'ondes déterminées.

Nous avons les équations d'observation

$$U_{v,k}(T) = \sum_i X_i\, c_{i,k}(T)\, R_{vi,k} + \sum_i Y_i\, s_{i,k}(T)\, R_{vi,k} \qquad (17)$$

Dans M65, les filtres ont été normalisés par multiplication par $P_{v,k}$. C'est pourquoi nous considérons (7) avec le poids $p_{v,k}$. On obtient alors les équations normales :

$$\sum_k p_{v,k}\, R_{vi,k} \left[c_{i,k}(T)\, U_{v,k}(T)\right] =$$

$$= \sum_j X_j \sum_k p_{v,k}\, R_{vi,k}\, R_{vj,k} \left[c_{i,k}(T)\, c_{j,k}(T)\right] +$$

$$+ \sum_j Y_j \sum_k p_{v,k}\, R_{vi,k}\, R_{vj,k} \left[c_{i,k}(T)\, s_{j,k}(T)\right] , \qquad (18)$$

$$\sum_k p_{v,k} R_{vi,k} \quad s_{i,k}(T)\, U_{v,k}(T) \quad =$$

$$= \sum_j X_j \sum_k p_{v,k} R_{vi,k} R_{vj,k} \left[s_{i,k}(T)\, c_{j,k}(T) \right] +$$

$$+ \sum_j Y_j \sum_k p_{v,k} R_{vi,k} R_{vj,k} \left[s_{i,k}(T)\, s_{j,k}(T) \right] \qquad (18)$$

$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

Les ondes de marées qui interviennent dans ces équations sont des ondes du même type v (par exemple toutes diurnes). Puisque I(N,T) sera de l'ordre de 1 à 2 jours, les vecteurs $\underline{C}_{i,k}$ (i = 1, ... m) ne différeront pas particulièrement du vecteur $\underline{C}_{v,k}$. Si nous comparons (16) avec (18) nous constatons qu'on obtient (18) à partir de (16) en remplaçant $\underline{C}_{i,k}$ par $\underline{C}_{v,k}$. Par conséquent (16) et (18) sont voisines et en les résolvant nous obtiendrons à peu près les mêmes estimations pour les inconnues X_i et Y_i et ensuite pour les inconnues δ et κ. On peut réaliser ce procédé si nous utilisons les inconnues de (1.2), cependant les expressions seront complexes.

Nous verrons quelle est l'influence du bruit blanc e_o sur les résultats obtenus par (16) et (18).

L'insertion du poids $p_{v,k}$ dans l'élaboration de (18) est identique à la réduction des observations des valeurs $\sqrt{p_{v,k}}\, U_{v,k}(T)$. Si $e = e_o$ ces valeurs ont une erreur quadratique moyenne égale à l'erreur quadratique moyenne de L. Par conséquent, les inconnues obtenues par (16) et (18) auront des erreurs quadratiques moyennes à peu près inversément proportionnelles aux éléments diagonaux élevés au degré 1/2.

La différence dans les éléments diagonaux se ramène à ce que dans (16) nous avons le facteur $R_{ii,k} = 1$ et dans (18) nous avons $R^2_{vi,k}$. Par conséquent les erreurs quadratiques moyennes obtenues par (18) seront $1/R_{vi,k}$ fois plus grandes de quelques pourcents que les erreurs quadratiques moyennes des inconnues obtenues par (16).

La proximité de (16) et (18) provient de ce que nous avons utilisé le même modèle pour la représentation de L. Il est très difficile de comparer notre système (18) avec les solutions qui sont obtenues sur la base des autres modèles par exemple avec la réduction de L après l'élimination de D d'après Pertsev. Il est possible cependant de comparer (16) et (18) avec le cas idéal où L ne renferme que la marée et le bruit blanc. Dans ce cas au lieu de (6) nous avons

$$\underline{F}_{i,k} = 1/p_{i,k} \cdot \underline{C}_{i,k} \quad , \qquad (19)$$

où

$$p_{i,k} = \underline{C}_{i,k}^{*} \underline{C}_{i,k} \approx N/2 \qquad (20)$$

et les équations normales seront trouvées exactement comme (16).

VI. CORRELATION ENTRE LES VALEURS OBTENUES PAR LE MEME INTERVALLE AU MOYEN DU FILTRE PAIR ET IMPAIR.

Le chapitre précédent montre clairement que pour conserver l'information nous devons réduire ensemble les valeurs (IV,8) $U_{v,k_1}(T)$ et $U_{v,k_2}(T)$. Nous montrerons ici pour certains modèles des erreurs que le coefficient de corrélation entre ces valeurs est exactement nul. Sur cette base nous espérons que le coefficient réel de corrélation est pratiquement nul et que nous avons raison d'utiliser la méthode des moindres carrés.

Nous examinerons la covariance que nous noterons

$$\text{cov} = E\left[g_{v,k_1}(T) \cdot g_{v,k_2}(T)\right] , \qquad (1)$$

entre les erreurs (III,15) et qui est proportionnelle au coefficient de corrélation considéré. Nous avons

$$g_{v,k}(T) = \sum_{t=.5}^{n} F_{v,k}(t) \cdot \left[e(T+t) + \bar{q}_k \cdot e(T-t)\right] , \qquad (2)$$

$$\text{cov} = \sum_{t=.5}^{n} F_{v,k_1}(t) \sum_{l=.5}^{n} F_{v,k_2}(l)\ \bar{r}(t,l) \qquad (3)$$

où

$$r(t,l) = E\left[e(T+t) \cdot e(T+l)\right] ,$$

$$\bar{r}(t,l) = r(t,l) + r(-t,l) - r(t,-l) - r(-t,-l) \qquad (4)$$

Nous sommes intéressés à obtenir

$$\text{cov} = 0 , \qquad (5)$$

pour cela il suffit d'avoir

$$\bar{r}(t,l) = 0 \qquad (6)$$

Nous examinerons les hypothèses suivantes sur l'erreur e.

1. *Le bruit blanc c'est-à-dire* $e = e_o$

Nous avons

$$r(t,l) = \sigma^2 \quad (t,l), \qquad r(t,l) = 0 \ (t \neq l) , \qquad (7)$$

d'où (6) s'ensuit directement.

2. *Le processus stationnaire*

Cette généralisation du cas 1 dans lequel la dispersion σ^2 est également constante cependant que les erreurs des deux calculs sont dépendants. Ainsi :

$$r(t,l) = r(t+i, l+i) = r(|l-t|) \quad . \tag{8}$$

3. *La symétrie r(t,l) par rapport à t,l = 0*

Il est évident que (6) sera réalisé et pour une hypothèse plus générale que (8)

$$t(t,l) = r(-t,-l) \quad , \quad r(-t,l) = r(t,-l) \tag{9}$$

4. *L'accumulation des erreurs indépendantes*

Nous supposerons qu'à l'instant T+t le levier de mesure du gravimètre ou du pendule horizontal dévie de sa position "propre" de e(T+t) et que sur celle-ci n'agissent pas les forces qui tenteraient à le renvoyer dans la position non erronée. Nous supposerons qu'au cours du temps entre T+t et T+t+1 nous avons une nouvelle déviation du levier Δ_{t+1} sans retour, de sorte que la déviation en fonction de la position propre devient $e(T+t+1) = e(T+t) + \Delta_t$. Si ce processus continue, nous avons

$$e(T+t) = e(T-n-1) + \sum_{l=-n}^{n} \Delta_l \tag{10}$$

Ici e(T-n-1) représente l'accumulation des erreurs depuis le début I(N,T), qu'on peut ignorer puisque les filtres éliminent la constante arbitraire. Si les Δ_t sont indépendants avec une constante de dispersion σ^2, alors

$$r(t,l) = (n+l)\,\sigma^2 \ , \ (t \geq l), \quad r(t,l) = (n+l)\,\sigma^2, \ (t \geq l) \tag{11}$$

$$\overline{r}(t,l) = \Big[(n+l) - (n-t) + (n-t) - (n-l)\Big]\,\sigma^2 = 2.l\sigma^2, \ (t \geq l)$$

$$\overline{r}(t,l) = \Big[(n+t) - (n-l) + (n-t) - (n-l)\Big]\,\sigma^2 = 2.l\sigma^2, \ (t \geq l) \tag{12}$$

et

$$\text{cov} = \sum_{t=.5}^{n} F_{v,k_1}(t) \sum_{l=.5}^{n} F_{v,k_2}(l) \,.\, 2l\sigma^2 \tag{13}$$

Puisque F_{v,k_2} doit éliminer la fonction linéaire arbitraire, nous obtenons de nouveau la réalisation de (5).

5. *L'onde avec des amplitudes et des phases accidentelles*

Nous avons dit que nous supposons l'existence d'une onde météorologique avec des paramètres variables. On peut représenter cette onde pour T+t :

$$(X+x)\cos wt + (Y+y)\sin wt \qquad (14)$$

où x, y est la valeur accidentelle avec l'espérance mathématique

$$E(x) = E(y) = 0 \qquad (15)$$

et X et Y sont les valeurs déterminées.

La partie déterminée en (15) ne nous intéresse pas - c'est une onde à amplitude constante et une phase qui se détermine avec les autres ondes de marées. Nous examinerons la partie accidentelle en tant qu'erreur e. Dans ce cas cov sera proportionnelle à la valeur E(xy).

Nous pouvons représenter l'onde déterminée par un vecteur H de composantes X et Y et l'onde accidentelle par un vecteur de composantes

$$x = h\cos\phi\,, \qquad y = -h\sin\phi \qquad (16)$$

qui s'additionne à H. La phase ϕ représente l'angle entre ces vecteurs. Puisque nous n'avons aucune information à priori sur le vecteur (16), nous pouvons admettre que ϕ est réparti régulièrement dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ avec la probabilité $p(\phi) = 1/2\pi$. Alors

$$E(xy) = E(h^2)\,.\,E\sin 2\phi = E(h^2)\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin 2\phi}{2\pi}\,d\phi = 0 \qquad (17)$$

6. Les polynômes d'argument t avec coefficients accidentels indépendants

En ce cas il est évident que nous avons la relation (5) puisque le filtre pair ne laisse passer que les fonctions paires et ne dépend pas des coefficients impaires.

VII. COMPOSITION DES FILTRES.

Comme nous l'avons vu en V, les filtres doivent être composés de la solution des équations d'observation des calculs de $\underline{L}(T)$ pour n'importe quel intervalle I(N,T). Ici nous écrirons ce procédé sous une forme plus générale qu'en V. Ainsi nous utiliserons l'équation générale (II,24) au lieu de (V,9). La différence réside dans le fait qu'en (V,9) nous n'avons qu'une onde représentant toutes les ondes du type donné v que nous voulions renforcer alors

qu'en (II,24) nous pouvons avoir plus d'une onde de ce type. Par ce procédé les équations d'observations pour $\underline{L}(T)$ deviennent assez précises et nous pouvons les utiliser pour estimer la précision dans I(N,T) pour la détermination du poids des valeurs filtrées.

En V nous n'avions qu'une paire de filtres qui ne donnent qu'une paire de paramètres indépendants de l'équation (V,9). Pour évaluer la précision il faut résoudre complètement les équations (II,24). C'est pourquoi nous n'examinerons pas ici la paire des matrices (III,2) venant des filtres. Chaque filtre individuel est en liaison avec la détermination d'un des paramètres inconnus $Z_{j,k}$ (II,24). La présence de plus d'une onde du même type v nous résout à déterminer immédiatement les inconnues $Z_{j,k}(T)$ par filtrage. Il arrive qu'on transforme (II,2) préalablement.

Le résultat de l'application des filtres $\underline{\underline{F}}_k$ sur $\underline{L}(T)$ (III,7), si simultanément l'influence des erreurs, peut se représenter comme suit:

$$\underline{U}_k(T) = \underline{\underline{R}}_k \, \underline{Z}_k(T) \quad , \tag{1}$$

où

$$\underline{\underline{R}}_k = \underline{\underline{F}}_k^{\,*} \, \underline{\underline{A}}_k \tag{2}$$

est une $(m_k \times m_k)$ - matrice de mesure qui renferme les facteurs d'amplification (III,5).

Supposons que nous souhaitions composer $\underline{\underline{F}}_k$ avec des facteurs d'amplification $\underline{\underline{R}}_k$ préalablement donnés. Si cela est réalisable alors nous pouvons faire la transformation

$$\underline{Z}_k(T) = \underline{\underline{R}}_k^{-1} \, \underline{U}_k(T) \tag{3}$$

En remplaçant (3) dans (II, 24) nous obtenons les nouvelles équations d'observations

$$\underline{L}(T) = \sum_k \underline{\underline{B}}_k \, \underline{U}_k(T) + \underline{e}(T) \tag{4}$$

où

$$\underline{\underline{B}}_k = \underline{\underline{A}}_k \, \underline{\underline{R}}_k^{-1} = \left\| \underline{B}_{1,k} \cdots \underline{B}_{m_k,k} \right\| \quad ; \quad \underline{B}_{i,k} = \left\| B_{i,k}(t) \right\| \tag{5}$$

c'est-à-dire que les valeurs que nous souhaitons obtenir à l'aide des filtres sont les inconnues en (4). Par conséquent les filtres cherchés seront des opérateurs qui résolvent (5) par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{F}}_k = \underline{\underline{B}}_k \, (\underline{\underline{B}}_k^{\,*} \, \underline{\underline{B}}_k)^{-1} \tag{6}$$

L'action des filtres ainsi obtenus sur les composantes $\underline{\underline{B}}_k$ sera

$$\underline{\underline{F}}_k \overset{*}{} \underline{\underline{B}}_k = (\underline{\underline{B}}_k \overset{*}{} \underline{\underline{B}}_k)^{-1} \underline{\underline{B}}_k \overset{*}{} \underline{\underline{B}}_k = I \quad , \tag{7}$$

où I est la matrice unitaire, c'est-à-dire

$$\underline{F}_{i,k} \overset{*}{} \underline{B}_{j,k} = 0 \quad (j \neq i), \quad \underline{F}_{i,k} \overset{*}{} \underline{B}_{i,k} = 1 \tag{8}$$

Enfin l'action sur $\underline{\underline{A}}_k$ sera

$$\underline{\underline{F}}_k \overset{*}{} \underline{\underline{A}}_k = \underline{\underline{F}}_k \overset{*}{} \underline{\underline{B}}_k \underline{\underline{R}}_k = \underline{\underline{R}}_k \tag{9}$$

Nous utiliserons la transformation suivante $\underline{\underline{A}}_k$ et $\underline{\underline{B}}_k$

$$\begin{aligned}
&\underline{B}_{i,k} = \underline{A}_{i,k} = \underline{A}^{(0)}_{i,k} \\
&\underline{B}_{i+1,k} = \underline{A}_{i+1,k} + b_{1o}\, \underline{B}_{i,k} = \underline{A}^{(1)}_{i+1,k} \qquad (10) \\
&\underline{B}_{i+2,k} = \underline{A}_{i+2,k} + b_{21}\, \underline{B}_{i+1,k} + b_{2o}\, \underline{B}_{i.k} = \underline{A}^{(2)}_{i+2,k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\underline{B}_{i+l,k} = \underline{A}_{i+l,k} + b_{l,l-1}\, \underline{B}_{i+l-1,k} + \cdots + b_{lo}\, \underline{B}_{i,k} = \underline{A}_{i+l,k}
\end{aligned}$$

où les coefficients l sont déterminés de telle façon que soit réalisé

$$\underline{B}_{i+l,k} \overset{*}{} \underline{B}_{i+m,k} = \underline{B}_{i+l,k} \overset{*}{} \underline{A}_{i+m,k} = 0 \qquad (m \neq l) \tag{11}$$

La transformation (10) représente l'orthogonalisation des vecteurs $\underline{A}_{i,k} \cdots \underline{A}_{i+l}$. Comme nous le verrons dans la suite, nous aurons l = 1, c'est-à-dire l'orthogonalisation de deux vecteurs, l = 2, c'est-à-dire l'orthogonalisation de trois vecteurs et l = m_k-1 c'est-à-dire l'orthogonalisation de tous les vecteurs $\underline{\underline{A}}_k$.

Le vecteur $b_{lo}\, \underline{B}_{i,k}$ représente la projection du vecteur $\underline{A}_{i+l,k}$ sur le vecteur $\underline{A}_{i+l,k}$ qui est orthogonal par rapport aux vecteurs $\underline{A}_{ik}$, $\underline{A}_{i+1} \cdots A_{i+l-1,k}$.

Conformément à (7) et (8) le filtre $\underline{F}_{i,k}$ amplifiera $\underline{A}_i$ et les projections $\underline{A}_{i+l,k}$ sur $\underline{A}_{i,k}$ avec un facteur 1.

VIII. ESTIMATION DE LA PRECISION ET DU POIDS DES VALEURS FILTREES DANS I(N,T).

A l'aide des transformations (VII,10) nous pouvons composer les équations d'observations (VII,4) avec assez de précision. Puisque l'application des filtres $\underline{\underline{F}}_k$ représente la solution (VII,4) par la méthode des moindres carrés, nous pouvons obtenir l'estimation de la précision pour les données de l'intervalle filtré I(N,T) respectivement pour la précision des valeurs filtrées et pour la détermination de leur poids pour la réduction suivante. Enfin les filtres (VII,6) réalisent l'application de la méthode des moindres carrés sur I(N,T) dans l'hypothèse où les erreurs sont indépendantes c'est-à-dire que $\underline{e}(T) = \underline{e}_o(T)$ de sorte que l'estimation de la précision ne concerne que e_o. On peut s'attendre à ce que certaines perturbations exercent également une influence sur l'estimation de la précision.

Nous désignerons par $\sigma_{o,r}$ des erreurs quadratiques moyennes d'un calcul horaire que nous obtiendrons sur la base (VII,4). Ici l'indice r représente le numéro de la variante déterminée en fonction de la valeur de l'indice k (k_1 et k_2) d'après la table 1. Nous avons

$$(N-m_{k_1}-m_{k_2})\ \sigma^2_{o,r} = \underline{L}(T)^*\ \underline{L}(T) - \sum_k \underline{U}_k^*\ \underline{\underline{B}}_k\ \underline{L}(T) \qquad (1)$$

Il est plus commode de retravailler cette formule : en remplaçant

$$(\underline{\underline{B}}_k^*\ \underline{\underline{B}}_k)\ \underline{U}_k = \underline{\underline{B}}_k^*\ \underline{L}(T) \qquad (2)$$

nous obtenons

$$(N-m_{k_1}-m_{k_2})\ \sigma^2_{o,r} = \underline{L}(T)^*\ \underline{L}(T) - \sum_k \underline{U}_k^*\ (\underline{\underline{B}}_k^*\ \underline{\underline{B}}_k)\ \underline{U}_k \qquad (3)$$

L'erreur quadratique moyenne des valeurs $\underline{U}_k(T)$ déterminée à l'aide de $\sigma_{o,r}$ sera

$$\sigma_{o,r}(U_{i,k}) = \sigma_{o,r} / \sqrt{p_{i,k}} \qquad (4)$$

Nous utiliserons comme poids des valeurs $\underline{U}_k(T)$

$$p_{i,r,k}(T) = p_{i,k} / \sigma^2_{o,r} \qquad (5)$$

Comme nous l'avons déjà dit, les valeurs (3), (4) et (5) ne reflètent que le bruit blanc et certaines perturbations dués aux erreurs grossières, aux discontinuités èn D etc. Elles n'évaluent pas la précision réelle, par exemple les erreurs provenant des ondes météorologiques. En réalité si nous avons des erreurs d'observations corrélées (3) et (4) seront systématiquement diminuées et (5) systématiquement augmentée.

Puisque pour la méthode des moindres carrés on n'obtient que des valeurs relatives du poids, on peut espérer que cette altération systématique du poids n'aura pas un effet important.

IX. COMPOSITION DES DIFFERENTES VARIANTES DES FILTRES POUR L'ANALYSE.

Pour la composition pratique des filtres nous devons comparer les matrices $\underline{\underline{A}}_K$ et $\underline{\underline{B}}_K$ c'est-à-dire les équations d'observation (II,24) et (VII,4). Pour cela il faut résoudre les problèmes suivants :

1. Le choix de la longueur des intervalles I(N,T) c'est-à-dire le nombre N des coefficients des filtres
2. Le choix des composantes de marées et
3. La représentation D_a de la dérive D.

Malheureusement pour résoudre chacun de ces points nous avons trop de degrés de liberté et par conséquent trop de variantes possibles. Il est évident, d'abord à cause de considérations pratiques et ensuite pour l'utilisation de la méthode à titre de méthode standard (conformément avec les solutions du groupe de Travail 3.3. KAPG) que nous devons limiter le nombre de variantes. C'est pourquoi nous ne donnerons ici qu'un nombre limité de variantes, malgré tout relativement large, que l'on pourrait utiliser comme choix standard . Une étude coordonnée par Chojnicki pour le choix du filtre standard est menée par le groupe de travail 3.3. KAPG.

Concrètement nous proposons les solutions suivantes

1. *Choix de N.*

Pour la détermination S_v (v = 1, 2, 3) nous avons choisi

$$N_0 = 48 \ , \quad N_3 = 36 \ , \quad N_7 = 72 \qquad (1)$$

Il est évident que beaucoup d'autres solutions sont possibles mais elles sont trop coûteuses. Même en (1) nous nous sommes efforcés de nous limiter aux deux premières variantes. Le cas N = 72 complique la représentation de la marée et jusqu'à présent n'a pas donné de résultats particulièrement bons.

Pour déterminer S_4, c'est-à-dire pratiquement pour déterminer l'onde MF il faut utiliser N = 336 ou N > 336. Nous n'examinerons ici que les filtres pour la détermination des ondes du type v = 1, 2 et 3. Pour v = 4 (pour MF) nous n'avons jusqu'à présent pas de résultats et nous nous abstenons de faire des propositions concrètes. La possibilité de déterminer MF est malgré tout envisagée dans notre programme pour 3BM.

2. *Choix des composantes de marées.*

Les composantes de marées de la matrice $\underline{\underline{A}}_k$ représentent un certain ensemble $\underline{\underline{C}}_{ik}$ (II,14) ou w_i représentent les vitesses angulaires des ondes principales de marées. Dans la suite, quand nous parlerons concrètement d'une onde donnée, nous remplacerons l'indice i par le symbole de Darwin par exemple $\underline{C}_{O1,K}$, $\underline{C}_{M2,K}$ etc. comme aussi $\underline{F}_{O1,k}$, $\underline{F}_{M2,k}$ etc ...

Pour les intervalles courts {tel (1)} les ondes de marées de chaque groupe S_v (v = 1, 2, 3) ne sont pratiquement pas différentes entre elles et S_4 s'associe avec D_a. Le spectre de la marée présente trois bandes étroites respectivement S_1, S_2 et S_3. On peut représenter comme approximation chacune de ces bandes par une des ondes principales de chaque S_v comme dans (V,9). Pour ces ondes principales nous avons choisi S_1, S_2 et M_3 c'est-à-dire que dans $\underline{\underline{A}}_k$ nous avons toujours trois composantes

$$\underline{C}_{S1,k} \quad , \quad \underline{C}_{S2,k} \quad , \quad \underline{C}_{M3,k} \qquad . \tag{2}$$

Lors de la composition des filtres on transforme (2) en trois filtres qui renforceront les ondes correspondantes avec le facteur 1 c'est-à-dire nous aurons

$$\underline{F}_{S1,k}^{*}\,\underline{C}_{S1,k} = \underline{F}_{S2,k}^{*}\,\underline{C}_{S2,k} = \underline{F}_{M3,k}^{*}\,\underline{C}_{M3,k} = 1 \tag{3}$$

A cause de leur proximité, les ondes du groupe donné S_v seront toutes renforcées à l'aide des filtres correspondants avec des facteurs voisins de 1. Enfin dans la réduction suivante des valeurs filtrées, par la méthode des moindres carrés, il faut tenir compte des valeurs précises des facteurs correspondants d'amplification.

Pour déterminer le poids des valeurs filtrées il faut représenter la composante de marée dans les équations avec assez de précision {(II,24) et (VII,4)}. Il semble que même pour (1) les différences entre les ondes de marées d'un même groupe s'amortissent et que les composantes (2) ne garantissent pas une précision suffisante dans les équations (II,24) et (VII,4). Sur base d'analyses des marées théoriques, nous avons établi que pour N_o et N_3 il faut, en $\underline{\underline{A}}_k$, inclure les composantes

$$\underline{C}_{S1,k} \quad , \quad \underline{C}_{O1,k} \quad , \quad \underline{C}_{S2,k} \quad , \quad \underline{C}_{N2,k} \quad , \quad \underline{C}_{M3,k} \tag{4}$$

et pour N_7

$$\underline{C}_{S1,k} \quad \underline{C}_{O1,k} \quad \underline{C}_{Q1,k} \quad \underline{C}_{S2,k} \quad \underline{C}_{M2,k} \quad \underline{C}_{2N2,k} \quad \underline{C}_{M3,k} \tag{5}$$

La présence de plus d'une onde du même groupe conduit à une difficulté importante. Si nous ne réduisons pas $\underline{\underline{A}}_\kappa$ c'est-à-dire si nous prenons $\underline{\underline{B}}_\kappa = \underline{\underline{A}}_\kappa$, nous obtiendrons le filtre $\underline{F}_{S_1,k}$ qui amplifiera S_1 et simultanément, en conformité avec (VII,7) et (VII,8), éliminera O1, ce qui, évidemment, est pratiquement impossible. Il est également impossible d'avoir le filtre $\underline{F}_{S_2,k}$ renforçant S_2 et éliminant les autres ondes semi-diurnes.

On peut représenter cette situation plus clairement en N - par l'espace de mesure. Nous examinerons les vecteurs $\underline{C}_{S_1,k}$ et $\underline{C}_{O_1,\kappa}$. Puisqu'ils représentent des ondes très voisines l'angle entre eux sera très petit. Le vecteur $\underline{F}_{S_1,k}$ doit être orthogonal à $\underline{C}_{O_1,\kappa}$ et il s'ensuit qu'il doit former un angle voisin de $\pi/2$ avec S_1. Le facteur représente le produit scalaire (3) qui est proportionnel au cosinus de l'angle entre $\underline{F}_{S_1,k}$ et $\underline{C}_{S_1,k}$. Puisque ce cosinus sera très petit, pour obtenir (3) le filtre doit avoir une longueur trop grande. Puisque le poids du filtre est inversément proportionnel au carré de cette longueur il s'ensuit que le filtre aura un poids très bas.

Pour éviter cette situation impossible en pratique nous envisageons les transformations des composantes de marées basées sur l'orthogonalité (VII, 10). De là, nous obtenons les variantes suivantes des composantes de marées dans la matrice $\underline{\underline{B}}_\kappa$. (Pour raccourcir les notations, $\underline{C}_{i,k}$ ($\kappa=\kappa_1$ et κ_2) nous remplaçons le symbole de l'onde par la lettre i).

1. Par exemple O1 désigne $\underline{C}_{O_1,\kappa_1}$ et $\underline{C}_{O_1,\kappa_2}$.

Variante 0

Pour N = 36 ou 48

S1, $O1^{(1)}$, S2, $N2^{(1)}$, M3

Pour N = 72

S1, $O1^{(1)}$, $Q1^{(2)}$, S2, $M2^{(1)}$, $2N2^{(2)}$, M3

Dans ce cas $\underline{F}_{S_1,k}$ n'éliminera que la composante $O1^{(1)}$ ou $O1^{(1)}$ et $Q1^{(1)}$ qui sont orthogonaux, S_1 renforcera la composante du vecteur O1 ou des vecteurs O1 et Q1 qui sont colinéaires avec S_1. De façon analogue $\underline{F}_{S_2,k}$ n'éliminera pas N2 ou M2 et 2N2 mais seulement leurs composantes qui sont orthogonales à S_2. En même temps $\underline{F}_{S_2,k}$ éliminera précisément S_2 et N_2 ou S_2, M_2 et $2N_2$ comme aussi M_3 : nous avons une séparation des ondes diurnes, des semi-diurnes et des tiers diurnes.

De façon analogue $\underline{F}_{S_2,k}$ éliminera S_1 et O_1 ou S_1, O_1 et Q_1 avec M_3 c'est-à-dire que nous avons une séparation des ondes diurnes des autres types d'ondes.

Enfin le filtre $\underline{F}_{M3,k}$ séparera de façon analogue les ondes ter-diurnes des autres ondes. En d'autres mots nous avons un partage préliminaire complet des types d'ondes principaux.

Puisque nous ne pouvons pas être sûrs au préalable qu'il faut un partage complet des ondes, envisageons les représentations suivantes de la marée.

Variante 1

Pour N = 36 et 38 :

$$S1^{(1)},\ O1^{(1+1)},\ S2^{(1+2)},\ N2^{(1+3)},\ M3^{(1+4)}$$

Pour N = 72

$$S1^{(1)},\ O1^{(1+1)},\ Q1^{(1+2)},\ S2^{(1+3)},\ M2^{(1+4)},\ 2N2^{(1+5)},\ M^{(1+6)}$$

où 1 représente le nombre de fonctions de rang $\underline{P}_{j,k}$ qui sont placées en $\underline{\underline{A}}_k$ à gauche de S_1. Dans ce cas nous avons une orthogonalisation complète des composantes $\underline{\underline{A}}_k$ de gauche à droite, en incluant aussi les fonctions rangées. Pour la composante donnée le filtre éliminera les composantes se trouvant à gauche et n'éliminera pas les composantes qui se trouvent à droite. Ainsi $\underline{F}_{S_1,k}$ n'éliminera que les fonctions rangées avec S_1 et O_1 ou S_1, O_1 et Q_1 et $\underline{F}_{M3,k}$ éliminera toutes les autres composantes. Dans ce cas nous avons un partage incomplet des ondes de marées.

3. Représentation D_a de la dérive D

Nous avons montré en IV que D_a s'obtient en ajoutant au polynôme D_r les composantes de marées que nos filtres éliminent en I(N,T). Ainsi par exemple dans la variante 0, lors de la détermination des ondes diurnes, à D_r sont ajoutés $O1^{(1)}$, S_2, N_2 et M_3 (pour N = 36 et 38). Dans la variante 1, lors de la détermination des ondes diurnes, $D_a = D_r$ et lors de la détermination des ondes semi-diurnes on ajoute S_1 et O_1. Dans les deux cas, lors de la détermination de M_3 on ajoute à D_r toutes les autres composantes de marées.

La représentation par D_r est examinée concrètement en II. Pour chaque N et pour chaque variante de la représentation de la marée, nous modifions le degré r. Dans la table 1 nous donnons les composantes qu'il faut inclure pour chaque r. Notre expérience a montré que pour N = 36 nous pouvons nous limiter à r = 1 ÷ 3 et pour N = 48 et 72 à r = 1 ÷ 4. Des degrés plus hauts ont toujours donné de très mauvais résultats.

Pour chaque r nous avons deux matrices des filtres $\underline{\underline{F}}_{k_1}$ et $\underline{\underline{F}}_{k_2}$ où k_1 et k_2 sont déterminés d'après la table 1. Chacune de ces matrices a un numéro

qui se détermine d'après la règle qui suit. Les unités désignent l'indice κ - si $\kappa = \kappa_1 = 1, 3, 5$ nous avons des filtres pairs et si $\kappa = \kappa_2 = 2, 4, 6$ nous avons des filtres impairs. Le nombre des dizaines est égal à l'indice N dans (1). Il est égal à zéro si N = 48, égal à 3 si N = 36 et égal à 7 si N = 72. Le nombre des centaines manque pour la représentation de la marée dans la variante 0 et est égal à 1 dans la variante 1.

Nous employons la paire $\underline{\underline{F}}_{\kappa_1}$ et $\underline{\underline{F}}_{\kappa_2}$ et nous obtenons une variante des résultats. Ainsi $\underline{\underline{F}}_{\kappa}$ renferment les filtres pour la détermination des ondes du type v = 1, 2 et 3 de sorte que nous obtenons simultanément toutes ces ondes. De plus nous aurons en $\underline{\underline{F}}_{\kappa}$ des filtres qui correspondent aux composantes D_r $\underline{P}_0$ et $\underline{P}_1$. A la suite de l'application de ces filtres nous obtenons la valeur de la dérive et de sa dérivée première pour l'époque T de l'intervalle I(N,T).

L'ensemble des paires $\underline{\underline{F}}_{\kappa_1}$ et $\underline{\underline{F}}_{\kappa_2}$ pour toutes les valeurs r forme un ensemble de variantes des filtres avec une représentation générale de la marée. Pour économiser les calculs nous envisageons l'application simultanée d'un ensemble de variantes. Ainsi nous obtenons un ensemble de résultats qui diffèrent l'un de l'autre selon le degré des polynômes retranchés.

Nous donnons dans la table 2 la liste de toutes les variantes que nous utilisons habituellement. On peut très facilement agrandir sensiblement cette liste. On peut remplacer les ondes de marées par d'autres, on peut utiliser d'autres valeurs N et enfin on peut remplacer les fonctions de puissances de la représentation de D par différentes fonctions à longue période. Quand nous en avons la possibilité nous utiliserons les nouvelles variantes. Il nous semble utile jusqu'à présent de raccourcir le nombre de variantes et de nous limiter aux ensembles de numéros 0, 10 et 13.

TABLE 2

N° de l'ensemble de filtres	r	N° des filtres	
		pair	impair
3 Variante de marée 0 N = 36	1 2 3	31 33 33	32 32 34
13 Variante de marée 1 N = 36	1 2 3	131 133 133	132 132 134
0 Variante de marée 0 N = 48	1 2 3 4	1 3 3 5	2 2 4 4

TABLE 2 (suite)

10 Variante de marée 1 N = 48	1 2 3 4	101 103 103 105	102 102 104 104
7 Variante de marée 0 N = 72	1 2 3 4	71 73 73 75	72 72 74 74
17 Variante de marée 1 N = 72	1 2 3 4	171 173 173 175	172 172 174 174

X. PROGRAMME POUR BM POUR LA COMPOSITION DES FILTRES

L'algorithme de composition des filtres est compris dans notre programme pour BM pour l'application de M74. Il est pratiquement plus facile pour chaque analyse de déterminer les filtres que de garder une grande quantité de coefficients des différentes variantes. Cela donne la possibilité d'essayer les nouvelles variantes pour différents buts étudiés.

Le bloc-schéma de cet algorithme est représenté sur la figure 1.

Nous disposons (bloc 1) de 31 composantes qui sont présentées dans la table 3. Elles sont données à l'aide des vitesses angulaires w_i (i = 1, ... 31). Pour les 6 premières composantes nous avons $w_i = 0$. Elles représentent les fonctions rangées.

Dans le bloc r le programme comprend N et n_f - le nombre des filtres de l'ensemble donné de filtres. n_v représente le nombre de variantes des résultats - longueur des ensembles N°3 et 13 dans la table 2, $n_v = 3$, et pour les autres ensembles $n_v = 4$.

Nous avons après cela le cycle k = 1, ... n_f dans lequel on compose successivement les filtres pairs et impairs $\underline{\underline{F}}_k$. Les valeurs $\bar{q}_k$ et q_k (II,10) déterminent le type de filtres.

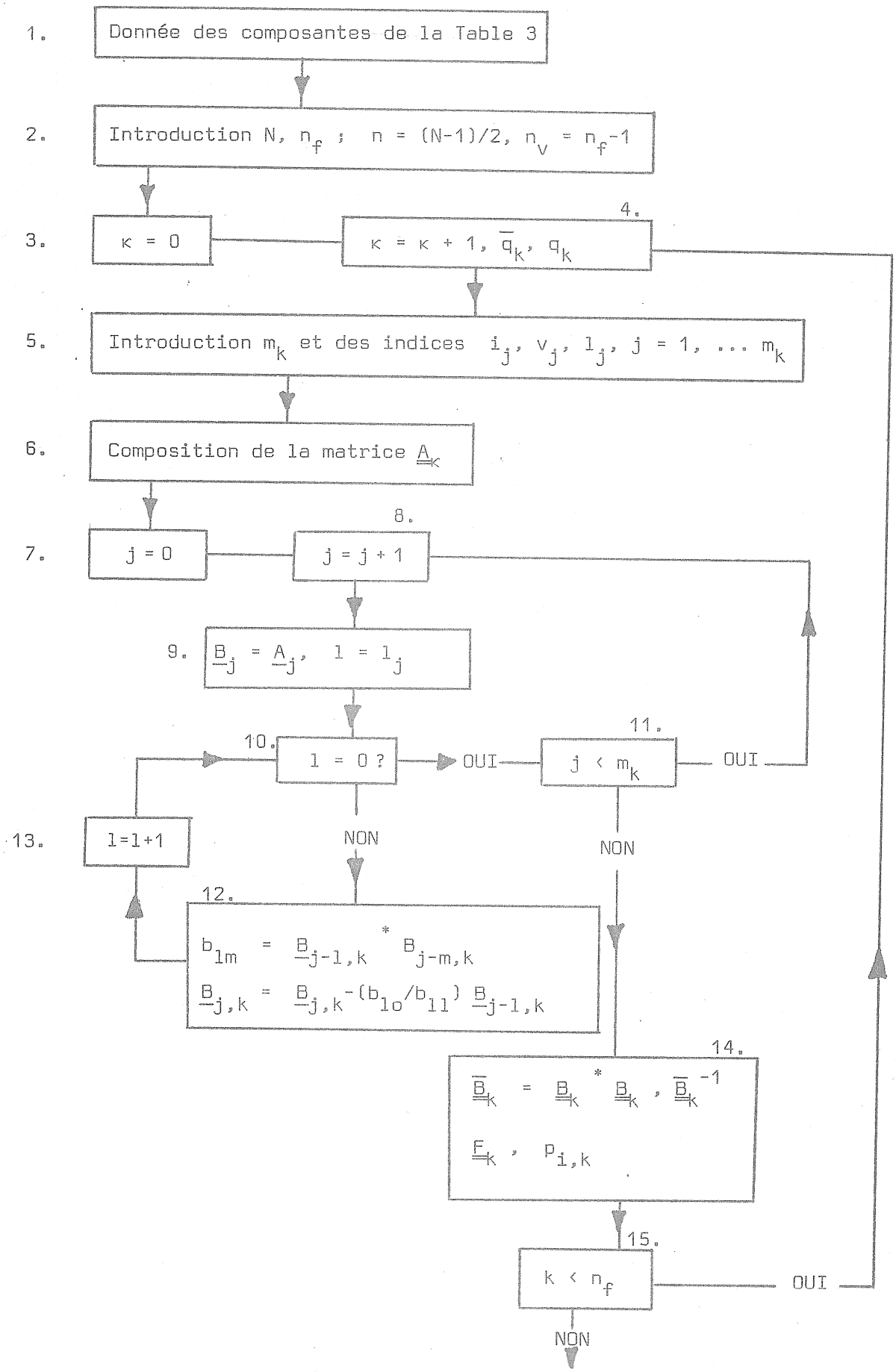


Fig. 1. Bloc-schéma de la composition des filtres.

TABLE 3

Indice i	Nombre de Doodson	Symbole	Vitesse Angulaire w_i	Aspect de la fonction	
				$\kappa = \kappa_1$	$\kappa = \kappa_2$
1		P_0	0	$(t/n)^\circ = 1$	ne participe pas
2		P_1	0	ne participe pas	$(t/n)^1$
3		P_2	0	$(t/n)^2$	ne participe pas
4		P_3	0	ne participe pas	$(t/n)^3$
5		P_4	0	$(t/n)^4$	ne participe pas
6		P_5	0	ne participe pas	$(t/n)^5$
7	135 655		13.399	cos $w_7 t$	sin $w_7 t$
8	145 555	O1	13.943	cos $w_8 t$	sin $w_8 t$
9	155 655	M1	14.497	.	.
10	164 556	S1	15.000	.	.
11	185 555	OO1	16.139	.	.
12	235 755	2N2	27.895	.	.
13	245 655	N2	28.440		
14	255 555	M2	28.984		
15	265 455	L2	29.528		
16	273 555	S2	30.000		
17	355 555	M3	43.476		
18	382 555	S3	45.000		
19	56 554	SA	.041		
20	57 555	SSA	.082		
21	58 554	STA	.123		
22	65 455	MM	.544		
23	73 555	MSF	1.016		
24	75 555	MF	1.098		
25	85 455	MTM	1.642		
26			1.875		
27			3.750		
28			5.625		
29			7.500		
30			9.375		
31			11.250		

Dans le bloc 5 on introduit les valeurs qui déterminent le procédé de composition des matrices $\underline{A}$ et $\underline{B}$. Elles ont les valeurs suivantes :

m_k - nombre de composantes des matrices $\underline{A}$ et $\underline{B}$, respectivement le nombre de filtres contenus dans une variante donnée $\underline{F}_k$. Ensuite l'indice j prend les valeurs $j = 1, \ldots m_k$

i_j - si $i_j = i$, alors la composante $\underline{A}_{j,k}$ de la matrice $\underline{A}_k$ se détermine comme suit :

$$A_{j,k}(t) = \cos(w_i t + q_k), \quad w_i \neq 0$$
$$A_{j,k}(t) = (t/n)^{i-1}, \quad w_i = 0 . \qquad (1)$$

v_j - si $v_j = V \neq 0$ le filtre d'indice j renforce l'onde fondamentale du type v. Nous désignons par j_v la succession des indices j pour lesquels v = 1, 2, 3. Les filtres d'indice j_v seront utilisés pour la détermination des ondes du type v. Si $v_j = 0$ le filtre correspondant ne s'utilise que pour l'estimation du poids des valeurs filtrées.

l_j - si $l_j = 0$ nous aurons $\underline{B}_{j,k} = \underline{A}_{j,k}$. Si $l_j = 1 \neq 0$, $B_{j,k}$ s'obtient par l'orthogonalisation $\underline{A}_{j,k}$ par rapport aux composantes se trouvant à gauche $\underline{A}_{j-1,k}, \ldots A_{j-1,k}$.

La matrice $\underline{A}_k$ dans le bloc 6 est composée en utilisant (1) et en fonction de la valeur des indices i_j.

Les blocs suivant 8 à 13 forment le cycle dans lequel se forme $\underline{B}_k$ en fonction de la valeur des indices l_j.

La composition de la variante donnée des filtres $\underline{F}_k$ se termine dans le bloc 14. Il faut les garder en mémoire BM avec $\underline{B}_k$ et avec les poids $p_{j,k}$.

Dans le bloc 15 on vérifie la fin du cycle $k = 1, \ldots n_f$.

XI. APPLICATION DES FILTRES SUR I(N,T).

Nous donnons dans la figure 2 le bloc-schéma 2 de l'application des filtres sur un intervalle I(N,T) qui représente une partie du grand cycle de la réduction.

Le bloc 1 concerne l'introduction des données $\underline{L}(T)$.

Dans le bloc 2 on détermine la somme des carrés nécessaires pour la détermination de l'erreur quadratique moyenne d'après les données.

Après cela nous avons le cycle $\kappa = 1, \ldots n_f$ dans lequel on applique successivement toutes les variantes des filtres de l'ensemble donné. Ainsi chaque variante $\underline{\underline{F}}_k$ renferme m_k filtres et nous obtenons m_k valeurs filtrées $U_{j,k}$ ($j = 1, \ldots m_k$, $\kappa = 1 \ldots n_f$). Dans le bloc 6 on détermine la somme G_k que nous utiliserons pour la détermination de l'erreur quadratique moyenne à l'intérieur de I(N,T).

L'ensemble de toutes les valeurs $U_{j,k}(T)$ ($j = 1, \ldots m_k$) n'est nécessaire que pour le calcul de G_k. Nous choisissons entre elles uniquement les valeurs d'indice $j = j_v$ ($v = 1, 2, 3$) que nous utiliserons pour la détermination des paramètres des ondes du type v.

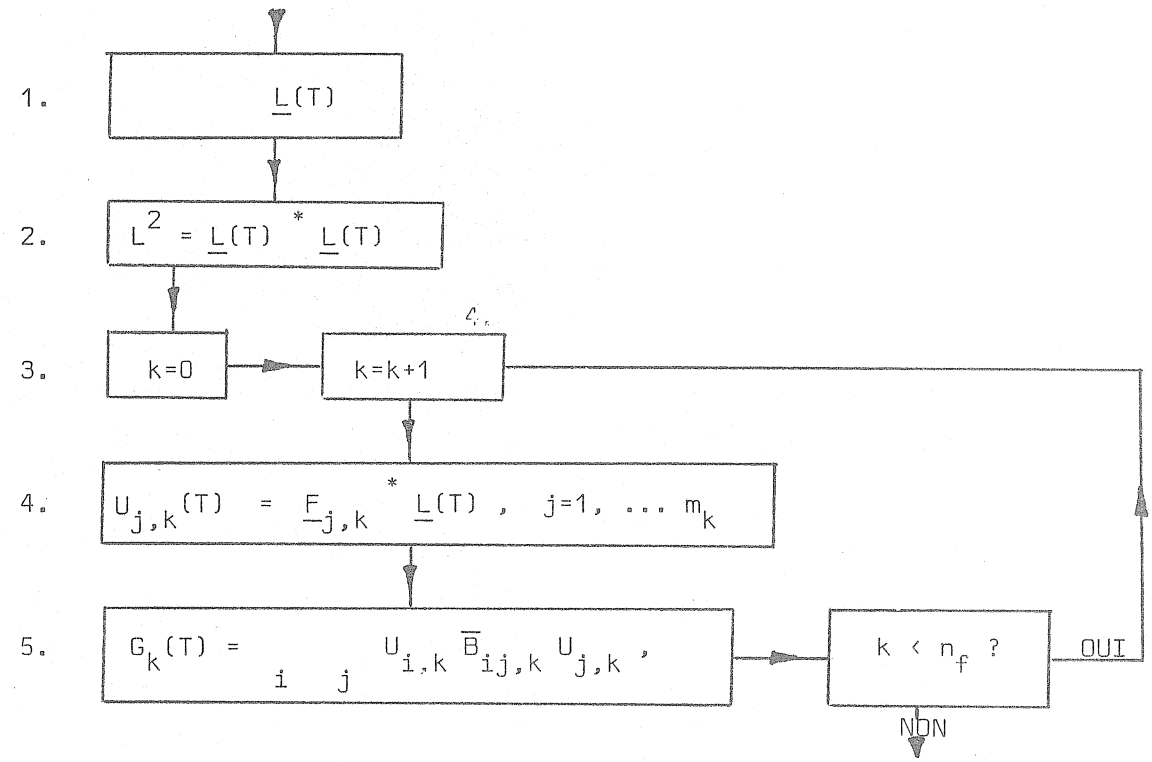


Fig. 2. Bloc-schéma 2, application des filtres.

XII. COMPOSITION DES EQUATIONS D'OBSERVATION POUR LES VALEURS FILTREES

Nous ne nous occuperons pas ici des problèmes en relation avec le calcul des ondes de marées théoriques. Notons pour information que dans notre programme pour BM nous employons la table du développement complet du potentiel de marée {14, 15} qui est donnée en {18}. T. Chojnicki nous a transmis personnellement cette table avec de petites corrections {16}. Pour déterminer les amplitudes théoriques et les phases, nous utilisons les formules données en {22}.

Ainsi nous supposons que nous avons s ondes de marées théoriques qu'on peut représenter par

$$\bar{S}_i(T+t) = \bar{H}_i \cos(\bar{Q}_i(T) + w_i t) \qquad (i = 1, 2, \ldots s) \tag{1}$$

$\bar{H}_i$ représente ici l'amplitude théorique et $\bar{Q}_i(T)$ la phase théorique pour l'époque T.

Pour composer les équations d'observations il faut grouper les ondes de périodes voisines en supposant que les ondes du même groupe ont des constantes identiques δ et κ. On peut définir ces groupes à l'aide des numéros des ondes. Nous donnons dans la table 4 le groupement des ondes pour trois cas possibles d'un long enregistrement. Pour représenter la variante de marée 1 des groupes diurnes il faut encore ajouter un groupe contenant toutes les ondes semi-diurnes. Dans ce cas toutes les ondes sont placées dans un groupe puisque, pour les ondes semi-diurnes, les facteurs d'amplification des filtres diurnes sont très petits et les différences dans δ et κ ont une valeur importante.

Pour déterminer les ondes du type v nous utiliserons les valeurs filtrées $U_{jv,k1}$ et $U_{jv,k2}$. Pour simplifier les notations nous remplacerons j_v par v.

Après la transformation de (III,8) et en utilisant les indices de la table 4 nous obtenons les équations d'observations suivantes

$$U_{v,k}(T) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot a_{i,k}(T) + \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot b_{i,k}(T) \quad , \tag{2}$$

où i est le numéro du groupe, m est le chiffre des groupes et

$$\xi_i = \delta_i \cos \kappa_i \quad \text{et} \quad \eta_i = -\delta_i \sin \phi_i \tag{3}$$

On obtient les coefficients $a_{i,k}$ et $b_{i,k}$ comme suit :

$$\begin{aligned} a_{i,k}(T) &= \sum_{j=\alpha_i}^{\beta_i} R_{vj,k}\ \bar{H}_j \cos(\bar{Q}_j(T) - q_k) \\ b_{i,k}(T) &= \sum_{j=\alpha_i}^{\beta_i} R_{vj,k}\ \bar{H}_j \sin(\bar{Q}_j(T) - q_k) \end{aligned} \tag{4}$$

où α_i et β_i sont les numéros de la première et de la dernière onde du groupe i.

TABLE 4

	Jusque 6 mois			6 mois - 1 an			plus qu'1 an		
i	α_i	β_i		α_i	β_i		α_i	β_i	
ONDES DIURNES									
1	128	192	O1	128	192	O1	128	192	O1
2	193	218	O1	193	218	O1	193	218	O1
3	219	240	M1	219	240	M1	219	240	M1
4	241	273	K1	241	250	P1	241	250	P1
5	274	295	I1	254	273	K1	251	253	S1
6	296	332	OO1	274	295	I1	254	273	K1
7				296	332	OO1	274	295	I1
							296	332	OO1
ONDES SEMI-DIURNES									
1	333	373	2N2	333	373	2N2	333	373	2N2
2	374	397	N2	374	397	N2	374	397	N2
3	398	423	M2	398	423	M2	398	423	M2
4	424	440	L2	424	440	L2	424	440	L2
5	441	487	S2	441	449	S2	441	449	S2
6				450	487	K2	450	487	K2
ONDES TIERS DIURNES									
1	488	504	M3	488	504	M3	488	504	M3

La composition des équations d'observations pour un k donné peut être faite en conformité avec la première partie du bloc-schéma 3.

Dans le bloc 1, on détermine cos $\overline{Q}_i(T)$ et sin $\overline{Q}_i(T)$ pour toutes les ondes.

Suit le cycle k = 1 ... n_f où pour chaque k c'est-à-dire pour chaque variante des filtres il faut déterminer les coefficients des équations d'observations (4). En pratique à l'intérieur de ce cycle, c'est-à-dire pour chaque k, nous aurons le cycle v = 1, 2, 3 qui n'est pas désigné pour ne pas compliquer les formules et le bloc schéma. Il faut cependant ne pas oublier que les coefficients (4) se déterminent pour la valeur donnée v.

Bloc-schéma 2

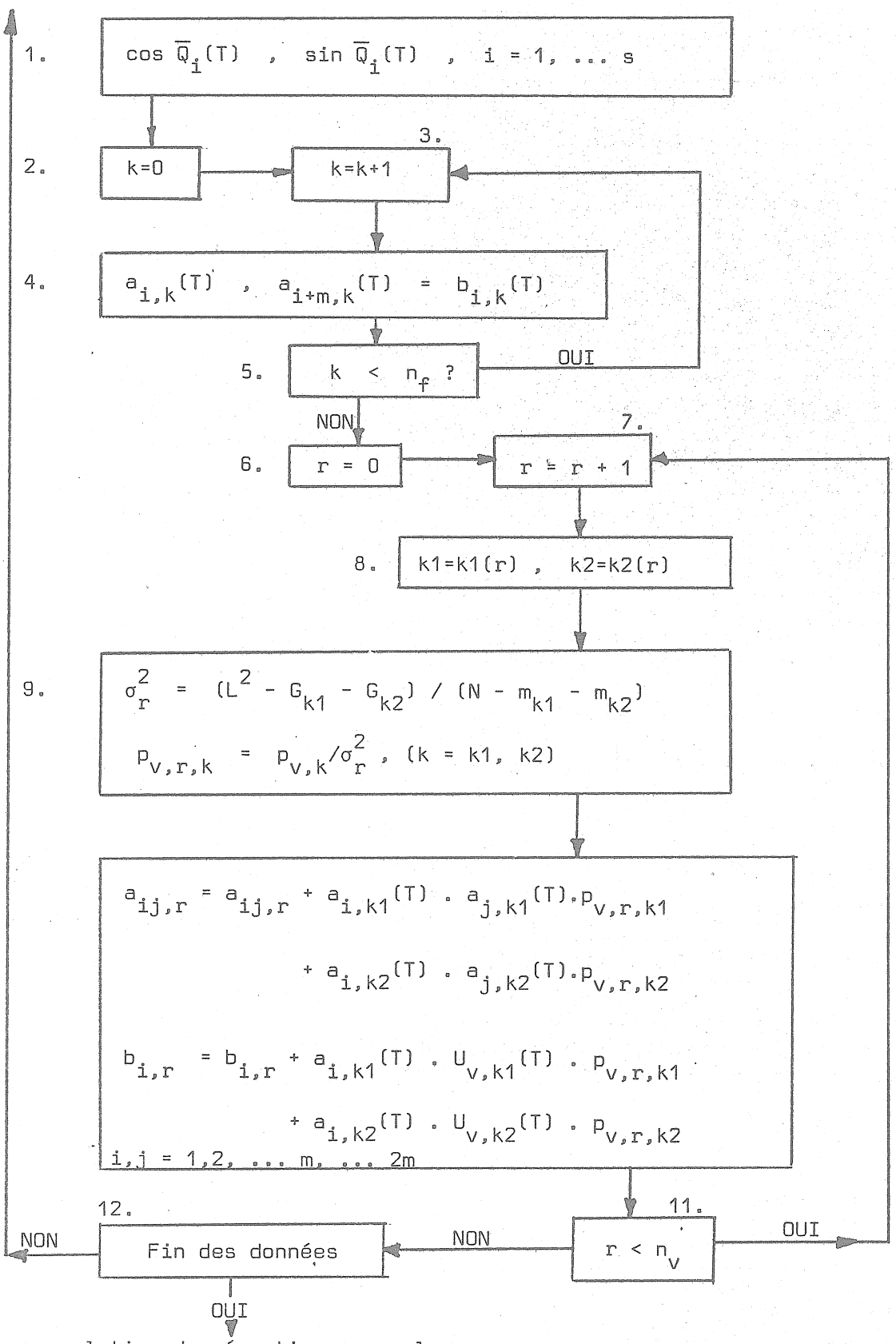


Fig. 3. Bloc-schéma 3 - Composition des équations d'observations et normales.

XIII. COMPOSITION ET SOLUTION DES EQUATIONS NORMALES

La composition des équations normales est réalisée dans la partie correspondante du bloc-schéma 3. Nous avons un cycle d'après les variantes de réduction r = 1, ... n_v. Pour chaque r on détermine les valeurs k_1 et k_2 d'après la table 1 respectivement pour la composition des équations normales de la variante r on utilise les coefficients (4) et les valeurs filtrées avec l'indice $k=k_1,k_2$.

Pour obtenir une expression concise des équations d'observations nous avons remplacé

$$a_{i+m,k}(T) = b_{i,k}(T) \qquad (1)$$

$$\xi_{i+m} = \eta_i \qquad (i = 1, \ldots m$$

Avec ces notations les équations normales ont la forme suivante :

$$b_{i,r} = \sum_{j=1}^{2m} a_{ij,r} \; \xi_j \quad (j = 1, \ldots m, \ldots 2m) \qquad (2)$$

Dans les blocs 9 et 10 on indique comment on peut obtenir les éléments (2).

Après la réduction de toutes les données suit la solution (2) la détermination de δ et κ et de l'erreur quadratique moyenne. Ceci est bien connu et nous ne le décrirons pas ici.

Nous avons également ici le cycle v = 1, 2, 3 c'est-à-dire que nous composons et résolvons les équations normales pour chaque v en particulier.

Il faut attirer l'attention ici sur le fait que nous obtenons l'erreur quadratique moyenne de l'unité de poids qu'il est difficile d'interpréter. Notre programme détermine l'erreur quadratique moyenne de chaque intervalle duquel on peut obtenir la représentation de l'influence des erreurs accidentelles et indépendantes.

Nous sommes très reconnaissants aux Instituts et personnes cités ci-après pour la réalisation de ce travail :

1. Le travail a été fondamentalement réalisé à l'Institut de Géophysique de l'Académie des Sciences de Bulgarie. Nous exprimons notre reconnaissance à la direction de l'Institut et à nos collègues pour leur soutien.
2. M65 a été élaboré à l'initiative et sous la direction du Professeur Melchior du Centre International des Marées Terrestres à Bruxelles. Le Prof. Melchior et ses collaborateurs ont introduit une série d'améliorations dans l'appli-

cation de M65. Nous leur exprimons notre profonde reconnaissance.

3. Les premières réductions et l'application de M74 ont été faites à l'Institut de Physique de la Terre solide à l'Université d'Uppsala. Il nous est agréable d'en remercier le Prof. Vogel, le Docteur Lund, le Docteur Andersen, le Docteur Kulingu et les autres collègues de Uppsala.

4. M74 a été étudié à maintes reprises dans le groupe de travail du 3.3. KAPG et nos collègues de ce groupe ont fait une quantité de remarques valables. Grâce à eux M74 a trouvé la possibilité d'une large application. Nous exprimons au Docteur Picha et à tous les participants de ce groupe du travail notre cordiale reconnaissance.

BIBLIOGRAPHIE

1. Horn W., The harmonic analysis, according to the least square rule of tide observations upon which an unknown drift is superposed, III Int. Symp. Earth tides, Trieste, 1959.

2. Venedikov A.P., Application à l'analyse des observations des marées terrestres de la méthode des moindres carrés, C.R. Acad. bulgare des Sci., t. 14, 7, 1961.

3. Venedikov A.P., Application de la méthode des moindres carrés à l'analyse des observations des marées terrestres, BIM 29, 1962.

4. Venedikov A.P., A possible application of the method of least squares to earth tide analysis, C.R. Acad. bulgare des Sci., t. 17, 5, 1964.

5. Matveyev P.S., Analyse harmonique des marées terrestres, BIM 33, 19

6. Chojnicki T., Détermination des paramètres de marée par la compensation des observations au moyen de la méthode de moindres carrés. Publs. Inst. Geoph. Pol. Ac. Sci., 55, 43.

7. Bartha G., Evaluation of earth-tide records by sectionwise approximation of the instrumental drift, Acta Geodaet. Acad. Sci. Hung., t. 8 (3-4), 1973.

8. Venedikov A.P., Sur une possibilité d'application de la méthode des moindres carrés à l'analyse des observations des marées terrestres, V Symp. Int. Marées terrestres, Bruxelles, 1964.

9. Venedikov A.P., Sur la constitution de filtres numériques pour le traitement des enregistrements des marées terrestres, Ac. Roy. Belg., t. LIII, fasc. 6, 1966.

10. Venedikov A.P., Une méthode pour l'analyse des marées terrestres à partir d'enregistrements de longueur arbitraire, Ac. Roy. Belg., t. LII, fasc. 3, 1966.

11. Melchior P., Venedikov A.P., Derivation of the wave M_3 ($8^h.279$) from the periodic tidal deformation of the earth, Physics Earth Planet. Int., vol. 1, 1968.

12. Venedikov A.P., Pâquet P., Sur l'application d'une méthode pour l'analyse des marées terrestres à partir d'enregistrements de longueur arbitraires, BIM 48, 1967.

13. Lecolazet R., La méthode utilisée à Strasbourg pour l'analyse harmonique de la marée gravimétrique, BIM 10, 1958.

14. Cartwright D.E., Tayler R.J., Computation of the tide generating potential, Geophys. J.R. astr. Soc. 23, 1971.

15. Cartwright D.E., Edden A.C., Corrected tables of tidal harmonics. Geophys. J.R. astr. Soc. 33, 1973.

16. Пиха Я., Л. Скалски, З. Шимон, Проблема приливных поправок к высокоточным наблюдениям силы тяжести, Геофизикални Сборник XXI 1973, Прага.

17. Ducarme B., On some properties of Venedikov's Method of tidal analysis, Studia Geoph. Geodaet., CSAV, 3, 1976.

18. Chojnicki T., Materialy i prace 71, Publ. Inst. Geoph. Pol. Ac. Sci., 1973.

19. Мельхиор П., Земные приливы (перевод с англ.), Мир, Москва 1968

20. Перцев Б.П., Об учете спользания нуля при наблюдениях упругих приливов, Изв. АН СССР, сер.геоф., №4, 1959.

21. Simon Z., Witingerova E., Überprüfung der Venedikov-Methode de Erdgezeitenanalyse an den Modellen der Erdgezeitenmessungen, Geofysikalni Sbornik XXII, Praha, 1974.

22. Chojnicki T., Calcul des marées terrestres théoriques et leur précision, Materialy i prace 55, Publ. Inst. Geoph. Pol. Acad. Sci., Warszawa, 1972.

THE MOLODENSKY PROBLEM FOR AN HOMOGENEOUS LIQUID CORE

A.G. Camacho, M.J. Sevilla

Instituto de Astronomia y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.)
Facultad de Ciencias Matematicas
Universidad Complutense
Madrid

ABSTRACT

In this paper we present a study about the development of polar motion equations for Molodensky's Earth Model. In particular , we study the expression of the free frequencies for a model with homogeneous core, comparing with those for a non homogeneous one. For that we consider the theory of Sasao, Okubo and Saito, and we develop a theory for homogeneous core.

1. INTRODUCTION

We suppose a perturbed Earth model, with variable rotation (speed and polar motion), composed by an elastic elliptical mantle with a stratified or an homogeneous liquid core.

For the stratified core we refer to the theory of Sasao, Okubo and Saito (1980). We observe that the form of their more developed polar motion equations and their free frequencies does not contain explicit effects of the non-homogeneity of the core. So, we have tried to obtain the corresponding equations for a model with homogeneous core and by using another kind of development. We hope the same expressions.

For the homogeneous core we have used a certain generalization of the Poincaré's theory (Poincaré, 1910) (with a rigid mantle) supposing that the additional motion in the core is a simple motion in the sense of Poincaré. For the rotational and tidal deformations we use an expressions in function of the centrifugal and tidal potentials, by means of Love numbers $H_2(r)$, $L_2(r)$. Using Helmholtz equations together for simple motion and deformations, using several geometrical relations between cartesian and spherical coordinates and integrating across the perturbed core volume we arrive to an equation that, with a development of the linearized equations of Liouville for this Earth model, can be writen in the same form as that of the polar motion equations of Sasao,

Okubo and Saito (S.O.S.) theory. Applying the usual method, we can obtain an expression of the free frequencies (Chandlerian, nearly diurnal).

2. EQUATIONS OF S.O.S. FOR A STRATIFIED CORE.

2.1. General global equations for polar motion: From the linearized Liouville equations (Munk & MacDonald, 1975) we have, in complex notation:

$$A\dot{u} - i(C-A)\Omega u + i\Omega^2 c + \Omega\dot{c} + i\Omega h + \dot{h} = L \quad , \qquad (1)$$

Ω being the mean angular velocity of rotation. A,A,C are the mean global moments of inertia and

$$u = \omega_1 + i\,\omega_2 \quad , \qquad h = h_1 + i\,h_2$$

$$c = c_{13} + i\,c_{23} \quad , \qquad L = L_1 + i\,L_2$$

where:

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Omega(m_1, m_2, 1+m_3)$: components of the instantaneous rotation of a principal axes Ox_i of the mantle mean configuration,

h_i : components of the inner angular momentum,

L_i : components of the luni-solar torque,

c_{ij} : variations of the tensor of inertia,

and all components are taken on the x_i-system (being Ox_3 polar axis).

The h effects for global rotational and tidal deformations can be neglected. Then we must substitute the angular momemtum only for the core motion.

Displacements in the liquid core can be described by their rate :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\omega}^c \wedge \bar{x} + \bar{v}_c \qquad (2)$$

(i.e., a global rotation $\bar{\omega}^c$ plus a correction term), with the condition that the angular momentum of these displacements is only that of $\bar{\omega}^c \wedge \bar{x}$.

Thus:

$$h = A_c v \quad , \qquad \text{with} \qquad v = \omega_1^c + i\,\omega_2^c$$

(A_c, A_c, C_c being mean moments of inertia of the core), ($\bar{\omega}^c \equiv (\omega_i^c) = (\Omega m_i^c)$).

By substituting into (1):

$$A\dot{u} - i(C-A)\Omega u + A_c(\dot{v} + i\Omega v) + \Omega(\dot{c} + i\Omega c) = L \quad . \qquad (3)$$

It is necessary to introduce a complementary equations in v .

2.2. Equations for displacements in the liquid core: Starting from the general hydrodynamical equations (Love, 1944), applying transformations for mobile axes and substituting (2) it yields (Camacho, 1983):

$$\frac{d\bar{v}_c}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^c) \wedge \bar{x} + 2\Omega \bar{i}_3 \wedge \bar{v}_c + \Omega(\bar{i}_3 \wedge \bar{\omega}^c) \wedge \bar{x} - \\ - \overline{grad}\left[\Omega^2 (m_3 + m_3^c)(x_1^2 + x_2^2)\right] = \qquad (4)$$

$$= (\rho - \rho_o)\, \overline{grad}\, V_o - \overline{grad}\left[\frac{P_1}{\rho_o} - \phi_1 + \Omega x_3 (x_1 \omega_1^c + x_2 \omega_2^c)\right]$$

(P_1: additional pressure, V_o: total initial potential, $\bar{i}_3 = (0,0,1)$, $\phi_1 = V_e + V_1 - \Omega x_3 (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2)$, V_e: earth tide potential , V_1: gravitational additional potential , ρ and ρ_o are density of model and equilibrium density respectively).

These are local equations. Global equations can be obtained considering global momentums. By multiplying vectorially by $\rho_o \bar{x}$ and extending the integration over the whole volume of core, the left-hand side of (4) gives:

$$A\dot{u} + A_c \dot{v} + i C_c \Omega v + \Omega \dot{c}^c \quad ,$$

($c^c = c_{13}^c + i\, c_{23}^c$ being products of inertia of the core)

With a rather laborious work, S.O.S. finally arrive to show that the contribution of the right-hand side of (4) to the global momentum can be neglected in a first order aproximation. Thus:

$$A\dot{u} + A_c \dot{v} + i C_c \Omega v + \Omega \dot{c}^c \doteq 0 \quad . \qquad (5)$$

To complete the former equations we must give a relation between products of inertia and u, v.

2.3. Global products of inertia: We calculate the additional gravitational potential (in the limit surface) from global rotational and tidal potentials with the usual Love number $k_o = k$, and from the 'load' deformation effects (created by the additional centrifugal deformation of core), with a load number for the elastic response k_1. If we identify with the MacCullagh's expression of the gravitational potential, we can write:

$$c = \frac{k_o}{k_s} \frac{C-A}{\Omega} \left(u - i \frac{L}{\Omega(C-A)}\right) - \frac{k_1}{k_s} \frac{C-A}{\Omega} v \qquad (6)$$

(k_s being the secular Love number).

2.4. Core products of inertia: By using the direct definition of c^o_{13}, c^c_{23}, the equation of Poisson, the Green formulas and by applying several relations between inner elastic fields, S.O.S. find:

$$c^c = \frac{A_c \gamma}{\Omega}\left(-\frac{i L}{\Omega (C-A)} + u\right) + \frac{A_c \beta}{\Omega} v \qquad (7)$$

with γ, β numerical parameters for the earth model (γ, β are expressed in terms of the boundary values for the functions y_5, y_6 of Alterman et al. (1959) in the core, by taking the 'static' and 'dynamical' terms, see S.O.S. page 174).

2.5. Polar motion equations: On inserting (6) and (7) into (3) and (5) we obtain:

$$\begin{aligned} A(1+s)\dot{u} - i\sigma_c(1+s)A\,u + i\left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]\Omega v + \left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]\dot{v} = \\ = (1 - \frac{k_o}{k_s})\,L + i\,\frac{k_o}{k_s}\,\frac{\dot{L}}{\Omega} \qquad (8) \\ A_c(1+\gamma)\,\dot{u} + A_c(1+\beta)\,\dot{v} + i\,C_c\Omega\,v = -\gamma\,A_o\,i\,\frac{\dot{L}}{\Omega(C-A)} \quad , \end{aligned}$$

where:

$$s = \frac{k_o}{k_s}\,\frac{C-A}{C} \quad , \qquad \sigma_c = \frac{1}{1+s}\left(1 - \frac{k_o}{k_s}\right)\frac{C-A}{A}\,\Omega$$

2.6. Free frequencies for polar motion: Following an usual method, we write the solution in the form $u = a\,e^{i\sigma t}$, $v = b\,e^{i\sigma t}$. The homogeneous system gives us the equation:

$$\begin{vmatrix} (\sigma - \sigma_c)\,A(1+s) & \left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right](\sigma+\Omega) \\ A_c(1+\gamma)\,\sigma & A_c(1+\beta)\,\sigma + C_c\Omega \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (9)$$

To solve it, we first suppose a zero order approximation ($e_c = 0$, $\beta = 0$) and obtain two solutions σ^o_1, σ^o_2. Then we calculate the solutions at first order in the form:

$$\sigma_1 = \sigma^o_1 + \tau_1 e_c + \pi_1 \beta \quad , \quad \sigma_2 = \sigma^o_2 + \tau_2 e_c + \pi_2 \beta \qquad \left(e_c = \frac{C_c - A_c}{C_c} \right)$$

Substituting these expressions into (9) yields:

$$\sigma_1 = \sigma_c \frac{A}{A - \frac{1+\gamma}{1+s}\left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]} \doteq (1 - \frac{k_o}{k_s})\,\frac{C-A}{A}\,\Omega\,\frac{A}{A-A_c}$$

$$\sigma_2 = -\Omega\left\{1 + \frac{A(\Omega+\sigma_c)}{A(\Omega+\sigma_c) - \frac{1+\gamma}{1+s}\Omega\left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]}(e_c-\beta)\right\} \simeq$$

$$\simeq -\Omega\left\{1 + \frac{A}{A-A_c}(e_c-\beta)\right\}$$

3. EQUATIONS FOR AN HOMOGENEOUS CORE BY ANOTHER METHOD.

As we pointed out, we will now use a different method to obtain the polar motion equations for a model with liquid homogeneous core.

3.1. Displacements in the liquid core: We make an exhaustive decomposition:

displacements $\begin{cases} \bar{u} : \text{rotational and tidal deformations (taken as particular displacements)} \\ \text{simple motion of Poincaré.} \end{cases}$

Thus, if $\bar{x}$ describes the perturbed core, then $\bar{x}_o = \bar{x} - \bar{u}$ gives an ellipsoidal core (semi-axis a , c) and

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{a} & \\ & & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ x_{o3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(x_1 - u_1) \\ \frac{1}{a}(x_2 - u_2) \\ \frac{1}{c}(x_3 - u_3) \end{pmatrix}$$

gives a spherical core, for which the simple motion of Poincaré can be written:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^c & \omega_2^c \\ \omega_3^c & 0 & -\omega_1^c \\ -\omega_2^c & \omega_1^c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = M(\omega^c) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} .$$

For the perturbed core:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\dot{x}'_1 + \dot{u}_1 \\ a\,\dot{x}'_2 + \dot{u}_2 \\ c\,\dot{x}'_3 + \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & c \end{pmatrix} M(\omega^c) \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{a} & \\ & & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} .$$

The angular momentum can be calculated by $\bar{h} = \iiint \bar{x} \wedge \dot{\bar{x}}\, dm$; it results:

$$h = F\,v \qquad \text{with} \quad F = \iiint \left(x_2^2 \frac{c}{a} + x_3^2 \frac{a}{c}\right) dm \quad , \quad v = \omega_1^c + i\,\omega_2^c$$

3.2. Equations for displacements in the liquid homogeneous core: We start from

the equation of Helmholtz:

$$\frac{d}{dt_{in}} \bar{rot}\ \bar{v} = \bar{rot}\ \bar{v}\ \ \bar{grad}\ \bar{v}$$

By substituting the following expressions of the inertial velocity $\bar{v}$:

$$v_1 = \frac{a}{c}\,\omega_2^c\, x_3 - \omega_3^c\, x_2 + \omega_2\, x_3 - \omega_3\, x_2 + \dot{u}_1 \quad ,$$

$$v_2 = \omega_3^c\, x_1 - \frac{a}{c}\,\omega_1^c\, x_3 + \omega_3\, x_1 - \omega_1\, x_3 + \dot{u}_2 \quad ,$$

$$v_3 = \frac{c}{a}\,\omega_1^c\, x_2 - \frac{c}{a}\,\omega_2^c\, x_1 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + \dot{u}_3 \quad ,$$

this becomes:

$$\frac{d}{dt_{in}}\left[2\,\omega_1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\omega_1^o\right] = \Omega\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\omega_2^c + 2\Omega\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \Omega\left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1}\right) - \\ - \frac{d}{dt_{in}}\left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3}\right) \quad ,$$

etc.

The relation $\frac{d}{dt_{in}}\bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}$ between the rates in inertial (in) and rotating axes allows us to write:

$$2\,\dot{\omega}_1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\dot{\omega}_1^c - 2\,\frac{a}{c}\,\Omega\,\omega_2^c = 2\Omega\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3}\right) \quad ,$$

$$2\,\dot{\omega}_2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\dot{\omega}_2^c + 2\,\frac{a}{c}\,\Omega\,\omega_1^c = 2\Omega\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1}\right) \quad . \qquad (10)$$

3.3. Expressions of $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ for the rotational and tidal displacements: The local suitable coordinates to study displacements inside the liquid core are:

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ x_\lambda \\ x_r \end{pmatrix} = R_2(\theta)\, R_3(\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \qquad \text{with } (r, \theta, \lambda) \text{: initial position.}$$

Displacements generated, from a spherical initial configuration, by second degree centrifugal and tidal potentials, U_{R2} , V_{e2} , can be written by means of the Love numbers theory (Melchior, 1978), that is:

$$u_r^e = \frac{H_2(r)}{g}\,(U_{R2} + V_{e2})$$

$$u_\theta^e = \frac{L_2(r)}{g}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(U_{R2} + V_{e2})$$

$$u^e_\lambda = \frac{L_2(r)}{g}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,(U_{R2}+V_{e2})$$

For the centrifugal deformations generated by the simple motion in the core we can use similar functions H_2', L_2' for the equivalent core enclosed in a spherical elastic shell. With coordinates r', θ', λ' in the equivalent sphere we find:

$$u_{r'} = \frac{H_2'(r')}{g'}\,r'^2\Omega^2\Big[-m_3^c\,\frac{1}{3}\,(3\cos^2\theta'-1)-(m_1^c\cos\lambda'+m_2^c\sin\lambda')\sin\theta'\cos\theta'\Big]$$

$$u_{\theta'} = \frac{L_2'(r')}{g'}\,r'^2\Omega^2\Big[2m_3^c\sin\theta'\cos\theta'-(m_1^c\cos\lambda'+m_2^c\sin\lambda')(\cos^2\theta'-\sin^2\theta')\Big]$$

$$u_{\lambda'} = \frac{L_2'(r')}{g'}\,r'^2\Omega^2\Big[(m_1^c\sin\lambda'-m_2^c\cos\lambda')\cos\theta'\Big]$$

Connecting $u_{r'}$, $u_{\theta'}$, $u_{\lambda'}$ with u_r, u_θ, u_λ, and r', θ', λ' with r, θ, λ, we obtain, to the order of $\varepsilon^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}$:

$$\lambda=\lambda' \quad , \qquad \cos\theta' \doteq \cos\theta\,\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\theta\Big) \quad , \qquad r' \doteq \frac{r}{c}\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\theta\Big) \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} u_\theta \\ u_\lambda \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\theta' + c\sin\theta\sin\theta' & 0 & a\cos\theta\sin\theta' - c\sin\theta\cos\theta' \\ 0 & a & 0 \\ a\sin\theta\cos\theta' - c\cos\theta\sin\theta' & 0 & a\sin\theta\sin\theta' + c\cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\theta'} \\ u_{\lambda'} \\ u_{r'} \end{pmatrix}$$

And thus:

$$H_2'(r') \doteq H_2'\Big(\frac{r}{c}\Big) - \frac{dH_2'\big(\frac{r}{c}\big)}{dr}\,\frac{r}{2}\,\varepsilon^2\sin^2\theta = H_2'\Big(\frac{r}{c}\Big) + O(\varepsilon^2) \quad ,$$

$$L_2'(r') = L_2'\Big(\frac{r}{c}\Big) + O(\varepsilon^2) \quad , \qquad g' = g + O(\varepsilon^2) \quad ,$$

$$u_\theta \doteq \frac{1}{c}\,L_2'\Big(\frac{r}{c}\Big)\,\frac{r^2\Omega^2}{g}\Big[2m_3^c\sin\theta\cos\theta-\Big(\frac{a}{c}\,m_1^c\cos\lambda+\frac{a}{c}\,m_2^c\sin\lambda\Big)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\Big]$$

$$u_\lambda \doteq \frac{1}{c}\,L_2'\Big(\frac{r}{c}\Big)\,\frac{r^2\Omega^2}{g}\Big[\Big(\frac{a}{c}\,m_1^c\sin\lambda-\frac{a}{c}\,m_2^c\cos\lambda\Big)\cos\theta\Big]$$

$$u_r \doteq \frac{1}{c}\,H_2'\Big(\frac{r}{c}\Big)\,\frac{r^2\Omega^2}{g}\Big[-\frac{1}{3}\,m_3^c(3\cos^2\theta-1)-\Big(\frac{a}{c}\,m_1^c\cos\lambda+\frac{a}{c}\,m_2^c\sin\lambda\Big)\sin\theta\cos\theta\Big]$$

Collecting the several deformations we get the time-derivates:

$$\dot u_r = \dot u_r^e = \frac{1}{g}\,H_2^*(r)\,r^2\Omega\Big\{-F_0\,\frac{1}{6}\,(3\cos^2\theta-1)-(F_1\cos\lambda+F_2\sin\lambda)\sin\theta\cos\theta-$$

$$- (M_1 \sin 2\lambda + M_2 \cos 2\lambda)\, 3\sin^2\theta \Big]$$

$$\dot{u}_\theta = \dot{u}^e_\theta = \frac{1}{g} L_2^*(r)\, r^2\Omega \Big[F_o \sin\theta\cos\theta - (F_1\cos\lambda + F_2\sin\lambda)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (M_1 \sin 2\lambda + M_2 \cos 2\lambda)\, 6 \sin\theta\cos\theta\Big]$$

$$\dot{u}_\lambda = \dot{u}^e_\lambda = \frac{1}{g} L_2^*(r)\, r^2\Omega \Big[(F_1\sin\lambda - F_2\cos\lambda)\cos\theta - 2(M_1\cos 2\lambda - M_2 \sin 2\lambda)\, 3\sin\theta\Big]$$

where:

$$F_1 = \dot{\omega}_1 - \frac{\dot{L}_2}{\Omega(C-A)} + \frac{a}{c}\,\dot{\omega}^c_1 \quad , \qquad F_2 = \dot{\omega}_2 + \frac{\dot{L}_1}{\Omega(C-A)} + \frac{a}{c}\,\dot{\omega}^c_2$$

and:

$$H_2^*(r) = \begin{cases} H_2(r) & \text{for } \dot{u} - \dfrac{\dot{L}}{\Omega(C-A)}\, i \\ \dfrac{1}{c}\, H_2'\left(\dfrac{r}{c}\right) & \text{for } \dot{v} \end{cases} \quad ; \qquad \text{similary } L_2^*$$

Applying differential geometrical relations we have:

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial x_r} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} = \frac{\Omega}{g}\left(\frac{d H_2^*}{dr} r^2 + 2 H_2^* r\right)\Big[- F_o \frac{1}{6}(3\cos^2\theta - 1) - (F_1\cos\lambda + F_2\sin\lambda)\sin\theta\cos\theta - (M_1\sin 2\lambda + M_2\cos 2\lambda)\, 3\sin^2\theta\Big] ,$$

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial x_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\dot{u}_\theta = \frac{\Omega}{g}\left(H_2^* r - L_2^* r\right)\Big[F_o \sin\theta\cos\theta - (F_1\cos\lambda + F_2\sin\lambda)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (M_1\sin 2\lambda + M_2\cos\lambda)\, 6\sin\theta\cos\theta\Big]$$

etc...

By using the relations between $(x_\theta, x_\lambda, x_r)$ and (x_1, x_2, x_3) we finally obtain:

$$\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} = - \frac{\Omega}{g}\left(\frac{d L_2^*}{dr} r + 3 L_2^* - H_2^*\right)\Big[F_1 \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\theta + F_o \sin\theta\cos\theta\sin\lambda + F_2(\sin^2\theta\sin^2\lambda - \cos^2\theta) - 6\sin\theta\cos\theta(M_1\cos\lambda - M_2\sin\lambda)\Big] \qquad (11)$$

etc.

$$\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} = \frac{\Omega}{g}\Big\{F_o\Big[\text{terms in } \sin\lambda\,,\ \cos\lambda\Big] + F_1 r\Big[- H_2^* \sin^4\theta\cos^2\lambda + L_2^*(- 3\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\lambda - \cos^4\theta\cos^2\lambda - \cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\lambda - \sin^2\lambda) -$$

$$- \frac{dL_2^*}{dr} r \left(\cos^4\theta \cos^2\lambda - \sin^2\theta \cos^2\theta \cos^2\lambda + \cos^2\theta \sin^2\lambda \right) -$$

$$- \frac{dH_2^*}{dr} r \sin^2\theta \cos^2\theta \cos^2\lambda \Big] +$$

$$+ F_2 [\ldots\ldots] + M_1 [\ldots\ldots] + M_2 [\ldots\ldots] \Big\} \qquad (12)$$

etc...

3.4. Global equations for the liquid homogeneous core: Multiplying (10) by $\frac{ac}{5} dm$ and integrating all over the core:

$$F \dot{\omega}_1 + A_c \dot{\omega}_1^c - \Omega C_o \omega_2^c = \frac{ac}{5} \iiint_c \left[2\Omega \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} \right) \right] dm$$

$$F \dot{\omega}_2 + A_c \dot{\omega}_2^o + \Omega C_o \omega_1^c = \frac{ac}{5} \iiint_c \left[2\Omega \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1} \right) \right] dm \qquad (13)$$

By substituting (11) into (13) we have:

$$\iiint_c \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1} \right) dm = \ldots = 0 \quad , \qquad \iiint_c \left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} \right) dm = 0$$

and also for:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} \right) \quad , \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1} \right) .$$

By substituting (12):

$$2\Omega \frac{ac}{5} \iiint_c \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} dm = \ldots = - \frac{2}{5} a c \pi \Omega^2 F_1 \int_o^a \rho \frac{1}{g} \frac{d}{dr} \left[L_2^* r^4 \frac{4}{5} + H_2^* r^4 \frac{4}{15} \right] dr =$$

$$= - \frac{2}{5} a c \pi \Omega^2 \frac{3F_1}{4\pi G} \left\{ \frac{4}{5} \left[L_2^* r^3 + H_2^* \frac{r^3}{3} \right]_o^a + \frac{4}{5} \int_o^a \left(L_2^* r^2 + H_2^* \frac{r^2}{3} \right) dr \right\} =$$

$$= - A_c \gamma \left(\dot{\omega}_1 - \frac{L_2}{\Omega (C-A)} \right) - A_c \beta \dot{\omega}_1^o \quad . \qquad (14)$$

etc...

where:

$$\left. \begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{A_c} \frac{2}{5G} a c \Omega^2 \frac{3}{4} \left\{ \frac{4}{5} \left[L_2^* r^3 + H_2^* \frac{r^3}{3} \right]_o^a - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{5} \int_o^a \left(L_2^* r^2 + H_2^* \frac{r^2}{3} \right) dr \right\} \quad \text{,,} \quad \left\{ \begin{matrix} H_2 \, , & L_2 \\ \frac{1}{c} H_2 \left(\frac{r}{c} \right) , & \frac{1}{c} L_2 \end{matrix} \right.$$

By substituting (14) into (13), and using the complex notation:

$$F\dot{u} + A_c\dot{v} + i C_c \Omega v = -\gamma A_c \dot{u} - \gamma A_c i \frac{\dot{L}}{\Omega(C-A)} - \beta A_c \dot{v}$$

We have $F^2 = A_c^2(1+e_c)(1-e_c)$; thus, at first order aproximation, we can remplace F by the core equatorial moment of inertia A_c:

$$A_c(1+\gamma)\dot{u} + A_c(1+\beta)\dot{v} + i C_c \Omega v = -\gamma A_c i \frac{\dot{L}}{\Omega(C-A)} \qquad (15)$$

3.5. Global equations for the elastic model: We can use the same results as in paragraphs 2.1., 2.3. For an elastic model with the indirect 'load' effect k_1 , we have:

$$c = \frac{k_o}{k_s}\frac{C-A}{\Omega}\left(u - i\frac{L}{\Omega(C-A)}\right) - \frac{k_1}{k_s}\frac{C-A}{\Omega} v \quad ,$$

while the inner angular momentum is: $h = F v \doteq A_c v$

Substituting in the linearized Liouville's equation we obtain:

$$A(1+s)\dot{u} - i\sigma_c(1+s)A u + i\left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]\Omega v + \left[A_c - (C-A)\frac{k_1}{k_s}\right]\dot{v} =$$
$$= \left(1 - \frac{k_o}{k_s}\right) L + i \frac{k_o}{k_s}\frac{\dot{L}}{\Omega} \qquad (16)$$

The form of the resulting equations (15) and (16) for this model with an homogeneous core and exhaustive development method about the simple motion is the same that of S.O.S. theory for a model with stratified (without any special assumptions) core and development method of rather geophysical character. Of course, we have the same free frequencies (formally, we must substitute numerical values of the corresponding parameters in each event).

REFERENCES

ALTERMAN, Z., JAROSCH, H., PEKERIS, C.L. (1959):"Oscillations of the Earth". Proc. Roy. Soc. London, 252 , pp. 80-95.

CAMACHO, A.G. (1983):"Modelos matemáticos en el estudio de la rotacion de la Tierra". Tesis Doct. Univ. Complutense de Madrid.

LOVE, A.E.H. (1944):"A treatise on the mathematical theory of the elasticity". Cambridge University Press.

MELCHIOR, P. (1978):"The Tides of the Planet Earth". Pergamon Press, Oxford.

MORITZ, H. (1982):"Theories of Nutation and Polar Motion III". Report 342 , Dept. of Geodet. Sci., O.S.U.

MUNK, W.H., MACDONALD, G.J.F. (1975):"The Rotation of the Earth". Cambridge University Press.

POINCARE, H. (1910):"Sur la Précession des Corps Déformables". Bull. Astr. 27, pp. 321-356.

SASAO, T., OKUBO, S., SAITO, M. (1980):"A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth". I.A.U. Symp. nº 78 , pp. 165-183.

Traduction

DETERMINATION DES PARAMETRES DES INCLINAISONS DE MAREES A "KHARTSISK" ET A "SIMFEROPOL"

P.S. Matveyev, E.Y. Evtouchenko, G.S. Doubik

Rotation et déformations de marées de la Terre, 14, pp. 3-19, 1982

De 1974 à 1979, on a effectué avec des pendules horizontaux Repsold-Levitskii {1} des séries de 5 ans d'observations régulières des inclinaisons de la surface de la Terre aux sites clinométriques de "Khartsisk" et "Simféropol". De courtes descriptions de ces sites, de l'appareil employé et des conditions d'observation sont donnés dans nos premières communications {2 à 4}.

Nous rappellerons que "Khartsisk" est situé dans une des mines de charbon du Donbass, à une profondeur de 360 m, et "Simféropol" dans une galerie d'une profondeur de 25 m creusée à la limite sud de Simféropol dans une masse de calcaire.

Les buts essentiels des mesures étaient :

a) obtenir des indications sur les inclinaisons lentes de la surface de la Terre et en particulier des particularités qui auraient pu être utilisées avec des données d'autres observations géophysiques pour la prédiction de rejets soudains de charbon et de gaz dans les mines de Donbass et de tremblements de Terre dans le polygone géodynamique de Crimée;
b) obtenir de nouvelles données précises sur les déformations de marées et en particulier la découverte d'effets anormaux dans ces données.

On s'est proposé également de résoudre certaines questions méthodologiques des observations clinométriques comme la durée optimale des séries d'observations suffisante pour garantir une solution précise du second des problèmes posés, la question de l'augmentation de précision de la méthode de déduction des valeurs des paramètres de marées terrestres.

Nous donnerons ici les résultats définitifs de la détermination des paramètres γ et $\Delta\phi$ caractérisant les ondes les plus importantes.

CARACTERISTIQUES DES CONDITIONS DES OBSERVATIONS ET QUALITE DU MATERIEL D'OBSERVATIONS.

A Khartsisk les pendules horizontaux ont été orientés de manière à enregistrer dans l'azimut α_4 = 19°45,9' (pendule M.4) et dans l'azimut α_1 = 109°45,9' (pendule M.1).

A Simféropol des pendules de même type ont été placés de manière à enregistrer en composante NS (α=0°, pendule M.3) et en composante E-W (α_4=270°, pendule M.4).

Malgré sa grande profondeur les conditions de température sont médiocres à "Khartsisk". La température de l'air dans la salle située dans une section de galerie ventilée {3} était égale en moyenne à +17°C mais ne restait pas stable au cours de la période d'observations. Une périodicité annuelle d'amplitude d'environ 1,5°C au cours des trois premières années d'observations augmente graduellement à la fin des observations jusqu'à 2,0°C. Le maximum de température se situe en août-septembre et le minimum en février-mars mais les variations journalières de la température de l'air au voisinage immédiat des clinomètres (protégés du courant d'air par une tente spéciale) ne sortaient pas des limites de ± 0,2°C par rapport à l'allure annuelle.

A Khartsisk agissait encore l'influence perturbatrice de la ventilation apparaissant par l'augmentation du bruit de fond microséismique. L'intensité de cette ventilation a été diminuée ensuite complètement enfermée dans un conduit d'air pratiqué spécialement au travers de la salle et cette influence perturbatrice a été éliminée en mai 1974. Il n'est pas exclu cependant qu'une partie résiduelle de cette influence continue à introduire de petites perturbations.

A Simféropol les conditions peuvent être considérées comme satisfaisantes. Des microséismes locaux sont engendrés principalement par le mouvement intensif du transport automobile dans deux rues non loin de la mine. Grâce à la constance de la température de l'air dans la salle (+12°C) on peut être sûr que les données d'observations sont ici affranchies des erreurs instrumentales d'origine thermique. Cependant à cause de la présence d'une grande pente (hauteur 25 m) en ce point on a appréhendé l'apparition d'une onde diurne S_1 engendrée par les déformations thermoélastiques de la masse de calcaire incluant la salle d'observation. Cette onde est caractérisée par une irrégularité extrême aussi bien en amplitude qu'en phase et constitue une des sources de bruit principales qui diminuent la précision de détermination des ondes diurnes K_1, P_1 et O_1 et également de l'onde semi-diurne S_2.

On a utilisé ici des données de qualité accumulées de 1974 à 1979. Par données de qualité nous entendons un enregistrement régulier des inclinaisons qui, n'ayant pas de lacune sinon de très courtes interruptions, peut être partagé en un nombre déterminé de séries mensuelles pour leur analyse selon une méthode choisie. Mais une condition essentielle est la détermination régulière du paramètre K_τ caractérisant les variations de la sensibilité du clinomètre.

Ainsi, pour Khartsisk on a choisi 79 séries mensuelles (30 jours), 41 pour le pendule M-4 et 38 pour le pendule M-1. Pour Simféropol on a retenu 62 séries : 29 pour le pendule M-1 et 33 pour le pendule M-4.

Dans les tables ci-après les six premiers chiffres désignent l'année, le mois et la date. L'instant initial de chaque série est l'heure zéro du premier jour en temps universel.

Table 1. Séries mensuelles d'observations clinométriques à Khartsisk.

Pendule M-4 (α = 19°45,9')				Pendule M-1 (α = 109°45,9)			
N° de la série	Début	Sensibilité (angle msec)	Erreur de l'ordonnée δ angle (msec)	N° de la série	Début	Sensibilité (angle msec)	Erreur de l'ordonnée δ angle (msec)
I	740630	I0,479	I,09	I	740507	I2,087	I,27
2	740726	I0,268	I,20	2	740630	II,785	I,06
3	74083I	I0,340	I,2I	3	740726	II,576	I,02
4	740930	I0,355	I,33	4	74083I	II,495	0,89
5	74III5	I0,I05	I,I6	5	740930	II,440	I,I4
6	74I2I0	8,828	0,94	6	74III4	I0,9I7	I,0I
7	750I03	8,752	0,95	7	74I209	9,053	I,04
8	7503I9	I0,759	I,I0	8	750I05	8,824	I,39
9	7504I3	9,062	0,95	9	7503I9	8,698	I,07
I0	750508	7,404	I,00	I0	7504I3	8,650	0,9I
II	750602	7,4I0	I,28	II	750508	8,603	I,75
I2	750626	7,4II	I,26	I2	750602	8,555	I,47
I3	750728	7,420	I,28	I3	750626	8,509	I,20
I4	75IIII	7,430	0,95	I4	75II04	8,324	I,39
I5	75I204	7,434	I,30	I5	75III8	8,298	I,40
I6	75I227	7,440	I,I2	I6	75I220	8,240	I,52
I7	760II8	7,440	I,27	I7	760II8	8,I85	I,02
I8	760323	7,495	0,90	I8	760323	8,07I	I,I9
I9	760726	7,940	I,00	I9	76033I	8,048	I,I0
20	760909	8,054	I,43	20	760803	7,73I	0,94
2I	760930	8,I06	I,09	2I	760902	7,658	I,I9
22	76III7	8,228	I,I7	22	760930	7,590	I,44
23	76I2I6	8,296	I,2I	23	76I2I5	7,405	0,88
24	770202	8,4I3	I,I3	24	770420	7,I26	0,82
25	770223	9,229	I,49	25	7705I8	7,065	0,74
26	770420	9,652	I,28	26	770624	7,643	0,48
27	7705I9	9,676	0,87	27	7707I9	7,807	0,65
28	770624	8,983	0,8I	28	7708I3	7,752	0,74
29	77073I	8,870	0,73	29	770905	7,70I	I,24
30	7708I7	8,934	I,08	30	7802I8	8,439	I,7I
3I	77I20I	9,092	I,74	3I	780309	8,42I	I,64
32	7802I8	8,788	I,38	32	780328	8,404	I,40
33	780309	8,7I5	0,98	33	780803	8,287	I,25
34	780328	8,642	I,I9	34	780902	8,259	I,II
35	780803	8,500	I,2I	35	78I002	8,232	I,57
36	7808I7	7,905	I,24	36	78II0I	8,205	I,36
37	78I005	6,968	I,23	37	78I23I	8,I50	I,35
38	78II05	6,9I6	I,I2	38	790404	8,044	0,93
39	78I2I9	6,843	I,43				
40	790I09	6,808	I,37				
4I	790I3I	6,77I	I,74				

Table 2. Séries mensuelles d'observations clinométriques à Simféropol.

Pendule M-1 (N-S)				Pendule M-4 (E-W)			
N° de la série	Début	Sensibilité (angle msec)	Erreur de l'ordonnée δ angle (msec)	N° de la série	Début	Sensibilité (angle msec)	Erreur de l'ordonnée δ angle (msec)
I	740928	I2,643	I,05	I	740928	I0,I72	0,75
2	74I0I5	I2,629	I,I0	2	74I0I5	I0,I49	0,95
3	74I23I	I2,6I0	I,28	3	74II28	I0,I20	I,I7
4	7502I8	I2,6I0	I,63	4	74I223	I0,I20	I,0I
5	7503I5	I2,6I0	I,05	5	750II5	I0,I20	I,2I
6	750409	I2,6I0	I,07	6	7502I8	I0,I20	0,99
7	7504I8	I2,6I0	I,07	7	7503I5	I0,I20	I,04
8	750520	I2,6I0	0,78	8	750407	I0,I20	I,I7
9	7506I4	I2,6I0	0,94	9	750520	I0,II4	I,I2
I0	750809	I2,6I0	0,94	I0	7506I4	I0,III0	I,06
II	75I0II	I2,6I0	I,30	II	75I0II	I0,III0	I,04
I2	760624	I2,900	0,76	I2	7509I4	I0,278	0,72
I3	760705	I2,900	0,84	I3	76I0I3	I0,292	0,74
I4	7609I4	I2,900	0,86	I4	76III8	I0,3I0	0,7I
I5	760923	I2,905	I,97	I5	76II30	I0,3I9	I,3I
I6	770505	I3,000	I,46	I6	770202	I0,373	I,I4
I7	770523	I3,000	I,I4	I7	7705I5	I0,453	0,86
I8	770927	I2,785	I,I8	I8	770720	I0,427	I,58
I9	780420	I2,637	I,54	I9	770927	I0,227	I,I5
20	780503	I2,899	I,32	20	77I2I3	I0,082	I,40
2I	780609	I2,839	I,03	2I	780I0I	I0,056	I,I5
22	7807I5	I2,850	I,I6	22	780II6	I0,036	0,78
23	7809I5	I2,860	I,I6	23	780331	9,984	I,36
24	78I0I0	I2,864	I,32	24	780430	I0,09I	I,0I
25	78I02C	I2,866	I,I8	25	780609	I0,I93	0,88
26	78II22	I2,859	I,33	26	78070I	I0,I62	I,0I
27	78I208	I2,850	I,67	27	7807I5	I0,I38	I,II
28	790228	I2,804	I,58	28	7809I9	I0,025	I,38
29	7905I6	I2,70I	0,79	29	78I0I9	9,974	I,42
				30	78III1	9,969	I,3I
				3I	78I2II	9,990	I,3I
				32	7905I6	I0,I67	I,09
				33	790604	I0,I87	0,95

Dans les troisième et septième colonnes des tables 1 et 2 nous donnons, pour chaque série, les valeurs moyennes du facteur de sensibilité K_τ. On voit que la sensibilité des clinométriques à Khartsisk était un peu plus élevée qu'à Simféropol. Dans les quatrième et huitième colonnes nous donnons les erreurs quadratiques moyennes σ d'une ordonnée pour chaque série, calculées d'après la méthode Lecolazet {14, 5}.

Bien que les valeurs données σ_n caractérisent uniquement le bruit de fond des observations, nous considérons leur application pour une estimation relative de la qualité des données et de l'exactitude des résultats obtenus comme tout à fait fondée.

Nous noterons que pour passer aux ordonnées exprimées en mesure angulaire à l'aide du rapport

$$\eta_t = Y_t K_t \qquad (1)$$

nous avons utilisé, non les valeurs moyennées par séries du facteur de sensibilité K (tables 1 et 2), mais les valeurs individuelles pour chaque ordonnée K_t. Ces valeurs K_t ont été obtenues par interpolation linéaire entre les valeurs de

la sensibilité K_τ déterminées régulièrement plusieurs fois par mois, par la formule bien connue {6} :

$$K_\tau = \frac{C}{T_\tau^2} \qquad (2)$$

où T_τ est la période des oscillations propres du pendule horizontal correspondant à l'époque τ, mesurée avec une précision atteignant $\pm 0{,}01^s$. L'expression pour le calcul de la valeur C est {6}.

$$C = \frac{2\pi^2}{d \sin 1'' \cdot 10^{-3}} \left(\frac{l}{g}\right), \qquad (3)$$

où d est la longueur du levier optique de l'installation et ℓ/g est la "constante" du pendule horizontal (ℓ est sa longueur réduite, g est l'accélération de la pesanteur).

A Khartsisk les valeurs du paramètre α étaient restées invariables au cours de toute la période d'observation : $d_{M-1} = 7.100$ mm; $d_{M-1} = 6.930$ mm. Les constantes ℓ/g des pendules dont la détermination était réalisée avant le début des observations selon le procédé Galitzine-Orlov {1} avaient les valeurs suivantes : $(\ell/g) = 0.012895$; $(\ell/g)_{M-1} = 0{,}015403$. La substitution en (2) des constantes obtenues sur la base des valeurs données des paramètres d et ℓ/g conduit aux expressions suivantes pour la détermination des valeurs du facteur de sensibilité K_τ angle msec/mm :

$$K_{M-4} = \frac{7394,7}{T_{M4}^2}; \qquad K_{M-1} = \frac{9049,5}{T_{M1}^2}. \qquad (4)$$

A Khartsisk, de 1974 à 1979, on a effectué d'après ces formules, sur la base des mesures hebdomadaires régulières des périodes T_τ pour chaque pendule, 197 déterminations du facteur K_τ ce qui a permis de garantir une conversion sûre (1) des ordonnées horaires mesurées y_t en mesures angulaires.

A Simféropol on a dû, à deux reprises procéder à de nouveaux réglages des pendules horizontaux, de l'enregistreur et des spots lumineux ce qui naturellement s'accompagnait de petites variations des longueurs des leviers optiques d (table 3). On y a fait deux fois aussi la détermination des constantes $\frac{\ell}{g}$ des pendules {4}. La première fois - avant le début des observations (25 juillet 1974) et la seconde du 13 au 17 juillet 1977 après l'élimination d'une avarie (rupture des fils de suspension) pour un des pendules.

En tenant compte des variations des valeurs de d et $\frac{\ell}{g}$ toute la série des observations en ce point a pu être partagée en trois périodes pour chacune desquelles on a déduit ses valeurs de C_{M-1} et C_{M-4} données dans la table 3.

Table 3. Valeurs des constantes utilisées pour les observations à Simféropol en 1974-1979.

Période des observations	Pendule M1 N-S			Pendule M-4 E-W		
	d, mm	l/g, c^2	C, angle msec)	d, mm	l/g, c^2	C, angle msec)
25.VII I974 r. – I3.IV I976 r.	35I0	0,0I57I6	I823I	3730	0,0I3334	I4555
I3.IV I976 r. – I6.VII I977 r.	3460	0,0I57I6	I8494	3680	0,0I3334	I4753
I6.VII I977 r. – 3.VII I979 r.	3439	0,0I5633	I8506	3689	0,0I3334	I47I5

Avec ces valeurs de C on a déterminé les valeurs du facteur de sensibilité K_τ dans le processus des observations. On a obtenu, pour 1974 à 1979 (d'après les valeurs mesurées des périodes T_t des pendules correspondants), 93 valeurs de K_τ pour le pendule M-1 (N-S) et 90 valeurs pour le pendule M-4 (E-W).

Sur la méthode d'analyse des données d'observation.

L'analyse harmonique de toutes a été faite selon le schéma de 30 jours de P.S. Matveyev {7} fournissant les paramètres γ et $\Delta\phi$ des huit ondes Q_1, O_1, K_1, M_1, N_2, M_2, S_2 et μ_2 (programme de B.S. Doubik).

Résultats de l'analyse et de leur caractéristique.

Les valeurs des paramètres γ et $\Delta\phi$ pour chacune des séries réduites sont données dans les tables 4, 5 (Khartsisk) et dans les tables 6, 7 (Simféropol). Le signe "plus" pour les valeurs du déphasage $\Delta\phi$ dans celles-ci comme dans les tables 8 à 10 correspond à un retard de la marée observée par rapport à sa valeur théorique calculée dans l'hypothèse de la rigidité absolue de la Terre.

La déduction des paramètres γ et $\Delta\phi$ pour chacune des huit ondes a été faite de deux manières :

1) à l'aide d'une simple moyenne vectorielle {8};

2) à l'aide de la moyenne vectorielle pondérée proposée en {5} en utilisant comme poids P_n des valeurs inversément proportionnelles aux carrés des erreurs quadratiques moyennes d'une ordonnée des séries correspondantes c'est-à-dire

$$P = \frac{1}{\sigma^2} \qquad 5)$$

Les valeurs σ_η nécessaires pour le calcul des poids ont été prises dans les tables 1-2.

Les résultats des deux variantes sont donnés dans la table 8 (Khartsisk) et dans la table 10 (Simféropol). Pour la facilité de la comparaison de

Table 4. Valeurs γ et Δφ obtenues à Khartsisk (ondes diurnes)

N° des séries	Q_1		O_1		K_1		M_2	
	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ
	Composante α = 19°45,9' (pendule M-4)							
I	I,6800	+5,06°	0,7246	+70,52°	I,0475	+35,5I°	3,3603	-38,54°
2	2,6938	-92,73	0,I736	+I33,63	I,05I9	+28,I8	7,3709	-7,47
2	3,2622	+I9,38	I,4250	+3,0I	I,2558	-4,04	I,7895	+I6,34
4	3,45I0	+I3,59	I,2II4	+2I,98	0,4940	+48,90	5,48I0	-I56,0I
5	5,0867	+II5,96	0,9672	-48,52	I,I303	+6,73	2,8557	-29,02
6	4,7I57	-8,00	I,0I9I	+23,08	0,9925	+I8,74	4,I835	+I3I,I5
7	4,4277	-I7,03	0,6346	-0,38	0,6404	+3I,76	0,835I	-I44,I3
8	2,2379	+47,94	0,8662	+2I,0I	0,2583	-20,00	4,I637	+47,55
9	I,22I9	+I08,0I	0,9I33	+I6,44	0,9604	+47,02	I,0633	+I27,25
I0	2,7522	+I73,3I	I,80I9	-47,48	I,0490	+3I,30	7,I52I	+I59,I2
II	0,4806	-8,58	I,5098	+I9,86	0,8707	+I2,II	I0,6760	+I08,58
I2	5,2684	-36,60	I,4490	+35,87	0,8038	+5,62	6,3748	-I04,93
I3	I,7972	+87,3I	0,6989	+I3,8I	0,6I85	-9,74	I,5807	+5I,43
I4	6,I42I	-I9,I8	0,4472	+79,47	0,47I3	+58,93	8,5793	-8,74
I5	5,59I9	+74,82	I,0745	-53,65	0,4770	+53,04	3,964I	-I26,44
I6	I,9387	-I56,20	I,4237	+44,59	0,4885	+25,7I	4,9445	+I9,94
I7	4,I402	+56,32	I,82I6	+I2,89	0,7674	+28,I2	I0,98I3	-44,02
I8	I,8245	+I25,9I	0,7577	-4,44	0,7076	+38,22	0,8088	-I3I,24
I9	6,6885	-I3,7I	0,4580	+44,30	0,725I	+20,88	4,2505	+I04,97
20	I,4925	-88,33	I,I504	+67,83	0,9924	-94,20	I2,3358	-I23,44
2I	2,20I3	-I64,48	0,22I8	+30,50	0,I746	+I02,I9	4,5I34	+69,72
22	2,I0I2	-65,06	0,5678	-6,94	0,9488	+7,II	I4,6494	-26,07
23	5,I376	+92,68	0,8I90	+70,63	I,I093	+35,34	7,655I	-22,37
24	I,6525	+I60,73	0,6436	+57,70	I,7578	+67,05	2,0337	-I60,76
25	2,3776	+57,78	0,8I93	+II4,87	I,6735	+44,27	6,2827	-74,06
26	I,7624	+97,62	0,6956	+I9,95	0,4575	-24,I4	9,43II	+70,2I
27	3,I822	-28,58	0,5455	+I3,73	0,8994	+I8,80	I,5532	+I2I,3I
28	I,6064	-I30,39	0,5660	+52,07	0,4606	+I2,99	9,6994	-I58,23
29	0,7645	-I40,82	0,70I4	+40,54	0,9206	+27,48	5,2569	-45,64
30	2,2606	-I38,03	0,9938	+63,I7	0,5730	+I0,04	7,8598	-I0,77
3I	7,2076	+I3,27	I,I954	-37,29	0,6204	-0,34	I2,099I	+I8,54
32	0,7850	+43,48	0,7587	+68,49	0,6778	+34,94	9,9I99	-98,52
33	5,5875	-62,6I	I,3I2I	+73,82	I,27I5	+49,03	8,3595	-I66,46
34	0,0493	+I52,77	0,6083	+50,38	I,627I	+23,99	7,5943	+I68,I2
35	I,0383	+6,I0	0,9789	+29,66	0,9879	+7,84	4,I483	-3,I0
36	0,9942	+72,32	0,6274	+4I,78	0,8440	+3,4I	0,4I75	+75,75
37	2,9543	+II7,57	I,5960	+I4,2I	0,0674	+I26,29	II,5286	-III,06
38	4,535I	-II,50	I,3882	+38,87	0,923I	+43,36	4,59I2	+I23,20
39	4,5708	-98,00	I,3258	+59,53	I,0483	+24,78	I9,9232	-34,22
40	2,9535	+38,26	I,3I28	+87,94	0,6683	+I3,3I	4,6738	+I40,04
4I	2,4043	-I3,49	0,8593	+82,6I	0,3998	+23,65	9,I702	+I29,55
	Composante α = 109°45,9' (pendule M-1)							
I	2,I353	+2,72°	0,7835	+0,56°	0,5438	-32,55°	4,7I24	+I48,48°
2	0,877I	-II0,86	0,8387	+I9,42	0,788I	-7,2I	I,4I88	+70,57
3	0,4226	-62,79	0,4429	+42,82	0,7328	+5,82	I,I570	-I29,3I
4	2,I360	-I47,23	0,6I04	-45,40	I,0452	-I7,4I	3,4I69	+22,84
5	0,3200	+I03,70	0,554I	-I2,75	0,5445	+I5,98	3,5323	+III,38
6	2,6906	+66,49	0,6882	-32,03	0,7948	+2,70	2,3605	-9,63
7	I,II06	+I6,95	0,7472	+0,42	0,7728	-4,04	2,3467	+54,53
8	3,4837	-88,64	0,5553	+I7,88	I,0838	-7,I9	7,06I3	+I9,56
9	I,4269	+4,59	0,8609	+5,44	0,30II	+24,83	0,4452	-I07,9I
I0	0,3076	+37,8I	0,7342	+II,78	0,5363	-6,53	I,I535	+I25,79
II	2,6305	-5,I4	0,7I02	-26,45	0,7322	-22,97	2,7469	+29,38
I2	3,I992	-25,33	0,650I	-70,76	0,7078	-I5,03	5,7302	+60,3I
I3	2,6452	-I,42	0,6247	-I2,07	0,7548	-3,0I	4,402I	+40,60
I4	4,5460	-64,32	I,05I3	-7,84	0,9336	+II,6I	I,9044	-93,44
I5	3,2334	-56,90	0,6908	-26,84	I,02I4	+I5,06	8,I273	-I44,00
I6	0,7840	+28,4I	0,4357	+29,78	0,7562	+8,23	0,7762	+53,I0
I7	0,34I6	-27,06	0,7247	+9,36	0,9374	-7,56	5,4903	+I8,62
I8	0,3879	-43,57	0,7987	+4,00	0,7002	-I5,88	0,8205	+I5,25
I9	0,6054	-I4,77	0,722I	+3,06	0,7493	-I5,56	0,3358	+44,08
20	I,87I8	-32,08	0,8203	-3,36	0,6407	+7,76	2,86II	-23,56
2I	3,3527	-I,35	I,I049	-9,83	0,6408	-6,24	8,0408	+II8,I5
22	2,9I34	+49,70	I,2369	-I2,59	0,7493	+23,22	7,6206	+I7,82
23	I,4I68	-26,33	0,7055	+I0,59	0,655I	-8,46	3,I057	+67,04
24	I,2I52	+40,77	0,6670	-I9,68	0,75I3	-6,4I	3,6528	+45,50
25	0,3892	-I2,I4°	0,6986	-I0,44°	0,7540	-8,6I°	2,3765	+27,I3
26	I,3230	-2I,48	0,4990	+5,73	0,6980	-7,79	I,4266	-95,80
27	I,2088	+6,05	0,5704	-5,37	0,6846	-2,64	2,5I3I	+I63,82
28	0,I409	+86,09	0,7002	-3,0I	0,7737	-3,00	3,07I2	+4,40
29	I,38I8	+53,92	0,6527	-I2,97	0,7I23	+I5,09	5,9795	-I57,79
30	I,2655	-88,3I	0,7725	+25,88	0,4I48	-73,87	II,5620	+40,53
3I	I,0708	-25,82	0,5235	-I7,44	0,2I6I	-I68,94	8,2II2	+I9,96
32	0,65II	-87,04	0,8940	-28,63	0,6725	+57,55	2,9743	-78,90
33	0,5666	-I6,83	0,6I39	+I4,50	0,8263	+I2,I6	3,I729	+I3,89
34	I,6969	-48,62	0,5I63	-I7,3I	I,0487	-0,08	I,3662	-4I,5I
35	3,2629	-95,50	0,7452	-4,23	I,2975	-I6,27	7,7327	-27,97
36	3,I524	+42,82	0,3I26	-I3,24	0,7I25	-I2,22	4,4398	-I05,34
37	3,I354	-6,46	0,2676	-29,00	0,8303	+I5,37	5,95I7	-I0,80
38	0,I980	-I62,65	0,6874	+3,03	0,8235	+I0,22	2,5236	-76,43

Table 5. Valeurs γ et Δφ obtenues à Khartsisk (ondes semi-diurnes).

N° des séries	N_2		M_2		S_2		K_2	
	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ
	Composante α = 19°45,9' (pendule M-4)							
I	0,8809	-2,53°	0,8634	-5,59°	0,7518	-0,12°	0,7160	+1,09°
2	1,3012	+6,31	0,8392	-3,27	0,9007	+1,83	2,7624	+85,96
3	0,7383	+1,56	0,7717	-4,69	0,7526	-0,18	2,4040	-120,99
4	1,4394	+39,66	0,7906	-9,04	0,7761	-5,16	2,8204	-138,99
5	0,4048	+22,62	0,8228	-3,54	0,9921	+13,60	2,4710	-151,73
6	1,1424	+5,07	0,8956	-3,78	0,7640	+3,74	1,6494	-78,07
7	0,8208	-5,61	0,8236	-8,18	0,7553	-2,86	0,7610	+98,18
8	0,7284	+25,20	0,8827	-6,36	0,7750	-0,90	0,6950	-32,80
9	0,5752	-5,52	0,7854	-3,96	0,6955	-0,44	2,4720	+49,99
I0	0,8295	+15,18	0,7310	+0,14	0,7178	+16,58	2,7270	-76,50
II	0,5535	+17,73	0,7820	-2,74	0,7769	+9,76	0,3956	-154,64
I2	0,5768	-27,14	0,8205	-6,14	0,7896	-0,48	0,9484	+70,78
I3	0,9718	+1,02	0,8007	-6,31	0,8492	-4,06	2,3911	+4,33
I4	0,9836	-16,18	0,8772	-5,34	0,5819	+2,44	0,8767	-2,18
I5	0,6653	+11,80	0,6891	-11,76	0,3849	+12,49	0,1011	-69,00
I6	1,3966	+3,69	0,6992	-4,21	0,4783	+2,28	2,8538	+123,20
I7	1,1794	-12,91	0,7580	-2,55	0,7686	+4,46	2,0776	+79,62
I8	0,8690	-23,84	0,7356	-4,05	0,7764	+1,90	1,9129	-17,22
I9	0,6214	+16,36	0,7794	-0,11	0,7578	+0,47	0,6082	-116,03
20	0,7914	+18,02	0,8191	-1,54	0,7511	+3,31	4,1053	-42,74
2I	0,3793	+2,62	0,7717	-0,30	0,7096	+3,95	2,0738	-91,15
22	0,9267	-40,02	0,7223	-15,66	0,5879	-13,47	2,0486	-49,83
23	0,8554	+1,14	0,7716	-4,44	0,8917	-5,22	0,9152	-61,61
24	0,6922	-8,56	0,7457	-4,87	0,7774	+6,25	3,6917	+24,68
25	0,5777	+44,92	0,7276	+3,06	0,8220	+7,94	0,2965	+135,35
26	0,8224	-4,96	0,8328	+1,27	0,8007	-7,00	1,0578	+60,24
27	0,7815	+8,39	0,7825	-6,36	0,7292	-6,80	1,1754	-50,99
28	0,9016	-11,45	0,8784	-1,72	0,8522	-0,73	0,7010	+175,76
29	0,9082	-4,40	0,8916	-2,24	0,8839	-2,71	1,2955	-38,79
30	0,8129	+3,47	0,8718	-6,79	0,8510	-8,06	2,1024	-58,67
3I	0,6971	-13,72	0,7728	-2,48	0,6090	-5,00	2,6067	+0,56
32	0,9781	-4,98	0,7969	-5,57	0,8181	-2,73	2,6927	+9,55
33	1,4568	-10,95	0,8156	-4,16	0,8152	-2,75	0,4305	-16,61
34	0,7864	-28,90	0,8917	-3,69	0,8247	-1,97	1,6628	-79,78
35	0,9220	-11,66	0,8713	-3,30	0,8673	-7,39	1,1640	+24,79
36	0,6723	+9,30	0,8365	-6,10	0,8155	-5,95	3,0372	+6,97
37	0,6236	-3,52	0,7823	-8,49	0,7470	-7,68	1,8524	-24,08
38	0,6463	-0,48	0,9087	-0,98	0,8832	-0,28	2,5597	-11,46
39	1,0688	-15,58	0,8696	-6,18	0,7333	-3,97	2,6784	-12,35
40	0,4701	-16,67	0,8149	-7,13	0,7651	-13,41	1,3114	-28,64
4I	0,4589	+11,00	0,7342	-7,68	0,6702	-8,41	2,3768	+11,23
	Composante α = 109°45,9' (pendule M-1)							
I	1,0555	-42,84°	0,6842	-7,82°	0,7858	-14,05°	1,2674	+117,83°
2	0,7508	-21,71	0,6994	-6,93	0,6168	+16,08	0,7464	+22,28
3	1,3847	-15,45	0,6344	+1,54	0,6745	-3,72	4,5453	+88,31
4	0,9485	-5,07°	0,6947	+5,67°	0,6103	+22,65°	1,5960	+153,67°
5	0,9976	+13,31	0,6728	-3,61	0,6144	+13,56	3,1751	-115,78
6	0,6705	-23,53	0,6819	-3,28	0,7076	+10,96	2,8918	-89,97
7	0,7958	+4,46	0,6470	-6,03	0,7967	-3,22	2,4258	-23,88
8	0,9376	-12,57	0,6434	-1,14	0,8920	+12,49	1,9838	+10,77
9	0,6683	+11,38	0,7176	-4,64	0,8349	-3,12	2,7258	-81,40
I0	0,6048	-2,86	0,7043	-2,19	0,7310	-1,71	0,6383	-137,75
II	0,3851	-10,00	0,6877	-11,85	0,5238	+17,23	1,4165	-68,30
I2	0,9603	+4,03	0,7195	-5,17	0,7115	+15,14	1,3893	-146,77
I3	0,8809	+24,48	0,7750	+1,52	0,6524	+0,04	0,8960	+62,40
I4	0,8682	-53,09	0,7883	-3,51	0,7969	-13,64	3,1451	-3,77
I5	1,0362	-43,21	0,7554	-6,48	0,5992	-9,57	3,9396	+0,01
I6	0,8607	+10,40	0,7237	-2,08	0,7036	-5,29	0,5008	-12,13
I7	0,6882	-7,36	0,6802	-0,93	0,7251	+7,12	1,3167	+40,14
I8	0,8587	-9,16	0,6803	-0,11	0,6166	+0,86	0,5525	-58,35
I9	0,7735	-4,07	0,6800	-1,17	0,6433	-3,42	1,1691	-73,91
20	0,4852	+9,76	0,6526	+0,94	0,6248	+5,41	1,2188	+50,52
2I	1,0134	-8,98	0,7016	-0,25	0,6338	+28,99	1,8547	-29,55
22	1,0699	+22,04	0,7511	-3,48	0,6392	+23,37	2,0699	+114,78
23	0,7093	+0,45	0,7344	-2,35	0,7077	-14,74	0,5258	-6,73
24	0,8115	+10,09	0,7043	-3,04	0,7519	-3,36	1,3362	-62,18
25	0,6434	+26,08	0,7377	-2,06	0,5853	-1,39	2,5079	-28,97
26	0,7982	-4,99	0,7196	+0,53	0,6662	-4,44	0,6605	+28,75
27	0,8431	+9,69	0,7196	+1,35	0,5643	+0,17	1,3173	+27,51
28	0,7162	-18,47	0,7099	-4,14	0,6568	+2,28	2,1535	+16,05
29	0,6620	-23,90	0,6887	-5,00	0,6395	-5,11	3,6803	+27,97
30	1,0419	+6,26	0,7562	-2,71	0,8592	+11,64	0,6767	-7,87
3I	0,7646	+32,97	0,7642	+3,34	0,7163	+3,30	1,6758	-12,86
32	1,1860	-3,29	0,6725	+2,76	0,6881	-1,32	2,3590	+15,21
33	0,7382	+0,04	0,7083	-0,04	0,7288	-0,15	0,1853	+17,97
34	0,5478	-10,32	0,7252	-6,56	0,7630	+1,44	1,6589	-34,72
35	0,1961	-26,59	0,6820	-8,14	0,7869	+0,06	3,1102	-74,15
36	0,6274	-15,10	0,7253	+3,49	0,7579	+1,35	0,9431	+7,14
37	0,9869	+32,93	0,7193	+3,60	0,6617	+2,68	1,2701	+36,46
38	0,9965	-11,80	0,7570	+4,05	0,7666	+4,90	2,7394	+43,70

Table 6. Valeurs γ et Δφ obtenues à Simféropol (ondes diurnes).

N° de la série	Q_1		O_1		K_1		M_1	
	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ	γ	Δφ
				Composante N-S (pendule M-1)				
I	—	—	I9,52	−47,3I°	97,22	−28,52°	—	—
2	—	—	9,38	+II,I6	40,93	−8,99	—	—
3	—	—	44,0I	+36,82	I2,45	−83,20	—	—
4	—	—	6I,34	+I0I,7I	I32,65	−I58,0I	—	—
5	—	—	3I,30	+24,0I	60,05	+I32,9I	—	—
6	—	—	4,43	+I06,39	2I,66	+I47,28	—	—
7	—	—	II,48	+I8,I7	I8,36	+I60,2I	—	—
8	—	—	II,99	−I73,6I	43,67	+I37,83	—	—
9	—	—	7,44	−I60,7I	58,02	+II6,94	—	—
I0	—	—	II5,59	+I08,84	203,50	+37,73	—	—
II	—	—	89,8I	+I32,56	29,03	+I42,80	—	—
I2	—	—	44,I3	−99,44	I08,74	+96,82	—	—
I3	—	—	42,49	−I42,89	I47,34	+89,83	—	—
I4	—	—	34,57	+I52,83	49,39	−8,92	—	—
I5	—	—	32,64	−II7,73	32,97	−4I,65	—	—
I6	—	—	I39,62	+79,23	64,68	+I37,07	—	—
I7	—	—	I27,06	+I20,05	75,9I	+I37,92	—	—
I8	—	—	2I4,I5	+I03,03	8I,89	−30,I8	—	—
I9	—	—	I36,86	+50,0I	20,28	+II8,59	—	—
20	—	—	73,98	+80,50	9,69	+II7,I4	—	—
2I	—	—	28.94	+I49,33	38,90	+I38,83	—	—
22	—	—	89,94	−82,67	77,63	+80,39	—	—
23	—	—	I0,69	−59,68	97,I6	−I8,67	—	—
24	—	—	I6I,0I	+23,09	I07,36	−40,60	—	—
25	—	—	I2I,84	+52,24	I24,86	−62,25	—	—
26	—	—	50,86	+I64,I8°	I6,95	−8,9I°	—	—
27	—	—	90,33	+I6I,99	54,50	−62,62	—	—
28	—	—	85,64	+I34,37	35,23	+23,57	—	—
29	—	—	46,I6	+II8,20	37,I5	+II3,98	—	—
				Composante E-W (pendule M-4)				
I	0,6625	−29,33°	0,8558	−22,88°	I,0853	−6,37°	I,9368	−I6,26°
2	0,6539	+II3,I9	0,7575	−I9,24	0,67I0	−I6,96	I,7I96	+I23,00
3	0,4220	−I62,97	0,6563	−30.43	0,6284	−2I,I6	I,8448	+82,67
4	0,5I74	−I5,22	0,5755	−23,84	0,7484	−I8,I8	I,57I5	−93,64
5	0,9986	+47,I0	0,8524	−32,96	0,7I99	−25,52	2,II8I	−63,27
6	0,6902	+0,93	0,7079	−I8,7I	0,9469	−28,34	I,II62	−60,38
7	0,6329	−5,94	0,6657	−26,98	0,6658	−45,I5	0,5980	−88,3I
8	0,5240	+6,34	0,6862	−24,67	0,6667	−32,23	0,6933	+35,55
9	I,64I2	−54,27	0,5683	−32,09	0,5030	−33,44	2,3I43	+6,32
I0	0,8300	−25,4I	0,4766	−42,I6	0,25I6	−50,8I	0,97I8	+I3,40
II	I,II79	−87,63	0,9948	−38,36	0,5056	−6,83	4,5368	−86,3I
I2	0,4370	−40,2I	0,6643	−23,57	0,76I0	−I8,97	I,5468	−26,49
I3	0,8799	−0,78	0,63I7	−2I,89	0,7538	−22,38	I,I0I5	−I45,64
I4	I,I924	+2I,76	0,968I	−3I,40	0,4329	−25,00	3,5795	−9I,82
I5	I,07I7	+I33,I4	0,7479	−28,70	0,4886	−4I,I6	4,2535	−I00,78
I6	I,9354	+33,6I	0,6I78	−I9,62	0,5473	−I6,43	7,6089	+I8,90
I7	0,9294	+I6I,74	0,47I4	−52,94	0,23I8	−64,57	3,3929	+2,94
I8	3,4322	+7I,8I	0,3830	−23,24	I,I55I	−35,84	I5,6I20	+59,09
I9	0,5647	−I9,66	0,8096	−39,04	0,3735	−77,48	0,9009	−I48,32
20	0,3690	+36,88	0,6370	−26,73	0,6497	−I,89	3,9534	+32,I8
2I	2,0748	+62,64	0,5875	−I8,58	0,5798	+9,00	3,92I2	−I24,66
22	I,2363	−95,08	0,5I60	−I3,48	0,6429	−4,2I	4,2I85	+38,3I
23	I,3049	−34,86	0,8944	−I0,2I	0,6796	−26,20	6,2795	+I43,72
24	I,0835	−77,99	0,5365	−I4,72	0,5830	−4I,68	I,0834	+I47,37
25	0,9534	−33,68	0,70I0	−23,58	0,32I7	−28,37	2,6961	−I8,I3
26	I,0257	+37,20	0,7I20	−II,55	0,I3II	−I,3I	4,5435	−I3,20
27	I,520I	+47,74	0,5534	−I5,38	0,I486	+6,38	5,0758	−47,56
28	I,39I6	−2I,98	0,5403	−46,92	0,6636	−20,38	4,28I8	−55,I5
29	0,474I	+I03,53	I,0I84	−67,42	0,I657	−73,53	I2,0256	+I68,22
30	0,5033	−I0I,I5	0,9045	−24,09	0,6063	−22,I4	0,8702	+I63,85
3I	2,4032	−34,03	I,3323	−24,I5	0,4033	−I8,9I	5,2560	+I34,64
32	I,0645	+27,23	0,6928	−20,87	0,3833	−48,I8	3,4704	+68,40
33	2,0I29	+26,82	0,6458	−45,26	0,2357	−60,33	I,9338	−5I,62

Table 7. Valeurs γ et Δφ obtenues à Simféropol (ondes semi-diurnes).

N° de la série	N_2		M_2		S_2		K_2	
	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
	Composante N-S (pendule M-1)							
I	0,5883	-I8,65°	0,63I0	-I4,3I°	0,725I	-I,97°	2,3332	-38,79°
2	I,0979	-I8,74	0,6790	-I0,74	0,6964	-5,40	I,6828	-25,I8
3	0,7359	-23,89	0,7222	-I3,44	0,6757	+I0,55	3,I292	+I7,3I
4	0,6552	+35,30	0,6650	-I3,48	0,630I	+2,35	I,7623	+63,02
5	0,4243	+4,I5	0,6690	-II,38	0,5998	-I,22	I,I773	+36,70
6	0,8258	-I6,2I	0,7054	-II,I4	0,5400	+9,62	0,5437	-I04,I4
7	0,8525	-30,85	0,7246	-9,94	0,5722	+3,54	I,I67I	+23,80
8	0,4638	-II,65	0,6479	-I2,I3	0,6378	+5,20	0,9I84	+I69,62
9	0,9524	-49,34	0,6537	-I0,36	0,6445	-I5,54	0,9927	+2I,83
I0	0,8436	+3,56	0,69I0	-I3,03	0,7III	+II,69	I,6455	+55,94
II	0,3809	+I2,27	0,6667	-I0,47	0,7403	-9,47	2,3I99	+70.86
I2	0,68I6	-0,39	0,7I65	-I2,75	0,9I82	-0,6I	I,II99	-37,44
I3	0,7I73	-0,08	0,6893	-I4,49	0,7480	-I,69	0,8304	+33,3I
I4	0,7502	-6,I9	0,6988	-8,05	0,6397	-6,84	I,5969	+6I,7I
I5	0,6567	-I4,00	0,6867	-I0,5I	0,706I	-8,43	I,4390	+95,54
I6	0,877I	-5,89	0,6983	-I3,I3	0,8428	-I0,60	0,I20I	-3I,I4
I7	0,8703	-4,II	0,664I	-I5,I0	0,7296	-I0,I9	I,257I	-48,48
I8	0,5366	-7,46	0,6679	-I4,92	0,7380	-3,40	I,8738	-49,6I
I9	0,79I4	-5,5I	0,72I9	-II,23	0,6507	+0,72	I,6335	+36,I3
20	0,6050	+I,20	0,6855	-II,46	0,6493	-5,58	0,6783	+48,88
2I	0,755I	-3,40°	0,692I	-II,30°	0,5627	-I4,44°	0,3735	-I3I,88°
22	0,7967	-0,24	0,6722	-I2,69	0,6579	-I7,II	I,8984	-90,2I
23	0,5394	-39,3I	0,6473	-I0,83	0,8276	-I0,22	I,2I38	+I2,03
24	0,4638	-57,32	0,6797	-22,60	0,738I	-3,69	I,2I89	+87,87
25	0,6847	-33,II	0,7048	-26,35	0,8430	-3,82	0,3936	-77,90
26	I,57I9	-I0,22	0,6569	-I,92	0,5220	+3,78	I,0368	+I7I,2I
27	0,9974	-38,02	0,645I	-5,50	0,7086	-I7,06	2,247I	-I24,70
28	0,4836	-I5,06	0,6680	-I5,00	0,6II2	-I0,57	I,8652	-5I,72
29	0,9475	+6I,89	0,6586	-6,24	0,6663	+II,I0	5,656I	-9,25
	Composante E-W (pendule M-4)							
I	0,6750	-4,58°	0,747I	-9,I3°	0,8I56	-2,78°	0,7562	-55,37°
2	0,6446	-I9,05	0,7529	-8,63	0,8206	-2,34	0,8282	+33,95
3	0,8862	-2,II	0,8009	-5,2I	0,85I8	-8,55	I,2I05	+28,79
4	0,874I	-8,84	0,7833	-7,57	0,72I8	-9,70	0,204I	+36,27
5	0,6045	-2,25	0,8I03	-6,23	0,8244	-4,70	2,I252	-33,45
6	0,7583	-8,70	0,82II	-9,6I	0,7863	-4,95	0,3578	-46,9I
7	0,7447	-I0,76	0,7828	-8,63	0,762I	-5,85	0,8089	-4,78
8	0,84I5	-4,5I	0,7925	-7,98	0,78I5	-7,42	0,9I59	+4,63
9	0,7360	-I7,98	0,7857	-6,2I	0,7422	-6,78	0,3073	+85,44
I0	0,7952	-8,55	0,7608	-6,83	0,5958	-6,39	0,8847	+23,62
II	0,7764	+5,92	0,7650	-4,87	0,79I9	-I,47	I,0004	-I7,74
I2	0,8485	-0,65	0,7670	-4,92	0,7962	-4,4I	0,3564	+I28,22
I3	0,78I8	-3,34	0,7729	-7,2I	0,8385	-II,32	I,24I3	+I,90
I4	0,7686	-I5,20	0,7626	-6,74	0,7432	-II,7I	I,I93I	-I4,30
I5	0,7985	-6,64	0,7623	-4,98	0,8065	-4,99	I,8952	+8,09
I6	0,7756	-I8,I3	0,7897	-7,I0	0,8476	-8,75	I,8456	-9,32
I7	0,6857	+6,57	0,7543	-8,45	0,7832	+I2,35	I,0659	-I7,86
I8	0,8275	-I3,3I	0,7978	-3,76	0,4009	+8,34	I,7528	+73,48
I9	0,8960	-5,98	0,7223	-4,74	0,855I	-3,76	I,0I63	-62,4I
20	0,7650	-I8,53	0,7730	-8,63	0,7276	-I9,24	0,896I	-23,I2
2I	0,9536	-0,63	0,8336	-II,I9	0,6396	-23,54	I,0950	+I38,00
22	0,8052	+0,52	0,7937	-8,70	0,7488	-I7,8I	I,24I8	+I32,48
23	I,I289	-II,00	0,7348	-7,24	0,83II	-9,98	I,2220	+I26,7I
24	0,7308	-23,26	0,7555	-2,89	0,758I	-6,79	I,2888	+4,36
25	0,8023	-5,5I	0,7877	-4,62	0,7874	+5,68	0,7965	-3,I0
26	0,7II7	-I4,66	0,7622	-7,30	0,748I	+5,95	2,0953	-22,39
27	0,8353	-5,25	0,7603	-7,6I	0,77II	-2,34	2,3527	-63,60
28	0,8499	-I2,38	0,7679	-6,80	0,8383	-2,03	I,5436	-39,37
29	0,8276	-0,84	0,7654	-6,69	0,7253	-I3,6I	I,7007	-I2,5I
30	0,38I9	+27,3I	0,7594	-4,86	0,888I	-5,I3	2,6495	+0,44
3I	0,5706	-9,2I	0,7746	-4,77	0,8389	-3,3I	4,2084	+5,03
32	0,7060	+68,33	0,7927	+0,26	0,4987	+3I,78	5,I305	+6,30
33	0,8834	+I7,39	0,7476	-I4,04	0,655I	+5I,5I	2,7I00	+8I,82

Table 8. Moyennes vectorielles des paramètres γ et Δφ pour Khartsisk (observations de 1974 à 1979).

Onde	Pendule M4 (α = I9°45,9′), n = 4I				Pendule M1 (α = I09°45,9′), n = 38				
	H_r, angle msec.	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée		H_r, angle msec.	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée	
		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
Q_1	0,336	I,I62I ±3830	+8,58° ±I7,47	I,0736 ±3928	-2,36° ±I7,97	0,874	I,0357 ±I862	-2I,84° ±I2,24	0,89I4 ±I629	-I6,40° ±II,60
O_1	I,756	0,78I4 ± 744	+34,58 ± 5,63	0,7709 ± 684	+34,47 ± 5,26	4,564	0,6503 ± 345	-5,59 ± 3,08	0,6358 ± 292	-4,07 ± 2,76
K_1	2,470	0,7390 ± 553	+24,66 ± 4,79	0,7542 ± 5I9	+26,45 ± 4,31	6,4I9	0,70II ± 422	-I,79 ± 2,66	0,7I62 ± 3I6	-2,83 ± 2,08
M_1	0,I38	I,I486 ±8468	-45,77 ±42,42	0,8623 ±7435	-57,98 ±54,7I	0,369	I,6I30 ±5505	I24,I8 ±I6,53	I,I260 ±4503	+24,09 ±I9,54
N_2	I,572	0,79I8 ± 404	-0,72 ± 2,85	0,8I25 ± 392	-I,82 ± 2,58	1,970	0,7657 ± 354	-2,87 ± 3,49	0,7665 ± 303	-I,32 ± 2,97
M_2	8,209	0,8047 ± 94	-3,94 ± 0,55	0,8II7 ± 96	-3,76 ± 0,5I	I0,288	0,7063 ± 60	-I,82 ± 0,62	0,7068 ± 53	-I,04 ± 0,55
S_2	3,8I9	0,7575 ± I75	-0,93 ± I,0I	0,7638 ± I70	-0,75 ± 0,96	4,786	0,6859 ± I43	+2,93 ± I,55	0,6737 ± I30	+I,80 ± I,40
μ_2	0,25I	0,8440 ±2II4	-I7,97 ±I3,82	0,7706 ±I960	-22,83 ±I4,72	0,3I5	0,88I6 ±2000	-5,89 ±I5,37	0,8602 ±I807	-0,I7 ±I5,02

Table 9. Moyennes vectorielles des paramètres γ et Δφ pour Khartsisk réduites dans les directions du méridien et du premier vertical.

Onde	Composante N-S					Composante E-W				
	H_r, angle msec.	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée		H_r, angle msec.	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée	
		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
Q_1	0,I29	2,430I ± I,0280	-7,60° ±23,9I	I,6258 ±9766	-20,4I° ±34,74	0,928	I,008I ±I7I6	-I8,09° ±II,42	0,8979 ±I5I8	-I4,07° ±I0,57
O_1	0,672	I,8480 ±2024	+I2,32 ± 6,26	I,7796 ±I849	+I2,27 ± 5,9I	4,844	0,6244 ± 320	-0,5I ± 2,97	0,6I32 ± 273	+0,93 ± 2,66
K_1	0,946	I,47II ±I664	+I3,25 ± 6,6I	I,5785 ±I490	+I4,I2 ± 5,42	6,8I3	0,6830 ± 380	+I,22 ± 2,50	0,6944 ± 288	+0,44 ± I,99
M_1	0,053	2,6692 ± 2,3762	+I60,7I ±5I,I5	2,3I57 ± 2,2222	+I62,09 ±5I,88	0,38I	I,53I4 ±4989	+I7,54 ±I5,93	I,058I ±4I06	+I6,37 ±I9,I5
N_2	I,504	0,80I2 ± 444	-I,77 ± 3,0I	0,8046 ± 4I9	-3,I7 ± 2,77	2,022	0,76I7 ± 349	-2,I6 ± 3,26	0,7736 ± 30I	-0,57 ± 2,76
M_2	7,854	0,7832 ± 97	-6,82 ± 0,60	0,7863 ± 96	-6,78 ± 0,58	I0,56I	0,7248 ± 60	-0,26 ± 0,58	0,728I ± 55	+0,55 ± 0,5I
S_2	3,654	0,7298 ± I85	-2,98 ± I,20	0,74I4 ± I78	-3,49 ± I,I2	4,9I3	0,706I ± I39	+3,80 ± I,40	0,6922 ± I27	+3,23 ± I,28
μ_2	0,240	0,7674 ±23I8	-I5,8I ±I6,49	0,6330 ±2I6I	-I8,50 ±I8,92	0,323	0,9I74 ±I930	-7,98 ±I3,88	0,9I58 ±I749	-4,5I ±I3,25

Table 10. Moyennes vectorielles des paramètres γ et $\Delta\phi$ pour Simféropol (observations de 1974 à 1979).

Onde	Composante N-S (n = 29)					Composante E-W (n = 33)				
	H_T, angle msec.	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée		H_T,	Moyenne non pondérée		Moyenne pondérée	
		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$		γ	$\Delta\varphi$	γ	$\Delta\varphi$
Q_1	0,006	–	–	–	–	0,88I	0,5980	+8,89°	0,6I5I	+2,I5°
		–	–	–	–		±II72	±I5,74	±I088	±I3,46
O_1	0,034	38,690I	+96,75°	29,254I	+I03,72°	4,602	0,69I0	-27,96	0,6927	-26,66
		± I0,6997	±I3,53	± I0,3989	± I5,38		± 3I2	± 2,48	± 276	± 2,20
K_1	0,047	I6,I597	+50,92	28,5354	+ 68,09	6,473	0,5309	-24,93	0,5498	-22,65
		± I0,4743	±36,98	± II,0974	± 20,78		± 42I	± 3,32	± 432	± 2,94
M_1	0,003	–	–	–	–	0,362	0,6737	+I3,94	0,9522	-I2,03
		–	–	–	–		±6007	±48,87	±503I	±27,96
N_2	I,5I3	0,6850	-I0,58	0,6684	- 7,54	2,I4I	0,7524	-4,88	0,7539	-4,88
		± 459	± 4,48	± 4I8	± 5,I7		± 273	± 2,35	± 240	± 2,25
M_2	7,90I	0,6776	-I2,25	0,6780	-I2,06	II,I84	0,7738	-6,79	0,7728	-6,97
		± 52	± 0,82	± 52	± 0,76		± 42	± 0,45	± 40	± 0,44
S_2	3,676	0,6806	-3,65	0,6852	-2,29	5,203	0,74I0	-3,76	0,7475	-3,96
		± I74	± I,52	± I88	± I,53		± 2I8	± I,98	± I99	± 2,00
K_2	0,242	0,77I5	+4,0I	0,9383	+0,84	0,342	I,0439	+2,72	0,9I84	+3,I6
		±2374	±I5,28	±2787	±II,,49		±2I33	± 8,II	±I996	± 8,8I

la précision des résultats moyens obtenus pour l'une ou l'autre onde avec la valeur de cette onde nous donnons, dans la deuxième et la septième colonnes, de ces tables, les valeurs des amplitudes M_T des valeurs théoriques de toutes les ondes déterminées; n désigne le nombre de séries mensuelles dont les résultats ont été utilisés pour effectuer la moyenne.

Les valeurs moyennes γ et $\Delta\phi$ données dans la table 8 caractérisent les inclinaisons à "Khartsisk" dans les azimuts d'enregistrement (α_4 = 19°45,9' et α_1 = 109°45,9'). La réduction des moyennes vectorielles γ et $\Delta\phi$ (et leurs erreurs quadratiques moyennes) au méridien et au premier vertical (Table 9) a été effectuée d'après les formules données en {6}.

On remarque tout de suite la précision extrêmement basse des paramètres γ et $\Delta\phi$ obtenus dans la direction NS et proche de celle-ci pour les ondes diurnes aux deux points. Cela provient de l'insignifiance des ondes diurnes aux latitudes moyennes dans cette composante (cf table 8).

Les conditions à Simféropol sont particulièrement peu favorables pour la détermination de ces ondes dans la direction NS, car la latitude est voisine de 45° où les marées d'inclinaisons diurnes dans cette direction sont nulles. Nous avons inclus les résultats obtenus pour les ondes O_1 et K_1 pour

cette direction, malgré leur inutilité apparente aussi bien dans la table 6 que dans la table 10 et ceci dans le but de ne pas abandonner une information utile à l'estimation comparative des parties accidentelle et systématique du bruit de fond dans la détermination des ondes diurnes.

A Khartsisk les erreurs relatives de la détermination des paramètres γ et $\Delta\phi$ ne dépassent pas 5 % pour les ondes O_1 et K_1 dans la direction EW. Avec cette précision on peut estimer l'effet de résonance du noyau liquide de la Terre {10, 11}. On a obtenu, avec cette même précision, les paramètres γ et $\Delta\phi$ pour l'onde O_1 et au point Simféropol (table 10) mais malheureusement pas pour l'onde K_1 dont l'erreur relative est d'environ 8 %. Nous avons noté précédemment, à Simféropol, la possibilité d'une onde diurne irrégulière S_1 d'origine météorologique qui peut être provoquée par des déformations thermo-élastiques de la partie abrupte de la masse calcaire dans laquelle se trouve la mine. On ne peut expliquer apparemment que par des influences perturbatrices, aussi bien l'augmentation (par rapport à l'onde O_1) des erreurs de détermination des paramètres γ et $\Delta\phi$ de l'onde K_1 que les valeurs anormalement grandes du déphasage $\Delta\phi$ des ondes considérées.

Pour l'onde semi-diurne principale M_2 l'erreur relative de la détermination des paramètres γ et $\Delta\phi$ aux deux sites ne sort pas des limites de 1,2 %. Les erreurs correspondantes pour les ondes N_2 et S_2 n'ont pas dépassé respectivement 6,0 % et 2,5 %. Tout cela témoigne de la précision relativement élevée des résultats obtenus pour les ondes semi-diurnes les plus importantes.

Pour Khartsisk les valeurs obtenues pour les ondes N_2, M_2 et S_2 des paramètres γ et $\Delta\phi$ constitue sans aucun doute une caractéristique nouvelle et assez sûre de la marée d'inclinaison semi-diurne. En comparant les valeurs du paramètre γ pour les trois ondes considérées dans les différentes directions, une inégalité azimutale de la forme $\gamma_{NS} > \gamma_{EW}$ apparaît nettement. La cause de celle-ci requiert la réalisation de recherches spéciales en relation avec l'estimation des perturbations par les différents effects indirects.

Un éclaircissement analogue sera sans aucun doute requis dans l'avenir et l'inégalité azimutale de signe oppose $\gamma_{NS} < \gamma_{EW}$ apparue dans le résultat des ondes semi-diurnes à Simféropol déjà obtenu par Z.N. Aksentieva et O.V. Tchouprounova à partir des observations clinométriques de 1963 à 1966 {12, 13}. La réalité de ce genre d'inégalité à Simféropol propre à la plupart des points clinométriques répartis dans la partie Européenne de l'URSS et dans l'Europe de l'Ouest, peut être considérée comme liée aussi bien à nos premiers résultats des 17 séries mensuelles de 1974 à 1979 qu'aux résultats pour toute cette série (table 10).

En résumant le total du travail effectué, on peut énoncer les conclusions principales :

1. L'analyse de cinq années d'observations clinométriques faites à Khartsisk et à Simféropol de 1974 à 1979, a fourni des valeurs sûres des paramètres γ et $\Delta\phi$ caractérisant les ondes les plus importantes. La précision des résultats obtenus correspond aux exigences actuelles pour la solution de problèmes tels que la déduction de la valeur globale la plus sûre du paramètre γ_o, l'estimation de l'effet de résonance du noyau liquide de la Terre sur les ondes diurnes, l'étude de certains effets indirects dans les marées terrestres.

2. La comparaison des deux variantes de réduction par mois de longues séries d'observations clinométriques a montré que pour la plupart des ondes de marées terrestres déterminées le procédé de la moyenne vectorielle pondérée comparé à la moyenne non pondérée donne les valeurs les plus sûres de γ et $\Delta\phi$ avec des erreurs relatives sensiblement moindres. C'est pourquoi on recommande comme résultats définitifs (tables 8 à 10), représentatifs pour Khartsisk et Simféropol, les résultats obtenus par la moyenne vectorielle pondérée.

3. La précision assez élevée des résultats obtenus à l'aide des pendules horizontaux de Repsold-Levitskii témoigne de ce que ces appareils et les appareils analogues restent un des moyens instrumentaux valables pour l'étude des déformations de marée de la Terre. Grâce à leurs qualités remarquables il est peu probable qu'ils perdent leur valeur et il y a une perspective de large application dans l'avenir pour des observations clinométriques dans les mines, galeries, tunnels, etc ... Sur la base du bon accord des résultats à Simféropol ({4} et table 10 de notre article), on peut considérer qu'un minimum de deux à trois ans suffit pour une estimation sûre des paramètres γ et $\Delta\phi$ des marées clinométriques (avec des conditions satisfaisantes d'observations).

BIBLIOGRAPHIE

1. Orlov A.Ya., Première série d'observations avec des pendules horizontaux, à Youriev, des déformations de la Terre sous l'influence de l'attraction de la Lune.
Yzt. tr. en 3 T. Kiev. Edit. Ac. des Sc. d'Ukraine 1961. T2. pp. 156-215.

2. Matveyev P.S., Evtouchenko E.Y., Veretsa V.S., Observations clinométriques dans la région de "Khartsisk".
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1976. Publ. 8, pp. 23 à 25.

3. Evtouchenko E.Y., Matveyev P.S., Sourovtsev V.G. et autres. Sur certaines particularités de l'inclinaison lente de la surface de la Terre à Khartsisk.
Dans le livre : Mouvements actuels de l'écorce terrestre, Nossibirsk : Inst. géologie et géophysique, Ac. des Sc. d'URSS, 1976, pp. 129 à 135.

4. Matveyev P.S., Evtouchenko E.Y., Poustovitenko B.G., Doubik B.S., Détermination des paramètres des ondes de marées terrestres les plus importants dans les inclinaisons de la surface de la Terre à Simféropol d'après les données d'observations de 1974 à 1977.
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1979. Publ. 11, pp. 9 à 17.

5. Doubik B.S., Estimation de l'erreur quadratique moyenne d'une ordonnée de la courbe de marée analysée et moyenne des résultats de l'analyse harmonique.
Rotation et déformations de marées de la Terre, 1975. Publ. 7, pp. 62 à 64.

6. Matveyev P.S., Résultats de l'analyse harmonique.
Rotation et déformations de la Terre, 1975. Publ. 7, pp. 62 à 64.

7. Matveyev P.S., Analyse harmonique d'une série mensuelle des observations des marées terrestres.
Dans le livre : Marées terrestres Kiev. Naouk. Doumka 1966, pp. 51 à 79.

8. Matveyev P.S., Remarques sur la moyenne des résultats de l'analyse harmonique des marées terrestres.
Trav. de l'Observat. Gravim. de Poltava, 1963, 12, pp. 115 à 124.

9. Matveyev P.S., Développement des idées de A.Ya. Orlov sur l'étude des inclinaisons de marées de la surface de la Terre dans les travaux de l'Observat. Gravim. de Poltava.
Dans le livre : Géodynamique et astronomie, bases, méthodes, résultats. Kiev : Naouk. Doumka, 1980, pp. 25 à 52.

10. Molodenskii M.S., Kramer M.V., Marées terrestres et nutation de la Terre.
M. Edit. Ac. des Sc. URSS, 1961, 40 p.

11. Melchior P., Marées terrestres - M. Mir 1968, 482 p.

12. Aksentieva Z.N., Tchouprounova O.V., Résultats préliminaires des observations sur les inclinaisons de marées dans le polygone de Crimée (Simféropol).
Dans le livre : Marées terrestres. Kiev. Naouk. Doumka. 1966. p. 3 à 8.

13. Tchouprounova O.V., Résultats des observations clinométriques à Simféropol. Rotation et déformations de marées 1970. Publ. I. p. 318 à 336.

14. Lecolazet R., Sur l'estimation des erreurs internes affectant les résultantes d'une analyse harmonique mensuelle.
Marées terrestres. Bull. d'Inform. Commis. perman. marées terrest. Assoc. Intern. Geod., Bruxelles : Observ. Roy. de Belgique, 1959, N° 17, p. 269-278.

Translation

INVESTIGATION OF RHEOLOGICAL MODEL FOR THE QUARTZ SPRING GRAVIMETERS

LI RUI-HAO, CHEN DONG-SHENG, FU ZHAO-ZHU, JIAN DA-XI

Institute of seismology, State Seismological Bureau

Translated from "ACTA SEISMOLOGICA SINICA", Vol. 5, Nov., 1983.

ABSTRACT

The practical method for determining the rheological parameters ε and τ of and astatic gravimeter is given in this paper. The authors, for the first time, obtained the numerical values of these two parameters, that is, $\varepsilon = 0.010$ and $\tau = 795.8$ minutes for gravimeter CG-2 N° 317, based on the precise observational results of the earth tides at Wuhan station, during the Belgium-China earth tides cooperation period. It has been proved by practice that the method is useful for determining the rheological model of the astatic gravimeters.

1. INTRODUCTION.

Two important parameters, i.e., the δ-factor and the phase lag of the tidal waves are obtained form the harmonic analysis for earth tides observations. δ is the ratio of the amplitudes of the observed vector to the theoretical vector, it is a non-dimensiona parameter, linear combination of Love numbers, h and k, and $\Delta\phi$ is the phase lag between the observed and the theoretical vector of the tidal waves. It reflect mainly viscoelasticity properties of the earth medium, a lot of results from practial earth tides observations indicate that the value δ for main waves is about 1.160, and that the absolute values of the $\Delta\phi$, in general, are less then 1°, after considering the loading effect on the observed results.

The tidal signal is however distorted because of the dynamic properties of the instruments. The effect of the dynamic properties of the gravimeters on an input signal must be considerated. In high precision earth tides study, for the convenience of statement to this problem, let's look back on the simplest condition for a single spring vertically suspended. It is well-known

that the equation of motion in tides force fields for this kind of elastic system, can be written as follows :

$$\ddot{x} + 2c_1\dot{x} + c_2^2 x = \Sigma H \sin \omega_i t \tag{1}$$

where x is the displacement up and down for the spring, the second term on left side, is relative to damping, the sum of the right side in equation (1) represents the tidal forces. Its general solution is well-known and can be written directly :

$$x = e^{-c_1 t}(c_3 \cos k_1 t + c_4 \sin k_1 t) + \frac{H}{[(c_2^2 - \omega^2)^2 + 4c_1^2\omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + b) \tag{2}$$

where $K_1 = (C_2^2 - C_1^2)^{1/2}$, and C_3 as well as C_2 are the coefficients to be determined. The first term on the right side represents the free oscillation of spring. Because of damping, this term will be attenuated in the form of $e^{-c_1 t}$ and some time later, the free oscillation will automatically disappear. Then, the elastic system oscillates in the folling way under the action of the tidal force

$$x = \frac{H}{[(c_2^2 - \omega^2)^2 + 4c_1^2\omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + b) \tag{3}$$

which shows that the tidal signal attenuation by gravimeters is related to the frequencies of the input signal as well as the natural oscillation period of the elastic system and the damping coefficient of the instrument. For the single spring system vertically suspended the amplitude attenuation and the phase lag can be given respectively as follows :

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{H}{[(c_2^2 - \omega^2)^2 + 4c_1^2\omega^2]^{1/2}} \\ b &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{2c_1\omega}{\omega^2 - c_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. SELECTION OF THE RHEOLOGICAL MODEL FOR GRAVIMETERS.

Discussion in section 1 is valid only for the simplest condition, in which the studied object is a Hooke body. The elastic system for a real gravimeter is far from the Hooke body, and it is suitable to use a rheological model combining a Hooke body and a Kelvin body to imitate the motion of the elastic system of the gravimeter. To simplify it, we usually study the amplitude attenuation and phase lag of the equipment by means of the response of an input step signal. Then we can derive the response characteristic of the step function as follows :

$$x(t) - x(0) = A\{1 + \varepsilon_1(1 - e^{-\frac{t}{\xi_1}}) + \varepsilon_2(1 - e^{-\frac{t}{\xi_2}}) + \cdots\cdots\} \tag{5}$$

which shows that, if ε and ξ are determined, this rheological model will be completely defined.

As we know, the response of step function for a gravimeter Askania GS which is of a very weak astatic property can be simplified as follows :

$$x(t) - x(0) = A(1 - e^{-\frac{t}{\xi}})$$

Its amplitude attenuation and phase lag are proportional to the frequency of the tides wave, i.e.,

$$B = \frac{1}{\left[1 + \frac{2\pi\xi}{T}\right]^{1/2}}$$

$$b = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2\pi\xi}{T}$$

In the case of gravimeters with a large astatic property, the model (5) is more suitable and the expression for B can be written :

$$\left.\begin{aligned} B &= \left\{\frac{(1+\varepsilon) + \left(\frac{\tau}{T}\right)^2}{(1+\varepsilon)\left[1 + \left(\frac{\tau}{T}\right)^2\right]}\right\}^{1/2} \\ b &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{\varepsilon\tau T}{T^2(1+\varepsilon) + \tau^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

where $\tau = 2\pi\xi$, T being the period of the input signal.

3. DETERMINATION OF THE RHEOLOGICAL PARAMETERS.

The ratio $\frac{\delta(M_2)}{\delta(O_1)}$ is usually used as an estimating index for studying the ocean loading effect on the diurnal and semi-diurnal waves of earth tides. It is obvious that the ratio $\frac{\delta(M_2)}{\delta(O_1)}$ must be multiplied by another ratio $\frac{B(O_1)}{B(M_2)}$. Therefore, it is also necessary to determine the attenuation factor B of the gravimeters, from the view point of ocean loading effects investigation.

We can see from the expression (6) that if we can precisely determine the values B and b for the waves O_1 and M_2 at a station, the values τ and ε can be calculated by using the expression (6) and the rheological model will be determined. In fact, it is convenient to use only the second expression of formula (6) to determine the τ and ε values. If the values of the phase lags $\Delta\phi(O_1)$ and $\Delta\phi(M_2)$ are precisely known at a station, $\Delta\phi'(O_1)$ as well $\Delta\phi'(M_2)$ are the observed values at that station for a gravimeter to be studied. We can write :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi'(o_1) - \Delta\varphi(o_1) &= b(o_1) \\ \Delta\varphi'(M_2) - \Delta\varphi(M_2) &= b(M_2) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

It is obvious that the difference $\Delta\phi'(O_1) - \Delta\phi(O_1)$ and $\Delta\phi'(M_2) - \Delta\phi(M_2)$ are due to the rheological properties of the instrument, i.e., the values of the $b(o_1)$ and $b(m_2)$ are all function of ε and τ for this instrument. According to equation (6), we can write expression as follows :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}[\Delta\varphi'(o_1) - \Delta\varphi(o_1)] &= \frac{\varepsilon\tau T(o_1)}{T^2(o_1)(1+\varepsilon)+\tau^2} \\ \operatorname{tg}[\Delta\varphi'(M_2) - \Delta\varphi(M_2)] &= \frac{\varepsilon\tau T(M_2)}{T^2(M_2)(1+\varepsilon)+\tau^2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

where $T(O_1)$ and $T(M_2)$ are the periods of the waves O_1 and M_2 respectively, the terms on the left are known. Jointly calculating equation (8), we can obtain the values of factor ε and τ and for simplification we suppose that :

$$\left.\begin{aligned} &T(o_1) = T_1,\ T(M_2) = T_2 \\ &\operatorname{tg}[\Delta\varphi'(o_1) - \Delta\varphi(o_1)] = A \\ &\operatorname{tg}[\Delta\varphi'(M_2) - \Delta\varphi(M_2)] = B \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

substituting expression (9) into (8), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\tau &= \frac{A}{T_1}[T_1^2(1+\varepsilon)+\tau^2] \\ \varepsilon\tau &= \frac{B}{T_2}[T_2^2(1+\varepsilon)+\tau^2] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

and the solution of equation (8) can be finally :

$$\begin{aligned} \tau &= [M(1+\varepsilon)]^{1/2} \\ M &= \frac{AT_1 - BT_2}{BT_1 - AT_2}(T_2T_1) \end{aligned} \tag{11}$$

substituting the values τ of expression (11) into the first equation of (10) and, simplifying it, we can obtain a second equation

$$M\varepsilon^2 - N\varepsilon - N = 0 \tag{12}$$

where $N = \left(AT_1 + \frac{A}{T_1}M\right)^2$

the condition with real number solutions for the equation (12) is $M > 0$.

From equation (12), ε can be easily calculated :

$$\varepsilon = \frac{N \pm \sqrt{(N+4M)N}}{2M} \tag{13}$$

ε must be positive according to its physical meaning.

4. RESULTS AND NUMERICAL VALUES.

The rheological parameters τ and ε for the quartz spring gravimeter CG-2 N° 317 have been determined by the observed data at Wuhan station.

Three geodynamic gravimeters (N° 084, N° 765, N° 783) and one LaCoste-Romberg gravimeter (N° 402) were installed at Wuhan station for six months or longer, during the Belgium-China Earth Tides Cooperation period. The surrounding temperature around the gravimeters is about 25° C ± 0°.5; during the observed period the noise was small and the observation data offer continuity and completeness. On the basis of the results obtained by these instruments for which the rheological properties have been considered, the phase lag at Wuhan station is obtained as follows :

$$\Delta\varphi(o_1) = -0^\circ.95 \qquad \Delta\varphi(M_2) = -0^\circ.62$$

Wuhan station has been arranged as a fundamental station of the International Earth Tides Profile under the International Centre of Earth Tides (ICET). According to Prof. Melchior, the observed data of earth tides at Wuhan station are one of the best data under ICET. So the numerical values of $\Delta\phi(O_1)$ and $\Delta\phi(M_2)$ mentioned above may be considered as the precise phase lag for waves O_1 and M_2 respectively at Wuhan station.

During the Belgium-China Cooperation period, a quartz spring gravimeter CG-2 N° 317 with automatically photographical records was installed at the Wuhan station for six months, the phase lag for waves O_1 and M_2 are obtained respectively as follows

$$\Delta\varphi'(o_1) = -1^\circ.18 \qquad \Delta\varphi'(M_2) = -0^\circ.90$$

These two numerical values include two parts : the crust response to the tides force and the phases lag of the instrument itself.

Using expression (8), we obtain

$$b(o_1) = -0^\circ.23 \qquad b(M_2) = -0^\circ.28$$

and using expression (9), we obtain

$$A = -0.00401428 \qquad B = -0.00488626$$

In view of T_1 = 1544 minutes, T_2 = 745 minutes, substitute the numerical values of A, B, T_1, T_2, into expression (11), (12) and (13), we can finally obtain the values of ε and τ :

$$\varepsilon = 0.010$$

$$\tau = 795.8 \text{ minutes}$$

These numerical values show that the rheological properties of this kind of instruments may drive an amplitude effect about 1 % for the tidal waves. However, the retardation time is very long and this is in agreement with the results obtained by B. Ducarme. This fact indicates that three kinds of astatic gravimeters are of similar rheological properties.

Now let's calculate the ratio $B(O_1)/B(M_2)$, substituting the values of the ε and τ into the first formula in expression (6), we get

$$\left.\begin{aligned} B(o_1) &= 0.9979 \\ B(M_2) &= 0.9948 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

and then obtain

$$\frac{B(o_1)}{B(M_2)} = 1.00312 \tag{15}$$

Using this ratio value, the parameters affected by ocean loading in some stations of China are shown in Table 1.

Table 1.

Term \ Station	Wuhan	Kun Ming	Cheng Du	Tian Shui	Yin Chuan	Shanghai
$\delta(M_2)/\delta(O_1)$	0.9931	1.0000	0.9915	0.9957	1.0267	0.9716
$\frac{B(O_1)}{B(M_2)} \cdot \frac{\delta(M_2)}{\delta(O_1)}$	0.9962	1.0031	0.9942	0.9988	1.0299	0.9746

The gravimeter CS-15 N° 227 was installed at Shanghai station for six months in 1981. The harmonic analysis results, considered rheological properties and the ocean loading effect on the earth tides, are shown in Table 2.

Table 2.

δ_{iL} and $\Delta\phi_{iL}$

Instr.	O_1		M_2	
	δ_{iL}	$\Delta\phi_{iL}$	δ_{iL}	$\Delta\phi_{iL}$
CG-2 N° 317	1.163	-0.33	1.158	-0.22
GS-15 N° 227	1.162	0.25	1.142	-0.81

These numerical values indicate that the results obtained with the gravimeter CG-2 N° 317 are very satisfactory, and the rheological model for this astatic gravimeter determined in this paper is available.

REFERENCE

{1} B. Ducarme, A fundamental station for trans-world tidal gravity profiles, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 11, 1975.

{2} J.T. Kuo, R.C. Jachens, P. Melchior and M. Ewing, A link of the Trans U.S. and Trans Europe Tidal gravity Profiles, ESO (Trans. Am. Geol. Union), 53, 4, 343, 1972.

{3} Li Jui Hao (Li Rui Hao), Chen Dong Shen and Fu Zhao Zhu, Study of gravity tides in Shanghai region, Marées terrestres Bulletin d'Informations, 87, 1982.

{4} P. Melchior, Fang Tsun, B. Ducarme, Hsu Hou Tsé, M. Van Ruymbeke, Li Jui Hao, Tidal gravity measurements in China, Proceedings of the 9th International Symposium for Earth Tides, New York, August 1981.

{5} P. Melchior, J.T. Kuo and B. Ducarme, Earth tides gravity Maps for Western Europe, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 13, 1976.

{6} P. Melchior, The Tides of the Planet Earth, Pergamon Press, 1978.