

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N° 86

1 DECEMBRE 1981

Association Internationale de Geodesie

Commission Permanente des Marees Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR
Observatoire royal de Belgique
Avenue Circulaire 3
1180 Bruxelles

10

11

TABLE DES MATIERES N°86

M.S. MOLODENSKII (Traduction)	
Marées dans une Terre sphériquement non symétrique.	5498
S.M. MOLODENSKII (Traduction)	
Influence de la nutation forcée de la Terre sur les résultats des observations de marées.	5515
VAN RUYMBEKE M., DUCARME B., DE BECKER M.	
Parametrization of the tidal triggering of earthquakes.	5521
S.M. MOLODENSKII (Traduction)	
L'influence de l'océan et de la viscosité du manteau sur la nutation de la Terre.	5545

學
子
之
書

學
子
之
書

MAREES DANS UNE TERRE SPHERIQUEMENT NON SYMETRIQUE

M.S. MOLODENSKII

Etude des Marées Terrestres, Nauka, pp. 5-21, Moscou 1980.

Ces derniers temps on a étudié les hétérogénéités horizontales à grande échelle dans le manteau à partir de données sur la séparation des lignes spectrales des oscillations propres de la Terre {1 à 6}. Les données de marées n'ont pas été examinées à cause de leur précision insuffisante. Ainsi les différences du facteur δ obtenues pour l'onde M_2 dans 16 stations de l'Europe de l'Ouest, après introduction des corrections dues à l'influence des océans n'ont pas dépassé 0,2 % et se trouvent dans les limites des erreurs de mesures {7}. Jusqu'il y a peu on n'a pas réussi à déceler de différences dans les valeurs du facteur gravimétrique non plus sur le territoire de l'URSS {8}. Les mesures d'après le profil coupant l'Amérique du Nord dans la direction de la latitude {9} après l'introduction des corrections de marées océaniques montrent des anomalies sensibles dans les valeurs de δ en quelques points seulement dans la région des Montagnes Rocheuses {10}.

Il convient de remarquer toutefois qu'avec l'augmentation de la précision, les données de marées peuvent donner une information nouvelle sur les hétérogénéités horizontales de la Terre non complétée par les données obtenues par d'autres sources. Les avantages principaux des données de marées sur celles des oscillations propres de la Terre sont les suivants :

- 1) les mesures de marée permettent d'identifier les hétérogénéités dans la région du site d'observation alors que les fréquences des oscillations propres donnent seulement une information sur les hétérogénéités moyennées en latitude et en longitude et ne dépendent pas du lieu de l'observation;
- 2) l'influence des hétérogénéités horizontales de la Terre sur les fréquences des oscillations libres comme aussi sur les marées terrestres, dépend de l'orientation des hétérogénéités par rapport aux noeuds et aux ventres de l'onde. Quand on utilise les oscillations propres, la détermination de l'orientation de l'onde représente un problème indépendant compliqué par le fait que à cause de la séparation rotationnelle des raies spectrales, les oscillations propres ne constituent pas des ondes verticales. Les noeuds et les ventres des oscillations non zonales se déplacent en longitude avec une vitesse angulaire différente pour les oscillations de différents types. Par contre l'orientation des ondes de marées à chaque époque, elle est

déterminée par l'orientation du corps générateur de marées et est connue avec précision. En outre, la recherche des hétérogénéités locales de la Terre et la détermination de leurs coordonnées géographiques à partir des données de marées sont sensiblement plus simples que d'après les oscillations propres.

Nous proposons ici une déduction des rapports de base reliant les hétérogénéités horizontales de la Terre aux amplitudes et phases des ondes de marées en différents points de la surface. Les expressions finales sont données sous une forme finale aisée pour les calculs pratiques.

1. Nous examinerons les marées statiques dans une Terre sphériquement non symétrique, provoquées à un certain moment par le potentiel générateur de marées

$$V_e = V_{e_0} (r/a)^{n_0} Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi), \quad (1)$$

où θ est la colatitude, ϕ la longitude, $Y_{n_0}^{m_0}$ la fonction sphérique. A cause de la petitesse des ondes d'indices $n_0 = 3, 4, \dots$ il suffit de se limiter au cas du potentiel du second ordre et on pose $n_0 = 2, m_0 = 0, 1, 2$.

2. Nous représenterons la marée à la surface de la Terre sphériquement non symétrique par le potentiel générateur de marée (1) en une décomposition infinie en fonctions sphériques de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{u}(a) &= \frac{\vec{r}}{r} H_{n_0}^{m_0}(a) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) + T_{n_0}^{m_0}(a) \nabla Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\vec{r}}{r} H_n^{m*}(a) Y_n^m(\theta, \phi) + T_n^{m*}(a) \nabla Y_n^m(\theta, \phi); \\ R(a) &= R_{n_0}^{m_0}(a) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^{m*}(a) Y_n^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2)$$

où $\vec{u}(a)$ est le vecteur déplacement et $R(a)$ est la variation du potentiel à la surface.

Dans (2) on décrit, avec les indices n_0, m_0 , la marée élastique dans une Terre sphériquement symétrique et les autres termes, petits par rapport à eux, qui tiennent compte de l'influence des hétérogénéités horizontales sur les amplitudes des ondes de marées. Le problème consiste à exprimer les valeurs entrant en (2) par les hétérogénéités horizontales de la Terre.

Le procédé le plus simple est d'appliquer le principe de réciprocité de Betti (11) généralisé dans le cas du corps gravitent hétérogène aux équations d'équilibre élastique gravitationnel d'une Terre sphériquement symétrique.

Soient (\vec{u}^0, R^0) et (\vec{u}^j, R^j) deux solutions des équations de l'équilibre élastique gravitationnel de la Terre sphériquement symétrique avec répartition hydrostatique des tensions initiales correspondant aux différentes conditions aux limites :

$$L_i(\vec{u}^0, R^0) = 0, \quad (3a)$$

$$L_i(\vec{u}^j, R^j) = 0. \quad (3b)$$

Ici

$$L_i(\vec{u}, R) = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (R + (\vec{u}, \nabla V)) - \text{div} \vec{u} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}; \quad (3c)$$

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \text{div} \vec{u} \delta_{ik}; \quad (3d)$$

ρ , λ , μ sont la densité et les paramètres de Lamé; V est le potentiel de la Terre non déformée; δ_{ik} est le symbole de Kronecker; R est la variation du potentiel lors des déformations de marées. En outre, R satisfait à l'équation de Poisson :

$$\Delta R^0 = 4\pi\kappa \text{div}(\rho \vec{u}^0), \quad (4a)$$

$$\Delta R^j = 4\pi\kappa \text{div}(\rho \vec{u}^j), \quad (4b)$$

Le travail des forces gravitationnelles élastiques $L_i(\vec{u}^0, R^0)$ dans les déplacements \vec{u}^j est égal au travail des forces $L_i(\vec{u}^j, R^j)$ dans les déplacements \vec{u}^0 :

$$\iiint_v [\vec{u}_i^j L_i(\vec{u}^0, R^0) - \vec{u}_i^0 L_i(\vec{u}^j, R^j)] dv = \iint_s [\vec{u}_i^j \sigma_{ik}^0 - \vec{u}_i^0 \sigma_{ik}^j] x_k/r + + R^j P^0 - R^0 P^j] ds = 0. \quad (5)$$

Dans (5) l'intégration s'étend dans tout le volume occupé par la Terre, et sur sa surface. Dans la suite nous prenons comme unité de longueur le rayon moyen de la Terre. Dans ce cas v et s désigneront un globe unitaire et une sphère unitaire. Les composantes $\sigma_{ik}^j x_k/r$ et $\sigma_{ik}^0 x_k/r$ (avec sommation sur les indices se répétant) déterminent les forces appliquées à la surface de la Terre; nous supposons qu'elles sont données par les conditions aux limites pour les solutions (\vec{u}^j, R^j) et (\vec{u}^0, R^0) . P^j et P^0 est la densité de la couche simple à la surface, également déterminée par les conditions aux limites pour les solutions (\vec{u}^j, R^j) et (\vec{u}^0, R^0) . La densité de la couche simple est liée aux dérivées suivant le rayon R'_{ext} (sur la surface de la Terre), R'_{int} (à l'intérieur de la Terre près de la surface) et à la composante radiale des déplacements de la surface $H(a)$ par la relation connue

$$P^0 = \frac{1}{4\pi\kappa} (R'_{\text{int}}{}^0 - R'_{\text{ext}}{}^0 - 4\pi\kappa \rho H^0), \quad (6)$$

$$P^j = \frac{1}{4\pi\kappa} (R'_{\text{int}}{}^j - R'_{\text{ext}}{}^j - 4\pi\kappa \rho H^j).$$

L'égalité à zéro de la première ligne dans la relation (5) est une conséquence triviale des équations (3a), (3b). L'égalité à zéro de la seconde ligne peut être démontrée par l'intégration par parties de la première ligne (12). Elle indique la présence de liens entre les solutions données par les différentes conditions aux limites (liaison des nombres de Love avec des coefficients de surcharge (13)).

Soit ensuite une solution (\vec{u}^0, R^0) qui décrit la marée statique dans la Terre sphériquement symétrique engendrée par le potentiel générateur de marées (1). En négligeant alors la marée dans l'océan, nous obtiendrons

$$\sigma_{ik}^0 x_k/r = 0, \quad P^0 = (2n+1)V_e^0/4\pi\kappa. \quad (7)$$

Supposons que l'opérateur L a un accroissement δL correspondant au passage au modèle de Terre sphérique faiblement non symétrique. Alors au lieu de (3a) (4a) et avec une précision du premier degré en les faibles variations des paramètres et des solutions, nous obtiendrons

$$\delta L_i(\vec{u}^0, R^0) + L_i(\delta \vec{u}, \delta R) = 0, \quad (8a)$$

$$\Delta(\delta R) = 4\pi\kappa \operatorname{div}(\delta \rho \vec{u} + \rho \delta \vec{u}), \quad (8b)$$

où $\delta \vec{u}$, δR sont les variations des solutions. La relation du type (5) pour la paire $(\delta \vec{u}, \delta R)$ et (\vec{u}^j, R^j) peut être obtenue par l'élimination de (5) de $L_i(\delta \vec{u}, \delta R)$ à l'aide de (8a). Tenant compte des conditions (7) pour les solutions perturbées et non perturbées et du rapport (8b), nous obtiendrons (12) :

$$\iint_S (\delta u_i \sigma_{ix}^j x_k/r + \delta R P^j) ds = F^j(\delta \rho, \delta \mu, \delta \lambda), \quad (9)$$

où

$$F^j(\delta \rho, \delta \mu, \delta \lambda) = \iiint_V \left[\delta \rho (\vec{u}^0, \nabla R^j) + u_i^j \delta L_{i\rho}(\vec{u}^0, R^0) - \delta \mu \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i^j}{\partial x_i} - \delta \lambda \operatorname{div} \vec{u}^0 \operatorname{div} \vec{u}^j \right] dr; \quad (10)$$

$\delta L_{i\rho}$ est la variation de la ième composante de l'opérateur L pour une variation de la densité. En donnant en (9) les solutions auxiliaires (\vec{u}^j, R^j) par l'une ou l'autre condition aux limites, nous pouvons déterminer les valeurs cherchées $\delta \vec{u}$, δR à la surface de la Terre en n'importe quel point.

1) en posant que

$$j = 1, \quad \sigma_{ik}^j \frac{x_k}{r} = f_1 \frac{x_i}{r \sin \theta} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0), \quad (11a)$$

$$P^j = 0,$$

où f_1 est la force unitaire agissant suivant la normale à la surface au point de coordonnées (θ_0, ϕ_0) et en intégrant ensuite le membre gauche (9) suivant

(θ_0, ϕ_0) , nous obtiendrons

$$\delta u_r(\theta_0, \phi_0) = F^j(\delta\rho, \delta\mu, \delta\lambda)|_{j=1}.$$

où δu_r est la composante radiale du vecteur $\delta\vec{u}$ à la surface.

2) en donnant $\sigma_{ik}^j x_k/r$ la force tangentielle nous trouvons $\delta u_{Tang.}(\theta_0, \phi_0)$.

3) en prenant

$$j=3, \sigma_{ik}^j x_k/r = 0, P^j = P_0 \frac{1}{r \sin\theta} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0), \quad (11b)$$

nous obtiendrons

$$\delta R(\theta_0, \phi_0) = F^j(\delta\rho, \delta\mu, \delta\lambda)|_{j=3}.$$

Des solutions données pour δ (conditions aux limites (11)), peuvent être trouvées numériquement par décomposition de la fonction δ à deux dimensions en fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \phi)$, par intégration des équations de l'élasticité (dans la Terre sphériquement symétrique), pour tous les n et par sommation des solutions obtenues de façon tout à fait analogue que lors de la prise en considération de l'influence de l'océan sur les marées terrestres [14].

Ainsi la substitution de chaque terme de la décomposition (u^j, R^j) en fonctions sphériques dans la relation (9) détermine un coefficient de la décomposition des déplacements de marées soit du potentiel à la surface, en fonctions sphériques. Par conséquent, en donnant u_n^j, R_n^j sous la forme :

$$\begin{aligned} u_{in}^j &= H_n^j \frac{x_i}{r} Y_n^m(\theta, \phi) + T_n^j(r) \frac{\partial}{\partial x_i} Y_n^m(\theta, \phi), \\ R_n^j &= R_n^j(r) Y_n^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (12)$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} (\sigma_{ik}^j \frac{x_k}{r})_n|_s &= N_n^j \frac{x_i}{r} Y_n^m(\theta, \phi) + M_n^j \frac{\partial}{\partial x_i} Y_n^m(\theta, \phi), \\ P_n^j|_s &= \frac{1}{4\pi\kappa} [L_n^j + (n+1)R_n^j] Y_n^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (13)$$

d'où résulte [15], nous avons pris

$$\begin{aligned} N_n^j &= (\lambda + 2\mu)(H_n^j)' + \lambda \left(\frac{2}{r} H_n^j - \frac{n(n+1)}{2} T_n^j \right), \\ M_n^j &= r^2 \mu \left((T_n^j)' + H_n^j - \frac{2}{r} T_n^j \right), \\ L_n^j &= r^2 \left((R_n^j)' - 4\pi\kappa\rho H_n^j \right), \\ r|_s &= a = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

En donnant les solutions auxiliaires par les conditions aux limites à la surface :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & j = 1, \quad N_n^j(1) = 1, \quad M_n^j(1) = 0, \quad P_n^j(1) = 0; \\
 2) \quad & j = 2, \quad N_n^j(1) = 0, \quad M_n^j(1) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad P_n^j(1) = 0; \\
 3) \quad & j = 3, \quad N_n^j(1) = 0, \quad M_n^j(1) = 0, \quad P_n^j(1) = 1,
 \end{aligned} \tag{15}$$

en substituant (2), (13) en (9) et en intégrant suivant les variables angulaires nous obtiendrons

$$F_{nm}^j(\delta\rho, \delta\mu, \delta\lambda) = c \cdot \begin{cases} H_n^{m*}(1), & j = 1, \\ T_n^{m*}(1), & j = 2, \\ R_n^{m*}(1), & j = 3, \end{cases} \tag{16a}$$

où

$$c = \int \int_s (Y_n^m(\theta, \phi))^2 ds = \frac{2\pi \epsilon (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, \tag{16b}$$

$$\epsilon = \begin{cases} 1, & m \neq 0, \\ 2, & m = 0. \end{cases}$$

2. Ainsi, aussi bien les déplacements que la variation du potentiel à la surface de la Terre sphériquement non symétrique sont complètement déterminés par les valeurs de l'intégrale (10) calculée pour les différentes valeurs n et m .

Lors de l'introduction des hétérogénéités horizontales de la densité dans les équations de départ (3) on doit ajouter les petits termes qui tiennent compte de la non hydrostaticité des tensions initiales (par exemple, sous la forme {10}).

C'est pourquoi le terme δL_{ip} dans (10) se compose de deux parties :

- 1) décrivant les variations de l'opérateur L pour la variation de ρ et correspondant à la variation V ;
- 2) liée avec l'apparition de tensions initiales non hydrostatiques à cause de la présence d'hétérogénéités de densité, pour le calcul de laquelle il faudrait faire des hypothèses complémentaires sur le caractère des tensions initiales. Puisque les hétérogénéités horizontales de densité dans la Terre (évaluées d'après les anomalies gravimétriques) sont suffisamment faibles (la valeur relative des anomalies est beaucoup plus petite que la relativité de la précision des observations de marées) nous nous limiterons dans la suite uniquement au calcul de l'influence de la répartition sphériquement non symétrique du module d'élasticité.

Nous donnons (10) sous forme simple, pour les calculs. Pour cela, en suivant la méthode employée dans la théorie des oscillations propres {1, 2} nous représenterons les hétérogénéités horizontales des paramètres en fonctions sphériques et nous intégrerons ensuite (10) suivant les variables angulaires. Nous écrirons

$$\begin{aligned}\delta\lambda(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \lambda_{lp}(r) Y_l^p(\theta, \phi); \\ \delta\mu(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \mu_{lp}(r) Y_l^p(\theta, \phi).\end{aligned}\quad (17)$$

Alors la partie liée aux hétérogénéités de λ se rapporte d'emblée à l'intégrale du produit des trois fonctions sphériques :

$$\begin{aligned}F_{nm}^j(\delta\lambda) &= - \iiint_v \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \lambda_{lp}(r) D_{n_0}(r) D_n^j(r) \times \right. \\ &\times Y_l^p(\theta, \phi) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi) \left. \right] dv = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=-l}^l A_{lpnmn_0m_0} \times \\ &\times \int_0^l r^2 \lambda_{lp}(r) D_{n_0}(r) D_n^j(r) dr,\end{aligned}\quad (18)$$

où $D_n(r) = H_n' + \frac{2}{r}H_n - \frac{n(n+1)}{r^2}T_n$ - est le facteur dépendant de r dans l'expression pour la divergence des déplacements.

$$\operatorname{div} \vec{u}^0 = D_{n_0}(r) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi),$$

$$\operatorname{div} \vec{u}^j = D_n^j(r) Y_n^m(\theta, \phi);$$

les indices n_0, m_0 sont déterminés par le potentiel générateur de marées (1) et prennent comme on l'a noté plus haut les valeurs $n_0 = 2, m_0 = 0, 1, 2$;

$$A_{lpnmn_0m_0} = \iint_s Y_l^p(\theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi) Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) ds.\quad (19)$$

Pour les intégrales des produits des trois fonctions sphériques (19) il existe des expressions analytiques {4, 2, 17}. Nous ne les donnerons pas ici à cause de leur extension. Nous noterons seulement que (19) est égal à zéro dans les cas où les indices l, n, n_0 ne satisfont pas à l'inégalité du triangle c'est à dire que dans la somme (18), l'indice n prend effectivement trois valeurs uniquement : $n = l = 2; l; l + 2$. L'indice p prend effectivement uniquement deux valeurs : $p = m - m_0$ et $p = m + m_0$. Ainsi, chaque onde de la décomposition (2) ne dépend que de six coefficients $\lambda_{lp}(r)$. Si la décomposition (17) renferme le nombre final de termes ($l \leq l_0$) alors on peut affirmer que la décomposition des ondes de marées (2) ne contient pas de termes où $n < l_0 + 2$.

Pour le calcul de $F_{nm}^j(\delta\mu)$ nous introduisons de nouvelles variables h_n^j, t_n^j , à l'aide desquelles nous écrivons l'expression (12) sous une forme plus simple :

$$u_{in}^j = h_n^j(r) x_i \omega_n^m + t_n^j(r) \frac{\partial \omega_n^m}{\partial x_i}, \quad (20)$$

où $\omega_n^m = r^n Y_n^m$ est un polynôme harmonique homogène de degré n , satisfaisant aux équations

$$\Delta \omega_n^m = 0, \quad x_i \frac{\partial \omega_n^m}{\partial x_i} = n \omega_n^m; \quad (21)$$

h_n^j, t_n^j sont simplement liés à $c H_n^j, T_n^j$:

$$h_n^j = H_n^j / r^{n+1} - n T_n^j / r^{n+2}, \quad t_n^j = T_n^j / r^n.$$

Avec ces notations nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \right) &= h_{n0}^j \omega_{n0}^m \frac{1}{r} \left[2r^3 h_n^{j'} \omega_n^m + 2r^2 h_n^j \omega_n^m + \right. \\ &+ 2 \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{r} \right) r^2 n \omega_n^m + 2 t_n^j x_i x_k \nabla_i \nabla_k \omega_n^m \left. \right] + h_{n0}^j \omega_{n0}^m \times \\ &\times \left[2r h_n^{j'} \omega_n^m + 6 h_n^j \omega_n^m + 2 \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{r} \right) n \omega_n^m + 2 t_n^j \nabla^2 \omega_n^m \right] + \\ &+ \left(h_{n0}^j + \frac{t_{n0}^j}{r} \right) \left(x_i \nabla_k \omega_{n0}^m + x_k \nabla_i \omega_{n0}^m \right) \left[h_n^j \frac{x_i x_k}{r} \omega_n^m + \right. \\ &+ h_n^j \omega_n^m \delta_{ik} + \frac{1}{2} \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{r} \right) \left(x_i \nabla_k \omega_n^m + x_k \nabla_i \omega_n^m \right) + t_n^j \nabla_i \nabla_k \omega_n^m \left. \right] + \\ &+ t_{n0}^j \nabla_i \nabla_k \omega_{n0}^m \left[2 h_n^{j'} \frac{x_i x_k}{r} \omega_n^m + 2 h_n^j \omega_n^m \delta_{ik} + \right. \\ &\left. + \left(h_n^j + \frac{t_n^j}{r} \right) \left(x_i \nabla_k \omega_n^m + x_k \nabla_i \omega_n^m \right) + t_n^j \nabla_i \nabla_k \omega_n^m \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (21) nous trouverons :

$$\begin{aligned} x_i \nabla_k \omega_{n0}^m \nabla_i \nabla_k \omega_n^m &= \nabla_i \left(x_k \nabla_i \omega_{n0}^m \nabla_k \omega_n^m \right) - \nabla_k \omega_n^m \left(x_k \nabla^2 \omega_{n0}^m + \right. \\ &+ \nabla_i \omega_{n0}^m \delta_{ik} \left. \right) = (n-1) \left(\nabla \omega_n^m, \nabla \omega_{n0}^m \right), \\ \omega_n^m x_i x_k \nabla_i \nabla_k \omega_{n0}^m &= \nabla_i \left(\nabla_k \omega_{n0}^m x_i x_k \omega_n^m - \nabla_k \omega_{n0}^m \right) \times \\ &\times \left(x_i x_k \nabla_i \omega_n^m + 3 x_k \omega_n^m + x_i \delta_{ik} \omega_n^m \right) = \nabla_i \left(n_0 \omega_{n0}^m x_i \omega_n^m \right) - \\ &- n n_0 \omega_n^m \omega_{n0}^m - 4 n_0 \omega_n^m \omega_{n0}^m = 3 n_0 \omega_{n0}^m \omega_n^m + n_0^2 \omega_n^m \omega_{n0}^m + \\ &+ n n_0 \omega_n^m \omega_{n0}^m = n_0 (n_0 - 1) \omega_n^m \omega_{n0}^m. \end{aligned}$$

Ainsi

$$-F_{nm}^j(\delta\mu) = \sum_{l,p} \iiint_v \left\{ \omega_l^p \omega_n^m \omega_{n_0}^{m_0} f_{nn_0}^{lp(1)}(r) + \omega_l^p \left(\nabla \omega_n^m \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \nabla \omega_{n_0}^{m_0} \right) f_{nn_0}^{lp(2)}(r) + \omega_l^p \left(\nabla_i \nabla_k \omega_n^m \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0} \right) f_{nn_0}^{lp(3)}(r) \right\} dv, \quad (22)$$

où

$$f_{nn_0}^{lp(1)}(r) = \frac{2\mu lp(r)}{r^l} \left\{ r^2 h_n^{j'} h_n^{0'} + r h_n^{j'} h_{n_0} + r h_n^j h_{n_0}' + \right. \\ \left. + nr h_{n_0}' \left(h_n^j + \frac{t_n^{j'}}{r} \right) + n_0 r h_n^{j'} \left(h_{n_0} + \frac{t_{n_0}'}{r} \right) + \frac{n(n-1)}{r} h_{n_0}' t_n^j + \right. \\ \left. + \frac{n_0(n_0-1)}{r} h_n^j t_{n_0}' + 3h_n^j h_{n_0} + n h_{n_0}' \left(h_n^j + \frac{t_n^{j'}}{r} \right) + n_0 h_n^j \left(h_{n_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{t_{n_0}'}{r} \right) + \frac{nn_0}{2} \left(h_{n_0} + \frac{t_{n_0}'}{r} \right) \left(h_n^j + \frac{t_n^{j'}}{r} \right) \right\}; \quad (23)$$

$$f_{nn_0}^{lp(2)}(r) = \frac{\mu lp(r)}{r^l} \left\{ \left(h_{n_0} + \frac{t_{n_0}'}{r} \right) \left(h_n^j + \frac{t_n^{j'}}{r} \right) r^2 + \right. \\ \left. + 2(n-1) t_n^j \left(h_{n_0} + \frac{t_{n_0}'}{r} \right) + 2(n_0-1) t_{n_0}' \left(h_n^j + \frac{t_n^{j'}}{r} \right) \right\};$$

$$f_{nn_0}^{lp(3)}(r) = \frac{2\mu lp(r)}{r^l} t_n^j t_{n_0}'.$$

nous avons ensuite

$$\iiint_v f_{nn_0}^{lp}(r) \omega_l^p \omega_n^m \omega_{n_0}^{m_0} = A_{lpnmn_0m_0} \times \\ \times \int_0^1 r^{l+n+n_0+2} f_{nn_0}^{lp(1)}(r) dr, \quad (24)$$

où $A_{lpnmn_0m_0}$ est déterminé par le rapport (19).

L'intégration suivant les variables angulaires dans les second et troisième termes (22) est un peu plus compliquée. Pour l'effectuer nous calculerons d'abord les intégrales

$$J_{n_0m_0nm}^{lp(1)} = \iiint_v \omega_l^p (\nabla \omega_n^m, \nabla \omega_{n_0}^{m_0}) dr,$$

$$J_{n_0m_0nm}^{lp(2)} = \iiint_v \omega_l^p (\nabla_i \nabla_k \omega_n^m \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0}) dv.$$

En intégrant $J_{n_0m_0nm}^{lp(1)}$ par parties et en utilisant les conditions (21) nous obtiendrons

$$J_{n_0m_0nm}^{lp(1)} + J_{lpnm}^{n_0m_0(1)} = n A_{lpnmn_0m_0}, \quad (25)$$

et également deux autres égalités qui sont obtenues par (25) par permutation cyclique des polynômes ω_l^p , ω_n^m , $\omega_{n_0}^{m_0}$. En résolvant ces égalités nous trouverons :

$$J_{n_0 m_0}^{lp(1)nm} = \frac{1}{2}(n+n_0-l) A_{lpnmn_0 m_0}. \quad (25a)$$

En intégrant $J_{n_0 m_0}^{lp(2)nm}$ par parties, nous obtiendrons

$$J_{n_0 m_0}^{lp(2)nm} = \iint_s x_i (\omega_l^p \nabla_k \omega_n^m \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0}) ds - J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)}, \quad (26)$$

où

$$J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)} = \iiint_v \nabla_i \omega_l^p \nabla_k \omega_n^m \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0}.$$

En tenant compte de (21) nous avons

$$x_i \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0} = \nabla_k \left(x_i \nabla_i \omega_{n_0}^{m_0} \right) - \nabla_i \omega_{n_0}^{m_0} \delta_{ik} = (n_0-1) \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \iint_s x_i \omega_l^p \nabla_k \omega_n^m \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0} ds &= (n_0-1) \iint_s \omega_l^p \left(\nabla \omega_n^m, \nabla \omega_{n_0}^{m_0} \right) ds = \\ &= (n_0-1)(l+n+n_0+1) J_{nmn_0 m_0}^{lp(1)} = \frac{1}{2}(n_0-1)(n+n_0-l)(l+n+n_0+1) \times \\ &\times A_{lpnmn_0 m_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

En intégrant $J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)}$ par parties, nous écrirons

$$\begin{aligned} J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)} + J_{lpn_0 m_0}^{nm(3)} &= \iint_s x_i \nabla_i \omega_l^p \left(\nabla \omega_n^m, \nabla \omega_{n_0}^{m_0} \right) ds = \\ &= l(l+n+n_0+1) J_{n_0 m_0}^{lp(1)nm}. \end{aligned}$$

En effectuant dans ce rapport une permutation cyclique $(l, p) \rightarrow (n, m) \rightarrow (n_0, m_0)$ et en déterminant de ce qu'on a obtenu ainsi les systèmes des trois équations $J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)}$ nous trouverons

$$\begin{aligned} J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)} &= \frac{1}{2}(l+n+n_0+1) \left(-n_0 J_{lpnm}^{n_0 m_0(1)} + l J_{nmn_0 m_0}^{lp(1)} + \right. \\ &\left. + n J_{lpn_0 m_0}^{nm(1)} \right), \end{aligned}$$

ou en substituant (25a)

$$J_{lpnm}^{n_0 m_0(3)} = \frac{1}{4}(l+n+n_0+1)(n_0^2 - n^2 - l^2 + 2nl) A_{lpnmn_0 m_0}. \quad (28)$$

En substituant (27) et (28) dans (26), nous obtiendrons

$$J_{n_0 m_0 n m}^{lp(2)} = \frac{1}{4}(l+n+n_0+1)(n_0+n-l)(n_0+n-l-2) \times \\ \times A_{lpnmn_0 m_0} \quad (29)$$

Connaissant les intégrales (25a) et (29) nous pouvons facilement intégrer (22) suivant les variables angulaires si on tient compte que la partie radiale des fonctions intégrées en (22) et (29) représente un polynôme homogène respectivement de degré $l+n+n_0-2$ et $l+n+n_0-4$. Si nous écrivons

$$J = \iiint_V r^N x(\theta, \phi) dv,$$

alors il est évident que

$$\iiint_V f(r) r^N x(\theta, \phi) dv = (N+3) J \int_0^1 f(r) r^{N+2} dr.$$

En utilisant cette relation et les intégrales (25a) et (29) nous obtiendrons

$$\iiint_V \omega_l^p \left(\nabla \omega_n^m, \nabla \omega_{n_0}^{m_0} \right) f_{nm_0 lp}^{(2)}(r) dv = \\ = \frac{1}{2}(l+n+n_0+1)(n+n_0-l) A_{lpnmn_0 m_0} \int_0^1 f_{nm_0 lp}^{(2)}(r) r^{l+n+n_0} dr; \quad (30)$$

$$\iiint_V \omega_l^p \left(\nabla_i \nabla_k \omega_n^m, \nabla_i \nabla_k \omega_{n_0}^{m_0} \right) f_{nm_0 lp}^{(3)}(r) dv = \\ = \frac{1}{4}(l+n+n_0+1)(l+n+n_0-1)(n_0+n-l)(n_0+n-l-2) \times \\ \times \int_0^1 f_{nm_0 lp}^{(3)}(r) r^{l+n+n_0-2} dr \quad (31)$$

et nous donnons l'expression finale (22) sous la forme :

$$-F_{nm}^j(\delta\mu) = \sum_{l,p} A_{lpnmn_0 m_0} \int_0^1 dr r^{l+n+n_0} \left\{ r^2 f_{nm_0 lp}^{(1)}(r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(l+n+n_0+1)(n_0+n-l) f_{nm_0 lp}^{(2)}(r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}[(l+n+n_0)^2 - 1](n_0+n-l)(n_0+n-l-2) \frac{1}{r^2} f_{nm_0 lp}^{(3)}(r) \right\}. \quad (32)$$

Ainsi $F_{nm}^j(\delta\mu)$ comme $F_{nm}^j(\delta\lambda)$ s'exprime par l'intégrale du produit des trois fonctions sphériques (19). Cela signifie que dans la somme (32) comme dans (18) il n'y a effectivement pas plus de six termes ($n-2 \leq l \leq n+2$; $p = m - m_0$ soit $p = m + m_0$) et la décomposition des ondes de marées à la surface de la Terre (2) tombe pour $n > l_0 + 2$, si dans la décomposition $\delta\mu(r, \theta, \phi)$ (17) il n'y a pas de termes avec $l > l_0$.

Pour de grandes valeurs de n toutes les intégrales (15) décroissent vers le centre de la Terre comme r^n . Cela signifie que les ondes d'ordres élevés dépendent uniquement des hétérogénéités horizontales dans la couche voisine de la surface, d'une épaisseur effective $\sim a/n$.

Dans un cas plus simple ($l = p = 0$) les formules (16a) (18) et (32) déterminent la variation des nombres de Love pour une variation faible, arbitraire des modèles sphériquement symétriques. Dans ce cas elles correspondent aux expressions correspondantes obtenues dans le travail (18).

3. Nous avons examiné les amplitudes des marées statiques à la surface de la Terre sphériquement non symétrique pour une certaine époque de temps fixée. Nous estimons les résultats obtenus pour les ondes de marées semi-diurnes, diurnes et zonales. Tenant compte de la dépendance du temps, le potentiel générateur de marée (1) sera écrit sous la forme

$$\begin{aligned} V_e &= V_{e_0} (r/a)^{n_0} P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta) \cos(\sigma t - m_0 \phi) = \\ &= V_{e_0} (r/a)^{n_0} \left[Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \phi) \sin \sigma t \right], \end{aligned} \quad (33)$$

où t est le temps; σ est la fréquence angulaire de la marée; $P_{n_0}^{m_0}$ le polynôme de Legendre;

$$Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) = P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta) \cos m_0 \phi; \quad Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \phi) = P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta) \sin m_0 \phi.$$

Dans le cas des marées zonales ($m_0 = 0$) l'expression (33) ne diffère de (1) que par un facteur $\cos \sigma t$. La solution statique non perturbée (\vec{U}^0, R^0), à cause de la linéarité du problème, est proportionnelle à la valeur V_e et a également en facteur $\cos \sigma t$. En supposant comme avant les solutions auxiliaires (\vec{U}^j, R) (12) ne dépendant pas du temps, nous obtiendrons par la relation (9) que les valeurs $\delta \vec{U}, \delta R/s$ dépendent du temps comme $\cos \sigma t$. Ainsi les ondes de marées engendrées par le potentiel générateur de marée zonal (par exemple de période deux semaines) ont la même phase et fréquence que le potentiel générateur de marées. Les hétérogénéités horizontales n'apparaissent que dans la dépendance des facteurs δ et γ en fonction du lieu de l'observation. Après quoi comme les coefficients $H_n^{m*}(a), R_n^{m*}(a)$ sont calculés d'après les formules (18), (32) et (16a) on détermine facilement la dépendance de δ et γ de θ, ϕ :

$$\Delta \delta(\theta, \phi) = \frac{1}{Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[H_n^{m*}(a) - \frac{n+1}{2} R_n^{m*}(a) \right] Y_n^m(\theta, \phi),$$

$$\Delta \gamma_i(\theta, \phi) = \frac{1}{\nabla_i Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [R_n^{m*}(a) - H_n^{m*}(a)] \nabla_i Y_n^m(\theta, \phi),$$
(34)

où $Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) = 3/2 \cos^2 \theta - 1/2$ pour $m_0 = 0$.

Si par les observations on connaît la dépendance δ et γ de θ, ϕ , on pourra résoudre le problème inverse : après avoir décomposé δ et γ en fonctions sphériques à l'aide de (34), trouver $H_n^{m*}(a), R_n^{m*}(a)$ c'est-à-dire les valeurs F_{nm}^j pour $j = 1$ et 3 . Connaissant les valeurs F_{nm}^j on peut, en résolvant les équations (18) et (32), essayer de déterminer les coefficients de la décomposition $\lambda_{lp}(r), \mu_{lp}(r)$ des hétérogénéités horizontales en fonctions sphériques. Ainsi chaque valeur F_{nm}^j donne une condition intégrale en r sur les coefficients cherchés.

Le choix du méridien initial est évidemment peu important. Les coefficients de décomposition des hétérogénéités horizontales en fonctions sphériques se déterminent dans le même système de coordonnées que nous choisissons lors de la décomposition de $\delta(\theta, \phi), \gamma(\theta, \phi)$.

Nous examinerons ensuite les ondes engendrées par le potentiel générateur de marée diurne ($m_0 = 1$) et semi-diurne ($m_0 = 2$).

A chaque instant les amplitudes des ondes de marées dans ce cas, comme précédemment, se déterminent par la décomposition (2). Cependant à cause de l'altération du bourrelet de marée par les hétérogénéités horizontales et à cause de la rotation de l'onde de marée pour $m_0 \neq 0$ il apparaît un effet nouveau : l'influence des hétérogénéités sur la phase des marées. Pour l'estimer nous écrirons la solution non perturbée pour le potentiel générateur de marée (33) :

$$\vec{u}^0 = \frac{\vec{r}}{r} H_{n_0}^{m_0}(r) [Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) \cos \sigma t + Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \phi) \sin \sigma t] +$$

$$+ T_{n_0}^{m_0}(r) [\cos \sigma t \nabla Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) + \sin \sigma t \nabla Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \phi)],$$
(35)

$$R^0 = R_{n_0}^{m_0}(r) [Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) \cos \sigma t - Y_{n_0}^{-m_0}(\theta, \phi) \sin \sigma t].$$

Les solutions auxiliaires (U^j , R^j) ne tiendront pas compte comme avant de celles dépendant du temps. En substituant (35) et (12) en (10) nous obtiendrons

$$\begin{aligned} F_{nm}^j(\delta\lambda, \delta\mu, t) &= F_{nm}^{j(1)}(\delta\lambda, \delta\mu) \cos \sigma t + F_{nm}^{j(2)}(\delta\lambda, \delta\mu) \sin \sigma t = \\ &= F_{nm}^{j(1)}(\delta\lambda, \delta\mu) \sqrt{1 + \text{tg}^2 \Psi_{nm}} \cos(\sigma t - \Psi_{nm}), \end{aligned} \quad (36)$$

où $F_{nm}^{j(1)}$ se détermine par les formules (18), (32) pour $m_0 = 1$ ou 2 et $F_{nm}^{j(2)}$ pour $m_0 = -1$ ou -2 ;

$$\text{tg} \Psi_{nm} = F_{nm}^{j(2)} / F_{nm}^{j(1)}, \quad (37)$$

On voit que la phase de chaque onde partielle diffère sensiblement de la phase du potentiel générateur de marée. En effet, dans la représentation (33), à la longitude zéro $\phi = 0$ amplitude V_e correspond l'époque de temps $t = 0$. La valeur F_{nm}^j (déplacement et variation du potentiel à la surface en relation avec elle d'après la formule (16a)) a une valeur d'amplitude à l'époque $t = \Psi_{nm} / \sigma$.

La valeur Ψ_{nm} n'est habituellement pas grande. Ainsi, par exemple dans le cas le plus simple, quand les hétérogénéités horizontales $\delta\lambda$ et $\delta\mu$ ne sont décrites que par un terme avec $\lambda = \lambda_0$, $\rho = \rho_0$ provenant de (18) et (32), nous obtiendrons

$$\text{tg} \Psi_{nm} = A_{l_0 p_0 n m n_0 - m_0} / A_{l_0 p_0 n m n_0 m_0}.$$

Cette relation pour les différentes valeurs n , m , λ_0 , ρ_0 peut varier de 0 à ∞ et ne diminue pas avec la diminution $\lambda_{l_0 p_0}^{(2)}$, $\mu_{l_0 p_0}^{(2)}$. La petitesse de l'écart de phase s'explique par la petitesse des amplitudes des ondes partielles mais non par la proximité de leur phase à la phase du potentiel générateur de marée.

C'est pourquoi on peut espérer que l'écart de phase, en radians, constitue dans le cas général une valeur du même ordre de grandeur que la relation des amplitudes des ondes partielles à l'amplitude de l'onde de base dans une Terre sphériquement symétrique c'est-à-dire du même ordre que les anomalies des facteurs δ et γ .

En faisant la somme des ondes partielles (2) on peut trouver l'amplitude complète et la phase des variations de marées de la pesanteur et des inclinaisons en différents points de la surface terrestre. Pour les variations des accélérations de la pesanteur au point de coordonnées θ , ϕ nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \delta g(\theta, \phi) = & -\frac{2V_{e_0}}{a} \left\{ \left[\delta P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta) \cos m_0 \phi + \chi_1(\theta, \phi) \right] \times \right. \\ & \left. \times \cos \sigma t + \left[\delta P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta) \sin m_0 \phi + \chi_2(\theta, \phi) \right] \sin \sigma t \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

où

$$\begin{aligned} \chi_1(\theta, \phi) = & \frac{1}{c} \sum_{n,m} Y_n^m(\theta, \phi) \left(F_{nm}^{(j=1)(1)} - \frac{n+1}{2} F_{nm}^{(j=3)(1)} \right); \\ \chi_2(\theta, \phi) = & \frac{1}{c} \sum_{n,m} Y_n^m(\theta, \phi) \left(F_{nm}^{(j=1)(2)} - \frac{n+1}{2} F_{nm}^{(j=3)(2)} \right); \end{aligned} \quad (39)$$

C est déterminé par la formule (16b). Pour déterminer les inclinaisons il faut remplacer la valeur $-(2V_{e_0}/a)\delta$ par Φ_{OY} (Φ_0 est l'amplitude des inclinaisons sur la Terre absolument rigide. $\gamma = 1 + k - h$ et $\chi_1(\theta, \phi)$ et $\chi_2(\theta, \phi)$ respectivement par $\bar{\chi}_1(\theta, \phi)$ et $\bar{\chi}_2(\theta, \phi)$ où

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_1(\theta, \phi) = & \frac{1}{c} \sum_{n,m} \nabla Y_n^m(\theta, \phi) \left(F_{nm}^{(j=3)(1)} - F_{nm}^{(j=1)(1)} \right); \\ \bar{\chi}_2(\theta, \phi) = & \frac{1}{c} \sum_{n,m} \nabla Y_n^m(\theta, \phi) \left(F_{nm}^{(j=3)(2)} - F_{nm}^{(j=1)(2)} \right). \end{aligned} \quad (39a)$$

Avec une erreur de l'ordre des carrés $\chi_1, \chi_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2$ l'expression (38) peut être écrite également sous la forme

$$\begin{aligned} \delta g(\theta, \phi) = & -\frac{2V_{e_0}}{a} \left[\delta P_{n_0}^{m_0}(\theta, \phi) + \alpha(\theta, \phi) \right] \times \\ & \times \cos(\sigma t - m_0 \phi - \beta(\theta, \phi)), \end{aligned} \quad (40)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, \phi) = & \chi_1(\theta, \phi) \cos m_0 \phi + \chi_2(\theta, \phi) \sin m_0 \phi; \\ \beta(\theta, \phi) = & \frac{\cos m_0 \phi \chi_2(\theta, \phi) - \sin m_0 \phi \chi_1(\theta, \phi)}{\delta P_{n_0}^{m_0}(\cos \theta)} \end{aligned} \quad (41)$$

et de façon analogue (avec le changement $-2V_{e_0} \delta/a$ par Φ_{OY} , χ_1 par $\bar{\chi}_1$, $\bar{\chi}_2$ par χ_2) pour les inclinaisons.

Ainsi pour les ondes diurnes et semi-diurnes, les phases et les amplitudes des variations de marées de la pesanteur et des inclinaisons se déterminent à une décimale par la répartition des hétérogénéités horizontales. Comme dans le cas des ondes zonales, le choix du méridien zéro dans la décomposition (39) se détermine par le fait que dans chaque système de coordonnées on effectue la décomposition des hétérogénéités horizontales (17).

Si par les observations on connaît les valeurs $\alpha(\theta, \phi)$, $\beta(\theta, \phi)$ en différents points de la surface alors d'après la formule (41) on peut déterminer $\chi_1(\theta, \phi)$, $\chi_2(\theta, \phi)$ ou $\bar{\chi}_1(\theta, \phi)$, $\bar{\chi}_2(\theta, \phi)$ et ensuite d'après la formule (39) les coefficients $F_{nm}^{j(1)}$, $F_{nm}^{j(2)}$ pour $j = 1, 3$. Après cela pour les ondes zonales les relations (18), (32) peuvent être employées pour la détermination de $\lambda_{lp}(r)$, $\mu_{lp}(r)$.

BIBLIOGRAPHIE

- JARKOV V.N., LOUBIMOV V.M., Théorie des oscillations torsionnelles pour les modèles de Terre sphériquement non symétriques.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1970, N° 2, pp. 3 à 14.
- JARKOV V.N., LOUBIMOV V.M., Théorie des oscillations sphéroïdales pour les modèles de Terre sphériquement non symétriques.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1970, N° 10, pp. 3 à 12.
- MADARIAGA R., AKI K., Spectral splitting of toroidal-free oscillations due to lateral heterogeneity of the Earth's structure.
J. Geophys. Res., 1972, 77, p. 4421-4431.
- LUH P.C., The normal modes of the rotating self-gravitating inhomogeneous Earth.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1973, 32, p. 187-202.
- DAHLEN F.A., Inference of the lateral heterogeneity of the Earth from the eigenfrequency spectrum.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, 38, p. 143-167.
- DAHLEN F.A., Models of the lateral heterogeneity of the Earth consistent with Eigenfrequency splitting data.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, 44, p. 77-105.
- PERTSEV B.P., IVANOVA M.V., Corrections aux marées océaniques pour la fréquence de M_2 dans les observations gravimétriques de marées terrestres en Europe.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1975, N° 12, pp. 82-83.
- PARIYSKY N.N., PERTSEV B.P., SARICHEVA Yu.K. et al., A note concerning regional variations in the gravity factor δ .
In : Proceedings of the Seventh International Symp. on Earth Tides. Sopron, 1976, p. 571-577.

- KUO I.T., JACHENS R.C., WHITE C., EWING M., Tidal gravity measurements along a transcontinental profile across the USA.
Commun. Observ. roy. Belg., 1970, A 9, N 96, p. 50-59.
- PERTSEV B.P., Influence des marées océaniques des zones voisines sur les observations de marées terrestres.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1976, N° 1, pp. 13 à 22.
- LEIBENSON L.S., Cours sur la théorie de l'élasticité.
M. Edit. de l'état, 1947, p. 464.
- MOLODENSKII S.M., Sur l'influence des hétérogénéités horizontales du manteau sur les amplitudes des ondes de marées.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1977, N° 2, pp. 3 à 8.
- MOLODENSKII S.M., Sur la liaison des nombres de Love avec les coefficients de surcharge.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre. 1977, N° 3, pp. 3 à 7.
- LONGMAN I., A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads.
J. Geophys. Res., 1963, 68, N 2, p. 485-496.
- MOLODENSKII M.S., Marées élastiques, nutation libre et certains problèmes de la structure de la Terre.
Trav. de l'Inst. de Géophys. 1953, N° 19 (146), pp. 3 à 52.
- DAHLEN F.A., Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1972, 28, p. 357-383.
- EDMONDS A.R., Angular momentum in quantum mechanics.
New Jersey : Princeton Univ. Press, 1960, p. 19-25, 45-51.
- MOLODENSKII S.M., Sur la fonction de Green pour les équations des déformations élastiques sphéroïdales de la Terre.
Izv. Ac. Sc. URSS. Physique de la Terre, 1976, N° 11, pp. 7 à 12.

INFLUENCE DE LA NUTATION FORCÉE DE LA TERRE SUR LES
RESULTATS DES OBSERVATIONS DE MAREES

S.M. MOLODENSKII

Etude des Marées Terrestres, Nauka, pp. 36-40, Moscou 1980.

Pour déterminer les nombres de Love avec une précision de plus de 1 % par rapport aux résultats des mesures de marées on doit ajouter les corrections de l'influence des forces d'inertie aussi bien sur la marée dans le corps de la Terre que directement sur les indications de l'instrument. Dans le travail {1} on a tenu compte de l'influence des forces d'inertie apparaissant lors de la rotation régulière de la Terre, sur le gravimètre et le clinomètre. Dans cette remarque on note l'influence de l'irrégularité de rotation de la Terre sur les indications des instruments enregistreurs de marées.

Comme on le sait, les marées semi-diurnes n'exercent pas d'influence sur la rotation de la Terre de révolution. C'est pourquoi nous nous limiterons plus loin à l'examen des marées presque diurnes provoquant la précession et la nutation forcée de la Terre et également des marées à longue période provoquant la variation de la durée du jour.

Pour évaluer l'influence de la nutation sur les observations de marée nous écrirons l'accélération absolue du vecteur \vec{r} dans un système arbitraire cartésien de coordonnées (x, y, z) tournant irrégulièrement avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$:

$$\frac{D^2 \vec{r}}{Dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2[\vec{\omega} \dot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + [\dot{\vec{\omega}} \dot{\vec{r}}], \quad (1)$$

où D/Dt désigne la différentiation en temps dans le système inertiel; le point représente une différentiation en temps dans le système en rotation; le produit vectoriel est désigné par les crochets.

Identifions les axes x, y, z avec les axes principaux du tenseur d'inertie de la Terre de sorte que l'axe z coïncide avec le grand axe de l'ellipsoïde d'inertie. Alors les composantes $\vec{\omega}$ suivant les axes x, y, z seront les suivantes :

$$\vec{\omega} = \omega(\epsilon \cos \omega t; \epsilon \sin \omega t; 1), \quad (2)$$

où ω ne dépend pas du temps et pour de petites valeurs de ϵ est égal à $|\dot{\vec{\omega}}|$; ϵ est l'amplitude de la nutation décrite dans le système mobile. Le mouvement du vecteur $\vec{\omega}$ par rapport aux axes x, y, z (2) est provoqué par le potentiel

générateur de marée quasi diurne V :

$$V = V_0(r/a)^2 Z. \quad (3)$$

Ici a est le rayon moyen de la Terre, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

$$Z = P_2^1(\cos\theta)\cos(\sigma t - \phi),$$

P_2^1 est le polygone de Legendre, θ est la colatitude, ϕ la longitude, t le temps, σ la fréquence angulaire de la marée quasi diurne.

Nous désignerons par ϵ_0 la valeur de ϵ pour une Terre absolument rigide sans noyau liquide. Pour ϵ_0 et V_0 on peut obtenir une relation connue par l'équation d'Euler du moment de quantité de mouvement \vec{M} :

$$\dot{\vec{M}} + [\vec{\omega} \vec{M}] = \vec{L}, \quad (4)$$

où

$$\vec{L} = \iiint_V \rho [-\text{grad} V \vec{r}] dv = \frac{3(C-A)V_0}{a^2} (\vec{i} \sin \sigma t - \vec{j} \cos \sigma t) \quad (5)$$

est le moment des forces extérieures; C , A sont les moments d'inertie de la Terre suivant les axes principaux. Pour s'assurer de l'exactitude de (5) il suffit après avoir représenté V suivant les coordonnées (x, y, z) :

$$V = (3V_0/a^2)z(x\cos\sigma t + y\sin\sigma t),$$

de projeter (5) suivant les coordonnées et de tenir compte de ce que le tenseur d'inertie a un aspect diagonal.

En coordonnées (x, y, z) le moment \vec{M} est lié à $\vec{\omega}$ par la relation

$$\vec{M} = (A\omega_x; A\omega_y; C\omega_z). \quad (5a)$$

Après avoir substitué (5a) et (5) en (4) et en résolvant les équations obtenues par rapport à $\vec{\omega}$ il est facile de s'assurer que dans le cas d'une Terre absolument rigide, $\vec{\omega}$ a en effet la forme (2) avec une précision relative de l'ordre de la déformation.

$$\epsilon_0 = - \frac{3(C-A)V_0}{Aa^2\omega\sigma} = -2,85 \frac{\omega}{\sigma} \frac{V_0}{ga}. \quad (6)$$

En (6) on a pris les valeurs numériques $(C-A)/A \approx (C-A)/C = 1/305$; $\omega^2 a/g = 1/290$.

Les amplitudes ϵ pour la Terre réelle avec un noyau liquide sont calculées, en particulier, dans le travail {2}. Les différences entre ϵ et ϵ_0 dues à l'effet de la nutation forcée atteignent $\sim 10\%$ et seront ensuite prises en considération.

Connaissant le vecteur $\vec{\omega}$ nous évaluerons les forces d'inertie en relation avec la nutation agissant sur l'instrument. En substituant (2) en (1) nous obtiendrons avec une précision jusqu'aux termes du deuxième ordre.

$$\begin{aligned}
2[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}] &= 2[\omega_0\dot{\vec{r}}], \\
[\dot{\vec{\omega}}[\vec{\omega}\vec{r}]] &= [\dot{\vec{\omega}}_0[\vec{\omega}_0\vec{r}]] - \text{grad}\Phi, \\
[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}] &= \epsilon\omega\sigma(z\cos\sigma t; z\sin\sigma t; -x\cos\sigma t - y\sin\sigma t) = \\
&= \epsilon\omega\sigma(-\text{grad}\Phi + 2\vec{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}),
\end{aligned}$$

où $\vec{\omega}_0$ ne dépendant pas du temps, la partie du vecteur $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega}_0 = \omega(0; 0; 1);$$

\vec{k} - vecteur unitaire, orienté le long de l'axe Z;

$$\Phi = -\epsilon\omega^2(zx\cos\sigma t + zy\sin\sigma t).$$

En faisant la somme des termes écrits nous obtiendrons une expression analogue à la formule (6) venant de {2} :

$$\frac{D^2\vec{r}}{Dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}] + [\vec{\omega}_0[\vec{\omega}_0\vec{r}]] - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \text{grad}\Phi + \vec{k} \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Ici les trois premiers termes décrivent les accélérations liées aux accélérations relatives et à la rotation régulière de la Terre et les deux dernières des accélérations liées à la nutation.

Pour tenir compte de l'influence de la nutation sur les indications du gravimètre nous calculerons les composantes radiales des deux derniers termes de l'expression (7). Après avoir multiplié les deux derniers termes (7) scalairement par \vec{r}/r et en tenant compte que $\partial\Phi/\partial r = 2\Phi/r$, $(\vec{k}, \vec{r}) = z$, $z\partial\Phi/\partial z = \Phi$, nous obtiendrons

$$\frac{1}{r} \left(\vec{r}, \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2} \right)_{\text{nut}} = \left(-\frac{2(\sigma + \omega)}{\omega} + \frac{2\sigma}{\omega} \right) \frac{\Phi}{r} = -\frac{2\Phi}{r}.$$

Après avoir écrit Φ sous la forme

$$\Phi = -\frac{\epsilon_0}{3} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \omega^2 r^2 z,$$

Après avoir substitué la valeur ϵ_0 tirée de (6) et tenant compte que l'accélération inertielle Δg_{nut} est égale à l'accélération absolue prise avec le signe inverse nous trouverons

$$\Delta g_{\text{nut}} = -1,90 \frac{V_0}{ga} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega}{\sigma} \omega^2 a z. \quad (8)$$

L'expression (8) montre que l'effet de la nutation sur le gravimètre se ramène à ce que le facteur gravimétrique δ diminue de

$$\Delta\delta = -1,90 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega}{\sigma} \frac{\omega^2 a}{2g} = -3,28 \cdot 10^{-3} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\omega}{\sigma} \quad (9)$$

(cette valeur est positive, puisque $\omega/\sigma \approx -1$). Pour éliminer l'influence de la nutation sur les mesures gravimétriques il faut ajouter la valeur (9) à la valeur observée δ . Les valeurs numériques des corrections (9) pour les ondes

principales semi-diurnes sont données dans la table (les relations ϵ/ϵ_0 sont tirées du travail {2} pour le modèle II de la Terre).

Corrections $\Delta\delta_{nut.}$ pour les ondes près du diurne

Onde	ω/σ	ϵ/ϵ_0	$\Delta\delta_{nut.} \cdot 10^3$
K_1-N	-1,000	0,997	3,27
O_1	-0,927	1,022	3,11
K_1+N	-1,000	1,003	3,29
OO_1	-1,073	1,071	3,77
P_1	-0,995	1,032	3,37
Ψ_1	-1,005	1,079	3,56

Les composantes tangentielles de l'accélération

$$a_t = \left(\frac{\sigma + \omega}{\omega} g \text{grad}\Phi - \frac{2\sigma}{\omega} \vec{k} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_t \quad (10)$$

déterminent l'effet de nutation sur le clinomètre. Le premier terme en (10) a la même dépendance des coordonnées que le potentiel générateur de marée et c'est pourquoi en tous les points de la surface de la Terre il peut être pris en considération par l'introduction d'une correction constante à γ :

$$\Delta\gamma_1 = \frac{ag}{V_0} \frac{\sigma + \omega}{\omega} \frac{\epsilon}{3} \frac{\omega^2 a}{g} = -0,33 \cdot 10^{-2} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\sigma + \omega}{\sigma} \quad (11)$$

la même dans les directions Est-Ouest et Nord-Sud. Puisque la relation $(\omega + \sigma)/\omega \leq 1/14$ pour toutes les ondes diurnes, le second terme en (10) ne contenant pas cette relation dépasse sensiblement la correction (11).

Le vecteur \vec{k} a une composante uniquement dans la direction Nord-Sud égale à $-\sin\theta \cdot \vec{e}_\theta$ où \vec{e}_θ est dans la direction de croissance de θ . C'est pourquoi le second terme en (10) n'influence la valeur γ que dans la direction Nord-Sud. La correction correspondante $\Delta\gamma_2$ dépend de θ et ne dépend pas de ϕ . Elle est égale à

$$\Delta\gamma_{2C-10} = -\frac{ag}{V_0} \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\epsilon\omega^2}{3g} \frac{\sin^2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2}{305} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{\cos 2\theta} \quad (12)$$

$$\Delta\gamma_{2B-3} = 0.$$

Au pôle et à l'équateur, où les inclinaisons quasi diurnes atteignent leur valeur maximale, $\Delta\gamma_{2N-S}$ a respectivement les valeurs 0 et $2/305$ ou $\sim 1\%$ de γ . Lors de l'approche des points de latitude $90^\circ - \theta = 45^\circ$, la relation

$\Delta\gamma_2$ N-S/ γ peut atteindre encore de plus grandes valeurs. Les valeurs précises de la correction $\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2$ pour les différentes ondes diurnes à diverses latitudes sont faciles à calculer à l'aide des formules (11), (12) et des valeurs ϵ/ϵ_0 , ω/σ de la table.

Le dernier effet non pris en considération précédemment consiste en une variation périodique de la force centrifuge pour les ondes à longue période en relation avec la variation au moment de l'accélération

$$-\{\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]\} - \{\vec{\omega}\vec{r}\} \quad (13)$$

au point fixé \vec{r}_0 . Pour les ondes à longue période le second terme en (13) renferme un petit facteur $|\sigma| \ll \omega$ c'est pourquoi le premier terme joue un rôle important.

Après avoir utilisé la relation

$$\frac{\Delta C}{C} = -\frac{2}{3} \frac{a^3 k V_0}{CG} = -2,02 \frac{k V_0}{g a}, \quad (14)$$

où ΔC est la variation de marée du moment d'inertie C ; $k = 0,30$ est le nombre de Love; G est la constante de gravitation; $V_0 P_Z^0(\cos \theta) r^2/a^2$ est le potentiel générateur de marée à une époque donnée de temps, nous écrivons

$$-\{\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]\} = -\{\vec{\omega}_0[\vec{\omega}_0\vec{r}]\} \left(1 + \frac{2\Delta\omega}{\omega}\right). \quad (15)$$

Pour les marées zonales le moment de la quantité du mouvement est conservé c'est pourquoi

$$\Delta\omega/\omega = -\Delta C/C. \quad (16)$$

Après avoir substitué (13) et (16) en (15) nous trouvons le vecteur accélération

$$\vec{a} = -4,04 \frac{k V_0}{g a} [\omega_0[\omega_0\vec{r}]]. \quad (17)$$

La partie radiale de (17) détermine la correction au facteur gravimétrique δ :

$$\Delta\delta = 0,21 \cdot 10^{-2} \frac{\sin^2 \theta}{3/2 \sin^2 \theta - 1}, \quad (18)$$

qu'il faut ajouter à la valeur observée δ . Au pôle et à l'équateur où les variations à longue période de la pesanteur atteignent un maximum, la correction (17) atteint respectivement 0 et 0,42 %.

La composante tangentielle

$$a_\theta = 4,04 \frac{k V_0 \omega^2}{g} \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\theta$$

détermine la correction au facteur clinométrique γ_{N-S} , la même dans tous les points de la surface de la Terre.

$$\Delta\gamma_{C-K} = 0,14 \cdot 10^{-2}, \text{ или } = 0,2\% \text{ от } \gamma. \quad (19)$$

En comparant les estimations obtenues ici avec une précision moyenne actuelle des mesures de marées ($\sim 0,2\%$ pour δ et $\sim 1\%$ pour γ) on peut tirer la conclusion que l'influence de la nutation sur les valeurs δ et γ_{N-S} et également l'influence des variations de la vitesse de rotation de la Terre dépassent sensiblement les erreurs de mesures de δ et par conséquent doivent être prises en considération lors de la réduction des observations de marées.

L'auteur remercie N.N. Pariiskii pour son aide et ses précieuses remarques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Pariiskii N.N., Pertsev B.P., Influence des forces d'inertie sur les variations de marée observées de la force de pesanteur et des inclinaisons. Ce fascicule pp. 22 à 35.
2. Molodenskii M.S., Théorie de la nutation et des marées terrestres diurnes. Dans le livre "marées terrestres et nutation de la Terre" M. Edit. Ac. des Sc. d'URSS, 1961, pp. 3 à 25.

PARAMETRIZATION OF THE TIDAL TRIGGERING OF EARTHQUAKES

M. Van Ruymbeke, B. Ducarme, M. De Becker
Royal Observatory of Belgium, Bruxelles

Abstract: On the basis of the complete catalogue of epicenter data for the period (1961-1970) having magnitudes higher or equal than $m = 3.5$, we compare the time of occurrence of all the earthquakes to a semi-diurnal M_2 Tidal Clock and determine a phase value. For each subregion of the Flinn-Engdahl classification the distribution of these phases in 25 sectors is developed in Fourier series. We study the variations of the phase $\phi(M_2)$ of the first harmonic and the amplitude ratio T_{42} between the second and the first harmonic. In several regions we observe a clear correlation between these parameters and the main tectonic features.

Keywords: Tidal Triggering of Earthquakes, Regional distribution of seisms, Alaska - Aleutians, Japan - Kurils - Kamchatka, Central America, Taiwan - Philippines, California - Nevada.

" A bad earthquake at once destroys our oldest associations: the earth, the very emblem of solidity, has moved beneath our feet like a thin crust over a fluid The great shock took place at the time of low water...".

Section of "The voyage of the Beagle"
by Charles Darwin about the earthquake of
February 20, 1835, at Concepcion, Chile.

1. Introduction

In their attempt to foresee natural catastrophes, men have tried to understand what might trigger earthquakes and volcanic eruptions. The largest short-period oscillatory stress in the earth's crust is due to solar and lunar tides: they produce quasi-periodic stresses with amplitudes up to 10^{-2} bar at a maximum rate of 10^{-5} bar/s . So it was suggested that they could play a role in triggering slowly accumulating tectonic stress. As the location of a volcano is usually well defined, and, at least in some cases, crude stress accumulation rates are known, it have been relatively easy to investigate correlations between tides and volcanic activity. Mauk & Johnston (1973) and Hamilton (1973) found tidal periodicities in volcanic eruptions.

Some phenomena analysed by S.R. Mc Nutt and R.J. Beavan (1981) about correlations between volcanic earthquakes and earth tides at Pavlof Volcano, Alaska are confirming the results found for this region by our method.

Even investigations made about tidal influences on lunar seismic and volcanic activity produced some encouraging results: (Sadeh & Wood 1978), (Chapman 1967).

For the study of the tidal triggering of earthquakes, one of the main problems concerns the choice of the method and of the data set. Most of the studies about correlations between tides and earthquakes on a worldwide basis furnished inconclusive or negative results: (Shlien 1972), (Knopoff 1970), (Simpson 1967), (Sadeh 1978), (Hunter 1978).

Better results have been obtained when the investigators considered the seismic history of a small region or earthquake sequences of a few months: (Mohler 1980), (Berg 1966), (Ryall et al. 1968), (Mauk & Kienle 1973), (Sauck 1975). Nevertheless, in some other works on a regional scale, the occurrence of earthquakes appeared random with respect to the tides: (Knopoff 1964), (Schudde & Barr 1977).

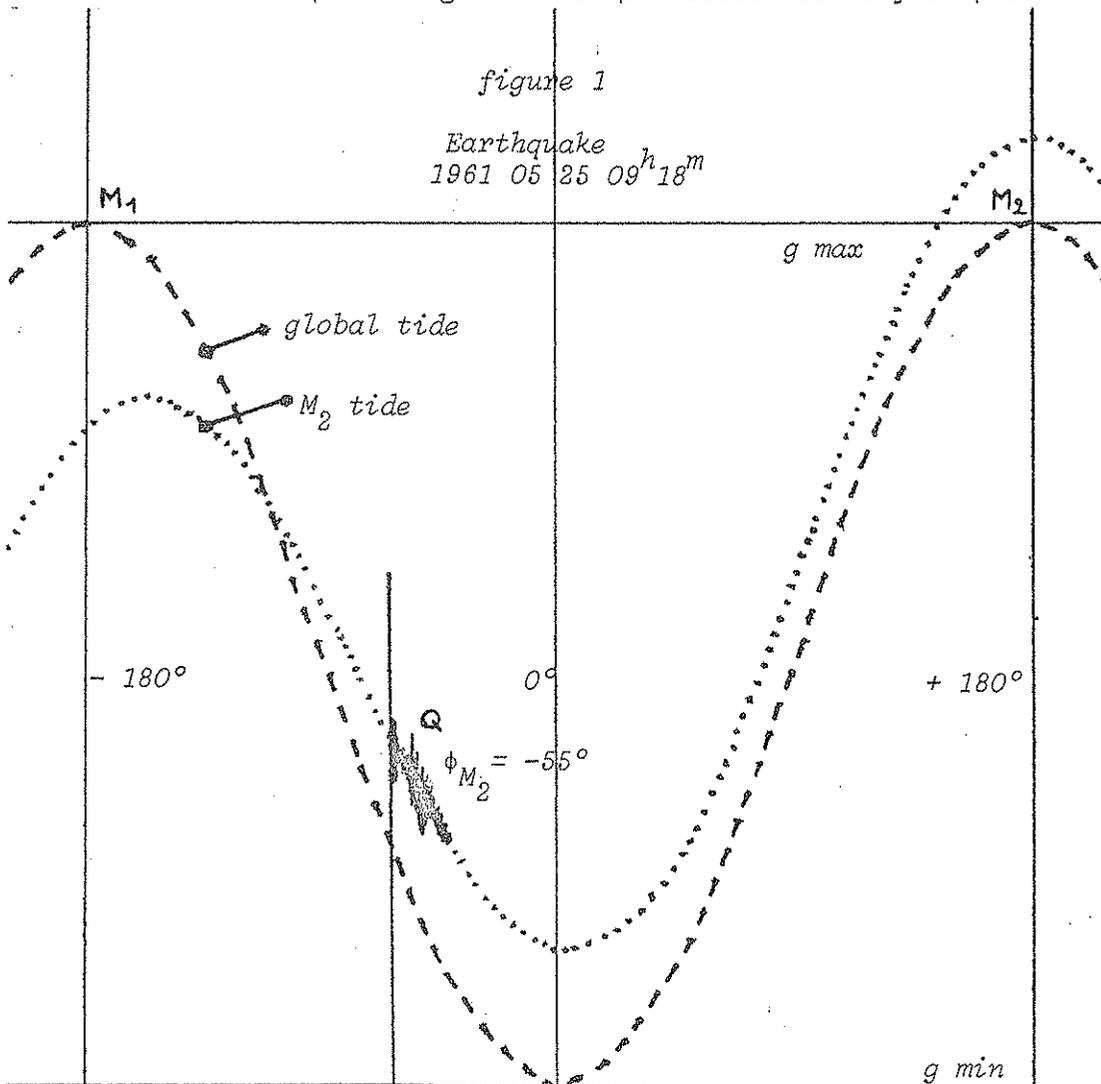
Even in the papers supporting tidal triggering, the authors cannot find a convenient explanation of the phenomenon.

In the last few years, T.H. Heaton (1975) proposed the dilatancy-diffusion model to combine tidal stresses and failure processes of the earth's crust. In this model, it was predicted that rocks strain non-linearly prior to an earthquake: there would be not only a change with time in the amplitude of tidal strain due to non-linearity but also, a change with time in the shape and phase of tidal strains due to apparent anisotropy caused by non-linearity. Moreover, it was also predicted that the time period of anomalous seismic velocity associated with an earthquake is an exponential function of the magnitude of the ensuing earthquake. This model tried to explain correlations between tidally generated shear stresses which are sympathetic to failure and shallow oblique-slip and dip-slip earthquakes whose magnitude is greater than five. Applying this theory to 70 earthquakes ($M_S \geq 5.0$) produced in China since 1957, Gao et al. (1980) put into evidence a certain effect of the maximum tidal shear stress on the triggering of earthquakes. Tidal shear stress along the dislocation vector of a fault played an even more evident part. In this application, the phase of the maximum shear stress correlated well with the oblique-slip earthquakes.

2. Preliminary investigation

In 1976 M. Van Ruymbeke installed a La Coste-Romberg gravity meter in Noumea for tidal recordings [Melchior & alii 1978]. As usual earthquakes were recorded too and from their aspect it was possible to discriminate roughly short distance events. Eight such events were recorded during the first month which show a clear correlation with the extreme of the tidal curve.

To get a quantitative evaluation of this personal feeling we decided to measure the position of the earthquake with respect to the nearest tidal maximum (minimum of g , figure 1), as we know that a correlation with respect to the tidal amplitude itself is incorrect. Due to the semi-diurnal characteristics of the gravimetric tides in equatorial and subtropical regions this procedure was very simple.



We introduced the parameter α defined as

$$\alpha = \frac{Q M_1}{M_1 M_2} \cdot 360^\circ \quad (1)$$

By plotting the α values on a polar graph we obtained the figure 2a where 360° corresponds to 12.42h.

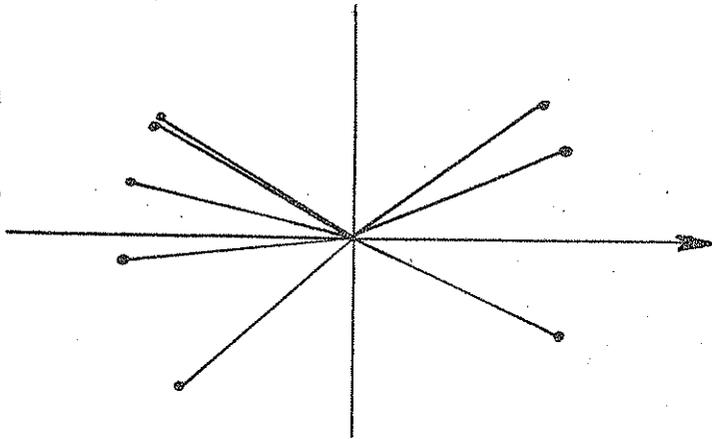


FIGURE 2a

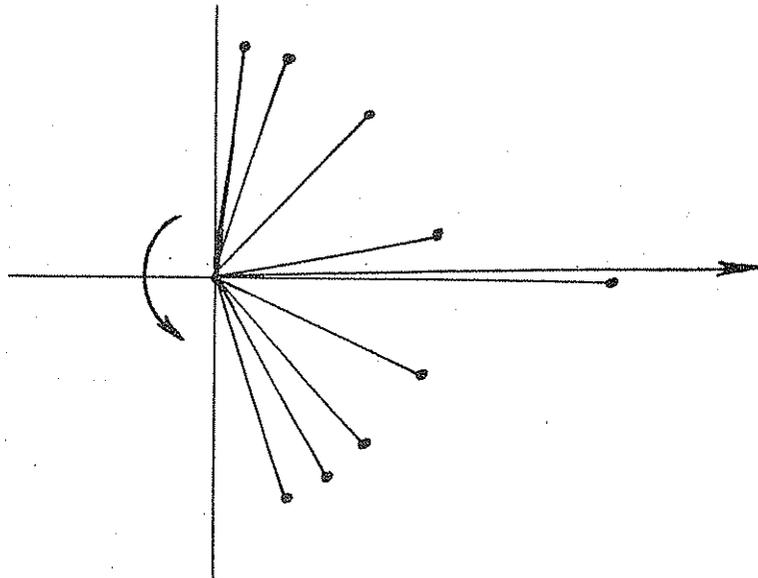


FIGURE 2b

From the repartition of the events it seemed interesting to plot a second graph with

$$\alpha_2 = 2\alpha$$

corresponding to a periodicity of 6.21h. We obtained figure 2b characterized by an accumulation of earthquakes in the sector

$$-90^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$$

We extended our investigation to the complete six months of registration (figures 3,4). The same tendency was confirmed.

The same method of classification of the earthquake occurrence was applied on the records obtained in Lauder (New Zealand), Port Moresby (Papua), Manila and Kuala Lumpur. Everywhere correlations appeared but the repartitions were not similar. It seemed that the mechanisms were essentially different.

3. Generalisation of the Method

Of course this preliminary study was very crude as we correlated the earthquakes with the tidal phase at the recording station and not at the epicenter. As the identification of the recorded events was not easy we decided to work directly on earthquake epicenters stored on magnetic tape for the period 1961-1970 for magnitude larger than 3.5.

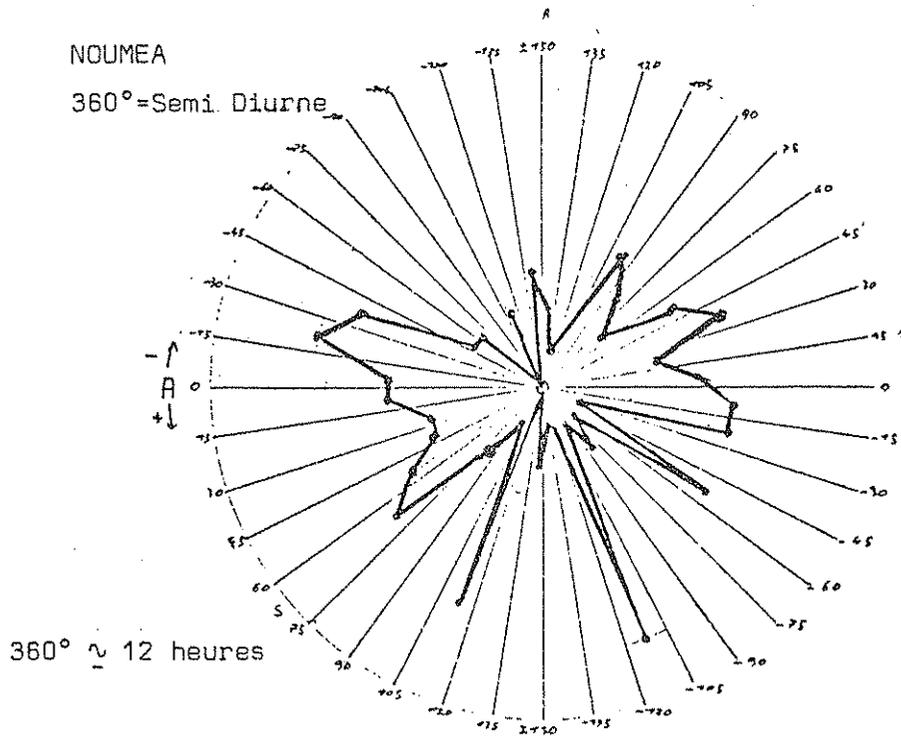


FIGURE 3

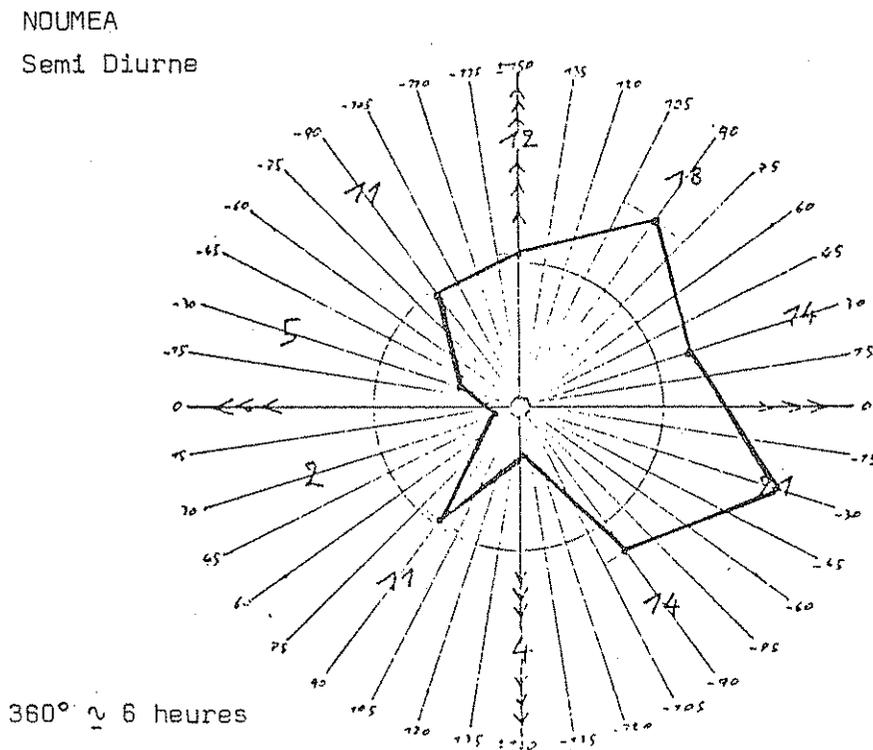


FIGURE 4.

We adopted the classification of E. Flinn and E. Engdahl (1965) for the geographical regionalization.

As we treat all available data in each subregion, we do not consider fault parameters to find the best azimuth for the computation of the tidal strain. So we are restricted to evaluate the cubic dilatation or hydrostatic stress which are directly proportional to the tidal potential and to the gravimetric tides. We also introduce the principle of "tidal clocks". If the occurrence of some earthquakes is linked to the tidal forces we must find tidal periodicities in the data.

For each event we compute the gravimetric tide (in phase with the tidal cubic strain). By successive approximations we determine the position of the nearest maximum of g and the distance between two successive maxima in order to compute α from (1). We ensure a precision of 1° on α . At low latitude, it is a semi-diurnal clock.

For latitudes higher than 50° the diurnal inequality of tides is such that the value of α can reach $\pm 230^\circ$ in exceptional conditions. We believe that we should not apply the global technique for regions above 40° .

These are the reasons why after preliminary computations we decided to adopt a tidal clock tuned on the main semi-diurnal component M_2 .

To avoid any distortion due to sequences of seisms we eliminate any earthquake occurring less than one hour after the preceding one.

We divide the trigonometric circle in 24 sectors of 15° degrees and sum up all earthquakes appearing in the same sector. We obtain a new repartition x_i ($1 \leq i \leq 24$).

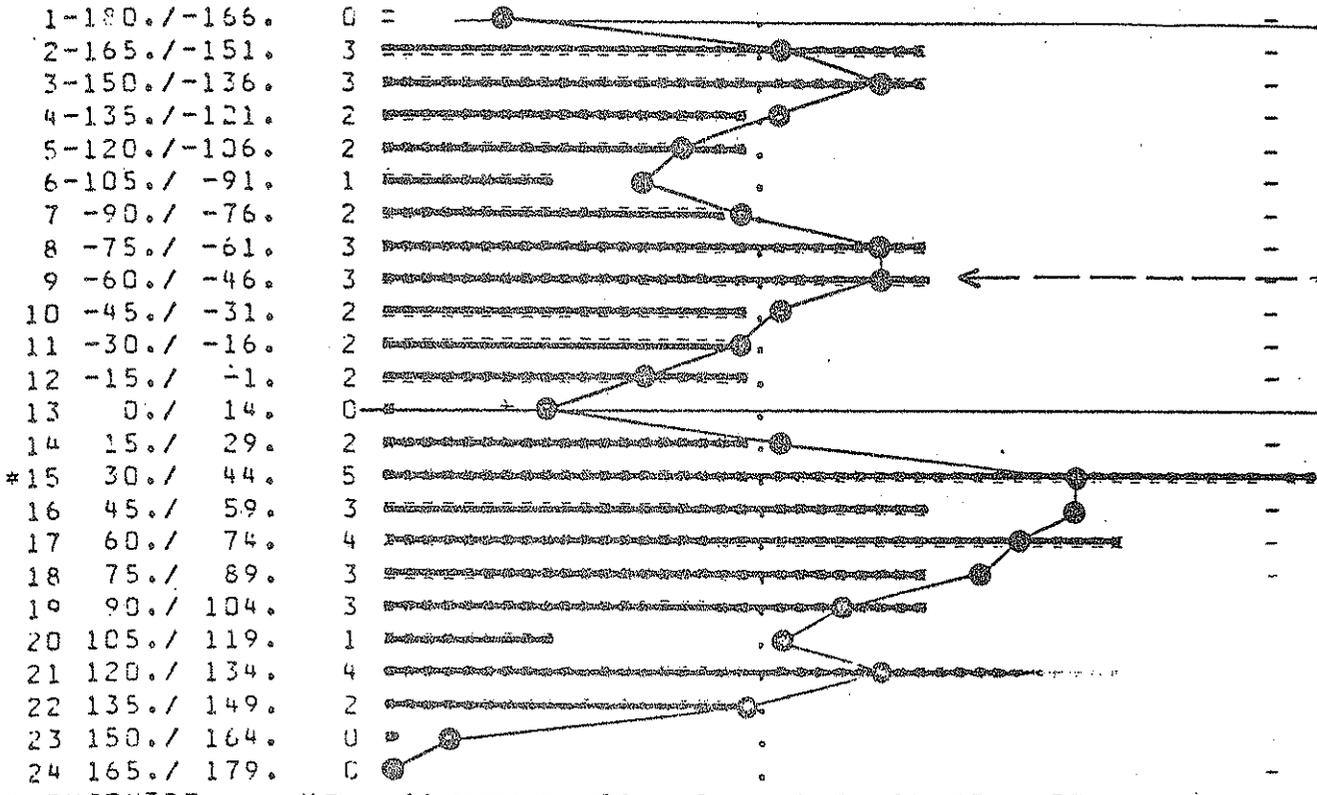
As the division in sectors may introduce spurious edge effects we apply a Hamming filter on the raw number of earthquakes. We obtain a new distribution

$$X_i = \frac{1}{4} (x_{j-1} + 2x_j + x_{j+1})$$

Besides the polar graph we plot also a linear representation (fig.5). We can plot also the repartition for any multiple $j\alpha$ of the original phase α_1 ; we introduce the notation

$$x_i(j\alpha), X_i(j\alpha)$$

VALEUR MOYENNE 2.17 SUR 52 SEISMES
 ECART TYPE .90



BARYCENTRE X= .115 T= .084 R= .145 PHASE 35.
 FACTEUR DE QUALITE .67+00

N COEFF. PHASE DISP.

0	1.000	0.	.409
1	.284	21.	.369
2	.366	144.	.255
3	.088	-95.	.259
4	.218	127.	.196
5	.137	-64.	.165
6	.027	-48.	.176
7	.158	-171.	.076
8	.022	157.	.077
9	.023	139.	.083
10	.056	153.	.020
11	.011	-11.	.003
12	.001	41.	.000

REGION 18 SOUS REGION 211 - 139

ONDE M2 ARGUMENT 2 0 0 0 0 PERIODE FONDAMENTALE 12. HEURES

TOTAL DE 52 SEISMES 14 SUPERFICIELS 25 MOYENS 13 PROFONDS
 0 SEISMES ELIMINES RESTE 52 SEISMES
 COORDONNEES MOYENNES LATITUDE 31.4 LONGITUDE -139.5

BARYCENTRE X= .118 Y= .084 R= .145 PHASE 35.
 FACTEUR DE QUALITE .67+00

T21= 1.295 T42= .592 T41= .767

FIGURE 5.

4. Classification of the repartition curves

We drew repartition curves for each subregion of the geographic classification. For subregions of high seismicity we made annual repartitions and when it was possible we divided it in subsets according to latitude and longitude.

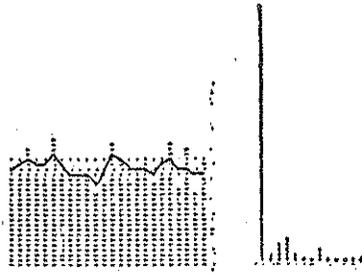


Fig. 1

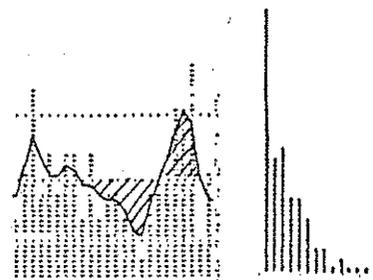


Fig. 2

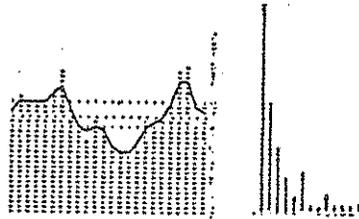


Fig. 3

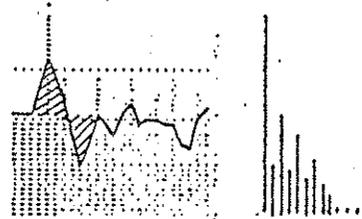


Fig. 4

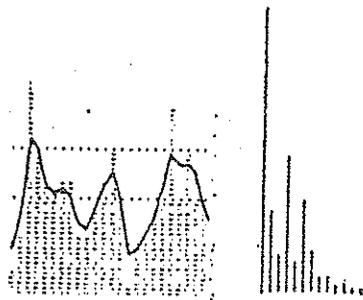


Fig. 5

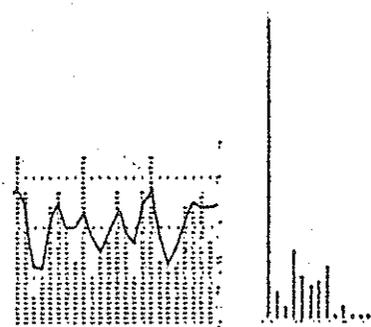


Fig. 6

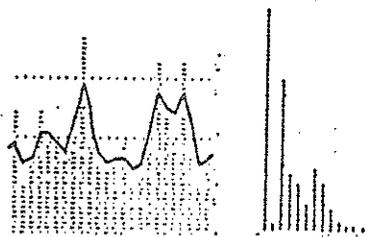


Fig. 7

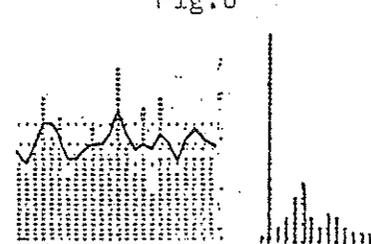


Fig. 8

From a careful examination of all the available histograms we define eight categories (Fig.6). Two correspond to the absence of coherent mechanism: number 1 with an equal repartition in each sector and number 8 with completely scattered events.

All the intermediate classes are characterized by periodic occurrences or absences of earthquakes with recurrence periods ranging from one to four on the semi-diurnal graph.

To obtain a mathematical representation of this qualitative classification we introduce a Fourier Series development of a repartition in 25 sectors. It allows to determine a constant term and twelve harmonics.

The distribution is normalized by imposing a mean value of one event by sector. The X_i are thus replaced by

$$Y_i(j\alpha) = \frac{n}{N} X_i(j\alpha)$$

where n is the number of sectors (25)

N is the number of events.

For each sector i the normalized series is

$$\begin{aligned} Y_i(j\alpha) &= a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos \frac{2\pi i k}{m} + b_k \sin \frac{2\pi i k}{m}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m A_k \cos \left(\frac{2\pi i k}{m} - \phi_k \right) \end{aligned}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \arctan \left(\frac{b_k}{a_k} \right) \quad 1 \leq k \leq m, m=12$$

Order 1 corresponds to the semi-diurnal period, order 2 to the fourth-diurnal and so on

Due to our previous smoothing the harmonics of degree higher than six decay quickly (Fig.1).

It is interesting to note that the amplitude and phase of the Fourier harmonic of order k correspond to the barycenter (r_k, β_k) of the corresponding $Y(k\alpha)$ repartition. In polar coordinates we get

$$r_k = A_k/2$$

$$\beta_k = \phi_k$$

The coordinates of the barycenters of the repartitions α (Fig. 7, a) and 2α (Fig 7, b) are slightly different from the corresponding values of $(A_k/2, \phi_k)$ in Fig. 7, c. It is due to the fact that the barycenters are computed on the original $k\alpha$ series and the Fourier series is based on the $Y(k\alpha)$ smoothed repartition in 25 sectors.

Définition des paramètres T_{ij} , A_i , ϕ_i

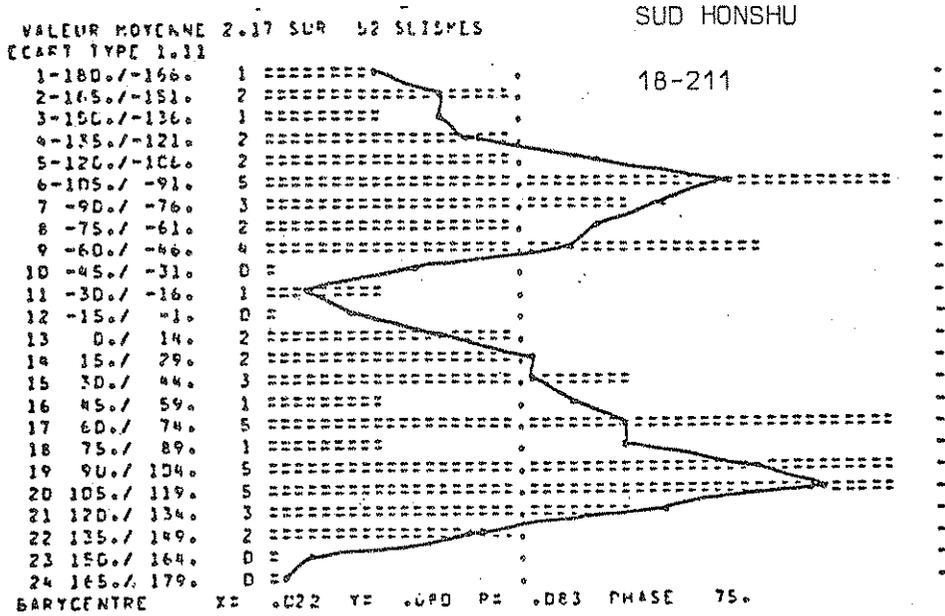


Figure 7a

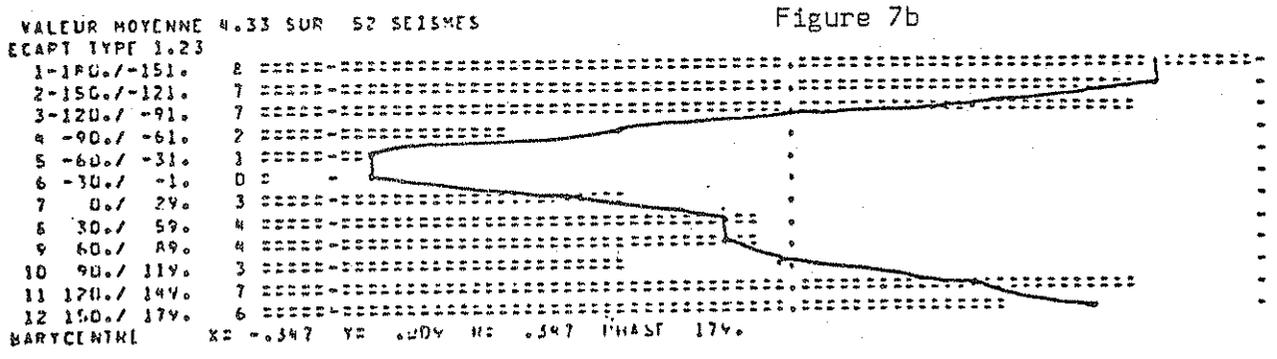


Figure 7b

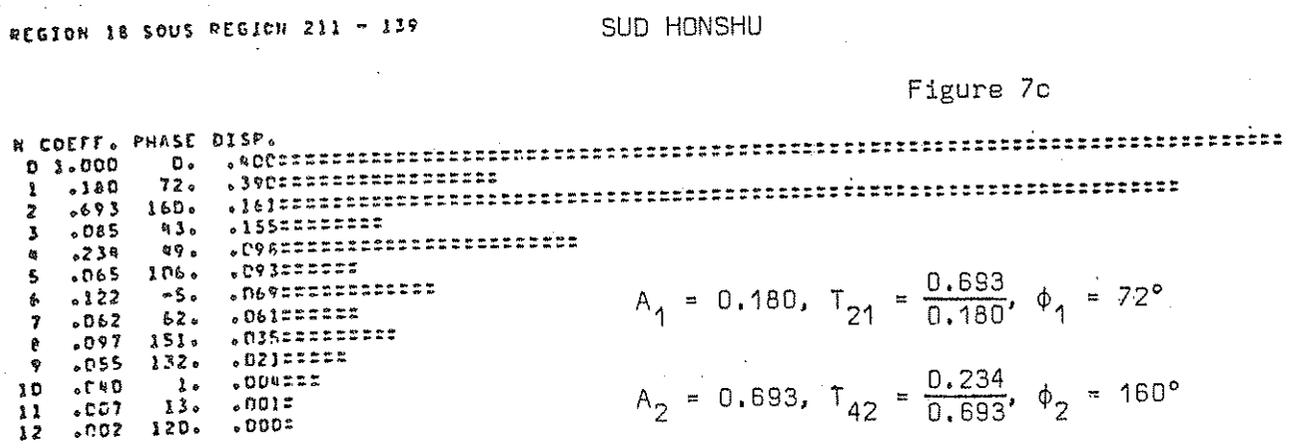


Figure 7c

To characterize the residuals when the Fourier series is truncated at order $K \leq m$ we introduce an estimation of their variance under the form

$$d_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - f_{i,k})^2}{n-K}}$$

$$f_{i,k} = 1 + \sum_{k=1}^{K-1} A_k \cos\left(\frac{2\pi i k}{m} - \phi_k\right)$$

A sharp decrease of d_k when K increases indicates that the last harmonic coefficient introduced improves very much the representation. For the example of table 7 c the first order harmonic does not improve significantly the dispersion but the second order one reduces it by a factor of 2.5. This repartition is clearly of the fourth-diurnal type.

5. Statistical Tests

To test departure of the original distribution of phases α_i from a random process a very simple formula has been proposed.

We can compute a characteristic number q_1 by the formula

$$\begin{aligned} N q_1 &= \left[\left(\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \cos \alpha_i \right)^2 \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \cos(\alpha_i - \alpha_j) \right) \right] \end{aligned}$$

The Rayleigh Test is then defined as $P_{R1} = e^{-q_1}$ all the earthquakes occur with the same phase α

$$\lim q_1 = N$$

as the term inside brackets has N^2 as a limit.

If the earthquakes occur randomly

$$\lim q_1 = 0$$

We define the quality factor Q of the repartition as

$$Q = 1 - e^{-q_1}$$

For a perfectly random distribution we have

$$\lim Q = 0$$

For large values of N and well correlated statistics we obtain

$$\lim Q \simeq 1 - e^{-N} \rightarrow 1$$

In practice q_j is directly linked to the position of the barycenter as

$$q_j = N r_j^2$$

This parameter is simply proportional to the square of the distance of the barycenter from the origin and to the number of events. It is interesting because it will enhance small departures from a random repartition in the case of a large number of earthquakes.

We also tried to find some confidence limits to test the significance of the peaks.

We apply a statistical tool known in climatology as selective harmonic analysis to extract the most significant harmonics from the Fourier Series development with 95% or 99% confidence level ($\alpha_0 = 0.05$ or 0.01).

If we consider that the Y_i are random with a covariance matrix v such that

$$v = I \sigma^2$$

we deduce

$$\text{var } \hat{a}_0 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{var } \hat{a}_j = \text{var } \hat{b}_j = \frac{2 \sigma^2}{n} \quad j = 1 \dots \frac{n-1}{2}$$

$$\text{cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_j) = \text{cov}(\hat{a}_0, \hat{b}_j) = \text{cov}(\hat{a}_k, \hat{b}_l) = 0$$

$$\text{cov}(\hat{a}_k, \hat{a}_l) = \text{cov}(\hat{b}_k, \hat{b}_l) = 0 \quad k \neq l$$

If we consider a vector s such as

$$s_1 = \hat{a}_0 \sqrt{n}$$

.

.

.

$$s_{2i} = \hat{a}_i \sqrt{n/2}$$

$$s_{2i+1} = \hat{b}_i \sqrt{n/2}$$

$$1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$$

we have

$$\text{var } s^2 = \sigma^2$$

The n elements of the vectors are thus independent and distributed with the same variance σ^2 .

If we suppose that the statistical variable Y is purely random it follows that

$$E(s) = 0$$

and that the s_{ℓ}^2 are n independent estimators with 1 degree of freedom of the original variance σ^2 . If they follow a normal or quasi-normal distribution we can test the hypothesis by means of a test of homogeneity of the variances of the s_{ℓ} e. g. the Bartlett test under its logarithmic form

$$M = n \log \frac{\sum_{\ell} s_{\ell}^2}{n} - \sum_{\ell} \log s_{\ell}^2$$

If the value of M is lower than its critical value M_c it follows that the hypothesis of randomness is true. If the original value of M is higher than M_c we can extract the most significant harmonic and reiterate the computation of M until its value falls under the corresponding M_c .

At each step the n_1 remaining harmonics give an estimation of the variance σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{\ell=1}^{n-1} s_{\ell}^2}{n_1}$$

We should note that except for the zero order term n_0 we always select a couple (a_i, b_i) corresponding to (s_{2i}, s_{2i+1}) .

If the last selected harmonic term is (a_k, b_k) the ratio

$$X_{V_1, V_2} = \frac{1/2 (s_{2k}^2 + s_{2k+1}^2)}{\sigma^2} \quad \begin{matrix} V_1 = 1 \text{ or } 2 \\ V_2 = n_1 \end{matrix}$$

gives a test of significance for all selected terms if it reaches the critical level of F distribution with V_1 and V_2 degrees of freedom for a level α such as

$$1 - \alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{n/2}$$

where α_0 is the initial level.

For $\alpha_0 = 95\%$ we have $\alpha \approx 0.005$
 99% $\alpha = 0.001$

An example according to the data of figure 7 is given in table 8. The critical values are underlined when the computed statistics are higher.

TABLE 8

Eliminated term	degrees of Freedom	residual variance	Bartlett M	Test Mc 99%	X	$\alpha_0=95\%$	$\alpha_0=99\%$	V ₁	V ₂
	25	1.143	108.9	<u>48.5</u>					
0	24	0.565	78.0	<u>47.3</u>	78.5	<u>9.6</u>	<u>14</u>	1	24
2	22	0.273	49.8	<u>44.8</u>	40.2	<u>6.8</u>	<u>9.6</u>	2	22
4	20	0.219	43.9	<u>42.0</u>	7.2	<u>7.0</u>	10.0	2	20
1	18	0.175	37.7	38.7	6.6	7.2	10.4	2	18
6	16	0.152	31.7	34.8	4.0	7.5	11.0	2	16
8	14	0.134	29.8	30.2	3.3	7.9	11.8	2	14

at each step characterized by n_1 degrees of freedom we have extrapolated the critical value M_c from its value $(M_c)_{14}$ by the relation

$$(M_c)_{14} = (M_c)_{n_1} \left(1 - \frac{(n - n_1)}{(X_c^2)_{n_1}} \right)$$

e. g. for $n_1 = 25$

$$30.2 = (M_c)_{n_1} \left(1 - \frac{11}{29.14} \right)$$

gives $(M_c)_{25} = 48.5$.

In this example of table 8 we conclude that harmonic 2 has a 99% confidence interval and harmonic 4 a 95% one.

6. *Repartition of earthquakes according to different Tidal clocks.*

As we already pointed out in section 3, the distortion introduced by the diurnal components of the tide is not negligible for latitudes higher than 40°.

On the other hand the diurnal waves can be the predominant ones in oceanic tides. It is thus interesting to test repartitions computed according to different tidal frequencies identified by their Doodson argument.

Examples are given in table 8 for the harmonics of the M_2 waves and for M_1 . If we compare the M_2 repartition to the former representation taking into account the global tide, we see large differences even

for a tropical area. It could be expected that even at the equator the tidal maximum of gravity is in phase with M_2 only at the spring and neap tides as it depends mainly on the vectorial sum of M_2 and S_2 . The striking fact however is the large M_1 component. It expresses the effect of the diurnal inequality on the semi diurnal band. The agreement in amplitude and phase between the harmonics of M_1 and the corresponding repartitions is perfect.

We can also compare various frequencies in the diurnal and semi-diurnal band (table 9).

At this level it is important to compare the normalized variance σ_0 around the mean value. It expresses the fraction of the events which are not represented by a distribution of earthquakes. The most significant repartition has thus a maximum σ_0 . We see immediately that besides the global tidal computation, the most significant repartition corresponds to the M_1 frequency.

In the diurnal band we see a clear decrease of σ_0 on each side of M_1 and in the semi-diurnal one on each side of M_2 .

TABLE 9

Comparison of variance

		DIURNAL			
wave		O_1	M_1	S_1	K_1
σ_0		.314	.511	.348	.348
		SEMI-DIURNAL			
wave		N_2	M_2	S_2	global
σ_0		.350	.409	.378	.565

7. Presentation of the results

As significant parameters we adopt also the phases of the Fourier harmonic of degree 1, $\phi(M_2) = \phi_1$, and the ratio of the amplitudes of the two first harmonics $T_{42} = A_2/A_1$ which expresses the amplitude ratio of the fourth diurnal term (M_4) to the semi-diurnal one (M_2).

A predominant fourth diurnal term expresses that the rate of change of the tidal stress is more important than its magnitude.

On the other hand a pure statistical repartition of events produces a value $T_{42} \approx 0.7$. So we consider that to be significant T_{42} must be higher than unity.

We present here results concerning $\phi(M_2)$ and T_{42} on several maps (fig.10-15). For each subregion, we compute the mean epicentral location of all the events and we put this position on the map to locate the subregion. On figure 10, we plot $\phi(M_2)$ for the region 1 (Alaska - Aleutian arc). Four subregions (1, 2, 14, 15) have $\phi(M_2)$ values close to -160° . Along the island arc from East to West, we find first phases around -160° for subregions 13, 12, 10, 9, 16, 7. The western part of the arc situated between the Aleutian trench and the abyssal plain shows a systematic shift of phase. The only exception is subregion 17 which is also the only one with a T_{42} ratio higher than unity ($T_{42} = 2.3$).

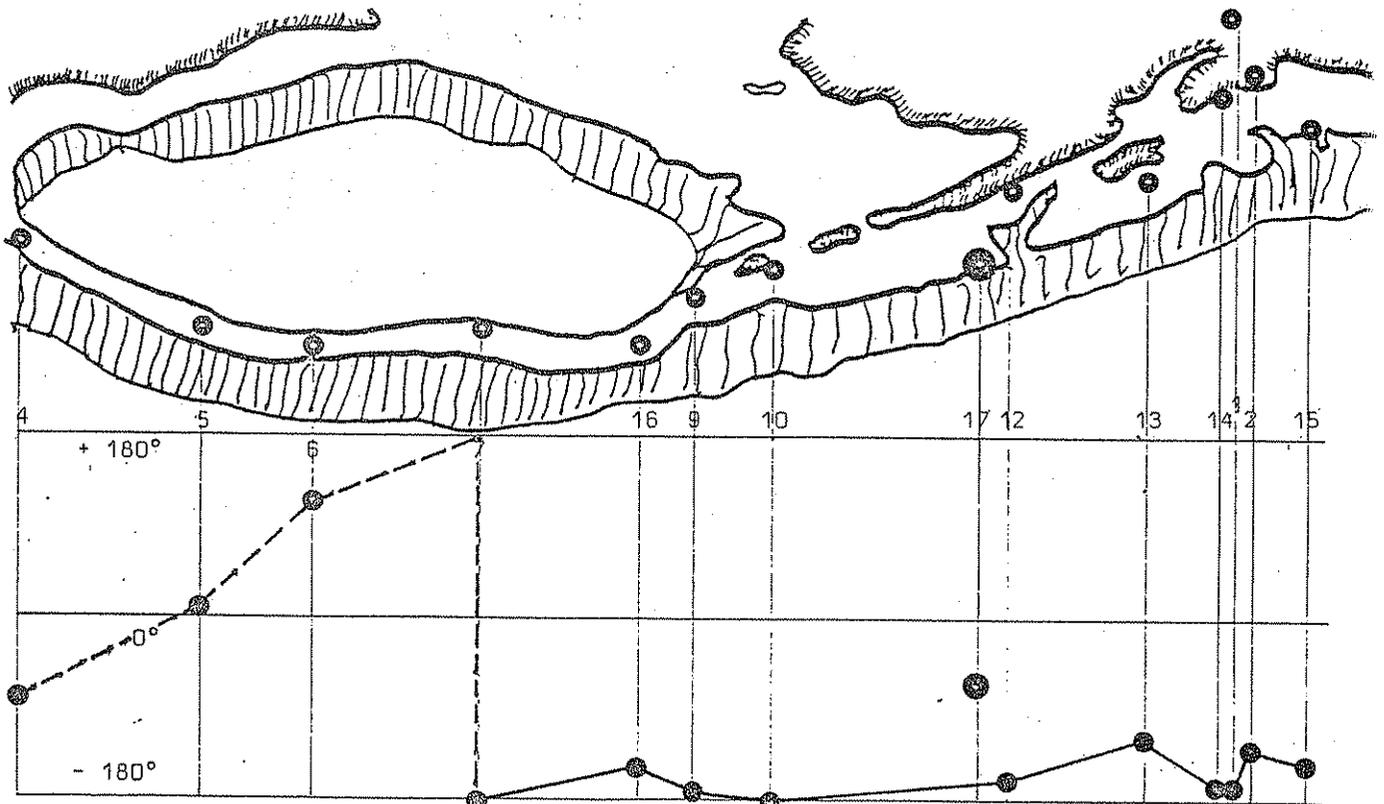


figure 10
Alaska-aleutian arc

For region 6 (Central America) on fig.11, let us consider first subregions 72, 74, 76, 80 with low T_{42} ratio: they present a very coherent phase around -130° . The subregions 73, 75, 77, 81 have phases fluctuating around this values and are characterized by a T_{42} value higher than unity. It expresses that the M_2 term has a low amplitude and its phase is thus not so well defined. The only real exceptions are subregions 78 and 83. This last one is not located on the same tectonic plate.

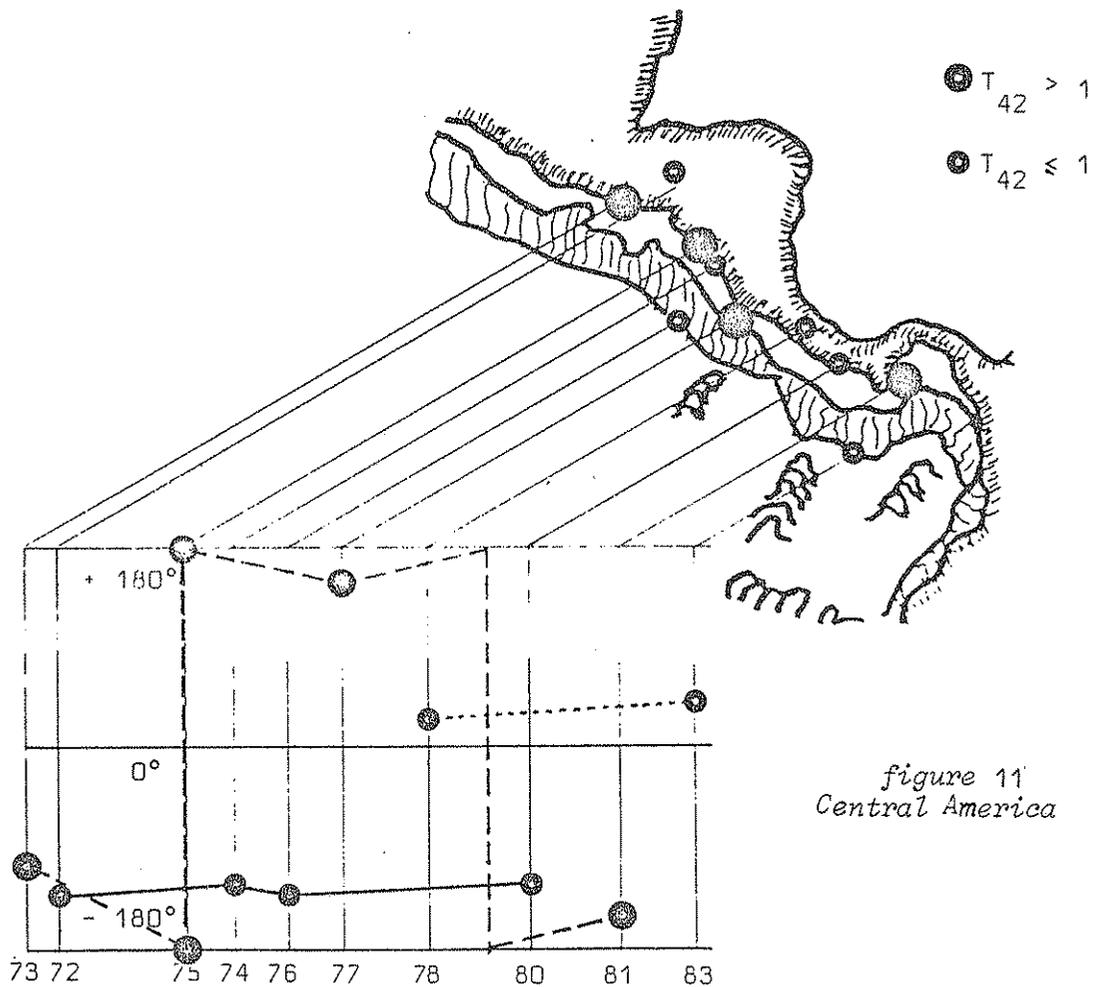


figure 11
Central America

Other regions with a regular distribution of phases are Taiwan (21) and the Philippines (22). As seen on fig.12, a first profile from Taiwan to Mindanao (subregions 243, 249, 254, 251) exhibits a very stable phase around 55° . Another profile along the Philippines trench (subregions 245, 248, 251, 256) is characterized by a larger scattering of the phases which are comprised between 90° and 160° , with a mean value of 125° . The T_{42} ratio is larger than 1 for this profile except for the subregion 251: this scattering is thus normal. Subregions 244 and 246 have a strong negative value of $\phi(M_2)$. Also subregion 250, in the China Sea, shows different characteristics.

Such parallel profiles along a trench are also found in region 19 of Japan - Kurils - Kamchatka (fig.13). At the edge of the trench, we find a first profile through subregions 219, 222, 229, 230. Along the islands arc (subregions 218, 221, 228, 227) all the T_{42} ratios are higher than 2 which means an important fourth-diurnal component. On the back arc basin, a third line runs through subregions 217, 220, 224, 226. The phases are systematically decreasing from North-East to South-West.

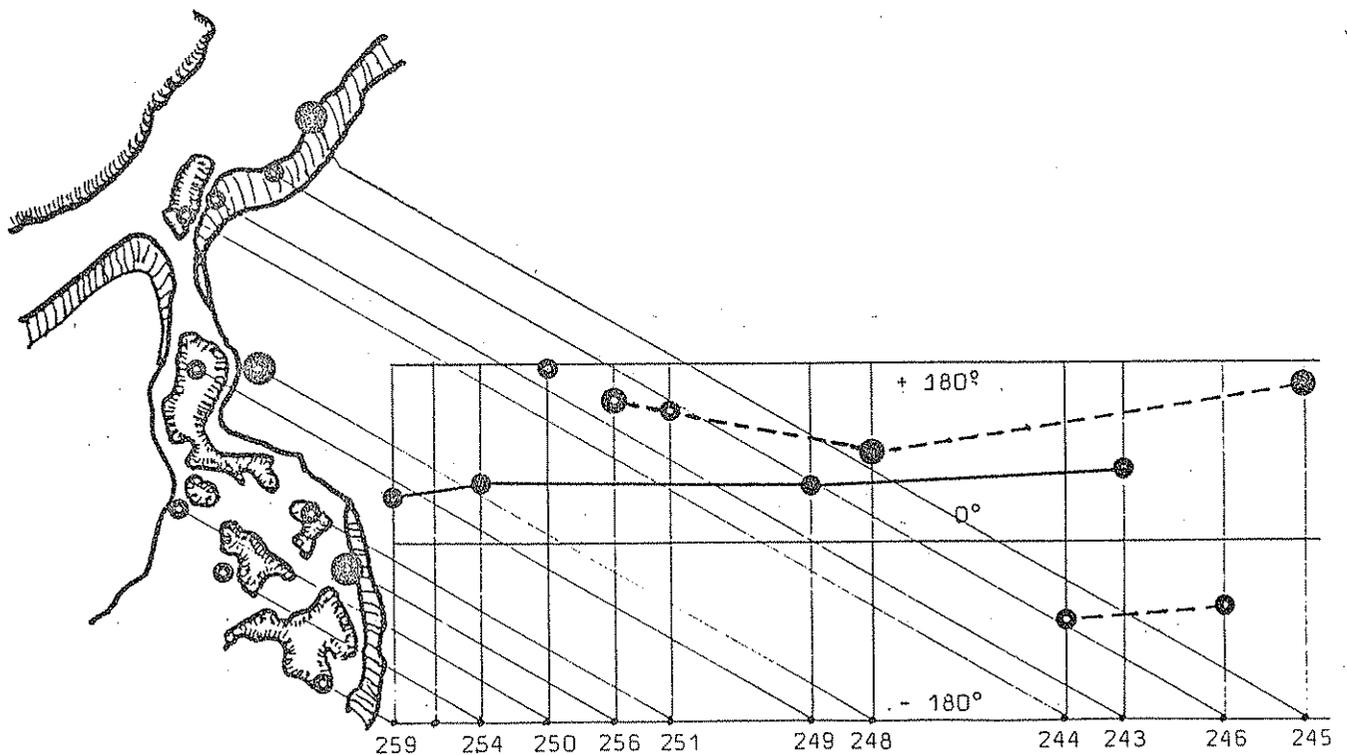


figure 12
Taiwan-Philippine-Mindanao

- $T_{42} > 1$
- $T_{42} \leq 1$

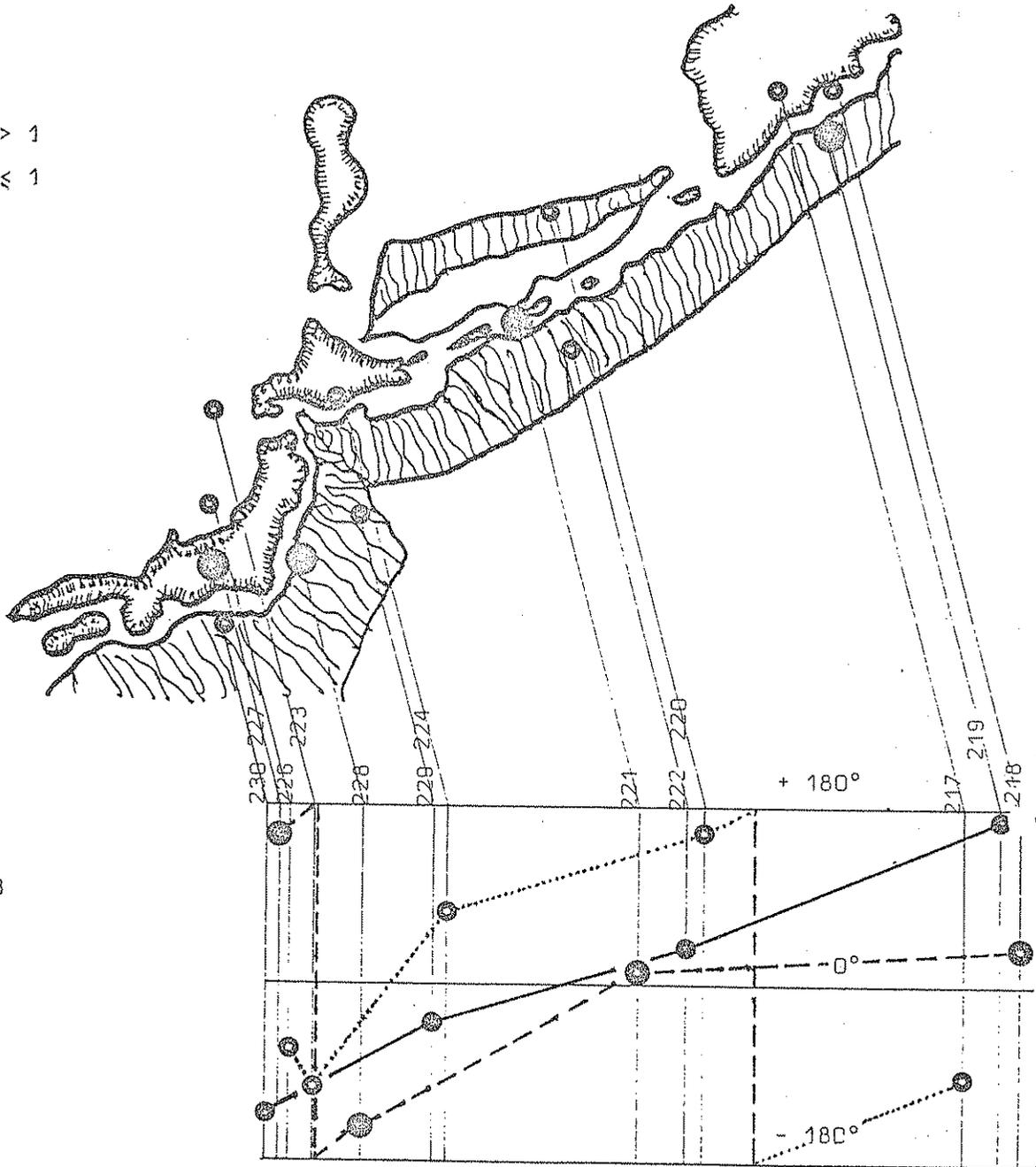


figure 13
Kamchatka
Kurile
Japan

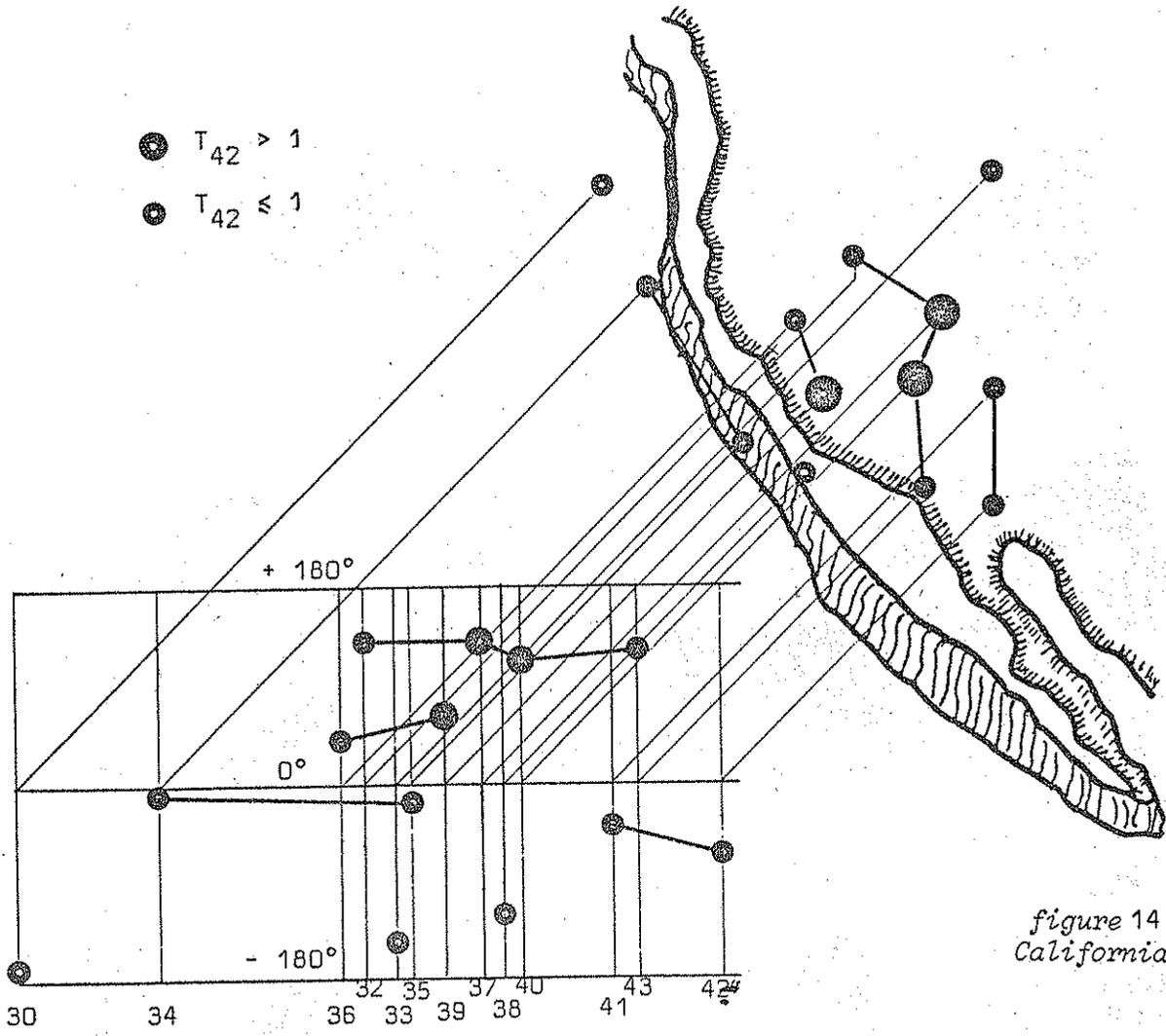
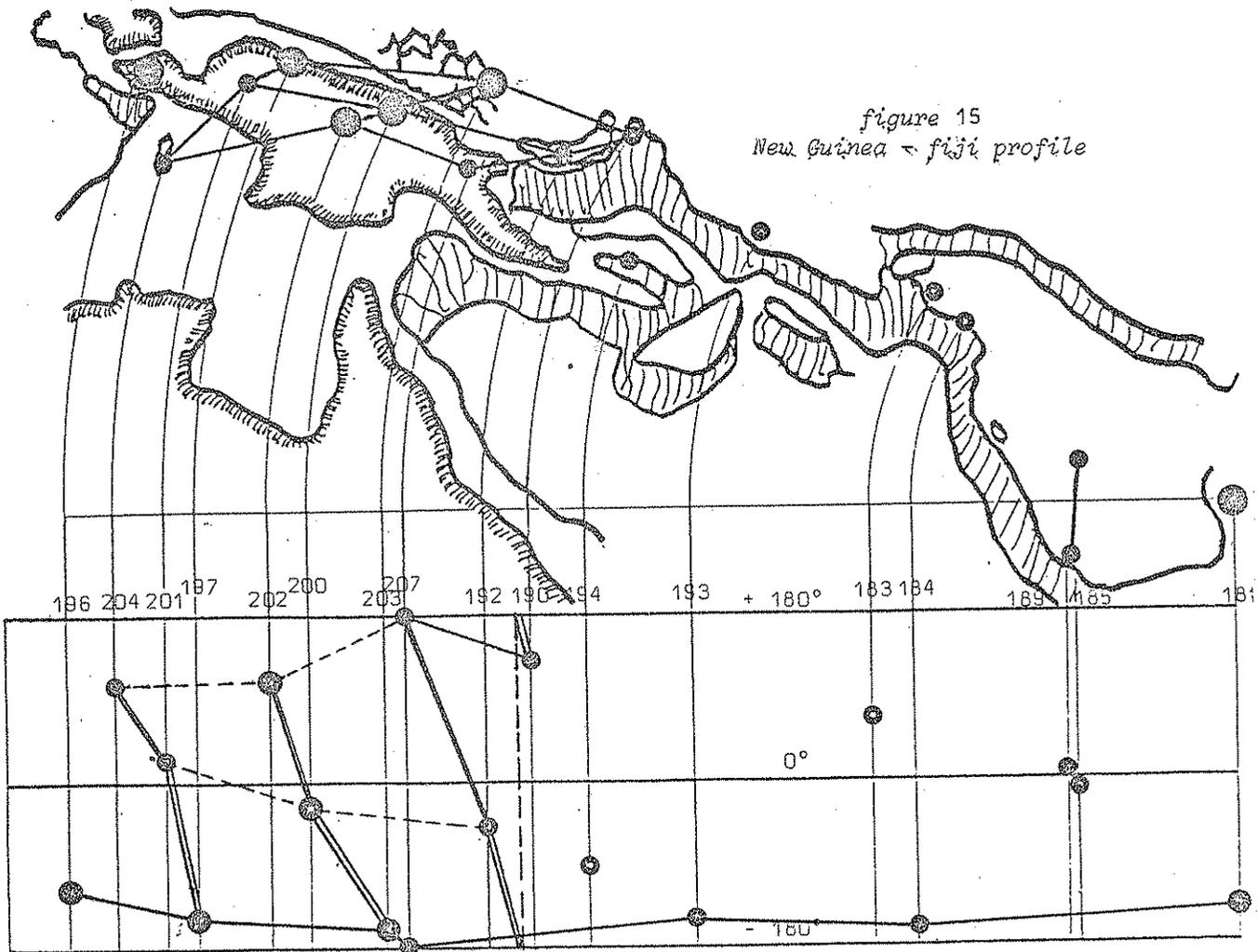


figure 14
California

In California-Nevada (region 3) we see also clearly profiles from West to East (fig.14): subregions 34, 35 ($\phi(M_2) = -10^\circ$), subregions 36, 39 ($\phi(M_2) = 50^\circ$), subregions 32, 37, 40, 43 ($\phi(M_2) = 120^\circ$), subregions 44, 42 ($\phi(M_2) = -50^\circ$). We have a regular increase by step of 60° followed by a change of phase of 180° . We find a T_{42} ratio higher than unity in the centre for subregions 37, 39 and 40°.

For a large zone covering regions 13 (Fiji), 14 (New Hebrides), 15 (Bismarck and Solomon) and 16 (New Guinea), we find a profile parallel to the islands chain (fig.15) through subregions 181, 184, 193, 203, 197, 196 with negative phases around -150° . Large T_{42} values are clustered on West and Central New Guinea. In the same area three profiles intersect the main axis forming a net with regular phase shifts similar to the California-Nevada region.



5. Conclusions

Geographical correlations appear clearly in the distribution of the parameters $\phi(M_2)$ and T_{42} . For several regions in the circumpacific area we find profiles following the major tectonic features.

REPARTITIONS

VARIANCE	M ₁		M ₂		M ₃		M ₄		global	
	ORDER	A	ORDER	A	ORDER	A	ORDER	A	ORDER	A
M ₁	1*	.511		.409		.264		.478		.565
M ₂	2	.422	1*	.284	1	.136			1	.180
M ₃	3	.274	2*	.368	2	.167			2*	.693
M ₄	4*	.144	3	.088					1*	.408
M ₆	6	.389	4*	.218					2*	.344
M ₈		.066							4*	.234
		-176°		21°		25°		150°		160°
		18°		-95°		-134°		43°		43°
		14°		127°				49°		49°
		125°								
		-90°								

table 9

* 95% confidence interval.

NOTATIONS.

- α_k phase of event number k ($1 \leq k \leq N$) with respect to the closest tidal minimum.
- $\alpha_k(W)$ phase of event number k ($1 \leq k \leq N$) with respect to the tidal wave W
- $j\alpha$ multiple of the original phase for the repartition of order j
- m number of harmonic terms in the Fourier series
- N number of events
- n number of sectors : 24 for order 1
12 for order 2
25 for Fourier Series
- x_i number of events in sector i (raw repartition)
- $X_i = (x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1})/4$ smoothed repartition
- $Y_i = \frac{nX_i}{N}$ normalized repartition (1 event by sector)
- (r_j, β_j) coordinates of the barycenter for the repartition of order j
- $T_j = \frac{T}{j}$ period of repartition of order j
- $Q^j = 1 - e^{-Nr^{2j}}$ quality factor for repartition of order j

FOURIER SERIES

$$Y_i = a_0 + \sum_{k=1}^{12} a_k \cos \frac{2\pi ik}{n} + \sum_{k=1}^{12} b_k \sin \frac{2\pi ik}{n}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{12} A_k \cos \left(\frac{2\pi ik}{n} - \phi_k \right)$$

$$f_{i,k} = \sum_{k=1}^K A_k \cos \left(\frac{2\pi ik}{n} - \phi_k \right)$$

$$d_K = \sqrt{\sum_i \frac{(Y_i - f_{i,K})^2}{n - K}} = \text{residual variance}$$

$$T_{k_1, k_2} = \frac{Ak_1}{Ak_2}$$

- BERG, E. (1966): Triggering of the Alaskan earthquake of march 28, 1964, and major aftershocks by low ocean tide loads
Nature 210: 893 - 896.
- CHAPMAN, W.B. (1967): Tidal influences at the lunar crater Aristarchus.
J. Geophys. Res. 72: 6293 - 6298.
- FLINN, E.A. & ENGDAHL, E.R. (1965): A proposed basis for geographical and seismic regionalization.
Rev. of Geophys., 3: 123 - 149.
- GAO, X., YIN, Z., WANG, W., HUANG, L. & LI, J. (1981): Triggering of earthquakes by the tidal stress tensor.
Acta Seismologica sinica, 3.
- HAMILTON, W.L. (1973): Tidal cycles of volcanic eruptions: fortnightly to 19 yearly periods
J. Geophys. Res., 78: 3363 - 3375.
- HEATON, T.H. (1975): Tidal triggering of earthquakes
Geophys. J. R. Astr. Soc., 43: 307 - 326.
- HUNTER, R.N. (1978): An explanation for sidereal periods in earthquake aftershock sequences.
J. Geophys. Res. 83: 1253 - 1256.
- KNOPOFF, L. (1964): Earth tides as a triggering mechanism for earthquakes
Bull. Seism. Soc. Amer. 54: 1865 - 1870.
- KNOPOFF, L. (1970): Correlation of earthquakes with lunar orbital motions
The Moon, 2, 140 - 143.
- MAC NUTT, S.R. & BEAVAN, R.J. (1981): Analysis of Volcanic Earthquakes correlated with earth tides at Povlof volcano, Alaska peninsula.
Proc. of the 9th Int. Symp. on Earth Tides, under press.
- MAUK, F.J. & KIENLE, L. (1973): Microearthquakes at St. Augustine Volcano, Alaska, triggered by earth tides.
Amer. Ass. for the Adv. of Sc.
- MAUK, F.J. & JOHNSTON, M.J.S. (1973): On the triggering of volcanic eruptions by earth tides.
J. Geophys. Res., 78: 3356 - 3362.
- MOHLER, A.S. (1980): Earthquake/earth tide correlation and other features of the Susenville, California, earthquake sequence of June-July 1976.
Bull. Seism. Soc. Amer., 70: 1583 - 1593.
- RYALL, A., VAN WORMER, J.D. & JONES, A.E. (1968): Triggering of microearthquakes by earth tides, and other features of the Truckee, California, earthquake sequence of September, 1966.
Bull. Seism. Soc. Amer., 58: 215 - 248.
- SADEH, D. (1978): Periodic earthquakes in Alaska and Central America.
J. Geophys. Res., 83: 1251 - 1252.
- SADEH, D. & WOOD, K. (1978): Periodicity in lunar seismic activity and earthquakes.
J. Geophys. Res., 83: 1245 - 1249.
- SAUCK, W.A. (1975): The Branley, California earthquake sequence of January, 1975, and triggering by earth tides.
Geophys. Res. Lett.
- SCHWIDERSKI, E.W. (1979): Global ocean tides, Part II: The Semi-diurnal Principal Lunar Tide (M_2), Atlas of Tidal Charts and Maps
Naval Surface Weapons Center, Dahlgren Laboratory TR 79-414, Dahlgren, VA.
- SHLIEN, S. (1972): Earthquake-tide correlation.
Geophys. J.R. Astr. Soc., 28: 27 - 34.
- SHUDE, R.H. & BARR, D.R. (1977): An analysis of earthquake frequency data.
Bull. Seism. Soc. Amer., 67: 1379 - 1386.
- SIMPSON, J.F. (1967): Earth tides as a triggering mechanism for earthquakes.
Earth Planet. Sci. Lett., 2: 473 - 478.
- VAN RUYMBEKE, M., DUCARME, B. & DE BECKER, M. (1981): Parametrization of the tidal triggering of earthquakes.
Bull. Inf. Marées Terr., 86 (to be published).

L'INFLUENCE DE L'OCEAN ET DE LA VISCOSITE DU MANTEAU
SUR LA NUTATION DE LA TERRE

S.M. MOLODENSKII

Fisika Zemli, 1981, n° 6, pp. 3-17

La solution précise du problème de la rotation d'un corps solide à cavité ellipsoïdale entièrement remplie d'un liquide parfait, homogène, non compressible, est donnée par Sludsky, Hough et Poincaré {1}. Les travaux {2-6} sont consacrés à la généralisation de cette solution dans le cas d'une planète gravitante avec enveloppe parfaitement élastique, sans océan, avec noyau non visqueux, hétérogène et compressible. La théorie de l'effet réciproque du noyau et du manteau déterminé par des forces visqueuse et électromagnétique a été faite en {7-12}.

Comme on le sait, la marée dans l'océan exerce une action importante sur la marée terrestre élastique luni-solaire et polaire. La correction due à l'océan sur le nombre de Love k est environ 10 % de sa valeur pour le modèle réel de la Terre sans océan, la correction à la période de Chandler est d'environ 30 jours {4, 13}. Un effet réciproque de l'onde de marée océanique apparaît également dans le cas où les déformations élastiques de la Terre diffèrent sensiblement des déformations calculées pour une Terre sans océan. Cette différence peut se faire sentir sur l'amplitude et la phase de la nutation forcée.

D'après les estimations {11, 14} le couplage électromagnétique entre le noyau et l'enveloppe a un effet extrêmement faible sur l'amortissement du mouvement de Chandler; l'influence de la viscosité du noyau ν est importante uniquement pour $\nu \sim 5 \cdot 10^9$ poise.

Quant aux estimations obtenues sur la base d'un examen théorique du comportement des métaux dans les conditions de pression et de température du noyau donnent $\nu \sim 10^{-1}$ poise (29).

Cela signifie que la cause la plus probable de l'amortissement du mouvement de Chandler est la dissipation de l'énergie dans le manteau visqueux et dans l'océan.

Pour les fréquences voisines du jour, presque toute la dissipation de l'énergie des marées luni-solaires se produit dans l'océan. C'est pourquoi on peut s'attendre à ce que la dissipation dans l'océan exerce une influence

importante sur l'amortissement du mouvement libre quasi diurne du mouvement du pôle.

Ce travail est consacré à l'étude de l'influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation de la Terre. Nous donnerons le résultat de la solution analytique du problème sur la rotation de la Terre gravitante avec noyau homogène ellipsoïdal non compressible. A partir de cette solution on étudie l'amortissement du mouvement libre du pôle et également l'influence de l'océan sur les amplitudes et les phases de la nutation forcée.

Solution analytique.

Introduisons un système mobile de coordonnées cartésiennes (x, y, z) déterminé par les conditions suivantes :

- 1) en l'absence de déformations de marées l'axe z correspond à l'axe du plus grand moment d'inertie de la Terre;
- 2) le moment total de quantité du mouvement de l'enveloppe et de l'océan par rapport au système de coordonnées (x, y, z) est égal à zéro à tout instant.

En se limitant au cas de petites variations du noyau par rapport à l'enveloppe, nous employons l'équation linéaire du mouvement du noyau en coordonnées mobiles

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} + \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \nabla \right) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} = \ddot{\mathbf{u}} + 2[\dot{\omega} \mathbf{u}] + [\dot{\omega} \mathbf{r}] + [\omega [\dot{\omega} \mathbf{r}]] = \text{grad} (V_0 + V_e + V_1) - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \mathbf{r} \quad (1)$$

où D/Dt est la différentiation dans le système inertiel de coordonnées, la différentiation par rapport à t dans le système de coordonnées (x, y, z) étant désignée par un point; \mathbf{r} et \mathbf{u} sont le rayon vecteur et le vecteur déplacement de l'élément; ω est le vecteur vitesse angulaire de rotation du système (x, y, z) , ρ est la densité; V_0 est le potentiel gravitationnel de la Terre non déformée; V_e est le potentiel générateur de marées; V_1 est la variation du potentiel dû à la redistribution des masses après déformation du noyau et de l'enveloppe.

Ayant exprimé par (1) les trois composantes du vecteur \mathbf{u} en fonction de P , V_0 , V_e , V_1 et ρ nous écrirons l'expression générale pour les déplacements dans le noyau sous la forme {4}

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - 4\omega^2)u_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial y}; \\
 (\sigma^2 - 4\omega^2)u_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{\sigma^2} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial x}; \\
 \sigma^2 u_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial z};
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

où σ est la fréquence angulaire de la nutation dans le système de coordonnées (x, y, z) $\omega = |\omega|$ - la vitesse angulaire de la rotation diurne de la Terre,

$$\Phi = -\frac{r^2 \omega^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(\epsilon e^{i(\sigma t - \lambda)}), \tag{3}$$

$$\Psi = -\Phi_0 + \frac{P}{\rho} + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi + V_0 + V_e + V_i - \tag{4}$$

le paramètre complexe sans dimension déterminant le mouvement du vecteur ω par rapport au système des coordonnées (x, y, z) :

$$\omega_x + i\omega_y = \omega \epsilon e^{i\sigma t}. \tag{5}$$

Conformément à (5), $|\epsilon|$ détermine l'angle d'ouverture du cône de polhodie et $\arg \epsilon$ est la phase de la nutation dans le système de coordonnées mobiles;

$$\Phi_0 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \tag{6}$$

Le potentiel de la force centrifuge due à la rotation uniforme de la Terre :

$$V_e = v_e \frac{r^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \cos(\sigma t - \lambda) = \frac{v_e}{a^2} (xz \cos \sigma t + yz \sin \sigma t) - \tag{7}$$

est un potentiel générateur de marées; v_e est l'amplitude de V_e à la surface de la Terre; r, θ, λ étant le rayon, la colatitude et la longitude d'un point courant et a le rayon moyen de la Terre.

Pour examiner l'influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation de la Terre nous utiliserons ensuite un modèle de noyau avec une particule centrale {2, 12} qui représente une assez bonne approximation du cas du noyau réel. Ce modèle se détermine par les conditions suivantes :

- 1) le noyau interne solide est remplacé par une masse exacte de cette valeur afin que les valeurs totales de la masse et du moment d'inertie du noyau correspondent à leurs valeurs réelles;
- 2) le noyau liquide est supposé homogène et non compressible;
- 3) l'aplatissement dynamique du noyau est

$$e = \frac{C_1 - A_1}{A_1}$$

correspond à la valeur réelle $\varepsilon = 2,56 \cdot 10^{-3}$.

Dans cette approximation pour ψ il y a une solution connue de la forme

$$\Psi = r^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(\psi e^{i(\sigma t - \lambda)}) \quad (8)$$

où ψ est le paramètre complexe sans dimension à déterminer. En substituant (8) en (2) on constate que la condition de non compressibilité du noyau

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

est satisfaite.

Pour un noyau homogène et non compressible, V_0 dans le noyau satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta V_0 = -4\pi G \rho = \text{const},$$

et V_1 comme V_0 est harmonique. En conformité avec ces valeurs V_0 et V_1 peuvent être représentées dans le noyau sous la forme

$$V_0|_{r \leq b} = v_0^{(0)} \frac{r^2}{a^2} + v_0^{(2)} \frac{x^2 + y^2}{a^2}; \quad (9)$$

$$V_1|_{r \leq b} = \frac{r^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(v_1 e^{i(\sigma t - \lambda)}). \quad (10)$$

La pression P est la somme de la pression hydrostatique P_0 et d'une faible variation de la pression P_1 déterminée par le mouvement du liquide par rapport à l'enveloppe

$$P = P_0 + P_1 \quad (11)$$

La partie hydrostatique est la partie non perturbée du potentiel gravitationnel et du potentiel de la force centrifuge:

$$P_0 = \rho(\Phi_0 + V_0) \quad (12)$$

La substitution de (11) et (12) en (4) donne

$$\Psi = \frac{P_1}{\rho} - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi - V_0 - V_1. \quad (13)$$

Cette relation permet d'exprimer P_1 à partir des valeurs des paramètres ε , ϕ , v_0 et v_1 :

$$P_1 = \frac{r^2}{a^2} \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(p_1 e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (14a)$$

où

$$p_1 = \rho a^2 \left(\psi \omega^2 + \frac{v_0 + v_1}{a^2} - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varepsilon \omega^2 \right). \quad (14b)$$

Ainsi, les valeurs ω et également u et P_1 dans le noyau sont déterminées de manière univoque par trois paramètres complexes: ε , ψ et v_1 .

Les relations entre ces paramètres peuvent être obtenues à partir des équations des moments du noyau et de l'enveloppe et provenant des conditions à l'interface noyau-enveloppe.

Considérons ces équations.

Nous utiliserons les expressions des composantes radiales des déplacements de marées à l'interface noyau-enveloppe $H(b)$ et des valeurs du potentiel $V_1(a)$ à la surface de la Terre qui conviennent pour des modèles arbitraires de l'enveloppe viscoélastique.

$$H(b) = \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(h(b)e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (15)$$

$$V_1(a) = \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}(v_1(a)e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (16)$$

où $h(b)$, $v_1(a)$ sont les paramètres complexes ne dépendant pas de θ , λ , τ .

A cause des marées de l'interface noyau-enveloppe, le tenseur d'inertie du noyau a des composantes non diagonales déterminées par les expressions

$$I_{zz}^{(1)} = - \iiint_{\tau_1} \rho xz \, d\tau_1 = \operatorname{Re}(I_1 e^{i\sigma t}),$$

$$I_{yz}^{(1)} = - \iiint_{\tau_1} \rho yz \, d\tau_1 = \operatorname{Im}(I_1 e^{i\sigma t}), \quad (17)$$

$$I_{xy}^{(1)} = - \iiint_{\tau_1} \rho xy \, d\tau_1 = 0,$$

où τ_1 est le volume occupé par le noyau et

$$I_1 = -c_1 \frac{h(b)}{2b} \quad (18)$$

le paramètre complexe.

La dépendance des composantes non diagonales du tenseur d'inertie de l'enveloppe avec l'océan $J^{(2)}$ en fonction du temps a un aspect analogue:

$$I_{zz}^{(2)} = \operatorname{Re}(I_2 e^{i\sigma t});$$

$$I_{yz}^{(2)} = \operatorname{Im}(I_2 e^{i\sigma t}).$$

Les composantes non diagonales du tenseur d'inertie de la Terre entière se déterminent à partir des valeurs du potentiel V_1 à la surface de la Terre

$$I_1 + I_2 = - \frac{a^3}{3G} v_1(a). \quad (19)$$

Ainsi les valeurs J_1 , J_2 peuvent être exprimées par $h(b)$ et $v_1(a)$.

Equation des moments de l'enveloppe viscoélastique avec océan.

Le moment total des forces agissant sur le système enveloppe-océan peut être calculé comme somme des moments des forces de surface appliquées à l'interface noyau-enveloppe et des forces de gravitation agissant du côté du corps générateur de marée et du noyau. Le moment des forces de surface à la forme

$$L_1 = \iint [rn] P(r, \theta, \lambda) \, ds, \quad (20)$$

où S est la limite déformée de l'interface décrite par l'équation

$$r = b(1 + \varepsilon \sin^2 \theta) + H(b). \quad (21)$$

En substituant (15) dans (21) nous obtiendrons

$$[rn] = -be \sin 2\theta e_\lambda - \left(e_\lambda \cos 2\theta + e_\theta \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \operatorname{Re} (h(b) e^{i(\sigma t - \lambda)}), \quad (22)$$

où e_λ , e_θ sont les déplacements orientés dans le sens de l'accroissement en λ et θ . La substitution des expressions (6), (9), (11), (12), (14) et (22) en (20) détermine L_1 . Nous nous limiterons à l'ordre de l'aplatissement, nous supposons

$$P_1|_s = P_1|_{r=b} + \frac{2v_0^{(0)}b}{a^2} \rho H; \quad P_0|_s = (P_0^{(0)} + P_0^{(2)})|_{r=b} + \frac{2v_0^{(0)}b}{a^2} \rho b \varepsilon \sin^2 \theta;$$

$$C_1 = \frac{8\pi}{15} \rho b^5.$$

Nous obtiendrons alors

$$L_1 = -\operatorname{Re}[(e_y + ie_x) l_1 e^{i\sigma t}], \quad (23)$$

où e_x , e_y sont les déplacements suivant les axes x et y

$$l_1 = c_1 \left[\frac{e}{\rho a^2} p_1 - \frac{h(b)}{b} \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{v_0^{(2)}}{a^2} \right) \right]. \quad (24)$$

Le moment des forces de gravitation est la différence des moments agissant sur toute la Terre et sur le noyau. En utilisant l'expression connue pour le potentiel V_1 dans le noyau (10), nous trouverons,

$$L_2 = \iiint_{\tau_1 + \tau_2} \rho [r \operatorname{grad} V_1] d\tau - \iiint_{\tau_1} \rho [r \operatorname{grad} (V_0 + V_e + V_1)] d\tau = \\ = -\operatorname{Re}[(e_y + ie_x) l_2 e^{i\sigma t}], \quad (25)$$

où τ_2 est le volume occupé par l'enveloppe et l'océan

$$l_2 = \frac{C_2 - A_2}{a^2} v_e - \frac{C_1 - A_1}{a^2} v_1 - 2I_1 \frac{v_0^{(2)}}{a^2}. \quad (26)$$

Le moment total de l'enveloppe et de l'océan est:

$$M_2 = \operatorname{Re}[e_x (A_2 \omega_x + I_{xx}^{(2)} \omega_z) + e_y (A_2 \omega_y + I_{yy}^{(2)} \omega_z)] + e_z C_2 \omega_z, \quad (27)$$

où C_2 , A_2 sont les moments principaux d'inertie de l'enveloppe avec océan. Après avoir substitué (23) - (27) dans l'équation d'Euler

$$\dot{M}_2 + [\omega M_2] = L_1 + L_2,$$

nous obtiendrons la première relation liant les paramètres ε , ψ , v_c , J_1 et J_2 :

$$\frac{\sigma + \omega}{\omega} (A_2 \varepsilon + I_2) - \varepsilon C_2 + \frac{C_1 + C_2 - (A_1 + A_2)}{a^2 \omega^2} v_e + (C_1 - A_1) \left(\psi - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varepsilon \right) + I_1 = 0. \quad (28)$$

Equation des moments pour toute la Terre.

En substituant (3) et (8) en (2) nous déterminerons les composantes de la vitesse de l'élément de masse du noyau par rapport à l'enveloppe:

$$\begin{aligned}\dot{u}_x &= -\frac{\psi\omega^2}{\sigma+2\omega} z \sin \sigma t; \\ \dot{u}_y &= \frac{\psi\omega^2}{\sigma+2\omega} z \cos \sigma t; \\ \dot{u}_z &= \frac{\psi\omega^2 - 2\varepsilon\sigma\omega}{\sigma} (y \cos \sigma t - x \sin \sigma t).\end{aligned}\quad (29)$$

En utilisant (29) nous calculerons le moment de quantité de mouvement du noyau:

$$M_1 = C_1 \omega e_z + \operatorname{Re}[(e_x - ie_y)(A_1 \omega \varepsilon + I_1) e^{i\sigma t}] + \iiint_{V_1} \rho [r \dot{u}] d\tau_1; \quad (30)$$

$$\iiint_{V_1} \rho [r \dot{u}] d\tau_1 = \operatorname{Re}[\mu (e_x - ie_y) e^{i\sigma t}], \quad (31)$$

où

$$\mu = C_1 \left(\frac{\omega^2 \psi}{\sigma(\sigma+2\omega)} - \varepsilon \omega \right). \quad (32)$$

Après avoir substitué (27), (30), (32) dans l'équation d'Euler pour toute la Terre

$$\dot{M}_1 + \dot{M}_2 + [\omega, (M_1 + M_2)] = \frac{C-A}{a^2} v_e (e_x \sin \sigma t - e_y \cos \sigma t), \quad (33)$$

où $C = C_1 + C_2$, $A = A_1 + A_2$ sont les moments principaux d'inertie de toute la Terre, nous obtiendrons la seconde relation liant les paramètres cherchés:

$$\frac{\sigma+\omega}{\omega} \left(A\varepsilon + I_1 + I_2 + \frac{\mu}{\omega} \right) - \varepsilon C + \frac{C-A}{a^2 \omega^2} v_e = 0. \quad (34)$$

Condition aux limites sur l'interface enveloppe-noyau.

La condition de non pénétration du liquide dans l'enveloppe a la forme

$$u_{n_1} = (u, n_1) = H(b),$$

où n_1 est la normale extérieure à l'interface non déformée de l'enveloppe avec le noyau:

$$n_1 = \frac{r}{r} + 2e e_z \cos \theta$$

Après avoir exprimé $H(b)$ par J_1 par la formule (18) et en utilisant l'expression pour u (1) nous obtiendrons

$$\begin{aligned}(u, n_1) - H(b) &= b \sin 2\theta \operatorname{Re} e^{i(\sigma t - \lambda)} \left[\psi \left(\frac{\omega^2(\sigma+\omega)}{\sigma^2(\sigma+2\omega)} + e \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \left(\frac{\omega}{\sigma} + 2e \frac{\omega}{\sigma} \right) + \frac{I_1}{C_1} \right] = 0.\end{aligned}\quad (35)$$

En égalant à zéro l'expression dans les crochets, nous obtiendrons la troisième relation reliant les paramètres ψ , ε et J_1 .

Le système (28), (34), (35) n'est pas linéairement indépendant car la condition de non pénétration (35) est équivalente à l'équation des moments du noyau. Pour s'en assurer nous déduisons (28) de (34) et nous obtiendrons

$$\psi \left[\frac{\omega(\sigma+\omega)}{\sigma(\sigma+2\omega)} - e \right] - \varepsilon + \frac{\sigma}{\omega} \frac{I_1}{C_1} = 0. \quad (36)$$

Il est facile de voir que pour n'importe quel rapport ω/σ les termes principaux (35) correspondent avec (36) et c'est pourquoi n'importe laquelle des trois équations (28), (34) et (35) peut être rejetée.

Dans les équations (28), (34) et (35) entrent des paramètres complexes J_1, J_2 déterminant la valeur et la phase des déformations de l'enveloppe. Dans le cas d'une enveloppe absolument rigide $J_1 = J_2 = 0$, et nous obtenons un système formé de deux équations algébriques concordant avec la formule de Poincaré (1). Pour la nutation forcée

$$\psi = - \frac{\varepsilon_0}{e + A_2 \frac{\sigma + \omega}{\omega}}; \quad (37)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}}{e + \frac{A_2}{A} \frac{\sigma + \omega}{\omega}}$$

où

$$\varepsilon_0 = - \frac{v_e (C-A)}{a^2 [\omega \sigma A + \omega^2 (A-C)]} \quad (38)$$

amplitude de la nutation pour la Terre solide entière. La condition d'annulation du déterminant du système donne deux valeurs de la fréquence propre:

$$\sigma_1 = -\omega \left(1 + e \frac{A}{A_2} \right) \quad (39a)$$

et

$$\sigma_e = \frac{C-A}{A_2} \omega. \quad (39b)$$

Dans le cas de l'enveloppe élastique idéale sans océan, la phase des déformations de marées de l'enveloppe est la phase des forces provoquant la déformation. C'est pourquoi les valeurs $b(b)$, J_1 et J_2 sont réelles. Après avoir substitué les valeurs réelles J_1, J_2 dans les équations (28), (34), (35) il est facile de constater que les valeurs $\varepsilon, \psi, \sigma_1$ et σ_e sont également réelles.

Dans le cas d'une enveloppe viscoélastique avec océan, les parties imaginaires des paramètres ϵ , ψ et des fréquences propres σ_1 , σ_e sont déterminées par les valeurs $\text{Im } J_1$ et $\text{Im } J_2$. Pour calculer les valeurs complexes des fréquences σ_1 , σ_c nous examinerons les forces déformant l'enveloppe.

Mouvement chandlérien du pôle

Pour $J_1 \neq 0$ et $J_2 \neq 0$ au lieu de (39b) nous obtiendrons

$$\sigma_c = \frac{C-A}{A_2} \omega - \frac{(I_1+I_2)\omega}{A_2\epsilon}.$$

Conformément à (19) on peut écrire cette expression sous la forme

$$\sigma_c = \frac{C-A}{A_2} \omega + \frac{a^3}{3G A_2 \epsilon} \omega v_i(a). \quad (39c)$$

Dans le mouvement chandlérien du pôle les déformations élastiques sont créées par des forces de volume dont le potentiel ψ a le même aspect que le potentiel générateur des marées. C'est pourquoi le paramètre $v_i(a)$ est déterminé par le nombre de Love k :

$$V_i = k\phi$$

ou en tenant compte de (2), (16)

$$v_i(a) = -k\epsilon\omega^2 a^2. \quad (40)$$

La substitution de (40) dans (39c) donne l'expression correspondant en précision avec ce qu'on obtient pour le noyau compressible hétérogène {4}.

$$\sigma_c = \frac{C-A}{A_2} \left(1 - \frac{k}{k_0}\right), \quad (41)$$

où $k_0 = 3G \frac{C-A}{a^5 \omega^2}$, nombre de Love pour la Terre liquide entière.

Pour le modèle non élastique de l'enveloppe avec océan k est une valeur complexe; la valeur correspondante $\text{Im } \delta_c$ détermine le paramètre de qualité.

$$Q_c = \frac{\text{Re } \sigma_c}{2 \text{Im } \sigma_c}.$$

Nutation libre quasi diurne forcée.

Dans l'équation (28), (34) les valeurs J_2 entrent avec le facteur $\sigma + \omega/\omega$, les valeurs J_1 ne renferment pas ce facteur. Pour la nutation libre $\sigma + \omega/\omega \sim 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$, c'est pourquoi l'amortissement de la nutation libre quasi diurne dépend fortement de l'amplitude et de la phase des oscillations de l'interface noyau-enveloppe et ne dépend pratiquement pas des composantes non diagonales des tenseurs d'inertie de l'enveloppe et de l'océan. Les amplitudes et les phases des nutations fondamentales annuelle et semi-

annuelle ne dépendent pratiquement pas de J_2 .

Les valeurs I_1 , I_2 se déterminent par la rigidité effective de l'enveloppe vis à vis de l'effet de la pression P_1 (14) et de la force de volume

$$\rho \left[\text{grad} \left(V_e + V_i - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right) + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_z \right]. \quad (42)$$

Pour la nutation libre $\varepsilon \ll \psi$ et forcée $\phi \ll V_e$. C'est pourquoi dans tous ces cas on peut négliger les termes renfermant ε et ϕ dans les formules (14) et (42). Dans cette approximation la pression P_1 et la force de volume (42) se déterminent par les valeurs des trois paramètres: v_e , v_i et ψ . Les valeurs v_i ne dépendent que des propriétés mécaniques de l'enveloppe et peuvent être exprimées par v_e et ψ . Ainsi, on peut représenter les paramètres I_1 , I_2 par

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1 \left(\lambda_1 \psi + \lambda_2 \frac{v_e}{ga} \right); \\ I_1 + I_2 &= C \left(\lambda_3 \psi + \lambda_4 \frac{v_e}{ga} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

où $\lambda_1 \dots \lambda_4$ sont des valeurs sans dimension ne dépendant que de la structure interne de l'enveloppe et déterminant la rigidité effective de l'enveloppe par rapport à l'action des forces de surface et de volume, $g = 980 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ - constante introduite pour dimensionner l'accélération de la force de pesanteur à la surface. Après avoir substitué (43) dans les équations (34) (35) nous obtiendrons un système de deux équations algébriques en les inconnues ε et ψ . En la résolvant séparément pour ε et en négligeant les petits termes, nous trouverons

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{C_1}{C} \frac{1 + \alpha \lambda_2}{(e + \lambda_1) \frac{\omega}{\sigma + \omega} + \frac{A_2}{A}} + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \alpha \lambda_4 \right), \quad (44)$$

où

$$\alpha = \frac{C}{C - A} \frac{a \omega^2}{g} = 1,057.$$

La condition d'annulation du dénominateur (44) détermine la fréquence et le paramètre de qualité Q de la nutation libre quasi diurne.

$$\text{Re } \sigma = -\omega \left(1 + \frac{A}{A_2} (e + \text{Re } \lambda_1) \right); \quad (45)$$

$$Q = \frac{\text{Re } \sigma}{2 \text{Im } \sigma} = - \frac{\text{Re } \sigma}{2\omega \frac{A}{A} \text{Im } \lambda_1}. \quad (46)$$

II. Nutation libre et forcée pour les modèles réels de l'enveloppe et de l'océan.

Amortissement du mouvement chandlerien du pôle.

La partie imaginaire du nombre de Love k entrant dans (41) est liée au paramètre de qualité du manteau

$$Q_{\mu}(r) = \left(\frac{\text{Im } \mu(r)}{\text{Re } \mu(r)} \right)^{-1}$$

par la relation (12) tirée du travail [15]. Après avoir remplacé cette valeur en {41} nous obtiendrons

$$Q_c^{-1} = \int_{0,546}^1 \alpha(\xi) Q_{\mu}^{-1}(\xi) d\xi, \quad (47)$$

où $\xi = r/a$ - le rayon sans dimension, $\alpha(\xi)$ est une fonction de poids infini. Pour le modèle 508 de Gilbert et Dziewonski [16] les valeurs numériques des coefficients $\alpha(\xi)$ sont les suivants:

ξ	0,546	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,998	1,00	(48)
$\alpha(\xi)$	2,79	2,11	1,80	1,56	1,31	1,06	0,796	0,516	0,285	0,219	0,055	

Les coefficients $\alpha(\xi)$ permettent de trouver les valeurs correctes de Q_c pour des répartitions arbitraires $Q_{\mu}(r)$ dans le manteau. Avec la fonction $Q_{\mu}(r) = Q_0$ ne dépendant pas de r , nous obtiendrons à l'aide de (47), (48)

$$Q_c = 1,82 Q_0,$$

ce qui diffère sensiblement du résultat donné en {17}:

$$Q_c = 9 Q_0$$

Les valeurs numériques Q_c pour les modèles réels de la répartition $Q_{\mu}(r)$ dans l'enveloppe sont énumérées dans le travail [18]. Pour la bande des répartitions admises de la fonction de dissipation $Q_{\mu}(r)$ provenant du travail [19] les valeurs se trouvent dans l'intervalle.

$$Q_c = 400 - 600.$$

Nutation libre quasi diurne

a) modèle d'enveloppe visco-élastique sans océan

Les valeurs des paramètres λ_1 et λ_2 pour le modèle de la Terre élastique sans océan se déterminent par la fonction de Green pour les équations des déformations sphéroïdales élastiques de la Terre du second ordre [20]. En utilisant les valeurs numériques de la fonction de Green pour

le modèle 508 de Gilbert et Dziewonski {16} provenant du travail {21} nous trouvons

$$\lambda_1 = -0,61 \cdot 10^{-3} \quad (49a)$$

$$\lambda_2 = -0,57; \quad \lambda_4 = -0,302. \quad (49b)$$

La substitution de (49a) dans (45) donne la fréquence de la nutation libre quasi diurne. Pour $C/C_2 = 1,12$ et $e = 2,56 \cdot 10^{-3}$ nous obtiendrons

$$\frac{\sigma + \omega}{\omega} = -2,184 \cdot 10^{-3}$$

ce qui correspond à la période du mouvement libre du vecteur ω dans l'espace

$$T = \frac{2\pi}{\sigma + \omega} = 458 \text{ jours sidéraux.}$$

La viscosité de l'enveloppe apparaît dans le fait que la phase entrant dans (28), (34), (35) de la valeur de I_1 retarde par rapport à la phase de la pression P_1 déformant l'enveloppe. On peut en tenir compte si l'on considère le paramètre λ_1 comme complexe. Pour les modèles de répartition $Q_\mu(r)$ dans l'enveloppe construits en {19}, les valeurs $\text{Im } \lambda_1 / \text{Re } \lambda_1$ se trouvent dans l'intervalle

$$\frac{\text{Im } \lambda_1}{\text{Re } \lambda_1} = (1-2) \cdot 10^{-3}, \quad (50)$$

En substituant (49) et (50) dans (46) nous obtiendrons

$$Q = 5 \cdot 10^5 \div 10^6,$$

ce qui correspond au temps d'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle.

$$\tau = \frac{2}{|\sigma|} Q = (500-1000) \text{ années}$$

b) Influence de la marée océanique.

Pour les marées quasi diurnes le déplacement de la phase V_1 par rapport à V_e est déterminé par la marée dynamique dans l'océan. La dissipation dans l'océan dépasse l'énergie dissipée dans l'enveloppe de plus d'un ordre. C'est pourquoi la marée dans l'océan peut avoir une importante influence sur l'amortissement de la nutation libre quasi diurne.

Puisque dans les équations (28), (43) les valeurs de I_2 contenant les composantes non-diagonales du tenseur d'inertie de l'océan interviennent avec un facteur très petit $\sigma + \omega / \omega = -2,2 \cdot 10^{-3}$, l'amortissement du mouvement quasi diurne du pôle dû à la présence de l'océan, se détermine complètement par la phase des variations de la limite noyau-enveloppe. Le mécanisme

d'amortissement se comporte comme suit.

1. La pression P_1 fléchit l'interface enveloppe-noyau. Les déformations élastiques se transmettent vers les parties extérieures de la Terre à cause de quoi naissent dans l'océan des courants de période égale à la période de la résonance quasi diurne.
2. La charge due au déplacement des masses d'eau à la surface de la Terre retarde sensiblement en phase en fonction des déformations de la surface provoquant ce déplacement. Sous l'effet de la charge il y a des déformations élastiques de toute la Terre parmi lesquelles la déformation de l'interface du noyau avec l'enveloppe. L'harmonique du second ordre dans la décomposition de la composante radiale des déplacements de l'interface noyau-enveloppe a la même phase que la charge venant de l'océan et détermine les paramètres cherchés $\text{Im } \lambda_1$, $\text{Im } I_1$ et Q .

Le calcul numérique de cet effet pour le modèle 508 de Gilbert et Dziewonski [16] donne les valeurs suivantes: pour une amplitude de déplacements de l'interface $h(b) = 1$ cm l'amplitude des déplacements de la surface extérieure de la Terre est de 0,739 cm et le déplacement de la surface extérieure par rapport à l'équipotentielle $h(a) = 0,388$ cm. Des courants provoqués par ce déplacement dans l'océan sont équivalents par le fait qu'ils apparaissent sous l'effet du potentiel générateur de marée avec une amplitude $g\tilde{h}(a) = 380 \text{ cm}^2/\text{S}^2$ et une fréquence σ . L'harmonique du second ordre dans la décomposition de la variation correspondante du potentiel gravitationnel de l'océan est déterminée par l'expression

$$\tilde{V} = \sin \theta \cos \theta \text{Re}(\tilde{v} e^{i(\sigma t - \lambda)}),$$

où $\tilde{V} = \tilde{k} g \tilde{h}(a)$, \tilde{k} est d'ordre connu par rapport au nombre de Love k pour la marée dans l'océan. Le potentiel \tilde{V} est créé par la couche d'eau de densité ρ_0 et de profondeur k_0 .

Après avoir exprimé $\rho_0 k_0$ par \tilde{V} , nous obtiendrons

$$\rho_0 k_0 = \frac{5}{4\pi G} \tilde{v}. \quad (51)$$

La pression créée sur la surface extérieure de la Terre par cette couche d'eau est

$$\tilde{P} = \sin \theta \cos \theta \text{Re}(\tilde{p} e^{i(\sigma t - \lambda)}),$$

où

$$\tilde{p} = \rho_0 k_0 g = \frac{5}{4\pi G} k g^2 \tilde{h}(a).$$

La pression \tilde{P} et l'effet gravitativif de la couche (51) avec la Terre déforme l'interface noyau-manteau de:

$$\delta H(b) = \sin \theta \cos \theta \text{Re}(\delta h(b) e^{i(\sigma t - \lambda)}).$$

où

$$\delta h(b) = 0,26\bar{k}h(b).$$

En comparant cette expression avec (18), (43) nous obtiendrons

$$\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\delta I_1}{I_1} = \frac{\delta h(b)}{h(b)} = 0,24\bar{k}, \quad (52)$$

où $\delta\lambda_1$ est la correction au paramètre λ_1 pour la marée dans l'océan.

A l'aide des rapports (18), (19) et des valeurs des coefficients de surcharge pour la Terre réelle pour $n = 2$ et $r = b$ tirées du travail {21} il est facile de calculer aussi pour l'océan les corrections aux paramètres λ_2, λ_4 .

Leurs valeurs sont les suivantes

$$\begin{aligned} \delta\lambda_2 &= -\frac{a^3g}{3GC}\bar{k} = -1,01\bar{k}; \\ \delta\lambda_4 &= 0,61\bar{k}. \end{aligned} \quad (53)$$

La substitution de (52) et (49a) dans (45) détermine la correction à la fréquence de résonance quasi diurne pour l'action de l'océan:

$$\operatorname{Re} \frac{\delta\sigma}{\omega} = 1,6 \cdot 10^{-4} \operatorname{Re} \bar{k}.$$

La correction correspondante à la période du mouvement libre du vecteur ω dans l'espace est

$$\delta T = -\frac{T\omega}{\sigma + \omega} \operatorname{Re} \frac{\delta\sigma}{\omega} = 0,08 \operatorname{Re} \bar{k} T.$$

La valeur précise $\operatorname{Re} \tilde{k}$ peut être trouvée par les cartes cotidiales pour l'océan à la fréquence de la résonance quasi diurne. Pour $\operatorname{Re} \tilde{k} \sim -0,02$ la période T diminue à peu près d'un jour. Après avoir substitué ensuite (52) dans (46) nous obtiendrons

$$Q^{-1} = 3,3 \cdot 10^{-4} \operatorname{Im} \tilde{k}. \quad (54)$$

On peut ensuite exprimer la valeur $\operatorname{Im} \tilde{k}$ par la valeur connue du ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre par les ondes de marées. Après avoir exprimé le moment des forces de freinage par les valeurs v_e , $\operatorname{Im} \tilde{k}$ nous obtiendrons

$$L_T = \frac{av_e^2}{3G} \operatorname{Im} \tilde{k}.$$

La fréquence de l'onde K_1 est très voisine de la fréquence de résonance quasi diurne. C'est pourquoi on peut supposer que la valeur $\operatorname{Im} \tilde{k}$ sur la fréquence K_1 est proche de sa valeur sur la fréquence de résonance voisine de la fréquence diurne. En prenant pour l'onde K_1 , $v_e = 27850 \text{ cm}^2/\text{S}^2$ {22} et en utilisant la valeur donnée en {23}

$$L_T = 0,18 \cdot 10^{23} \text{ ДИН} \cdot \text{СМ},$$

nous obtiendrons

$$\operatorname{Im} \tilde{k} = 7 \cdot 10^{-3}. \quad (55)$$

Après avoir substitué (55) en (54) nous trouvons

$$Q = 4,3 \cdot 10^5,$$

ce qui correspond au temps d'amortissement du mouvement libre voisin du mouvement diurne du pôle

$$\tau = 370 \text{ années}$$

Ainsi à cause de la marée dans l'océan le temps d'amortissement de la nutation est du même ordre que le temps de relaxation dû à la viscosité de l'enveloppe.

Il faut noter que le temps de relaxation de la nutation libre quasi diurne τ dépasse sensiblement la durée des observations astronomiques du mouvement du pôle. C'est pourquoi on n'exclut pas la possibilité que sur des intervalles de temps très longs l'amplitude et la phase de la nutation libre quasi diurne puissent renfermer quelques valeurs sûres. Cette déduction ne contredit pas les résultats du travail {24} dans lequel, sur la base de la réduction des observations astronomiques de la latitude de Poltava de 1939 à 1963 on a obtenu des valeurs assez sûres de la phase ($106^\circ \pm 9^\circ$) et de l'amplitude ($0,019 \pm 0,003$) de la nutation libre quasi diurne.

Nutation forcée.

La substitution des valeurs numériques des paramètres λ_1 , λ_2 , $\delta\lambda_1$ et $\delta\lambda_2$ (49), (52), (53) en (44) détermine les amplitudes et les phases de la nutation forcée d'une Terre sans océan et avec océan. Les valeurs ϵ pour une Terre sans océan et les corrections aux valeurs ϵ dues à la marée océanique sont les suivantes

$\omega/(\sigma + \omega)$	—6800	6800	—365	365	—183	183	—13,7	13,7
$(\epsilon/\epsilon_0 - 1) \cdot 10^3$	—3,42	2,99	234	25,5	80,5	32,0	72,9	22,8
$\delta\epsilon \cdot 10^3 / \bar{k}\epsilon_0$	—5,92	5,14	311	39,6	142	47	197	—41

où $\delta\epsilon$ est la correction à ϵ pour la marée océanique. Les corrections aux amplitudes et aux phases de la nutation dues à l'influence de l'océan se déterminent par les produits des nombres complexes de Love pour l'océan k par les éléments de la dernière ligne.

Pour $\operatorname{Im} \tilde{k} = 7 \cdot 10^{-3}$ les corrections aux phases des nutations ne dépassent pas $0,0003$ ce qui est sensiblement moins que les erreurs de mesure. Ainsi, l'influence de l'océan sur la phase de la nutation forcée est insignifiante.

La valeur $\text{Re } \tilde{k}$ est assez bien connue pour la marée statique. Dans le travail {4} on a obtenu $\tilde{k}|_{\sigma=0} = 0,0465 - 0,0506$. On a obtenu une valeur plus précise en {13} $\tilde{k} = 0,038$. Cependant la marée océanique de période voisine du jour diffère sensiblement de la marée statique, c'est pourquoi les valeurs $\text{Re } \tilde{k}$ pour $\sigma \sim -\omega$ peuvent différer sensiblement des valeurs données plus haut. D'après les données communiquées aimablement à l'auteur par B.P. Pertsev il faut considérer $\text{Re } \tilde{k} \sim -0,02$ comme une valeur plus sûre de $\text{Re } \tilde{k}$ dans les fréquences des ondes quasi diurnes. En utilisant les valeurs des constantes des nutations pour la Terre solide sans noyau liquide tirées du travail {12} et en posant $\text{Re } \tilde{k} \sim -0,02$, nous obtiendrons les valeurs suivantes des amplitudes des nutations:

	Principale	annuelle	semi-annuelle	bimensuelle
En obliquité	9;2276	-0;0001	0;5537	0;0950
En longitude	6;8709	-0;0501	0;5084	0;0882
En obliquité	9;2027	0;0051	0;5725	0;0973
En longitude	6;8398	-0;0566	0;5236	0;0900
En obliquité	9;2035	0;0049	0;5719	0;0974
En longitude	6;8409	-0;0564	0;5232	0;0901

Les valeurs dans la première paire de lignes correspondent au cas de la Terre absolument rigide, dans la seconde paire au cas de la Terre élastique avec un noyau liquide et sans océan, dans la troisième à la Terre élastique avec un noyau liquide et l'océan.

Les valeurs des amplitudes dans la seconde paire de lignes se trouvent en bonne concordance avec les résultats obtenus en {2, 4 à 6}. Apparemment cela témoigne de ce que l'amplitude de la nutation dépend très faiblement de la compressibilité du noyau.

La comparaison de la deuxième et de la troisième paires de lignes montre que les corrections aux amplitudes dues à l'effet de la marée océanique sur la marée terrestre élastique est de l'ordre de 0;001. Pour une précision actuelle des observations de l'ordre de 0;003 ces corrections n'ont pas une valeur importante.

III. Résonance dans le passé.

La formule (44) permet également d'évaluer l'amplitude du mouvement quasi diurne du pôle de 200 millions d'années en arrière quand la fréquence de la nutation libre quasi diurne correspondait avec la fréquence de l'onde ψ_1 . La même estimation, mais sans tenir compte de la viscosité

de l'enveloppe et de la dissipation de l'énergie dans l'océan a été faite précédemment en {9}.

En supposant en (44)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{A_2}{A} \frac{\sigma + \omega}{\omega} + \lambda_1 \right) = -e,$$

nous obtiendrons

$$\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right| = \frac{A_2}{A} \frac{0,0435}{\operatorname{Im} \lambda_1} \frac{\sigma + \omega}{\omega}. \quad (56)$$

Si pour 200 millions d'années la valeur du ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre n'a pas varié sensiblement, alors pour $\operatorname{Im} k$, on peut utiliser la valeur (55).

Après avoir substitué (52) dans (56) nous trouvons

$$\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right| = 100.$$

En utilisant pour l'amplitude de l'onde ψ_1 la valeur de la décomposition de Doodson {22} nous trouvons

$$\begin{aligned} v_e|_{\tau_1} &= 223 \text{ cm}^2/\text{c}^2 \\ |\varepsilon| &= 3 \cdot 10^{-8}; \quad |\psi| = 1,5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (57)$$

L'angle d'ouverture de l'herpolodie correspondant à ces valeurs était

$$|\varepsilon_1| = \left| \varepsilon \frac{\omega}{\sigma + \omega} \right| = 1,4 \cdot 10^{-8} = 7'',$$

ce qui est 10 fois moins que la valeur $\varepsilon_1 = 75''$ {9}, obtenue sans tenir compte de la dissipation de l'énergie de marée dans l'océan. L'amplitude correspondant à (57) des oscillations diurnes tangentielles des couches supérieures du noyau par rapport à l'enveloppe était

$$|b\psi| \sim 500 \text{ m}. \quad (58)$$

Pour comparer cette valeur avec sa valeur à l'époque actuelle nous évaluerons l'amplitude des oscillations du noyau par rapport à l'enveloppe sous l'effet de l'onde K_1 provoquant la précession. Après avoir substitué en (44) la valeur $v_e/K_1 = 27850 \text{ cm}^2/\text{S}^2$ et $\sigma + \omega = 0$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} |\psi| &= 2,16 \cdot 10^{-5} \\ |b\psi| &= 75 \text{ m}, \end{aligned}$$

ce qui est 7 fois plus petit que l'amplitude avec la résonance (58).

Cette estimation peut présenter de l'intérêt en relation avec l'hypothèse de Malkus {26, 27, 10} conformément à laquelle les oscillations du noyau provoquées par l'onde K_1 servent de source d'énergie pour alimenter la géodynamo. Si c'est ainsi alors l'accroissement important des oscillations du noyau à la résonance n'a pas pu se faire sentir sur le pôle magnétique de la Terre il y a environ 200 millions d'années. Il serait curieux de noter que d'après les données du travail {28} dans l'histoire du champ magnétique il existe un intervalle unique de temps d'une durée de 50 millions d'années (de 280 à 230 millions d'années en arrière) au cours duquel l'orientation du dipôle de la Terre n'a pas varié. La question se pose de savoir si ce phénomène n'est pas lié à la perturbation de résonance des oscillations quasi diurnes du noyau.

En conclusion nous formulerons les conclusions principales suivantes:

1. L'influence de l'océan et de la viscosité de l'enveloppe sur la nutation libre et forcée de la Terre est complètement déterminée par les valeurs des paramètres $\lambda_1 \dots \lambda_4$, ayant le sens de la rigidité effective de l'enveloppe par rapport à l'effet des forces de surface et de volume réparties proportionnellement à la fonction sphérique du second ordre.

Le décrétement de l'amortissement du mouvement libre quasi diurne est complètement déterminé par la valeur $\text{Im } \lambda_1$. La valeur $\text{Im } \lambda_1$ est en liaison avec la valeur du ralentissement séculaire de la rotation diurne de la Terre par l'onde K et avec la répartition de la fonction de dissipation $Q_\mu(r)$ dans l'enveloppe. Le temps d'amortissement du mouvement libre quasi diurne du pôle dû à la dissipation d'énergie dans l'océan et dans le manteau non élastique est de l'ordre de 300 années.

2. L'effet de la marée océanique sur la marée terrestre élastique provoque une diminution de la période de la résonance quasi diurne de 0,4 s ce qui correspond à une diminution de la période du mouvement libre du vecteur $\vec{\omega}$ dans l'espace d'à peu près un jour.

3. Pour la bande des répartitions admises de la fonction de dissipation $Q_\mu(r)$ tirée du travail {19} le paramètre de qualité du mouvement Chandlérien Q_c peut se trouver dans l'intervalle de $Q_c \sim 400$ à 600.

4. Les corrections aux amplitudes et aux phases de la nutation forcée de la Terre dues à l'océan ne dépassent pas les erreurs des observations astronomiques actuelles.

5. La dissipation de l'énergie de marée dans le manteau visqueux et l'océan a exercé une influence importante sur l'amplitude des oscillations du noyau par rapport à l'enveloppe d'il y a 200 millions d'années.

Si l'estimation de la viscosité du noyau {29} est correcte alors l'amplitude des oscillations du noyau a dû croître d'un peu près un ordre.

L'auteur est reconnaissant à V.N. Zharkhov, N.N. Pariiskii, B.P. Pertsev et Ia. S. Iatskiv qui ont lu le manuscrit et ont fait une série de remarques précieuses.

BIBLIOGRAPHIE

1. Lamb H., Hydrodynamique, pp. 913-918.
2. Jeffreys H., Vicente R.O., The theory of nutation and the variation of latitude.
Monthly Notices R.A.S., 1957, v. 117, p. 142-161.
3. Jeffreys H., Vicente R.O., The theory of nutation and the variation of latitude. The Roche model core.
Monthly Notices R.A.S., 1957, v. 117, p. 162-173.
4. Molodenskii M.S., Théorie de la nutation et des marées terrestres diurnes
Isd. A.N.SSSR, 1961, pp. 3-25.
5. Shen Po Yu., Mansinha L., Oscillation, nutation and wobble of an elliptical Earth with liquid outer core.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 46, p. 467-496.
6. Wahr J.M., The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1980.
7. Stewartson K., Roberts P.H., On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body.
J. Fluid Mech., 1963, v. 17, N° 1, p. 1-20.
8. Busse F.H., Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell.
J. Fluid. Mech., 1968, v. 33, N° 1, p. 739-751.
9. Toomre A., On the "nearly diurnal wobble of the Earth".
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, v. 38, p. 335-348.
10. Loper D.E., Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo.
Phys. Earth Planet. Inter., 1975, v. 11, p. 43-60.
11. Rochester M.G., Perturbation in the Earth rotation and geomagnetic Core-Mantle coupling.
J. Geomagn. and Geoelectr., 1968, v. 20, N° 4, p. 38.

12. Sasao T., Okamoto J., Sakai S., Dissipative coremantle coupling and nutational motion of the Earth.
Publ. Astron. Soc. Japan, 1977, v. 29, p. 83-105.
13. Dahlen F.A., The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 46, p. 363-406.
14. Yatskiv Ya.S., Sasao T., Chandler wobble and viscosity in the Earth's core.
Nature, 1975, v. 255, p. 655.
15. Molodenskii S.M., Variation des nombres de Love pour une variation du modèle structurel de la Terre.
Isv. AN.SSSR, Fizika Zemli, 1976, n° 2.
Traduction BIM 74, p. 4293, 1976.
16. Gilbert F., Dziewonski A.M., An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanism from seismic spectra.
Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 1975, v. 278, p. 187-269.
17. Merriam J.B., Lambeck K., Comments on the Chandler wobble Q.
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1979, v. 59, p. 281-286.
18. Zharkhov V.N., Molodenskii S.M., Sur les corrections du module dynamique de déplacement pour les nombres de Love.
Isv. AN. SSSR, Fizika Zemli, 1977, n° 5.
19. Doroféiev V.M., Zharkhov V.N., Sur la détermination du facteur de qualité de la Terre.
Isv. AN. SSSR, Fizika Zemli, 1978, n° 9.
20. Molodenskii S.M., De la fonction de Green pour les équations des déformations sphéroïdales élastiques de la Terre.
Isv. AN. SSSR, Fizika Zemli, 1976, n° 11.
Traduction BIM 76, p. 4446, 1977.
21. Molodenskii S.M., Kramer M.V., Sur la possibilité qu'ont les hétérogénéités horizontales du manteau d'apparaître dans les observations de marées terrestres.
Isv. AN. SSSR, Fizika Zemli, 1980, n° 1
Traduction BIM 84, p. 5370, 1980.
22. Melchior P., Marées terrestres, Mir, 1968.
23. Pariiskii N.N., Kouznetsov M.V., Kouznetsova L.V., Sur l'influence de la marée océanique sur le ralentissement séculaire de la rotation de la Terre.
Isv. AN. SSSR, Fizika Zemli, 1972, n° 2.
24. Popov K.A., Termes à courte période dans les variations de latitude à Poltava.
Kiev, Nauka·Dumka, 1968.
25. Kinoshita H., Theory of the rotation of the rigid Earth.
Gelest. Mech., 1977, v. 15, p. 277-326.

26. Malkus W.V.P., Precessional torques as the cause of geomagnetism.
J. Geophys. Res., 1963, v. 68, p. 2871-2883.
27. Rochester M.G., Jacobs J.A., Smylie D.E., Chong K.F., Can precession
power the geomagnetic dynamo?
Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1975, v. 43, p. 661-678.
28. Irving E., Paleomagnetism, N.Y. : Wiley, 1964.
29. Gans F., Viscosity of the Earth's core.
J. Geophys. Res., 1977, v. 77, p. 360-366.