

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N°74

30 Septembre 1976

**Association Internationale de Géodésie
Commission Permanente des Marées Terrestres**

*Éditeur Prof. Paul MELCHIOR
Observatoire Royal de Belgique*

3. Avenue Circulaire

1180 Bruxelles



Les conditions aux limites à la surface de la sphère élastique gravitative peuvent être écrites de la façon suivante:

$$\begin{aligned} L &= (2n+1)g_0 - (n+1)R, \\ M &= 0, \\ N &= -\frac{2n+1}{3}\rho_m g_0 \psi, \quad \text{rde } \psi = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ici la première condition découle de la continuité des dérivées du potentiel. La seconde représente l'absence de tensions tangentielles. Dans la troisième condition on note le fait de la présence ou de l'absence de charge à la surface de la sphère. Le cas $\psi=0$ est utilisé pour le calcul des nombres usuels de Love. A la limite du noyau liquide et de l'enveloppe les conditions suivantes doivent se réaliser:

$$\begin{aligned} L - r(n+rv)R + 4\pi\kappa r^2 H &= 0, \\ M = 0, \quad N + \rho_1(R + V'H) &= 0, \end{aligned}$$

où ρ_1 est la densité du noyau à la limite avec l'enveloppe. La fonction v est introduite pour tenir compte de l'influence du noyau liquide et est déterminée par sa structure. La valeur v à la limite du noyau est obtenue par la solution de l'équation de Molodenski [3]:

$$v' + v^2 + \frac{2(n+1)}{r}v + 4\pi\kappa \frac{\rho'}{V'} = 0. \quad (2)$$

Si le noyau est considéré comme homogène, alors $v=0$

Les équations (1) sont valables pour $n \geq 2$. Les cas $n=0$ et $n=1$ requièrent un examen séparé.

$n=0$ Dans ce cas la couche homogène couvrant toute la sphère terrestre provoque uniquement des déplacements radiaux. Il ne se produit pas de déplacements tangentiels et de variations du potentiel à la suite de la déformation de la sphère. La solution se simplifie parce que le problème se ramène à l'intégration du système des équations différentielles du second ordre

$$\begin{aligned} H_0' &= -\frac{2}{r} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} H_0 + \frac{1}{\lambda+2\mu} N_0, \\ N_0' &= \frac{4}{r} \left[\rho V' + \frac{\mu}{r} + \frac{2}{r} \frac{\mu\lambda}{\lambda+2\mu} \right] H_0 - \frac{4}{r} \frac{\mu}{\lambda+2\mu} N_0. \end{aligned}$$

A la frontière noyau - enveloppe, les paramètres H_0 et N_0 sont continus. Les conditions aux limites sont données sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} N_0 &= -1/3 \rho_m g_0 && \text{à la surface extérieure} \\ H_0 &= 0 && \text{à la surface du noyau homogène} \\ &&& \text{interne incompressible.} \end{aligned}$$

Comme on le montrera plus loin, admettre que la graine est homogène et incompressible influence très faiblement les résultats pour $n=0$ et n'influence pas du tout pour $n>2$. Cependant cette simplification facilite sensiblement le problème de l'intégration des systèmes d'équations puisque pour ce noyau on a une solution analytique [3]. De la condition de conservation des masses des eaux de marées il s'ensuit que l'effet d'ordre zéro doit être égal à zéro au moment de l'intégration pour tout l'océan mondial. Cependant il faut en tenir compte lors de l'estimation de l'effet des charges qui ne sont pas dues aux marées ou de l'influence des marées des mers séparées.

$n=1$ Comme l'ont montré Ketles et Farrell [4] la représentation précédente en l'absence de l'effet du premier ordre [5] est fautive. Ce terme peut amener une contribution sensible dans l'effet général. Comme on l'a montré en [4] pour $n=1$ il existe une dépendance fonctionnelle entre les variables cherchées, dépendance qui est exprimée ici dans les notations:

$$r^2 N + 2r^{-1} M - \frac{V'}{4\pi x} (L+2rR) = 0 \quad (3)$$

On peut démontrer de façon analytique cette relation pour le cas général du modèle hétérogène compressible sphériquement symétrique de la Terre.

Ainsi en raison de (3) la solution satisfaisante pour deux des trois conditions aux limites sur la surface de la sphère satisfait automatiquement aussi à la troisième condition aux limites.

Si l'origine des coordonnées correspond au centre de masse, l'harmonique du premier ordre manque dans la décomposition du potentiel en série de fonctions sphériques. D'autre part, la charge déterminée par la marée océanique et exprimée par l'harmonique du premier ordre provoque un déplacement du centre de masse. C'est pourquoi l'accroissement du potentiel ΔV à cause

du potentiel de la charge, du potentiel de la déformation et du déplacement progressif du corps solide de la Terre doit être égal à zéro. Il est facile d'en déduire que $k'_1=0$ ou $R(a)=ag_0$. Par conséquent, à la surface de la sphère:

a) le potentiel de la couche d'eau est

$$\Delta V_1 = \omega_1 = \frac{4\pi ka}{3} \sigma_1 \cos \theta$$

où σ_1 est la densité de la couche;

b) l'accroissement du potentiel à cause de la déformation de la sphère élastique est

$$\Delta V_2 = k'_1 \omega_1$$

c) la variation du potentiel de la sphère non déformée à cause du déplacement progressif est

$$\Delta V_3 = CV' \cos \theta$$

Ici C est le déplacement du centre de masse provoqué par la couche d'eau décrite par l'harmonique du premier ordre et égal à

$$C = \frac{\rho_0 h}{\rho_m} = \frac{\sigma_1}{\rho_m}$$

D'où la variation complète du potentiel:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = (1+k'_1)\omega_1 + CV' \cos \theta = 0.$$

Mais

$$CV' \cos \theta = - \frac{4\pi ka}{3} \rho_m C \cos \theta = - \omega_1$$

et par conséquent, $k'_1 = 0$. Ce sera la troisième condition limite indépendante à la surface de la sphère pour $n=1$.

Modèle de la Terre Pour calculer les coefficients de surcharge on a utilisé le modèle de Gutenberg. Les tables des paramètres principaux $\rho(r)$ $\mu(r)$ et $\lambda(r)$ ont été tirées de [6] et sont représentées par 12 paraboles dans l'enveloppe et 4 dans le noyau extérieur. Le petit déficit de masse obtenu ainsi a été comblé par l'augmentation de la densité dans la galerie.

Comme l'ont montré les calculs les petites variations dans la répartition de la densité dans le noyau (avec le maintien de la masse générale de la Terre) et la variation du rayon de la graine n'exercent pratiquement pas d'influence ni sur la valeur du moment d'inertie ni sur les coefficients de surcharge pour $n \geq 2$. On a examiné trois variantes de la répartition de la

densité dans le noyau. Les répartitions prises $\rho(r)$ sont données sur la figure 1 où les valeurs sont notées par des astérisques données en [6].

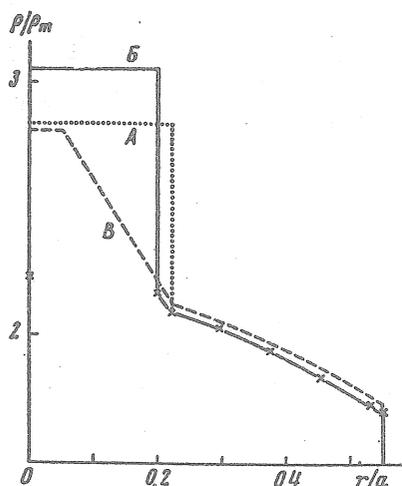


Fig. 1 Trois variantes de la répartition de la densité dans le noyau. Les valeurs données en [6] sont notées par des astérisques.

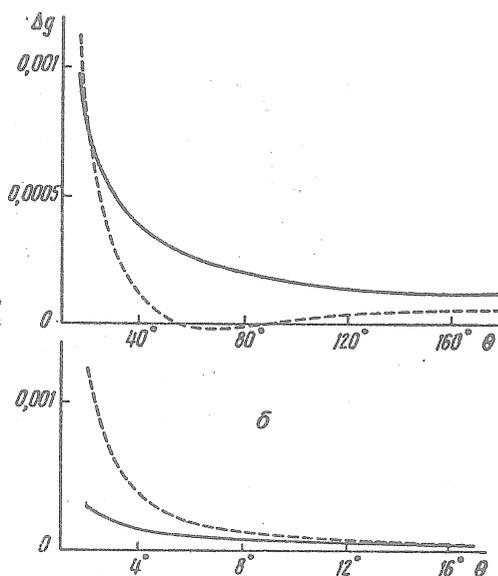


Fig.2 Influence (en microgals) d'une couche d'un centimètre d'eau de mer sur la force de pesanteur a-est la surface des segments 5°X5°, h est la surface du segment 1°X1°.

La force de pesanteur $g(r)$ a été également représentée par des paraboles sur la base de la répartition obtenue de la densité et c'est pourquoi elle diffère un peu dans le noyau en fonction des données des tables [6].

Calcul des coefficients de surcharge

Pour faciliter l'intégration numérique des équations différentielles [3], on a pris: a) comme unité de longueur - le rayon moyen de la Terre $a=6,371 \cdot 10^8$ cm; b) comme unité de densité - la densité moyenne de la Terre $\rho_n=5,517$ g/cm³; c) comme unité d'accélération - l'accélération de la force de pesanteur à la surface de la sphère de rayon a et de densité $\rho_m g = 982$ cm/sec².

On a traduit les valeurs μ, λ, κ dans ce système des unités. En outre, étant donné la croissance rapide des fonctions inconnues avec une augmentation de l'ordre n on a fait la substitution de variables:

$$H=(2n+1)\bar{H}r^{-n}, \quad T=\bar{T}r^{-n}, \quad R=\bar{R}r^{-n}, \\ L=(n+1)\bar{L}r^{-n}, \quad M=n\bar{M}r^{-n}, \quad N=n(2n+1)\bar{N}r^{-n}.$$

Avec ces variables on a fait l'intégration des équations pour $n \geq 2$. Pour $n=0$ l'intégration a été faite à partir du noyau homogène intérieur incompressible jusqu'à la surface pour trois variantes de la répartition de la densité dans le noyau. Les résultats des calculs sont donnés dans la table 1.

Pour $1 \leq n \leq 24$ l'intégration a été faite depuis la frontière du noyau jusqu'à la surface extérieure. L'influence du noyau liquide a été prise en considération à l'aide de la fonction auxiliaire v entrant dans les conditions aux limites sur la frontière noyau - enveloppe et calculée d'après (2) pour les trois modèles indiqués. Pour $n=1$ comme on l'a indiqué plus haut, une des conditions aux limites à la surface $r=a$ a été remplacée par $R(a)=1$. Les résultats obtenus pour $n=1$ sont donnés également dans la table 1.

Pour $n \geq 2$ les divergences dans les valeurs des coefficients de surcharge obtenues pour les différents modèles de noyau deviennent insignifiantes. Pour $n \geq 9$ la structure du noyau, dans les limites de la précision des calculs n'influence en général pas les valeurs des coefficients de surcharge. C'est pourquoi dans les calculs ultérieurs tout le noyau a été pris comme liquide, homogène et incompressible. La profondeur effective jusqu'à laquelle il faut faire l'intégration diminue rapidement lorsque n augmente.

Table 1

Coefficients de surcharge d'ordre zéro et du premier ordre

Modèle de noyau	A	B	C
h_0'	-0,1325	-0,1329	-0,1337
h_1'	-0,2971	-0,2966	-0,2956
l_1'	+0,1060	+0,1065	+0,1077

Table 2

Coefficients de surcharge

Ordre n	$-h'_n \times 1000$			$-k'_n \times 1000$		
		Φ^*	Ω^{**}		Φ^*	Ω^{**}
0	133	(134)	134	0	0	0
1	297	290	0	0	0	0
2	1000	1001	1007	614	615	620
3	1053	1052	1059	588	585	591
4	1054	1053	1059	533	528	532
5	1087	1088	1093	522	516	520
6	1145	1147	1152	540	535	540
7	1215	—	1223	573	—	574
8	1287	1291	1296	611	604	608
10	1427	1433	1439	690	682	690
18	1878	1893	1902	964	952	972
32	2352	2379	2408	1255	1240	1280
100	2969	3058		1468	1461	
180	3309	3474		1533	1591	
1000	4783	4906		2294	2431	
1800	4933	4953		2380	2465	
3000	4980	4954		2406	2468	
10 000	5006	4956		2418	2469	
30 000	5008			2418		
70 000	5010			2419		

* Φ - d'après les calculs de Farrell [4]

** Ω d'après les calculs de Longman [5].

La structure des couches plus profondes n'exerce pas d'influence sensible sur les résultats. Pratiquement dans les calculs cela se ramène à ce qu'à mesure de la croissance des valeurs n le rayon du noyau homogène incompressible a augmenté en s'approchant de la surface extérieure. Ce rayon du noyau ou la profondeur jusqu'à laquelle on a fait l'intégration a été déterminée par voie de calcul d'après un programme spécial pour des intervalles déterminés des valeurs n. De cette façon on a fait le calcul des coefficients h'_n , k'_n et Ω'_n jusque $n=70.000$. En fait les calculs n'ont pas été faits pour toutes les valeurs n. Les intervalles entre les coefficients calculés ont augmenté avec la croissance de l'ordre n. L'intégration des équations a été faite d'après la méthode de Runge - Kutta avec pas variable. La valeur du pas augmente avec la profondeur en restant constante à l'intérieur de chacune des 12 couches suivant lesquelles a été partagée l'enveloppe. Avec l'augmentation de l'ordre n, le pas d'intégration a diminué. Les valeurs des coefficients de surcharge calculés h'_n et k'_n pour certains ordres n sont données dans la table 2.

Là aussi sont donnés à titre de comparaison les coefficients obtenus par Longman [5] et Farrell [4]. Comme il fallait s'y attendre, les coefficients obtenus par différents auteurs sont voisins entre eux. Cette petite différence

s'explique apparemment par le fait que les données de départ adoptées ne sont pas absolument identiques.

Comme on l'a montré en [1,2] pour tenir compte des composantes de l'effet indirect des marées océaniques déterminées par la déformation de la Terre, il faut les valeurs suivantes.

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n' - \frac{n+1}{2} k_n'}{2n+1} H_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n' H_n(\theta),$$

$$\Delta \xi = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n' - h_n'}{2n+1} H_n(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n' H_n(\theta),$$

(4)

où $H_n(\theta)$ est $n^{\text{ème}}$ harmonique dans la décomposition de la hauteur H de la marée dans les segments sphériques examinés au lieu de trapèzes sphériques suivant lesquels se partage toute la surface de la Terre c'est à dire

$$H(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\theta) = \begin{cases} H & \text{pour } 0 \leq \theta < \alpha \\ 0 & \text{pour } \alpha < \theta \leq \pi \end{cases}$$

où

$$C_0 = \frac{H}{2} (1 - \cos \alpha),$$

et pour $n > 0$

$$C_n = \frac{H}{2} [P_{n-1}(\cos \alpha) - P_{n+1}(\cos \alpha)].$$

Le choix du segment sphérique au lieu du trapèze est déterminé avant tout par le fait que le segment est symétrique en axe. Et par conséquent lors de la décomposition de la hauteur H en une série de fonctions sphériques participeront seulement les harmoniques sphériques principales. En outre, bien que nous partagions la surface de la Terre en trapèzes d'égale surface, ces trapèzes sont loin de la congruence dans différentes latitudes. En ce qui concerne les effets du segment et du trapèze on peut négliger leur différence comme l'ont montré les calculs sur des distances plus grandes que 4 à 5 α depuis le centre du segment. Cette affirmation est correcte aussi pour la composante d'attraction. Dans la détermination de Δg et $\Delta \xi$ d'après les formules (4) les valeurs δ_n' et γ_n' pour $n > 9$ ont été approchées par les fonctions $f(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{\sqrt{n}}$ avec différentes valeurs des coefficients de A et B en différentes parties de l'axe n . Ainsi la longueur de la partie décrite par une paire de coefficients croît avec le nombre n . Le calcul a été fait pour différentes

valeurs de α et des distances sphériques θ et la sommation a été faite jusqu'à l'ordre n pour lequel l'augmentation ultérieure du nombre de termes de la série ne change pratiquement pas la somme. Pour les inclinaisons, le calcul a été fait en deux étapes. On a obtenu d'abord par la voie indiquée les sommes et ensuite par différenciation numérique les valeurs cherchées $\Delta\xi$. L'influence sur les observations gravimétriques et clinométriques de charges en forme de couches homogènes de centimètres d'eau de mer de densité $\rho_0 = 1,025 \text{ r/cm}^3$ couvrant les segments sphériques d'une surface de $5^\circ \times 5^\circ$ et $1^\circ \times 1^\circ$ pour les différentes distances sphériques θ sont données sur les figures 2 et 3. Les composantes de l'attraction comme on le sait, ne dépendent pas des coefficients de surcharge et se calculent séparément [1,2]. L'influence de ces composantes est donnée sur les figures par des lignes continues et les composantes déterminées par la déformation par un pointillé. Les courbes faites de cette façon pour les segments d'une surface de $0^\circ 01 \times 0^\circ 01$ permettent de tenir compte de l'influence des marées océaniques dans les eaux se trouvant à proximité directe (2 à 3 km) du point d'observation. Mais pour cela il faut avoir des cartes cotidales très détaillées. Il est tout à fait évident que les régions de mers proches exercent un plus grand effet.

Cependant il faut se rappeler que les influences d'un segment sont indiquées uniquement sur les graphiques et l'effet total des zones séparées se trouvant à différentes distances sphériques du point d'observation dépendra aussi bien du nombre de segments dans la zone donnée que de la répartition des amplitudes et des phases des marées dans ces zones. C'est pourquoi le rapport des influences des zones proches et lointaines peut fortement différer d'un point à l'autre.

En général ce rapport comme aussi l'effet complet diminuera à mesure de l'éloignement du point d'observation de l'océan. Aux points situés à des distances de moins de 400 km de l'océan, l'influence des zones maritimes voisines se trouvant dans un rayon de 130 km peut dépasser l'influence d'un autre océan mondial. On peut illustrer ces positions par l'exemple suivant

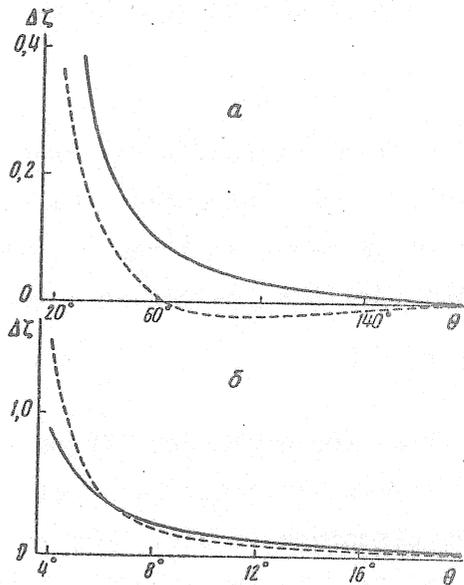


Fig. 3 Influence (en microsecondes) d'une couche d'un centimètre d'eau de mer sur les inclinaisons. a est la surface du segment 5°x5° h est la surface du segment 1°x1°

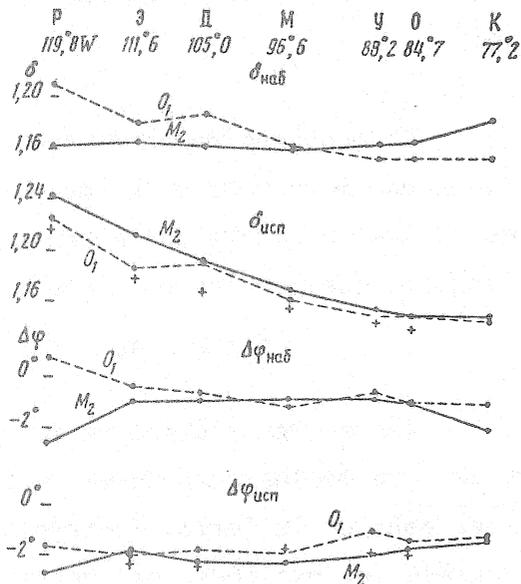


Fig. 4 Valeurs observées et corrigées δ et $\Delta\phi$ aux points du profil de longitude. Les résultats obtenus par Groten et Brennecke [17] sont notés par de petites croix.

En utilisant les courbes obtenues Δg et également les cartes cotidales récentes de l'océan mondial faites par Bogdanov [7,8] et des autres mers [9,14] on a calculé les corrections de l'effet indirect des marées océaniques pour une série de points du profil de marées terrestres gravimétrique transcontinental aux U.S.A. [15].

Ce profil s'étend le long du 40e parallèle depuis la Californie jusque New-York. Etant donné la grande étendue du profil et le découpage relativement faible des deux côtes océaniques des U.S.A., ces observations sont tout à fait favorables pour illustrer l'effet des zones maritimes proches. En outre, les observations de marées terrestres sur des profils de haute précision si étendus sont intéressantes pour tenter de déceler les hétérogénéités horizontales possibles dans les couches supérieures de la Terre.

Pour sept des neuf stations de ce profil on a obtenu des corrections complètes de l'effet indirect pour les ondes M_2 et O_1 en tenant compte aussi bien des zones lointaines que des zones proches. Les zones lointaines jusque $\theta=12^\circ$ ont été prises en considération par la sommation des influences des segments de surface de 5°x5° et les zones proches d'après les segments de surface de 1°x1°. Pour les stations extrêmes du profil de Point Arena et New-York

situées sur la rive même des océans on n'a pas réussi à obtenir des corrections complètes étant donné l'absence de cartes cotidales à grande échelle pour les eaux voisines.

Il convient de noter que la loi de conservation des masses d'eaux a été un peu perturbée dans les données cotidales adoptées. Comme on le sait, il résulte de la condition de constance de la masse de l'eau de mer que pour n'importe quelle onde de marée il faut réaliser les égalités suivantes

$$\sum A \sin \Delta\psi = \sum A \cos \Delta\psi = 0$$

Les sommes s'étendent ici sur tous les océans et les mers. Or les données sur les marées océaniques utilisées dans les calculs n'englobent pas toutes les eaux de la Terre. Toutefois les discordances sont trop grandes pour qu'on puisse les expliquer par cette cause. Cela touche particulièrement l'onde lunaire principale M_2 .

On peut expliquer partiellement ces discordances par l'imprécision du levé des valeurs moyennes A et $\Delta\psi$ à partir des cartes cotidales. Par conséquent il a fallu compenser les masses manquantes des eaux de marées avec une altération minimale des cartes cotidales de départ. La méthode de répartition régulière des masses manquantes utilisée par Farrell [16] provoque des altérations importantes des données initiales particulièrement là où les amplitudes de la marée océanique sont faibles. C'est pourquoi il est plus sage d'introduire des corrections proportionnelles aux amplitudes des ondes de marées. La valeur des coefficients de proportionnalité se détermine par la valeur des masses manquantes des eaux de marées séparément pour $A \sin \Delta\psi$ et $A \cos \Delta\psi$. Avec cette méthode de compensation les perturbations maximales des valeurs de départ A et $\Delta\psi$ ne dépassaient pas respectivement 11% et 6°5 même pour le cas de l'onde M_2 . Ces valeurs dépassent seulement un peu la précision avec laquelle sont relevés A et $\Delta\psi$ sur les cartes cotidales.

Les résultats des calculs faits sur la base des cartes cotidales corrigées de cette façon sont donnés dans la table 3 et sur la figure 4. Dans la table sont données les relations des effets des zones proches et lointaines sur les valeurs δ pour les ondes M_2 et O_1 aux points suivants du profil: Reno (R) Ephraïm (E) Denver (D) Manhattan (M) Urbana (U) Oxford (O) et Carlisle (K). Dans la première ligne sont données les distances L en km de ces stations de marées terrestres depuis l'océan le plus proche.

Table 3

Relation des effets des zones proches et lointaines

Station	P	э	Д	М	У	О	К
L	300	900	1350	1500	1100	900	250
M ₂	0,98	0,27	0	0	0,25	0,70	1,75
O ₁	0,45	0,44	0	0	0	0,25	0,80

Nous donnons à la figure 4 les valeurs observées et corrigées de l'influence des marées océaniques de δ et $\Delta\phi$ pour ces mêmes stations. Comme on le constate par le dessin, et pour les deux ondes, les valeurs δ corrigées de l'effet indirect ont une tendance nettement exprimée à l'accroissement à mesure de l'éloignement du point d'observation de l'océan Atlantique. On obtient une carte analogue d'après les cartes cotidales initiales non compensées. Ainsi pour l'onde O₁ pour laquelle les discordances dans les cartes ne sont pas grandes, les résultats dans les deux cas sont pratiquement les mêmes. Pour l'onde M₂, l'élimination du déficit des masses des ondes de marées a produit une diminution des valeurs δ d'environ 2,2%.

Les résultats donnés sur la figure 4 ne correspondent pas avec les conclusions des auteurs du profil [15] et les résultats des calculs de Farrell [16]. D'après leurs calculs, l'introduction des corrections de l'effet indirect des marées océaniques diminue les résultats des observations sur le profil en ramenant les valeurs δ à des valeurs proches de 1,16. Cependant Groten et Brennecke [17], en utilisant une toute nouvelle carte cotidale mondiale pour l'onde M₂ due à Zahel [18] et les coefficients de surcharge de Longman [5] ont obtenu pour six points de ce profil éloignés des océans des corrections à δ proches de nos résultats. Le calcul des corrections a été fait d'après la méthode de décomposition des marées océaniques en séries de fonctions sphériques jusque n=35.

L'influence de la composante d'attraction a été prise en considération par sommation des effets des trapèzes séparés. Cette méthode permet de tenir compte uniquement de l'influence des marées dans les zones lointaines. Dans ce cas, comme on l'a montré en [2] la méthode de décomposition en série de fonctions sphériques est équivalente à la méthode de sommation des influences des segments sphériques séparés. Les résultats obtenus en [17] portés sur la figure 4 par des petites croix. Pour les six points ces croix sont un peu plus basses que les valeurs obtenues d'après les cartes de Bogdanov. Ainsi la

tendance nettement exprimée à l'accroissement des valeurs δ à mesure de progression vers l'ouest se maintient ici aussi. Comme on le constate par la figure 4 pour les deux ondes les retards de phase $\Delta\phi$ corrigés de l'influence des marées océaniques se situent presque dans tous les points près de -2° . Ici aussi, à l'exception de la station Reno, les résultats de Groten et Brennecke [17] sont voisins de nos résultats.

Nos calculs démontrent concrètement que l'interprétation géophysique des observations de marées terrestres est impossible sans tenir compte préliminairement de l'effet complet des marées océaniques. En outre, l'augmentation des valeurs de δ le long du profil transcontinental est apparemment réelle. Par conséquent les observations de marées terrestres peuvent être utilisées pour déceler les hétérogénéités horizontales dans la structure des couches supérieures de la Terre.

Nous profitons de l'occasion pour exprimer notre profonde reconnaissance à N.N. Pariiskii et S.M. Molodenskii pour leurs précieux conseils et à M.V. Ivanova pour son aide dans les calculs.

Bibliographie

1. PERTSEV B.P.
Estimation des influences des marées océaniques sur les marées terrestres en des points éloignés des océans.
Publ. "Marées terrestres et structure interne de la Terre" Nauka 1967
2. PERTSEV B.P.
The effect of ocean tides upon Earth-tide observations.
Comm. Obs. Roy. Belg., Série Géoph. A9, 1970
3. MOLODENSKII M.S.
Marées élastiques, nutation libre et quelques problèmes de la structure de la Terre.
Tr. Géophys. Institut Ac. des Sc. URSS 1953
4. FARRELL W.
Deformation of the Earth by surface loads.
Revs Geophysical and Space Physics, 10 N°3, 1972

5. LONGMAN I.
A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads.
J. Geophys. Res. 68, N°2, 1963.
6. ALTERMAN Z., JAROSCH H., PEKERIS C.
Propagation of Rayleigh waves in the Earth.
Geophys. J., 4, 1961
7. BOGDANOV K.T., MAGARIK V.A.
Solution numérique du problème de la propagation des ondes de marées semi diurnes (M_2 et S_2) dans l'océan mondial.
Rapport de l'Ac. des Sc. d'URSS 172, N°6, 1967
8. BOGDANOV K.T., MAGARIK V.A.
Solution du problème de la propagation des ondes de marées dans l'océan mondial. Izv. Ac. des Sc. URSS Physique de l'atmosphère et de l'océan N°12 1969
9. BOGDANOV K.T.
Marées des mers Australo-asiatiques
Tr. de l'institut d'océanologie 66 1963.
10. BOGDANOV K.T.
Propagation des ondes de marées dans l'océan austral
Publ. "Antarctique" Naouka 1966
11. BOGDANOV K.T., OVTCHINIKOV V.V.
Marées des mers de l'est de la Chine et de la Mer Jaune
Publ. "Recherches océanologiques" N°19 Naouka 1968
12. PREOBRAJENSKII L. You
Essai de calcul des variations de marées du niveau.
Trav. de POMH publ. 57 1960
13. NEKRASSOV A.V..
Calcul et construction de la carte de marée de l'onde M_2 dans les mers de Norvège et du Groenland par la méthode de Hansen, Trav. du 16, 1962
14. HANSEN W.
Gezeiten des Meeres. Landolt - Bornstein "Zahlenwerte und Funktionen" 3, 1952.

15. KUO J., JACHENS R., WHITE G., EWING M.
Tidal gravity measurements along a trans continental profile across the
United States.
Comm. Obs. Roy. Belg. Série Géophys. A9, 1970
 16. FARRELL W.
Global calculations of tidal loading.
Nature Phys. Sci., 238, N°81, 1972
 17. GROTEN E., BRENNECKE J.
Global interaction between Earth and sea tides.
J. Geophys. Res. 78, N°35, 1973
 18. ZAHEL W.
Die Reproduktion Gezeitenbedingter Bewegungsvorgänge im Weltozean mittels
des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens.
Mitt. Inst. Meereskunde Univ. Hamburg, 17, 1970
-

THE INFLUENCE OF THE GRAVIMETRIC SPRINGS
ON THE CALIBRATION OF EARTH TIDES RECORDINGS

R. Brein

Institut für Angewandte Geodäsie
Frankfurt a. M.

The method of calibration can easily be demonstrated with the simple gravimeter containing a vertical spring. The upper end of the spring is moved by a micrometer screw in a vertical direction, so that the mass on the other end remains in the same position. The displacement of the screw between two stations with known gravimetric difference Δg may be $n \cdot \Delta \varphi$ ($\Delta \varphi =$ unity on the measuring screw) so that the calibration factor of the gravimeter is

$$u = \frac{\Delta g}{n \Delta \varphi} . \quad (1)$$

The amplitude $n_t \Delta \varphi$ of an earth tide recording now can be transformed into gravity values by

$$\Delta g_t = u n_t \Delta \varphi = \frac{n_t}{n} \Delta g . \quad (2)$$

This principle is used by the earth tide gravimeter of LaCoste-Romberg. The accuracy of the calibration factor u depends generally on small errors of the moving system of the upper end of the spring as well as on errors of the measuring screw so that the relative error $\frac{\Delta n}{n}$ becomes smaller if

$$\Delta g > \Delta g_t \quad (3)$$

Other instruments use different systems of registration. Instead of the position of the measuring screw the dislocation of the mass or of a point near the mass is registered. Here artificial variations Δg are simulated by turning the measuring screw and the displacement of the recorder is measured for the calibration of the recordings. Generally the condition (3) of calibration is not realized very well. Besides this two other effects can disturb this simple method of calibrating the registered values /1/: Firstly the mass moves only slowly in the direction of the new position and secondly the new position is disturbed by elastico-viscosity effects. These three circumstances can be eliminated if during the recording of earth tides the position of the mass is maintained in the same position by electrostatic or electromagnetic devices. Already some such devices exist and their calibration will be treated later.

The simple method of calibration mentioned above has still some difficulties. The procedure generally is combined with a systematic error, for the calibration of the registered values is not symmetrical to the calibration of the gravimeter (1).

The measuring screw of the Askania gravimeter or of instruments such as the North American gravimeter does not moves the mainspring but acts on a second small spring and change the length s of this spring by which the force or the torque f is produced. Instead of (1) we get

$$u n \Delta \varphi = \phi (\Delta s) = f = (c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots) \Delta g \quad (4)$$

$m_{0,1,2}$ = Main mass, mass of the main spring, mass of the second spring. The mass of the beam must be added and perhaps higher orders of the masses.

$c_{0,1,2}$ = Factores which should be constant.

$\phi (\Delta s)$ = Function of the length s of the spring.

for the calibration of the gravimeter. During the calibration of the registrations only $n \Delta \varphi$ is produced and because there is no Δg the beam of the gravimetric system changes its position which is then recorded. By this deformation the amount of Δs is changed, so that f (4) does not exactly result.

Besides this the deformation of the gravimetric system can change the factors $c_{0,1,2}$.

Also the calibrations of the earth tide records with compensation of the earth tides forces by electrical forces can be falsified by systematic errors. The compensating electrical devices usually are used in LaCoste-Romberg gravimeters. In principle no deformation occurs during the registration of earth tides. This happens in the field however when Δg is measured or on the earth tides station when for the calibration of the registration the measuring screw is rotated. In some points we have here the inverse problem to the registration without the electrical compensation of the earth tides forces.

In the field when calibrating the gravimeter the equations (4) are valid. Also the calibration of the registered values with the help of the measuring screw use the equation (4). Here the last term of (4) is simulated by the electrical force or torque f_{el}

$$f_{el} = (c_0 m_0 + c_1 m_1 + \dots) \Delta g \quad (5)$$

But during the registration of the earth tides the measuring screw is not changed and therefore f_{el} operate upon a gravimetric system which is not changed by the measuring screw and in consequence the factors $c_{0,1,2}$ must be replaced by $c'_{0,1,2}$

$$f'_{el} = (c'_0 m_0 + c'_1 m_1 + \dots) \Delta g \quad (6)$$

The calibration according to equation (6) can be made on the earth tide station by the use of the vertical gradient of the gravity $/2/$. A better accuracy is obtained if greater gravity differences (3) are used. In 1975 an attempt has been made to determine the displacement effect

$$D = \frac{c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots}{c'_0 m_0 + c'_1 m_1 + c'_2 m_2 + \dots} \quad (7)$$

of the LaCoste-Romberg gravimeter G 380, which was equipped with an electromagnetic device for compensating the gravity difference.

We used the two stations of the International Gravity Standardisation Net 1971 21609 R Hünfeld and 21609 P Neukirchen with a gravity difference of 16,87 mgal. This amount was measured with three methods. The normal measurement by the measuring screw (4) eliminates the error of its calibration and some errors of its function. The measurement with the electromagnetic device and without turning of the measuring screw gives the value f'_{el} of the equation (6). The measurement with simulation of the gravity difference by the electromagnetic device and compensation of the simulated gravity difference by the measuring screw gives f_{el} of equation (5). For the gravity meter G 380 we received the limits of D (7)

$$1 \leq D \leq 1,001.$$

A better accuracy in the determination of D is possible, but for the calibration of the earth tides registrations these limits are satisfactory till now.

A further effect of the deformation of the gravimeter system should be mentioned. It is well known, that many gravimeters have a special drift after the gravimeter is unclamped. This drift, which disappears in some cases only after some days, shows that a deformation occurs within the gravimeter system. This deformation can change a calibration factor, which was determined with only short unclampings of the gravimeter. We measured this effect with the method of equation (5) after one month of registration. With f_{el} a gravity difference of about 36 mgal was simulated and this value was measured with the micrometer screw. Deviations of linearity were determined by one further measurement in the middle of the range. Within the accuracy they were not different before and after the registration. The deviations were only $10 \left(\pm 2 \right) \mu\text{gal}$. The registration also was not combined with variation of the calibration factor within a relative accuracy of 10^{-4} of the calibration factor.

The measurements have shown that the effects, mentioned above, can be neglected in the determination of the calibration factor of the LaCoste-Romberg gravimeter G 380.

Bibliographie

- /1/ P. Melchior: The Earth Tides - Pergamon Press 1966
- /2/ R. Brein: Photographische Registrierung der Erdgezeiten mit einem Gravimeter - Beitrag zur Libellenprüfung - Dt. Geod. Kommiss., R.B, Veröff. Nr. 21 1954, p. 8,9.

Traduction

MAREES ET OSCILLATIONS PROPRES DE LA TERRE EN TENANT COMPTE DES FORCES
DE CORIOLIS

M.S. Molodenskii

Izvestia Acad. Naouk SSSR, Moscou

Physique de la Terre 1976.1 pp 3-12

Résumé

On a obtenu le système des équations différentielles habituelles (du sixième ordre dans l'enveloppe et du quatrième dans le noyau) donnant la solution précise du problème des marées élastiques et des oscillations libres pour une Terre sphériquement symétrique en tenant compte des forces de Coriolis.

On indique la possibilité d'oscillations de basse fréquence; la nutation libre avec une période proche d'un jour constitue un cas particulier de ces oscillations.

En [1] on a obtenu le système des équations différentielles habituelles pour les marées élastiques et les oscillations propres de la Terre en tenant compte des forces de Coriolis. On a utilisé les expressions obtenues en [2] pour sommer les déplacements de type sphéroïdal et torsionnel.

Bien que les trois composantes du déplacement soient exprimées par trois fonctions auxiliaires cependant la troisième fonction intervenant de manière telle que l'aspect des déplacements n'apparaissait pas assez général.

C'est pourquoi pour les petites valeurs de la fréquence des oscillations (comme aussi en [3]) apparaissent des liens remarquables entre les oscillations différant de 2 unités dans leur ordre.

Nous montrerons ici que par une légère généralisation des expressions des déplacements (14) provenant de [2] pour la Terre sphérique symétrique on obtient un système précis d'équations différentielles usuelles qui n'est pas en relation avec les systèmes d'ordre différent.

Dans le système cartésien de coordonnées x, y, z nous partirons des expressions suivantes pour les composantes u, v, w :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\dot{\chi} \right), \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi + \frac{2\omega}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\dot{\chi} \right), \\ w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w}, \end{aligned} \quad (1)$$

où σ est la fréquence du processus oscillatoire, ψ, χ, w sont les fonctions auxiliaires dépendant de x, y, z , ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et le point désigne la dérivée par rapport au temps. A la différence de [2] u et v sont maintenant exprimés uniquement par ψ et χ et w par ψ, χ et \bar{w} .

Il résulte de (1), pour les oscillations harmoniques de fréquence σ :

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi \right), \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} &= -(\sigma^2 - 4\omega^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi \right), \quad \ddot{w} = -\sigma^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

C'est pourquoi les équations des oscillations en tenant compte des forces de Coriolis s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} + Bx + f(u) - \rho\sigma^2 u &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\chi \right), \\ \frac{\partial A}{\partial y} + By + f(v) - \rho\sigma^2 v &= -\rho(\sigma^2 - 4\omega^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\chi \right), \\ \frac{\partial A}{\partial z} + Bz + f(w) - \rho\sigma^2 w &= -\rho\sigma^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - z\chi + \bar{w} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} f &= \mu \Delta + \mu' \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2 \rho, \\ A &= \rho(R + W'H) + (\lambda + \mu) \delta + \mu' H, \\ -rB &= \rho'(R + W'H) + (\rho W' + \mu') \delta + \left(\frac{\mu'}{r}\right)' rH, \end{aligned}$$

Δ est l'opérateur de Laplace, ρ est la densité, λ , μ sont les paramètres de Lamé, R est la variation du potentiel de gravitation W , H est la composante radiale des déplacements, δ est la dilatation cubique, le "prime" désigne la dérivée par rapport à r .

Donc

$$\begin{aligned} H &= \frac{x}{r} u + \frac{y}{r} v + \frac{z}{r} w = \psi' - r\chi - \frac{2\omega}{\sigma} m \frac{\psi}{r} + \frac{z}{r} \bar{w}, \\ \delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta \psi - r\chi' - 3\chi - \frac{2\omega}{\sigma} m \chi + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Les fonctions entrant dans (4) peuvent être représentées par des séries de la forme suivante:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \psi_n P_n^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - m\varphi).$$

Les fonctions avec un indice inférieur ici et partout plus loin dépendent uniquement de r .

En fonction de (4) nous déterminerons la fonction S :

$$S = (r^2 H)' - r^2 \delta$$

et nous calculerons les expressions

$$\begin{aligned} H_n + \frac{1}{nr} S_n &= \left(1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n}\right) \left(\psi_n' - r\chi_n + \frac{n+1}{r} \psi_n\right) + \frac{2n+1}{2n-1} \frac{n-m}{n} \bar{w}_{n-1}, \\ H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n &= \left(1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1}\right) \left(\psi_n' - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n\right) + \\ &+ \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

La dernière des expressions (1) peut être écrite:

$$\begin{aligned} W_{n-1} &= \frac{n+m}{2n+1} \left(\psi_n' - r\chi_n + \frac{n+1}{r} \psi_n\right) + \bar{w}_{n-1}, \\ W_{n+1} &= \frac{n+1-m}{2n+1} \left(\psi_n' - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n\right) + \bar{w}_{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

A l'aide de (6) nous éliminerons \bar{w}_{n-1} et w_{n+1} de (5) et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n &= \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)} b_n \left(\psi_n' - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) + \\
 &\quad + \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1}, \\
 H_n + \frac{1}{nr} S_n &= \frac{n(n-1)+m^2}{n(2n-1)} b_{-n-1} \left(\psi_n' - r\chi_n + \frac{n+1}{r} \psi_n \right) + \\
 &\quad + \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1},
 \end{aligned} \tag{7}$$

où

$$b_n = 1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)+m^2}, \quad b_{-n-1} = 1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} \frac{n(2n-1)}{n(n-1)+m^2}.$$

Nous transformons maintenant les équations différentielles (3) de la même façon qu'on a transformé les expressions pour les déplacements (1). La troisième des équations (3) équivaut aux deux équations habituelles:

$$\begin{aligned}
 A_n' + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left(\frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right) &= 0, \\
 A_n' + rB_n + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left(\frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right) &= 0, \\
 f_n &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \sigma^2 \rho.
 \end{aligned} \tag{8}$$

En utilisant toutes les équations (3), nous déterminerons A , ΔA et $n(n+1) A_n = n^2 (\Delta A - (r^2 A^1)')$. Ensuite nous calculerons $A_n' + r B_n - \frac{n}{r} A_n$ et $A_n' + r B_n + \frac{n+1}{r} A_n$.

Nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
 A_n' + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left(H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) - \sigma^2 \rho \left(H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) &= \\
 = \left(-\sigma^2 \rho + 4\omega^2 \rho \frac{(n+1)(n+2)+m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left(\psi_n' - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right) - \\
 - \sigma^2 \rho \frac{2n+1}{2n+3} \frac{n+1+m}{n+1} \bar{w}_{n+1}.
 \end{aligned}$$

A l'aide de (5) nous éliminerons \bar{W}_{n+1} et obtiendrons

$$A_n' + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left(H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) = a_n \sigma^2 \rho \left(\psi_n' - r\chi_n - \frac{n}{r} \psi_n \right), \quad (9)$$

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{(n+1)(2n+3)} \left(b_n + \frac{4\omega^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right).$$

De façon analogue on obtient l'équation dans laquelle n est remplacé par $-(n+1)$, a f_{n+1} par f_{n-1}

$$A_n' + rB_n + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left(H_n + \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) =$$

$$= a_{-n-1} \sigma^2 \rho \left(\psi_n' - r\chi_n + \frac{n+1}{r} \psi_n \right), \quad (10)$$

$$a_{-n-1} = -\frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} + \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n(n-1) + m^2}{n(2n-1)}.$$

Après élimination de ψ_n et χ_n à l'aide de (7) les équations (9) et (10) ont la forme:

$$A_n' + rB_n - \frac{n}{r} A_n + f_{n+1} \left(H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n \right) =$$

$$= \sigma^2 \rho \frac{b_n - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_n} \left(H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n - \frac{(n+1+m)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} w_{n+1} \right), \quad (11)$$

$$A_n' + rB_n + \frac{n+1}{r} A_n + f_{n-1} \left(H_n + \frac{1}{nr} S_n \right) =$$

$$= \sigma^2 \rho \frac{b_{-n-1} - 1 + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}}{b_{-n-1}} \left(H_n + \frac{1}{nr} S_n - \frac{(n-m)(2n+1)}{n(2n-1)} w_{n-1} \right).$$

Dans les équations (8) et (11) les fonctions H_n , S_n , w_{n-1} , w_{n+1} et R_n entrent à titre d'inconnues (B_n et A_n s'expriment par ces fonctions). Après avoir ajouté l'équation de Poisson

$$R_n'' + \frac{2}{r} R_n' - \frac{n(n+1)}{r^2} R_n = 4\pi f(\rho \delta_n + \rho' H_n) \quad (12)$$

nous obtenons le système complet des équations.

Le système des équations (8), (11) et (12) se résout indépendamment des systèmes pour les autres valeurs de n .

Les équations (8) diffèrent de (11) et (12) pour $\omega=0$. Le lien entre ces équations est grand pour h_n ou h_{-n-1} assez petits.

Si $\mu=0$, la densité dépend uniquement de la pression, alors

$$\kappa_n = 0, \quad f_{n-1} = f_{n+1} = \sigma^2 \rho.$$

Nous obtenons alors par (9) et (10)

$$\begin{aligned} H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} &= a_n \left(\psi_n' - \frac{n}{r} \psi_n \right), \\ H_n + \frac{1}{nr} S_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} &= a_{-n-1} \left(\psi_n' + \frac{n+1}{r} \psi_n \right). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_n - \frac{1}{(n+1)r} S_n &= \left(1 + \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n+1} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+1)(2n+3)} \right) \left(\psi_n' - \frac{n}{r} \psi_n \right), \\ H_n + \frac{1}{nr} S_n &= \left(1 - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{m}{n} - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n^2 - m^2}{n(2n-1)} \right) \left(\psi_n' + \frac{n+1}{r} \psi_n \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Par ces égalités nous déterminons H_n , S_n et nous exprimons δ_n par ψ_n . Nous obtenons:

$$\begin{aligned} H_n &= E_n \left(\psi_n' - \frac{F_n}{rE_n} \psi_n \right) \\ S_n &= -F_n \left(\psi_n' r - \frac{D_n}{F_n} \psi_n \right), \\ \delta_n &= E_n \Delta \psi_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Dans l'expression $\Delta \psi_n$ l'indice n se rapporte à $\Delta \psi$. Ainsi,

$$\Delta \psi_n = (\Delta \psi)_n = \psi_n'' + \frac{2}{r} \psi_n' - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_n$$

Les coefficients E_n , F_n et D_n dépendent de n , m et σ/ω :

$$\begin{aligned} E_n &= 1 - C_n - C_{n+1}, \quad F_n = \frac{2\omega}{\sigma} m + (n+1)C_n - nC_{n+1}, \\ C_n &= \frac{4\omega^2 n^2 - m^2}{\sigma^2 4n^2 - 1}, \quad D_n = n(n+1) - \frac{2\omega}{\sigma} m - n^2 C_{n+1} - (n+1)C_n, \\ F_n + C_n &= n(n+1)E_n. \end{aligned}$$

Des formules (3) il résulte que pour $\mu=0$ et $\kappa=0$

$$(4\omega^2 - \sigma^2) \psi_n = R_n - \frac{1}{3} \varepsilon \omega (\sigma + \omega) r^2 + W' \left(\frac{H_n}{W_n} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \delta_n \quad (16)$$

Cette expression diffère de (12) et [3] uniquement par les notations (*), par un facteur constant pour ψ_n ; H_w est la composante du déplacement suivant la normale à la surface de niveau. Si on ne tient pas compte de l'aplatissement de la Terre alors après l'élimination de H_n et δ_n les formules (12), (15) et (16) donnent un système de deux équations du second ordre par lesquelles on détermine les fonctions ψ_n et R_n en tenant compte des forces de Coriolis. L'influence des forces de Coriolis est faible uniquement quand $\sigma \gg \omega$.

Le potentiel de la force de pesanteur à l'intérieur de la Terre en rotation et en équilibre hydrostatique avec une précision du premier ordre en l'aplatissement se détermine par l'expression

$$W = W_0(r) + \frac{2}{3} \alpha K P_2(\cos \theta), \quad (17)$$

où k est la solution exacte de l'équation différentielle

$$K'' + \frac{2}{r} K' - \frac{6}{r^2} K = - \frac{4\pi k \rho'}{W'} K, \quad (18)$$

soumise à la condition

$$K(a) = (rW')_{r=a},$$

α est l'aplatissement de l'ellipsoïde equipotentiel de la Terre, a est le rayon de la Terre. Alors la densité et l'attraction à l'intérieur de la Terre sont:

$$\rho = \rho_0(r) + \frac{2}{3} \alpha \frac{\rho'}{W'} K P_2(\cos \theta), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= W' \sin \theta \cos \varphi \left(1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \theta \right), \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= W' \sin \theta \sin \varphi \left(1 - 2\alpha \frac{K}{rW'} \cos^2 \theta \right), \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= W' \cos \theta \left(1 + 2\alpha \frac{K}{rW'} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Partant de (17) et (19) nous calculerons W'/ρ' et nous nous assurerons que cette fonction, comme ρ , est constante sur la surface nivelée.

$$\rho' = \frac{\rho^2 W'}{\lambda + 2/3\mu} \quad (21)$$

pour $\theta = \theta_0$, $P_2(\cos \theta_0) = 0$ alors l'équation (18) garantit la réalisation de (21) pour toutes les valeurs θ avec une erreur de l'ordre du carré de l'aplatissement.

* Le terme contenant en facteur l'amplitude de la nutation ϵ , est obtenu en [3] et est ajouté ici pour une comparaison des résultats définitifs. $\epsilon \neq 0$; si seulement $n=2$ et $m=1$.

A l'aide de (20) calculons la fonction

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w = W' H_w = W' H_r + 2\alpha \frac{K}{r} \cos \vartheta (w - \cos \vartheta H).$$

Ici H_r et H_w sont respectivement les composantes du déplacement radial et normal à la surface de niveau.

La fonction H_w renferme les termes proportionnels aux fonctions sphériques des ordres n , $n-2$ et $n+2$. Les coefficients pour ces fonctions sont:

$$\begin{aligned} (H_w)_n &= (H_r)_n - \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left(H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right) - \\ &\quad - \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \frac{2\alpha K}{rW'} \left(H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right), \\ (H_w)_{n-2} &= - \frac{n+m-1}{2n-1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left(H_n - \frac{2n+1}{n+m} w_{n-1} \right), \\ (H_w)_{n+2} &= - \frac{n-m+1}{2n+1} \frac{2\alpha K}{rW'} \left(H_n - \frac{2n+1}{n+1-m} w_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Ces expressions seront ensuite utilisées dans le cas particulier $\mu = 0$.

L'équation de Poisson (12) sera introduite par la fonction auxiliaire ϕ :

$$\Phi = R + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \psi - (4\omega^2 - \sigma^2) \psi, \quad (23)$$

$$\psi = -1/3 \varepsilon \omega^2 r^2 P_2^m(\cos \vartheta) \cos(\sigma t - \phi).$$

Nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \Phi &= - \frac{W'}{\rho'} (\rho' H_w + \rho \delta) - \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{\rho W'}{\rho'} \right) \delta, \\ \Delta \Phi &= - \frac{4\pi f \rho'}{W'} \Phi - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta \psi + 4\pi f \left(\rho' - \frac{\lambda \rho'}{\rho W'} \right) \delta. \end{aligned} \quad (24)$$

Les derniers termes à droite tombent à cause de (21). Les deux parties de ces équations seront multipliées par $P_n^m(\cos \theta) \cos(\sigma t - m\phi)$ et seront intégrées sur la surface de la sphère de rayon r . Après la division par

$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [P_n^m(\cos \theta) \cos(\sigma t - m\phi)]^2 d \cos \theta d \phi$ nous obtenons les équations habituelles:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= - \left(\frac{W'}{\rho'} \right)_0 (\rho'_0 H_n + \rho_0 \delta_n) + a_{nm} \left(W_2' H_n + \left(\frac{W' \rho}{\rho'} \right) \delta_n \right), \\ \Delta \Phi_n &= -4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'} \right)_0 \Phi_n - (4\omega^2 - \sigma^2) \Delta \psi_n - 4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'} \right)_2 a_{nm} \Phi_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Les valeurs des fonctions caractérisant la structure de la Terre en fonction du rayon sont notées par l'indice 0; le petit facteur pour $P_2(\cos \theta)$ par l'indice 2,

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \int_0^\pi [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 P_2(\cos \vartheta) d \cos \vartheta \left[\int_0^\pi [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta \right]^{-1} = \\ &= 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n^2 - m^2}{(2n-1)(2n+1)} \right) \end{aligned}$$

De façon analogue, nous obtiendrons pour la détermination des fonctions ϕ_{n+2} et ψ_{n+2} les équations:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{n+2} = & -4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'} \right)_0 \Phi_{n+2} - 4\pi f \left(\frac{\rho'}{W'} \right)_2 \cdot \frac{3}{2} \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n-1)(2n+3)} \Phi_n, \\ \Phi_{n+2} = & - \left(\frac{W'}{\rho'} \right) (\rho_0' H_{n+2} + \rho_0 \delta_{n+2}) + \\ & + \left(W_2 H_n + \left(\frac{W' \rho}{\rho'} \right)_2 \delta_n \right) \cdot \frac{3}{2} \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Ainsi, pour une oscillation d'ordre n , les fonctions ϕ_{n+2} et ψ_{n+2} ont une valeur de l'ordre des termes indépendants en (26): $\alpha \phi_n$ et $\alpha \psi_n$. Les fonctions ϕ_{n-2} et ψ_{n-2} ont une valeur du même ordre. Toutes les fonctions suivantes sont de l'ordre de α^2 ou plus élevé.

Le système des équations habituelles en tenant compte de l'aplatissement (25) diffère des équations sans tenir compte de l'aplatissement uniquement par une faible variation des coefficients dépendant de n et m .

On peut obtenir analytiquement une meilleure approximation des solutions précises des équations (25) et (13). Nous chercherons d'abord la solution pour $\alpha=0$ pour la fréquence σ_0 constituant la racine de l'équation.

$$\frac{4\omega^2}{\sigma_0^2} \frac{n^2 - m^2}{2n - 1} + \frac{2\omega}{\sigma_0} m - n = 0 \quad (27)$$

Toutes les racines de cette équation sont des nombres réels.

Nous obtiendrons pour la fréquence σ_0 provenant de (14) et (15)

$$\frac{F_n}{E_n} = \frac{D_n}{F_n} = n, \quad (H_r)_n = E_n \left(\psi_n' - \frac{n}{r} \psi_n \right) - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r.$$

Avec la notation

$$\bar{H}_n = E_n \left(\psi_n' - \frac{n}{r} \psi_n \right), \quad H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r \quad (28)$$

Nous obtenons

$$\delta_n = \bar{H}_n' + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n$$

Comme nous nous en assurons plus bas, pour la fréquence σ_0 en (25) on peut prendre

$$(4\omega^2 - \sigma_0^2) (\Delta \psi_n) = 0$$

Alors pour $\alpha=0$ provenant de (25) nous obtenons

$$\phi = C_1 \bar{K}_n + C_2 K_n,$$

où K_n est la solution exacte, \bar{K}_n n'est pas exact c'est pourquoi $C_1 = 0$, et nous écrivons (28) ainsi:

$$\frac{1}{4\pi f} r^{n+2} \Delta \Phi_n = (\rho' H_n + \rho \delta_n) r^{n+2} = (\rho r^{n+2} H_n)' + 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} (n+3) \rho r^{n+2}. \quad (29)$$

Nous utiliserons l'identité

$$r^{n+2} \Delta \Phi_n = \left(\left(\Phi_n' - \frac{n}{r} \Phi_n \right) r^{n+2} \right)'$$

et nous trouverons l'intégrale (29)

$$\left(\Phi_n - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} = 8\pi f \varepsilon (n+3) \frac{\omega}{\sigma} \int_0^r \rho r^{n+2} dr + C_3. \quad (30)$$

Il est évident que $C_3 = 0$. Par (30) nous déterminons H_n , ensuite par (28) \bar{H}_n et à l'aide de cette fonction nous déterminons ψ_n

$$\psi_n = C_4 r^n + \frac{r^n}{E} \int_0^r \frac{\bar{H}_n}{r^n} dr. \quad (31)$$

Ensuite nous nous assurerons que dans les conditions aux limites C_4 entre uniquement sous forme de produit $(4\omega^2 - \sigma_0^2) C_4$ et c'est pourquoi la fonction ψ_n est $1/\omega^2$ fois plus grande que les autres fonctions. Puisque C_4 n'entre pas en $\Delta \psi_n$, l'approximation de départ $(4\omega^2 - \sigma_0^2) \Delta \psi_n = 0$ est très bonne. Dans la solution pour $\sigma \neq \sigma_0$ et $\alpha \neq 0$ ($\sigma - \sigma_0$ et α sont des petites valeurs) dans les termes perturbateurs renfermant les facteurs $\sigma - \sigma_0$ et α on ne garde dans la première approximation que les termes en C_4 . Alors nous obtiendrons

$$H_n = \bar{H}_n - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r + (nE_n - F_n) \frac{\psi_n}{r} + (H_w - H_r)_n, \quad (32)$$

où

$$nE_n - F_n = 2 \left(n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta \sigma}{\sigma}, \quad \bar{H}_n = E_n \left(\psi_n' - \frac{n}{r} \psi_n \right). \quad (33)$$

Lors du calcul du dernier terme en (32) dépendant de l'aplatissement des surfaces de niveau, nous prendrons en considération les égalités (13) pour $\sigma = \sigma_0$

$$S_n + nrH_n = 0,$$

$$H_n - \frac{n+1}{n+1-m} w_{n+1} = a_n \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{E_n} H_n,$$

$$H_n - \frac{n}{n+m} w_{n-1} = \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1}{E_n} H_n + \frac{2n+1}{r} \psi_n \right).$$

Si on ne garde que le terme principal avec C_4 alors nous obtiendrons par (33) à l'aide de (22)

$$H_n = \bar{H}_n + 2 \left(n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} r^{n-1} C_4 - 2\varepsilon \frac{\omega}{\sigma} r - \gamma \frac{K_2}{W'} r^{n-2}, \quad (34)$$

où

$$\gamma = \frac{4\omega^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \frac{n^2 - m^2}{2n-1} 2\alpha C_4.$$

La formule (34) détermine H_n si la fonction \bar{H}_n est connue. L'équation (30) détermine H_n et \bar{H}_n seulement si $\alpha = 0$ et $\sigma = \sigma_0$. Lors de la précision de cette équation en (29) il ne faut changer que H_n en fonction de (34) puisque l'expression (28) pour \bar{H}_n reste valable. Ainsi, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi f} r^{n+2} \Delta\Phi_n &= \left[\rho' H_n + \rho \left(\bar{H}_n' + \frac{n+2}{r} \bar{H}_n \right) \right] r^{n+2} = \\ &= (\rho r^{n+2} H_n)' + \rho [r^{n+2} (\bar{H}_n - H_n)]'. \end{aligned}$$

Dans le dernier terme nous utilisons (34) et nous obtenons après intégration

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_n' - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} = \\ & = -4\pi f (2n+1) v \int \rho r^{2n} dr + 4\pi f \gamma \int \rho \left(\frac{K_2 r^{2n}}{W'} \right)' dr, \end{aligned} \quad (35)$$

où

$$v = 2 \left(n - \frac{\omega}{\sigma} m \right) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} C_4 - 2 \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon$$

et on tient compte que $\varepsilon = 0$, si $n \neq 2$.

Dans le dernier terme (35) nous ferons l'intégration par parties, nous remplacerons

$$\frac{\rho'}{W'} K_2 = - \frac{1}{4\pi f} \Delta K_2$$

et nous intégrerons encore en parties, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_n' - \frac{n}{r} \Phi_n - 4\pi f \rho H_n \right) r^{n+2} - \gamma \left(K_2' - 2 \frac{n-1}{r} K_2 + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_2 \right) r^{n+2} = \\ & = -4\pi f (2n+1) v \int_0^r \rho r^{2n} dr + \gamma (n-2) (3n-1) \int_0^r K_2 r^{2n-2} dr. \end{aligned} \quad (36)$$

Dans le cas particulier $n=2, m=1, \sigma_0 = -\omega$ nous obtenons l'expression, différent un peu de (50) provenant de [3] par les notations:

$$\begin{aligned} (L - 2rR) r^2 - 2\alpha\beta \left(K_2' - \frac{2}{r} K_2 + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_2 \right) r^4 &= -20\pi f v \int_0^r \rho r^4 dr, \\ \beta &= 3C_4. \end{aligned} \quad (37)$$

Dans l'approximation suivante, la fonction

$$(4\omega^2 - \sigma_0^2) \Delta\psi_n$$

est considérée comme par l'approximation précédente. Nous formons les conditions aux limites comme (45) - (51) en [3] mais pour une valeur arbitraire n . Nous trouverons trois intégrales partielles dans l'enveloppe pour $\sigma=0$ et en l'absence de forces de surface et de masse extérieures. Ces intégrales pour $r=1$ sont soumises aux conditions:

$$M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad L_n + (n+1) r R_n = 0 \quad (38)$$

Par ces intégrales après élimination de C_2 à l'aide de (23) nous formerons une intégrale partielle telle qu'à la limite $r=h$ de l'enveloppe avec le noyau

$$\begin{aligned} M_n &= 0, \quad N_n + \rho_i (R_n + W' H_n) = \rho_i \omega^2 r^n \beta, \\ L_n - (nr + r^2 \gamma) R_n + 4\pi \kappa \rho_i r^2 H_n &= -r \gamma (\omega^2 r^n \beta). \end{aligned} \quad (39)$$

Par ces conditions on détermine l'intégrale unique: chacune des fonctions s'exprime par le produit $\omega^2 r^n \beta$ par sa fonction de r complètement déterminée. Il reste non effectué uniquement [36] pour $r=b$. Après y avoir substitué $L_n - n r R_n$ pour $\epsilon=0$ nous obtenons l'équation de la forme: $\beta Q = 0$ (pour $\epsilon \neq 0$ cette équation s'obtient après élimination de ϵ à l'aide de l'équation de conservation du moment de la quantité de mouvement). Par conséquent, $\beta=0$ outre le cas $Q=0$. Puisqu'en Q entre $\Delta\sigma/\sigma_0$, la condition $Q=0$ détermine la fréquence des oscillations libres $\sigma_0 + \Delta\sigma$ correspondant à la valeur donnée m ; il n'est pas difficile de voir que $\Delta\sigma$ s'obtient par une petite valeur de l'ordre de $\frac{1}{\omega} \omega^2 h^2 \sigma$, ou de l'ordre $10^{-3} \sigma$ c'est à dire suffisamment petite pour justifier l'application de la méthode des perturbations. Lors des oscillations forcées, la dernière condition (38) n'est pas homogène, c'est pourquoi toutes les fonctions dans l'enveloppe dépendent linéairement de $\omega^2 h_n \beta$ et l'équation (36) pour $r=h$ (et après l'élimination de ϵ pour $n=2$) a la forme: $P + \beta Q = 0$.

Avec la valeur donnée $\Delta\sigma$, par conséquent avec Q donné, on détermine le paramètre β . Si le rapport $\Delta\sigma/\sigma$ n'est pas petit le paramètre β n'est pas grand; la valeur $\beta=0$ correspond à la marée statique.

L'approximation suivante peut changer $\Delta\sigma$ d'une valeur de l'ordre de l'aplatissement. Dans cette approximation on garde en ψ_n non seulement le terme principal $C_4 r^n$ mais aussi le suivant obtenu par l'approximation précédente. Pour cela nous déterminons H_n , ensuite \bar{H}_n de (33) et enfin ψ_n provenant de l'intégration (28). Dans cette approximation les secondes parties des équations (11) et (12) et l'aplatissement des surfaces de niveau doivent être prises en

considération non seulement dans le noyau mais aussi dans l'enveloppe à l'aide des équations (22) et (25).

Ainsi il doit exister une série d'oscillations propres à longue période correspondant aux fonctions $P_n^m(\cos\theta)$ pour différentes valeurs n et m sur une fréquence voisine de celle qui se détermine par la formule (27). Ces oscillations surviennent à cause de la présence du noyau liquide et de la rotation de la Terre. La nutation libre de période voisine d'un jour est un cas particulier de ces oscillations ($n=2$, $m=1$, $\sigma_0 = -\omega$).

Bibliographie

1. MOLODENSKII M.S.
Théorie des marées dans la Terre élastique en tenant compte des termes de l'ordre de l'aplatissement. Izv. Ac. des Sc. URSS Physique de la Terre N°1, 1974
2. MOLODENSKII M.S.
Déplacements lors des marées dans la Terre élastique en tenant compte des forces de Coriolis, Izv. Ac. des Sc. URSS Physique de la Terre N°4, 1970
3. MOLODENSKII M.S. et KRAMER M.V.
Marées terrestres et nutation de la Terre, M. Edit. Ac. des Sc. URSS 1961

VARIATION DES NOMBRES DE LOVE POUR UNE VARIATION DU MODELE

STRUCTUREL DE LA TERRE

S.M. Molodenskii

Izvestia Acad. Naouk SSSR, Moscou

Physique de la Terre 1976.2 pp 13-21

Pour estimer la dépendance des nombres de Love h , k et du nombre de Shida l en fonction de la structure de la Terre on a effectué dans le travail [1] l'intégration des équations d'équilibre élastique pour différents modèles de Terre suffisamment voisins. Le fait que les erreurs de l'intégration numérique peuvent altérer sensiblement les petites différences des nombres de Love constitue un défaut de calcul indépendant des modèles voisins.

En outre, les caractéristiques intégrales obtenues ainsi pour les modèles ne permettent pas de juger de la dépendance des nombres de Love en fonction de la densité et des paramètres de Lamé à différentes profondeurs.

On peut en obtenir une représentation plus complète et plus précise si l'on résoud le problème par la méthode des perturbations par petites variations des paramètres d'élasticité et de densité. Dans ce but on applique ici la méthode de la variation des constantes arbitraires qui ont été utilisées précédemment dans le travail [2] pour déterminer l'influence de la viscosité sur la phase des marées. On a pris ainsi comme données de départ les conditions suivantes:

- 1) la masse et le moment d'inertie de la Terre sont connus avec une telle précision que lors de la variation du schéma de structure de la Terre ils restent invariables;
- 2) La condition de Williamson-Adams est vérifiée dans le noyau liquide.
- 3) les vitesses des ondes sismiques peuvent varier; ainsi la densité $\rho(r)$ et les paramètres de Lamé $\lambda(r)$, $\mu(r)$ seront considérés comme variables indépendantes. Comme cas particulier on a proposé ci après une variation des nombres de Love en fonction de la variation de la densité mais lorsque les vitesses des ondes sismiques V_0 et V_S restent invariables.

Dans le cas des variations purement imaginaires du module de déplacement, pour un module de compressibilité et une densité invariables, la variation des nombres complexes de Love se ramène à la formule (15) du travail [2]. Nous donnons plus loin les tables correspondant à ce cas.

1. Les marées statiques dans une Terre à symétrie sphérique, idéalement élastique, ne tournant pas, avec une répartition hydrostatique des tensions initiales sont déterminées par les équations différentielles du sixième ordre [1] bien connues:

$$F_i'(r) = \sum_{h=1}^6 a_{ih}(r) F_h(r) \quad (i=1, \dots, 6); \quad (1)$$

où l'apostrophe représente la dérivée par rapport au rayon r . Dans la suite, nous désignerons par $F_1(r)$ le système des fonctions $H(r)$, $T(r)$, $R(r)$, $L(r)$, $M(r)$, $N(r)$ caractérisant respectivement les composantes normale et tangentielle des déplacements, la variation du potentiel et de sa dérivée due à la déformation, les composantes normale et tangentielle des tensions. Dans ce système les coefficients a_{ik} dépendant de la densité $\rho(r)$ et des paramètres de Lamé $\lambda(r)$, $\mu(r)$ sont [3]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)}; & a_{12} &= \frac{\lambda n(n+1)}{r^2(\lambda+2\mu)}; & a_{16} &= \frac{1}{\lambda+2\mu}; \\ a_{21} &= -1; & a_{22} &= \frac{2}{r}; & a_{23} &= \frac{1}{r^2}; \\ a_{31} &= 4\pi n \rho; & a_{34} &= \frac{1}{r^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{42} &= -4\pi\kappa\rho n(n+1); & a_{43} &= n(n+1); \\
 a_{51} &= -r^2\rho V' - 2\mu r - \frac{4\mu\lambda r}{\lambda+2\mu}; \\
 a_{52} &= 2\mu \left(n^2+n-1 + \frac{\lambda n(n+1)}{\lambda+2\mu} \right); \\
 a_{53} &= -r^2\rho; & a_{56} &= -\frac{\lambda r^2}{\lambda+2\mu}; \\
 a_{61} &= \frac{4}{r}\rho V' + \frac{4\mu}{r^2} + \frac{8\mu\lambda}{r^2(\lambda+2\mu)}; \\
 a_{62} &= \frac{n(n+1)}{r^3} \left(-\rho V' r - 2\mu - \frac{4\mu\lambda}{\lambda+2\mu} \right); \\
 a_{64} &= -\frac{\rho}{r^2}; & a_{65} &= \frac{n(n+1)}{r^6}; & a_{66} &= -\frac{4\mu}{r(\lambda+2\mu)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{32} = a_{33} = a_{35} = a_{36} = a_{41} = a_{44} = a_{45} = \\
 &= a_{46} = a_{54} = a_{55} = a_{63} = 0.
 \end{aligned}$$

Comme dans [3] nous utiliserons un système d'unités dans lequel la constante d'attraction $\kappa = 3/4\pi$, le rayon moyen de la Terre $a=1$; la pesanteur moyenne à la surface de la Terre $-V'(1) = 1$.

Les nombres de Love h , k et le nombre de Shida ℓ pour la marée du second ordre, statiques et non perturbés par l'effet de l'océan, sont obtenus par la solution du système des équations (1) pour $n=2$ avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}
 M(1) &= N(1) = 0; \\
 (n+1)R(1) + L(1) &= 2n+1; \\
 M(b) &= 0; \\
 \rho_1(b)[R(b) + V'(b)H(b)] + N(b) &= 0; \\
 R'(b-0) &= (\gamma(b) + n/b)R(b),
 \end{aligned} \tag{2}$$

où b est le rayon du noyau liquide, $\rho_1(b)$ est la valeur de la densité dans le noyau pour $r=b$, $\gamma+n/b = 3,261$ et on détermine

$$h = H(1); \quad \ell = T(1); \quad k = K(1) - 1.$$

Pour une variation arbitraire des paramètres $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$ les coefficients $a_{ik}(r)$ subissent un accroissement $\delta a_{ik}(r)$ et les fonctions $F_k(r)$ un accroissement $\delta F_k(r)$. En considérant ces variations comme faibles, nous obtiendrons la relation suivante entre $\delta F_k(r)$ et $\delta a_{ik}(r)$:

$$\delta F_i'(r) = \sum_{k=1}^6 \delta a_{ik}(r) F_k(r) + a_{ik}(r) \delta F_k(r). \tag{3}$$

Nous désignerons par $F_i^j(r)$ le système provenant de six ($j=1, \dots, 6$) des intégrales linéairement indépendantes de l'équation (1) satisfaisant aux conditions suivantes à la surface:

$$F_i^j(1) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

On peut toujours représenter $\delta F_i(r)$ sous la forme

$$\delta F_i(r) = \sum_{j=1}^6 c_j(r) F_i^j(r) \quad (5)$$

avec des coefficients c_j dépendant de r . Les valeurs $c_j(1)$ sont directement liées aux perturbations des nombres de Love. Par conséquent la substitution de (4) en (5) donne:

$$\delta F_i(1) = c_i(1)$$

c'est à dire

$$\delta h = c_1(1); \quad \delta l = c_2(1); \quad \delta k = c_3(1) \quad (6)$$

La substitution de (5) en (3) en tenant compte de (4) donne le système des équations algébriques pour la détermination de $c_j(r)$:

$$\sum_{j=1}^6 c_j'(r) F_i^j(r) = \sum_{h=1}^6 \delta a_{ih}(r) F_h(r), \quad (7)$$

les coefficients $c_j(r)$ sont déterminés aux constantes additives près. Les constantes additives sont déterminées par les conditions aux limites (2) ajoutées à la solution perturbée $F_i + \delta F_i$. Nous examinerons d'abord le cas où ne varient que les paramètres de l'enveloppe en conservant un schéma invariable pour la structure du noyau. Les conditions aux limites (2) des problèmes perturbé et non perturbé correspondent et la substitution de $F_i + \delta F_i$ dans (2) en tenant compte de (5), (4) donnent les six conditions suivantes pour trouver les constantes additives:

$$c_5(1) = c_6(1) = 0, \quad (8a)$$

$$(n+1)c_3(1) + c_4(1) = 0, \quad (8b)$$

$$\sum_{j=1}^6 c_j(b) F_5^j(b) = 0, \quad (8c)$$

$$\sum_{j=1}^6 c_j(b) \{ \rho_i(b) [F_3^j(b) + V'(b) F_1^j(b)] + F_6^j(b) \} = 0, \quad (8d)$$

$$\sum_{j=1}^6 c_j(b) \{ (\gamma b^2 + nb) F_3^j(b) - F_4^j(b) + 4\pi \kappa \rho_i b^2 F_1^j(b) \} = 0. \quad (8e)$$

Par une substitution indirecte on peut être assuré que les combinaisons suivantes satisfont à ces conditions:

$$c_j(r) = \int_b^r c_j'(\xi) d\xi - \int_b^i [c_j^{(1)}(b) ((n+1)c_3'(\xi) + c_4'(\xi)) + c_j^{(2)}(b)c_3'(\xi) + c_j^{(3)}(b)c_4'(\xi)] d\xi, \quad (9)$$

où $c_j^{(1)}(b)$, $c_j^{(2)}(b)$, $c_j^{(3)}(b)$ sont trois solutions linéairement indépendantes des équations (8c) à (8e) de la forme suivante

$$\begin{aligned} c_j^{(1)}(b) &= \{c_1^{(1)}; c_2^{(1)}; c_3^{(1)}; c_4^{(1)}; 0; 0\}, \quad (n+1)c_3^{(1)} + c_4^{(1)} = 1; \\ c_j^{(2)}(b) &= \{c_1^{(2)}; c_2^{(2)}; c_3^{(2)}; c_4^{(2)}; 1; 0\}, \quad (n+1)c_3^{(2)} + c_4^{(2)} = 0; \\ c_j^{(3)}(b) &= \{c_1^{(3)}; c_2^{(3)}; c_3^{(3)}; c_4^{(3)}; 0; 1\}, \quad (n+1)c_3^{(3)} + c_4^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

La solution du système des équations algébriques du sixième ordre (7) pour chaque valeur de r peut être représentée par la valeur des mineurs F_1^j de la matrice F_1^j et du déterminant Δ pour le même r

$$c_j' = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k=1}^6 \bar{F}_i^j \delta a_{ik} F_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k=1}^6 \bar{F}_i^j F_k \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \lambda} \delta \lambda - \frac{4\pi\kappa}{r^2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial V'} \int_0^r \xi^2 \delta \rho d\xi \right). \quad (10)$$

Ici $\partial a_{ik} / \partial (\rho, \lambda, \mu, V)$ désigne la dérivée partielle du coefficient a_{ik} par rapport au paramètre correspondant,

$$- \frac{4\pi\kappa}{r^2} \int_0^r \xi^2 \delta \rho d\xi$$

est la variation de V' lorsque ρ est remplacé par $\rho + \delta \rho$.

Après la substitution de (10) en (9) le terme renfermant $\delta V'$ s'intègre par parties.

$$\begin{aligned} & - \int_b^i \frac{4\pi\kappa}{r^2 \Delta} \left(\sum_{i,k=1}^6 \bar{F}_i^j F_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial V'} \int_0^r \xi^2 \delta \rho d\xi \right) dr = \\ & = A_j(1) \int_0^b \xi^2 \delta \rho d\xi + \int_b^i [A_j(1) - A_j(r)] r^2 \delta \rho dr, \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_j(r) = - \int_b^r \frac{4\pi\kappa}{\xi^2 \Delta} \left(\sum_{i,k=1}^6 \bar{F}_i^j(\xi) F_k(\xi) \frac{\partial a_{ik}}{\partial V'}(\xi) \right) d\xi.$$

Le premier terme dans (11) est égal à zéro si la densité ne varie que dans le manteau. La substitution de (10) en (9) en tenant compte de (11) et (6) donne la solution du problème.

Ainsi, la variation des nombres de Love h , k et de Shida l pour une variation des paramètres ρ , λ , μ dans l'enveloppe peut être représentée de manière uniforme

$$\begin{aligned} \delta h &= \int_b^a [h_\rho(r) \delta\rho(r) + h_\mu(r) \delta\mu(r) + h_\lambda(r) \delta\lambda(r)] dr, \\ \delta l &= \int_b^a [l_\rho(r) \delta\rho(r) + l_\mu(r) \delta\mu(r) + l_\lambda(r) \delta\lambda(r)] dr, \\ \delta k &= \int_b^a [k_\rho(r) \delta\rho(r) + k_\mu(r) \delta\mu(r) + k_\lambda(r) \delta\lambda(r)] dr. \end{aligned} \tag{12}$$

Pour les calculs numériques on a utilisé comme départ le modèle de la Terre du travail [2] correspondant aux valeurs suivantes des nombres statiques de Love non corrigés de l'effet de l'océan:

$$h = 0,6168; \quad k = 0,3015; \quad l = 0,0808$$

Les paramètres ρ , μ/ρ , $(\lambda + 2\mu)/\rho$ ont été approchés dans le manteau par des segments rectilignes reliant les points successifs (table 1)

Table 1

r	$\rho,$ g/cm ³	$\mu/\rho,$ km ² /cek ²	$(\lambda+2\mu)/\rho,$ km ² /cek ²
1,00	3,28	18,26	58,03
0,94	3,62	25,27	82,20
0,86	4,64	40,16	129,25
0,55	5,69	54,24	190,90

Table 2

Valeurs dans le manteau des fonctions $h_\rho(r)$, $l_\rho(r)$, $k_\rho(r)$, $h_\lambda(r)$, $l_\lambda(r)$, $k_\lambda(r)$, $h_\mu(r)$, $l_\mu(r)$, $k_\mu(r)$, $\tilde{h}(r)$, $\tilde{l}(r)$, $\tilde{k}(r)$ entrant dans les relations intégrales (12)

r	$h_\rho(r)$	$l_\rho(r)$	$k_\rho(r)$	$h_\lambda(r)$	$l_\lambda(r)$	$k_\lambda(r)$
1,00	2,608	0,768	2,119	-1,377	0,304	-0,132
0,95	2,221	0,376	1,920	-0,985	0,246	-0,126
0,90	1,850	0,180	1,672	-0,614	0,174	-0,092
0,85	1,498	0,074	1,453	-0,362	0,116	-0,049
0,80	1,178	0,024	1,220	-0,265	0,085	-0,039
0,75	0,874	-0,030	0,991	-0,123	0,044	-0,020
0,70	0,600	-0,051	0,764	-0,053	0,020	-0,007
0,65	0,345	-0,054	0,560	-0,010	0,004	-0,001
0,60	0,119	-0,049	0,385	0,007	-0,006	-0,001
$r=b$	-0,101	-0,043	0,221	0,051	-0,014	-0,012

r	$h_\mu(r)$	$l_\mu(r)$	$k_\mu(r)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{l}(r)$	$\tilde{k}(r)$
1,00	-0,734	0,627	-0,520	1,920	1,056	1,921
0,95	-0,922	-0,241	-0,481	1,394	0,401	1,674
0,90	-1,001	-0,319	-0,498	0,931	0,125	1,350
0,85	-1,073	-0,312	-0,542	0,512	-0,036	1,062
0,80	-1,183	-0,329	-0,604	0,132	-0,130	0,771
0,75	-1,317	-0,299	-0,673	-0,197	-0,203	0,490
0,70	-1,434	-0,246	-0,728	-0,543	-0,216	0,205
0,65	-1,544	-0,189	-0,775	-0,893	-0,200	-0,056
0,60	-1,723	-0,145	-0,853	-1,303	-0,177	-0,325
$r=b$	-2,222	-0,140	-1,083	-1,959	-0,182	-0,733

Les valeurs des fonctions calculées d'après les formules (9) à (11) $h_\rho(r)$, $h_\mu(r)$, $h_\lambda(r)$, $l_\rho(r)$, $l_\mu(r)$, $l_\lambda(r)$, $k_\rho(r)$, $k_\mu(r)$, $k_\lambda(r)$ (dans le système d'unités choisies) sont données dans la table 2.

Comme cas particulier on peut envisager une variation du modèle pour lequel les vitesses des ondes sismiques V_p et V_s restent invariables à toutes les profondeurs. Dans ce cas les variations ρ , λ , μ sont liées par deux rapports.

$$\frac{\delta\rho(r)}{\rho(r)} = \frac{\delta\mu(r)}{\mu(r)} = \frac{\delta\lambda(r)}{\lambda(r)}$$

En prenant $\delta\rho$ comme variation unique indépendante nous obtiendrons par (12)

$$\delta h(\delta l, \delta k) = \int_b^a [\tilde{h}(r) (\tilde{l}(r), \tilde{k}(r))] \delta\rho(r) dr. \quad (13)$$

Les valeurs des fonctions $h(r)$, $l(r)$, $k(r)$ sont également données dans la table 2.

La table des fonctions $h_{\mu}(r)$, $l_{\mu}(r)$, $k_{\mu}(r)$ permet de calculer la valeur du retard de phase de la marée lors d'une relaxation des tensions dans l'enveloppe. Le passage du modèle de la Terre idéalement élastique au modèle avec relaxation des tensions correspond à l'introduction d'une variation purement imaginaire et les relations $\delta h/h$, $\delta k/k$, $\delta l/l$ déterminent l'écart de phase de la marée par rapport à la force génératrice de marée. L'écart de phase ϕ des variations de marées de la force de pesanteur est

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\int_0^a [h_{\mu}(r) - \frac{3}{2}k_{\mu}(r) - \frac{2}{3}h_{\lambda}(r) + k_{\lambda}(r)] \operatorname{Im} \mu(r) dr}{1 + h - \frac{3}{2}k} \quad (14)$$

L'incertitude importante dans le calcul théorique du retard de phase est liée au fait que les valeurs de la rigidité déduites des oscillations de la Terre ne sont à présent bien connues que dans le domaine des périodes de 1 heure et moins correspondant aux fréquences des oscillations propres et des ondes sismiques. Quant aux valeurs précises dans le domaine des forces génératrices de marées elles ne sont pas étudiées. On a construit dans le travail [4] la fonction $\operatorname{Im} \mu(r)$ dans l'hypothèse de l'indépendance $\operatorname{Im} \mu(r)$ de la fréquence dans le domaine des fréquences des oscillations propres.

Si on étend cette hypothèse aux fréquences des marées alors la substitution de la répartition venant de [4] dans la formule (14) donne

$$\operatorname{tg} \phi = - 2 \cdot 10^{-4}$$

ce qui est inaccessible aux observations avec leur précision actuelle, B. et L. Bodri (communication particulière) ont obtenu également une valeur faible de l'écart de phase. Si la fonction de dissipation dépend de la fréquence alors les valeurs ϕ peuvent être sensiblement plus grandes.

2.

Nous examinerons la dépendance des nombres de Love calculés dans l'approximation de la théorie statique (ne tenant pas compte des effets dynamiques) à partir des schémas de la structure du noyau.

Avec la condition de Williamson-Adams

$$\lambda \rho' = \rho^2 V' \quad (15)$$

l'équation de Poisson pour la variation du potentiel de gravitation se ramène à l'équation de Clairaut

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R = -4\pi\kappa \frac{\rho'}{V'} R. \quad (16)$$

Les équations de l'hydrostatique se rapportent dans ce cas à une condition non différentielle

$$\rho(R+V'H) + \lambda f = 0,$$

où $f = N/\lambda$ est la dilatation cubique.

Les nombres de Love dépendent de façon non évidente de la structure du noyau car dans les conditions aux limites (2) le paramètre $\gamma(b)$ dépend du modèle du noyau. Ce paramètre s'exprime en fonction des valeurs de la solution exacte (décroissant vers le centre) de l'équation (16) à la limite de l'enveloppe et du noyau de la façon suivante [3]:

$$\gamma(b) = \frac{R'(b-0)}{R(b)} - \frac{n}{b},$$

ici $R'(b-0)$ est la dérivée par rapport au rayon, de la fonction R au point $r = b-0$. En outre dans les conditions (2) interviennent la valeur de la force de pesanteur V' et de la densité ρ au point b , qui dépendent également de la structure du noyau.

Avec la condition (15) la variation du module de compression se détermine complètement d'après la variation de la densité. Quant à la dépendance du paramètre $\gamma(b)$ en fonction de la répartition de la densité dans le noyau, elle est donnée avec une précision suffisante pour les calculs pratiques par la relation obtenue par Radau pour l'équation de Clairaut [3]

$$\frac{I(r)}{2/3 r^2 m(r)} = 1 - \frac{2}{5} \sqrt{1+\eta(r)} \quad (n=2), \quad (17)$$

où $I(r) = \frac{8\pi}{3} \int_0^r \rho(\xi) \xi^4 d\xi$ est le moment d'inertie de la matière contenue dans la sphère de rayon r ,

$m(r) = -\frac{r^2}{\kappa} V'(r)$ est sa masse,

$\eta(r) = 4\pi\rho r/V' + \gamma r + 3$ - est le "paramètre d'hétérogénéité variant entre zéro (dans le cas d'une densité constante dans le noyau) et 21/4 (dans le cas de la masse précisée répartie dans le centre du noyau). Ainsi, la variation du paramètre $\gamma(b)$ avec une variation de la structure du noyau ne dépend que de la variation de la masse générale et du moment d'inertie de la Terre, les

variations des dernières se déterminent par la variation de la masse et du moment d'inertie du manteau lors du passage d'un modèle à l'autre:

$$\delta m(b) = -b^2/\kappa \delta V'(b) = -4\pi \int_b^a r^2 \delta \rho(r) dr, \quad (18)$$

$$\delta I(b) = -\frac{8\pi}{3} \int_b^a r^4 \delta \rho(r) dr. \quad (19)$$

En posant dans (17) $r=b$ et en changeant tous les paramètres, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{\delta \eta}{b} = \delta \gamma &= \frac{4\pi\kappa}{V'} \delta \rho_i - \frac{4\pi\kappa\rho_i}{(V')^2} \delta V' = \\ &= \frac{\delta V'}{bV'} (5\sqrt{1+\eta} - 2(1+\eta)) + \frac{15\kappa\sqrt{1+\eta}}{2b^3V'} \delta I(b). \end{aligned} \quad (20)$$

ou, après substitution des valeurs numériques dans (18) et (20):

$$\begin{aligned} \delta \gamma(b) - 2,860 \delta \rho_i(b) + 0,917 \delta V'(b) + 37,7 \delta I(b) &= 0, \\ \delta V'(b) &= -0,790 \delta m(b). \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions de constance de la masse et du moment d'inertie de la Terre pour une variation de sa structure ajoutent deux liaisons sur trois paramètres $\delta \gamma(b)$, $\delta \rho_i(b)$, $\delta V'(b)$. Si on attribue à la valeur de la variation de la densité dans le noyau à la limite avec l'enveloppe $\delta \rho_i$ alors les trois paramètres et par conséquent aussi les variations des nombres de Love se déterminent à une décimale.

La dépendance des nombres de Love h , k et du nombre de Shida l en fonction des paramètres $\gamma(b)$, $\rho_i(b)$, $V'(b)$ se détermine par les dérivées partielles

$$\delta h(\delta k, \delta l) = \frac{\partial h(k, l)}{\partial V'(b) (\gamma(b), \rho_i(b))} \delta V'(b) (\delta \rho_i(b), \delta \gamma(b)),$$

qui peuvent être trouvées numériquement lors du calcul de $\partial h(k, l) / \partial V'(h)$. Il faut tenir compte qu'en conformité avec (11) la variation de la masse du noyau influence aussi la solution des équations différentielles dans le manteau. Pour le modèle de Terre [2] les valeurs numériques des dérivées sont:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial V'} &= 0,2014; & \frac{\partial l}{\partial V'} &= 0,0262; & \frac{\partial k}{\partial V'} &= 0,1100; \\
 \frac{\partial h}{\partial \rho_i} &= 0,0743; & \frac{\partial l}{\partial \rho_i} &= 0,0173; & \frac{\partial k}{\partial \rho_i} &= 0,1415; \\
 \frac{\partial h}{\partial \gamma} &= -0,1665; & \frac{\partial l}{\partial \gamma} &= -0,0172; & \frac{\partial k}{\partial \gamma} &= -0,0204.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Les accroissements $\delta_\gamma(b)$, $\delta\rho_i(b)$, $\delta V'(b)$ et les dérivées (21) déterminent les variations des nombres de Love et de Shida suite à la variation du modèle du noyau. Les variations h , k , l lors de la variation simultanée du modèle du noyau et du manteau se représente par la somme des valeurs obtenues dans les p.p. 1 et 2.

3.

Pour comparer le calcul des nombres de Love par la méthode des perturbations avec des résultats de l'intégration numérique indépendante des équations différentielles nous avons calculé les accroissements δh , δk , δl lors du passage du modèle de départ au modèle donné dans les tables 1 et 3 du travail [3]. Les quadratures ont été calculées d'après la formule d'interpolation parabolique de Newton-Kotes. En conséquence on a obtenu les accroissements suivants δh , δk , δl dus à la variation du modèle du manteau et du noyau respectivement:

$$\begin{aligned}
 \delta h_1 &= 0,00830, & \delta k_1 &= 0,00158, & \delta l_1 &= 0,00831, \\
 \delta h_2 &= -0,00536, & \delta k_2 &= 0,00384, & \delta l_2 &= -0,00031, \\
 h + \delta h_1 + \delta h_2 &= 0,6197, & k + \delta k_1 + \delta k_2 &= 0,3069, & l + \delta l_1 + \delta l_2 &= 0,0888,
 \end{aligned}$$

ce qui, dans les limites des erreurs de l'intégration numérique des équations différentielles, concorde avec les résultats obtenus par l'intégration directe des équations (1):

$$h = 0,621 \pm 0,001; \quad k = 0,307 \pm 0,001; \quad l = 0,090 \pm 0,001$$

4. Ainsi, le calcul des variations des nombres de Love et Shida par la méthode des perturbations se ramène aux quadratures (12), (18), (19).

La valeur absolue des fonctions sous-intégrales entrant dans les égalités (12) et données dans la table 2 détermine la sensibilité des nombres de Love et Shida à la variation de la densité et des paramètres de Lamé dans le manteau à différentes profondeurs. Les dérivées (21) déterminent la variation des nombres de Love lors d'une répartition de la masse et du moment d'inertie entre le noyau et le manteau et également lors d'une variation du paramètre d'hétérogénéité du noyau liquide.

Les relations intégrales (12) ajoutent une limitation sensible sur la répartition possible de la densité et des paramètres élastiques dans le manteau. Comme on le voit par la table 2 les fonctions sous intégrales $h_{\mu}(r)$, $k_{\mu}(r)$ ne diminuent pas avec la profondeur mais $h_{\rho}(r)$, $k_{\rho}(r)$ diminuent assez lentement. A cause de cela les nombres de Love, de pair avec les données sur les oscillations propres de la Terre pour de faibles n , apportant une information sur la structure du manteau à grande profondeur. Les variations des nombres de Love et des facteurs δ et γ observés expérimentalement pour une variation du modèle de la Terre sont des valeurs du même ordre que les variations relatives de la densité et des paramètres de Lamé dans le manteau.

Il convient de noter que puisque pour les fonctions $h_{\rho}(r) \neq 2k_{\rho}(r)$, $h_{\mu}(r) \neq 2k_{\mu}(r)$; $h_{\lambda}(r) \neq 2k_{\lambda}(r)$ données dans la table 2, les augmentations de δh pour une variation arbitraire du modèle de l'enveloppe ne sont pas égales en général à $2\delta k$. Ceci constitue le résultat de l'approximation de la relation $h=2k$.

En conclusion, nous profiterons de l'occasion pour exprimer notre reconnaissance à N.N. Pariiskii et M.S. Molodenskii pour l'énoncé du problème, leurs précieux conseils et également pour leur discussion, aux participants du séminaire du laboratoire de la structure interne de la Terre de l'Institut de Physique de la Terre de l'Académie des Sciences d'URSS.

Bibliographie

1. MELCHIOR P.

Marées terrestres M. "Mir" 1968

2. MOLODENSKII M.S.

Influence de la viscosité sur la phase des marées terrestres. Izv. de l'Ac. des Sc. d'URSS série Geoph. N°10 1963

3. MOLODENSKII M.S.

Travaux de l'Institut de Géophysique de l'Ac. des Sc. d'URSS N°19, 146, 1953

4. JARKOV V.N., DOROFYEVA L.N., DOROFYEV V.M., LIUBIMOV V.M.

Sur la zone des valeurs atténuées de la fonction de dissipation Q dans l'enveloppe à la limite avec le noyau. Rapport de l'Ac. des Sc. d'URSS, 214, N°4, 1974

Traduction

SUR LE PROBLEME DE LA METHODE D'ETALONNAGE DES CLINOMETRES
A GRANDISSEMENT PHOTOELECTRIQUE

A.L. Bagmet, V.G. Goloubitskii, A.M. Koutnii

Rotation et déformations de marées de la Terre - VII - 1975 pp 49-52

La sensibilité K des clinomètres à grandissement photoélectrique se détermine à partir d'impulsions de contrôle provoquées par le passage du courant d'étalonnage dans la bobine du pendule, placée dans un champ magnétique $[I]$:

$$K = Z_i \frac{I_0}{I_{KN}} \quad (I)$$

où Z_i est le déplacement sur l'enregistrement, I_0 la constante électrodynamique, $\mu\text{a/sec. d'arc}$; I_{KN} le courant de l'impulsion de contrôle en μa .

Ainsi, la détermination de la sensibilité du clinomètre dépend uniquement de la mesure du déplacement de l'enregistrement Z_i , puisque les valeurs I_0 et I_{KN} sont les constantes de l'appareil et sont déterminées au laboratoire.

La méthode de mesure de haute précision du courant d'impulsion de contrôle I_{KN} a été élaborée précédemment [2]. Pour la mesure de la constante électrodynamique on a recours à des plate-formes d'étalonnage spéciales [3,4].

Alors

$$I_0 = \frac{I}{\psi} \quad (2)$$

où ψ est l'angle selon lequel s'incline la plate-forme portant le clinomètre et I_0 est le courant rétablissant le pendule dans la position initiale.

D'autre part

$$\psi = \frac{\Delta L}{L} \quad (3)$$

L étant la longueur du levier de la plate-forme c'est à dire la distance de l'axe de rotation au point où se donne le déplacement ΔL . Ainsi pour déterminer I_0 il faut connaître ΔL , L et I .

On peut obtenir la valeur ΔL avec une précision de 0,3% en utilisant l'interféromètre $MK\pi\beta$ [5].

Il est facile de mesurer la longueur du levier de la plate-forme à 1 mm près c'est à dire avec une précision de 0,1% au moins ($L > 1$ m).

Cependant pour un étalonnage de haute précision (erreur relative ne dépassant pas 0,3 à 0,4 %) il faut éliminer les autres déformations possibles du levier de la plate-forme. De telles déformations ont été décelées pour la plate-forme $\pi\theta H$ [5] : en plaçant sur le levier une charge répartie on peut diminuer sensiblement sa déformation.

L'une des causes les plus probables provoquant ces déformations est évidemment la non coïncidence du centre de gravité des clinomètres avec l'axe de rotation de la plate-forme. Dans ce cas, apparaissent un moment des forces de rappel élastique des ressorts de suspension et un moment provoqué par la non-coïncidence du centre de gravité avec l'axe de rotation de la plate-forme. Si la rigidité de la plate-forme est insuffisante, il peut se produire sous l'effet de ces moments une déformation de son levier qui à son tour provoque une altération de l'angle ψ .

Dans ces conditions on doit observer une dépendance de I_0 en fonction de la position de la plate-forme par rapport au plan horizontal.

Dans le but de le vérifier nous avons étalonné le clinomètre n°99 en différentes positions de la plate-forme à l'état libre et chargé. La position zéro (horizontale) de la plate-forme a été déterminée à l'aide d'un niveau. Ensuite en inclinant la plate-forme nous avons mesuré I_0 tous les 6'. La figure I montre que I_0 varie presque d'après une loi parabolique avec un maximum au point $\psi = 0$ (c'est à dire quand la plate-forme a une position horizontale). Ceci s'explique évidemment par le fait que pour $\psi = 0$ les moments de rappel sont minima. Par conséquent, en ce point I_0 doit être la plus proche de sa vraie valeur.

Dans le cas du levier chargé, le graphique de la fonction $I_0(\psi)$ est presque linéaire autrement dit lorsque la plate-forme est suffisamment solide et chargée le levier ne fléchit pas sous l'effet des forces mentionnées.

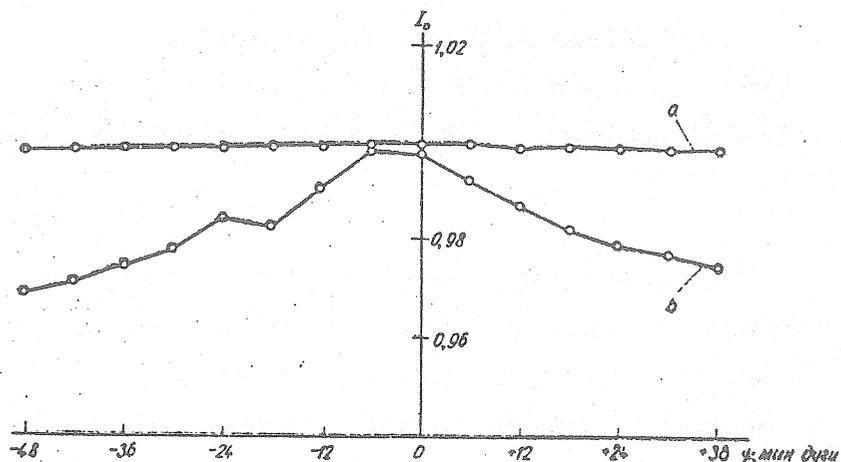


Fig.1 Graphique de la fonction $I_0(\psi)$: ψ est l'angle entre la plate-forme et le plan de l'horizon, a est le levier de la plate-forme chargé, b est le levier de la plate-forme non chargé.

Pour éclaircir définitivement ce problème on a appliqué des tensions à travers quelques boucles plates du fil mince de Constantan (diamètre 10 à 20 μm). Lors de la contraction ou de la dilatation du générateur de tension il se produit une variation de résistance qu'on peut mesurer par un schéma en pont. Les mêmes générateurs (10 pièces) ont été collés à des intervalles égaux le long du levier de la plate-forme $\pi\phi\text{H}-2$. Les premiers essais ont montré que la variation de la résistance du générateur de tension est dans le cas qui nous intéresse très faible et il est très difficile de la mesurer.

Pour augmenter le signal agissant nous avons réuni tous les générateurs de tension et enregistré la déformation totale. Cela a permis de renforcer un peu le signal mais pas assez pour obtenir une solution quantitative du problème. C'est pourquoi nous ne donnerons plus bas que la description qualitative des résultats de l'expérience faite. Il nous semble cependant que pour le problème envisagé c'est jusqu'à présent suffisant.

Il est apparu que si le levier n'est pas chargé les déformations ont un caractère non élastique. Cette conclusion est basée sur le fait qu'au moment du déplacement au bout du levier, la flèche de l'appareil de mesure P. 325 est déviée (en d'autres mots la résistance des générateurs de tension varie à la suite de leur déformation provoquée par le fléchissement du levier) et ne retourne pas dans sa position initiale. Cela conduit évidemment à une transmission incomplète de l'angle ψ .

Si on applique au levier une charge dispersée alors les déformations deviennent élastiques c'est à dire que l'indicateur de l'appareil de mesure revient dans la position initiale. Dans ce cas il ne se produit pas d'altération de l'angle ψ .

Ainsi, pour un étalonnage de haute précision il faut, en utilisant les générateurs de tension, s'assurer que lors des inclinaisons les déformations du levier sont élastiques et l'angle ψ correspond à la valeur calculée. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut considérer que l'angle ψ (sa valeur varie de 0,02 à 3,0 sec.) est donné et mesuré avec une précision d'environ 0,3%.

La valeur du courant de compensation I ne dépasse pas quelques microampères (et peut avoir pratiquement une valeur de 0,02 à 3 μ a), et la mesure d'angles si petits n'est pas une tâche facile. Nous avons trouvé I précédemment par voie de calcul d'après les paramètres du montage auquel était donnée la valeur nécessaire du courant [1]. Cependant dans ce cas l'erreur de détermination I n'était pas de moins de 0,6 à 0,7% ce qui est insuffisant pour un étalonnage de haute précision. C'est pourquoi pour mesurer I nous avons appliqué l'installation dont le diagramme est donné à la figure 2.

La valeur du courant I se mesure d'après la chute de tension sur le résistor modèle de la classe 0,01, branché par conséquent dans le réseau de la bobine de contrôle du pendule du clinomètre. La chute de tension se mesure avec une erreur ne dépassant pas 0,02% par la méthode de compensation par le potentiomètre P 306 ou P 307 avec un élément normal de classe 0,005. A titre d'indicateur zero nous avons appliqué le microvoltmètre P 325 à auto-compensation. Il est utilisé pour déterminer le moment de rappel du pendule du clinomètre par le courant de compensation I dans la position qu'il occupait jusqu'à ce qu'on incline la plate-forme d'un angle ψ .

Pour débrancher P 325 du potentiomètre à l'amplificateur photo on a appliqué un commutateur de précision π 308 ayant des thermo-d.c. extrêmement faibles. Il est tout à fait évident que l'utilisation des commutateurs habituels est tout à fait inadmissible.

L'erreur de mesure du courant de compensation I sur l'installation proposée (elle est montée sur un socle en béton à la profondeur de 4 m sous la surface du sol) n'a pas dépassé 0,03%.

L'installation décrite plus haut a été soumise à une vérification pratique lors de l'étalonnage des mêmes clinomètres à Obninsk (Institut de Physique de la Terre) et à Poltava (Observatoire Gravimétrique de Poltava) [6]. A Obninsk on a appliqué une plate-forme sur des ressorts plats π 0H-2 [3] et à Poltava sur une suspension à couteau [4]. La comparaison des résultats de ces deux étalonnages [6 table 2] a montré que les valeurs I_0 obtenues dans les deux installations s'accordent à 0,3% près. Ce n'est pas sans raison qu'on peut prendre ce chiffre comme erreur absolue de la mesure puisque l'étalonnage a été fait sur diverses plate-formes et à l'aide de différents appareils de mesure.

En conclusion la mise en application d'améliorations dans la méthode d'étalonnage a permis de préciser les résultats des observations de marées terrestres en beaucoup de points d'Ukraine.

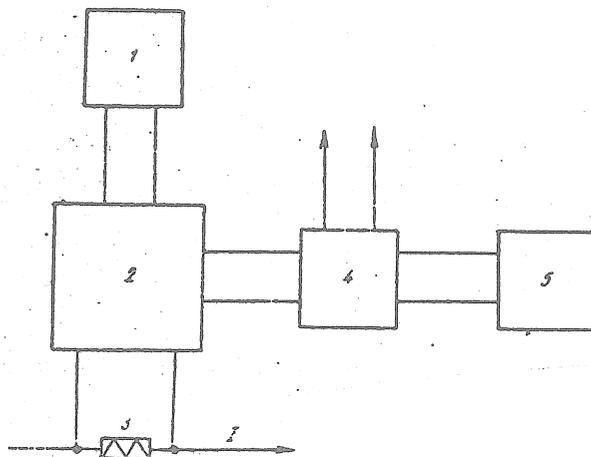


Fig.2 Diagramme de l'installation pour la mesure de la valeur du courant de compensation I

1-élément normal de classe 0,005; 2-potentiomètre de précision P306 (P307) de classe 0,015; 3-résistor modèle de classe 0,01; 4-commutateur à deux pôles de précision π 308; 5-microvoltmètre d'autocompensation P325

Les observations à Soudievka [7] et Bagatchka [8] où ont été faites de longues séries d'observations clinométriques avec deux complexes de clinomètres photoélectriques installés parallèlement peuvent servir d'exemple le plus caractéristique. Après l'introduction dans les valeurs obtenues du facteur de marée γ des corrections prenant en considération les résultats du nouvel étalonnage [6], la différence entre les appareils parallèles pour l'onde M_2 était environ de 0,3% pour Soudievka et environ 0,6% pour Bagatchka.

Par conséquent, la méthode d'étalonnage des clinomètres avec grandissement photoélectrique appliquée à présent en tenant compte des améliorations proposées par nous permet de diminuer sensiblement le niveau des erreurs instrumentales possibles.

Bibliographie

1. OSTROVSKII A.E.
Etude des marées terrestres N°2
M. Edit. Ac. des Sc. URSS 1961
2. BAGMET A.L.
Etude des déformations de marées de la Terre M. "Naouka" 1973
3. OKHOTSIMSKAIA M.V. KHOROMSKII A.V.
Recherches géophysiques complexes à Obninsk N°1 Obninsk, 1970
4. GOLOUBITSKII V.G. KOUTNII A.M.
Rotation et déformations de marées de la Terre
Publ. 5.K. "Naoukova Doumka" 1973
5. BAGMET A.L. KOUTNII A.M.
Rotation et déformations de marées de la Terre
Publ. 5.K. "Naoukova Doumka" 1973
6. GOLOUBITSKII V.G. KOUTNII A.M. BALENKO V.G. BOGDAN I. Iou. BAGMET A.L.
Cette revue
7. MATVEYEV P.S. OSTROVSKII A.E. GOLOUBITSKII V.G. BOGDAN I. Iou. DOUBIK B.S.
SLAVINSKAIA E.A.
Cette revue p.3
8. BALENKO V.G. KOUTNII A.M. NOVIKOVA A.N.
Cette revue p.15

GRAVIMETRIC EARTH TIDE OBSERVATIONS IN ICELAND

W. Torge and H.G. Wenzel

Institut für Theoretische Geodäsie, Technische Universität Hannover

1. Purpose of earth tide observations

For the detection of secular gravity variations in the young volcanic zone of north Iceland, a west-east gravity profile has been established in 1938. This profile, starting at Akureyri (Fig. 1), has been reoccupied in 1965, 1970/71 and 1975.

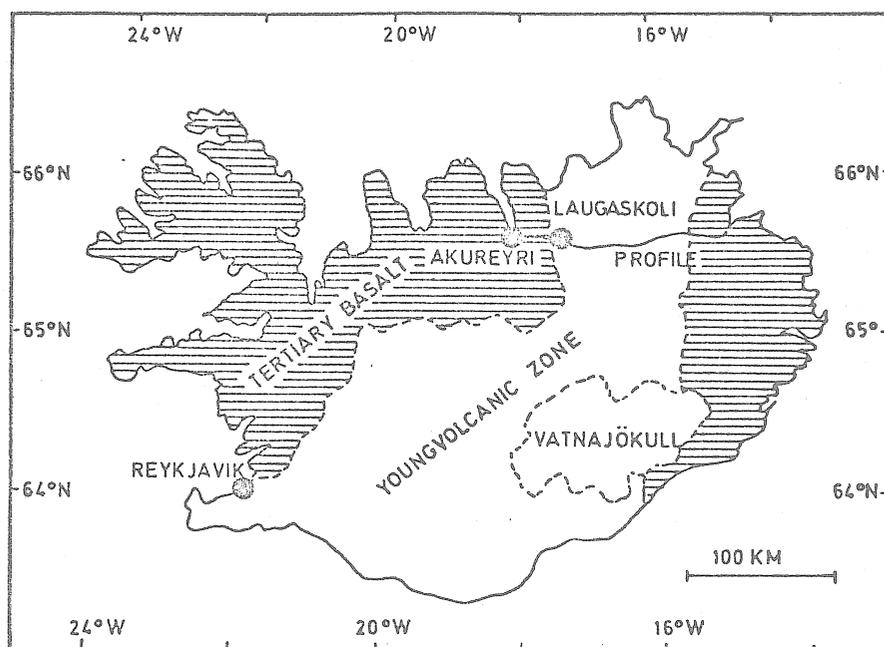


Fig. 1

Accuracy of observed point gravity values has increased from about ± 1 mGal in 1938 to ± 0.015 mGal in 1965 and 1970/71 (SCHLEUSENER and TORGE 1971), for the 1975 measurements the expected accuracy is better than ± 0.01 mGal, which is due to the use of four LaCoste-Romberg gravity meters. To ensure this high accuracy level, the error of tidal gravity corrections should not be larger than $\pm 1 \dots 2$ μ Gal; therefore actual tidal parameters should be known within $\pm 1\%$ for the amplitudes and $\pm 1^\circ$ for the phases of the main waves. For that reason a temporary gravimetric earth tide station has been installed during the 1975 measuring campaign.

2. Description of gravimetric earth tide station Laugaskoli

The earth tide station Laugaskoli ($\phi=65^{\circ}722N$, $\lambda=17^{\circ}359W$, $h=60$ m) is situated near the middle of the gravimetric profile (Fig. 1) in a cellar of a school; the subsoil of the station is of young volcanic origin. The instruments have been installed on the concrete floor, room temperature has been stabilized to $28.0 \pm 0.1^{\circ}C$ (Fig. 2). Observations have been carried out from 1975.07.05 until 1975.08.20 with following instruments:

LaCoste-Romberg Model G No. 298 (abbr. L298),
Askania Gs 12 No. 130BN (abbr. A130BN),
2 double channel strip chart recorders,
Lambrecht Microbarograph (0.3 mBar/mm),
Thermistorbridge for room temperature recording ($0.03^{\circ}C/mm$),
Quartzclock.

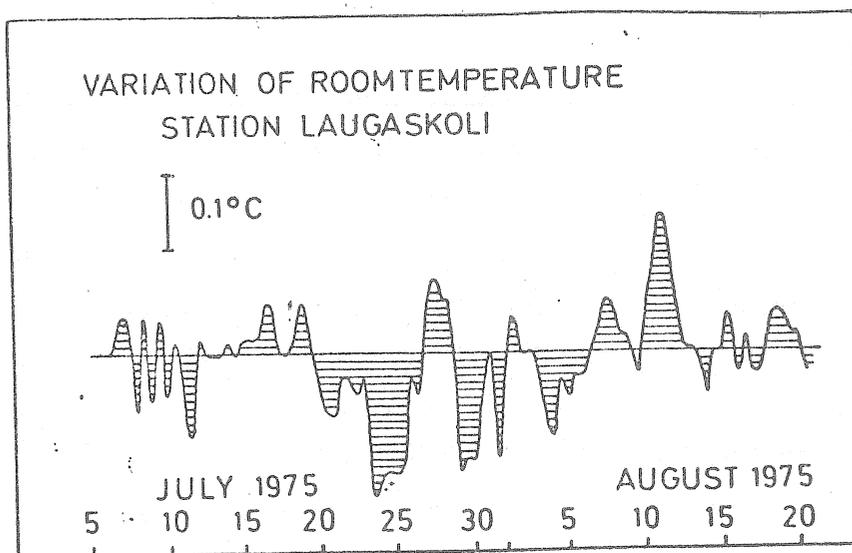


Fig. 2

3. Calibration of the earth tide records

The L298 earth tide record has been calibrated each two days by a spindulum displacement of $211 \mu\text{Gal}$, the calibration values have been interpolated by the method of prediction-filtering (WENZEL 1975a). The root mean square error of the interpolated calibration values is $\pm 3\%$. The constant calibration value of A130BN earth tide record has been determined during registration

by spindulum displacements; after finishing the observations, the calibration value has been redetermined at Hannover by the tild method. The difference between both calibration methods is 4‰.

4. Instrumental phase lag

The instrumental phase lag of A13OBN is less than 0.1° for the wave M2 (WENZEL 1976), therefore a correction is not necessary. For L298, instrumental phase lag has been determined by the method of FOURIER-transformation of differentiated step response (WENZEL 1976) to 0.98° for M2 and 0.86° for O1; as shown by reference registrations at Uccle, Bonn and Hannover, this kind of instrumental phase lag determination is accurate to $\pm 0.1^\circ$.

5. Analysis of observations

For L298, a 47^d record has been obtained. Because of instrumental problems, A13OBN could only be used with switched off internal heating, and the record length for A13OBN was only 28^d.

Both records have been analyzed by the method of CHOJNICKI with the modification proposed by SCHÜLLER 1975, the influence of air pressure and room temperature has been corrected by a linear regression model. Accuracy estimation of tidal parameters has been made with the FOURIER-spectrum of the residuals (WENZEL 1976).

The analysis results are given in Table 1 and Table 2, the FOURIER-spectra of the residuals are shown in Fig. 3 and Fig. 4.

The accuracy of L298 observations is sufficient to get tidal corrections for field gravity measurements with an accuracy of $\pm 1 \mu\text{Gal}$; unfortunately the accuracy of A13OBN observations is ten times less. The larger errors of the A13OBN observations seem to be produced by room temperature variations ($100 \mu\text{Gal}/^\circ\text{C}$ room temperature variation, see WENZEL 1975b); instruments of this type require a room temperature stability of $\pm 0.01^\circ\text{C}$ which is critical for temporary stations.

Table 1 :

PROGRAM ET6 CHOJNICKI - WENZEL
 EUROPEAN TRANSVERSE PROFILE STATION LAUGASKOLI ICELAND
 65.722N 17.359W H60M P2M D80KM
 1975.07.05 - 1975.08.20
 GRAVIMETER L298 PROF.TORGE HANNOVER
 INSTALLATION H.G.WENZEL
 MAINTENANCE H.G.WENZEL
 CALIBRATED BY SPINDULUM DISPLACEMENTS
 INSTRUMENTAL LAG CORRECTED FOR .86 DEG 01 .98 DEG M2
 AIRPRESSURE INFLUENCE CORRECTED
 ROOMTEMPERATURE INFLUENCE CORRECTED
 INERTIAL CORRECTION APPLIED

NUMBER OF DAYS 47.0

ESTIMATION OF NOISE BY FOURIER-SPECTRUM OF RESIDUALS

DAILY-WAVES .3904 MYGAL
 HALF-DAILY WAVES .1628 MYGAL
 THIRD-DAILY WAVES .0967 MYGAL

ADJUSTED TIDAL PARAMETERS

NR.	FROM	TO	WAVE	AMPL. MYGAL	SIGNAL/ NOISE	AMPL.FAC.	PHASE LAG DEG	
1	129	193	Q1	4.6075	11.8026	1.0324 .0875	-.8980 4.8545	Q1
2	194	219	01	26.2165	67.1556	1.1246 .0167	.6727 .8532	01
3	220	241	M1	2.5130	6.4371	1.3707 .2129	13.7403 8.9008	M1
4	242	274	P1S1K1	37.2882	95.5165	1.1373 .0119	2.1407 .5999	P1S1K1
5	275	296	J1	1.6854	4.3174	.9196 .2130	4.1033 13.2709	J1
6	297	333	001	.8661	2.2185	.8627 .3889	11.9720 25.8262	001
7	334	374	2N2	.3593	2.2066	.9245 .4189	20.4558 25.9652	2N2
8	375	398	N2	2.7952	17.1675	1.1483 .0669	3.5213 3.3375	N2
9	399	424	M2	16.1310	99.0726	1.2687 .0128	2.1827 .5783	M2
10	425	441	L2	.7083	4.3501	1.9708 .4531	29.3082 13.1711	L2
11	442	488	S2K2	7.2244	44.3704	1.2213 .0275	-1.7213 1.2913	S2K2
12	489	505	M3	.1518	1.5688	1.4751 .9403	24.3970 36.5224	M3

MEAN SQUARE ERROR 1.710 MYGAL DEGREE OF FREEDOM 1051

METEOROLOGICAL OR HYDROLOGICAL PARAMETERS

NR.	REGR.COEFF.	MSE	SYMBOL
1	-.131	.003	MYGAL/MBAR AIRPRESSURE
2	1.912	1.160	MYGAL/DEG CELSIUS ROOMTEMPERATURE

Table 2 :

PROGRAM ET6 CHOJNICKI - WENZEL
 EUROPEAN TRANSVERSE PROFILE STATION LAUGASKOLI ICELAND
 INSTITUT F.THEORETISCHE GEODAESIE TECHNISCHE UNIVERSITAET HANNOVER
 65.722N 17.359W H60M P2M D80KM
 GRAVIMETER A130BN PROF.TORGE HANNOVER
 1975.07.08 - 1975.08.05
 INSTALLATION H.G.WENZEL
 MAINTENANCE H.G.WENZEL
 CALIBRATED BY SPINDULUM DISPLACEMENTS
 INSTRUMENTAL LAG CORRECTED FOR .07 DEG M2
 AIRPRESSURE INFLUENCE CORRECTED
 ROOMTEMPERATURE INFLUENCE CORRECTED
 INERTIAL CORRECTION APPLIED

NUMBER OF DAYS 28.0

ESTIMATION OF NOISE BY FOURIER-SPECTRUM OF RESIDUALS

DAILY WAVES 2.4109 MYGAL
 HALF-DAILY WAVES .6674 MYGAL
 THIRD-DAILY WAVES .2993 MYGAL

ADJUSTED TIDAL PARAMETERS

NR.	FROM	TO	WAVE	AMPL. MYGAL	SIGNAL/ NOISE	AMPL.FAC.	PHASE LAG DEG	
1	129	193	Q1	5.9956	2.4869	1.3433 .5402	90.0000 23.0392	Q1
2	194	219	O1	20.4660	8.4890	.8779 .1034	-.1652 6.7494	O1
3	220	241	M1	7.6177	3.1597	4.1552 1.3151	-8.5432 18.1331	M1
4	242	274	P1S1K1	33.3205	13.8209	1.0163 .0735	-1.6670 4.1456	P1S1K1
5	275	296	J1	4.4764	1.8568	2.4424 1.3154	90.0000 30.8578	J1
6	297	333	001	1.5646	.6490	1.5585 2.4014	90.0000 88.2872	001
7	334	374	2N2	.8796	1.3179	2.2633 1.7174	-83.9171 43.4749	2N2
8	375	398	N2	2.1983	3.2936	.9030 .2742	-16.6541 17.3961	N2
9	399	424	M2	15.8341	23.7237	1.2454 .0525	2.4060 2.4151	M2
10	425	441	L2	.4675	.7004	1.3008 1.8572	90.0000 81.8025	L2
11	442	488	S2K2	6.7601	10.1284	1.1428 .1128	-9.9255 5.6569	S2K2
12	489	505	M3	.2776	.9277	2.6980 2.9084	90.0000 61.7643	M3

MEAN SQUARE ERROR 10.227 MYGAL DEGREE OF FREEDOM 544

METEOROLOGICAL OR HYDROLOGICAL PARAMETERS

NR.	REGR.COEFF.	MSE	SYMBOL
1	-1.225	.022	MYGAL/MBAR AIRPRESSURE
2	-94.729	37.384	MYGAL/DEG CELSIUS ROOMTEMPERATURE

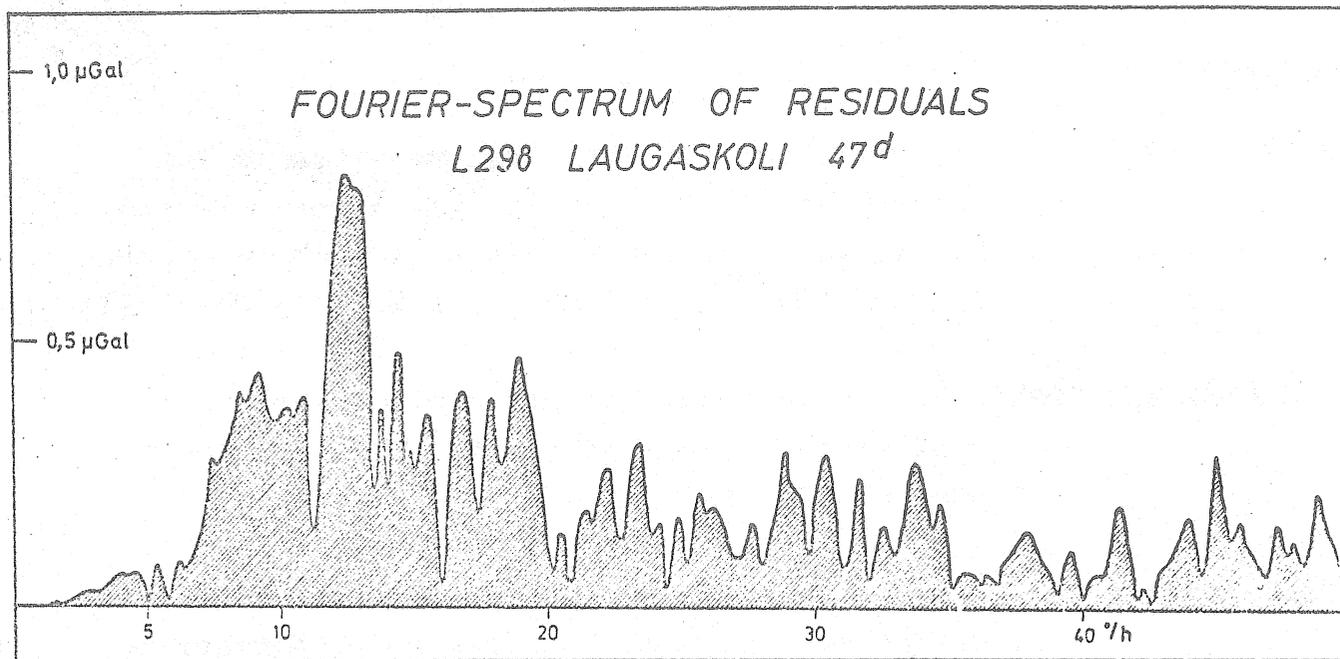


Fig. 3

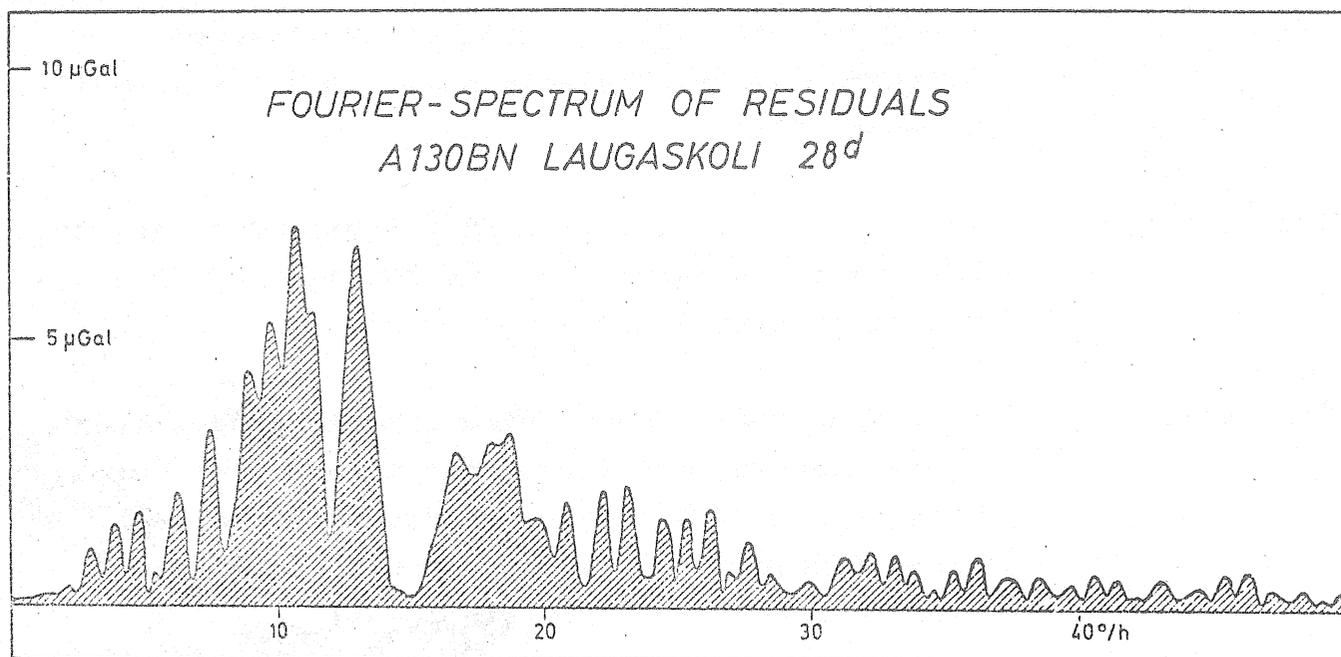


Fig. 4

Acknowledgements: The authors thank the National Research Council of Iceland for the permission to carry out the observations, and Mr. Oskar Agustsson for the valuable help in establishing the earth tide station in Laugaskoli. Calculations have been carried out with the CDC 73/76 of the Regional Computing Centre of Lower Saxony.

The authors are very grateful to the German Research Society (Deutsche Forschungsgemeinschaft), which generously sponsored the investigations.

References:

- CHOJNICKI 1973: Ein Verfahren zur Erdgezeitenanalyse in Anlehnung an das Prinzip der kleinsten Quadrate, Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn Nr. 15, Bonn 1973
- SCHLEUSENER and TORGE 1971: Investigations of secular gravity variations in Iceland, Zeitschrift für Geophysik, 37, 1971, p. 679 - 701
- SCHÜLLER 1975: Ein Vorschlag zur Beschleunigung des Analyseverfahrens Chojnicki, Bulletin d'Informations marées terrestres No. 70, Brüssel 1975
- WENZEL 1975 a: Interpolation von Eichwerten für die Erdgezeitenregistrierung mittels Prädiktionsfilterung, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B No. 211, München 1975
- WENZEL 1975 b: Stability of temperature in a transformed Askania gravimeter, presented to the XVI IUGG (IAG) General Assembly, Grenoble 1975
- WENZEL 1976: Zur Genauigkeit von gravimetrischen Erdgezeitenbeobachtungen, Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Hannover 1976 (in press).

INVESTIGATION OF EARTH TIDES BY OBSERVING
DILATATIONAL VARIATIONS OF THE WATER TABLE.

P. Varga

Hungarian Geophysical Institute R. Eötvös Budapest

Investigation of Earth tides is one of the integrate methods of geophysics: constants obtained in the result of harmonic analysis amplitude ratios and phase lags are compared to those obtained from theoretical investigations. Efficiency and information content of all kinds of such investigations depend on the extent to which individual features of the inner structure of our planet may influence the value of integrate constants. This question is subject to theoretical investigations as well, by the aid of various theoretical Earth models. Calculations carried out so far that will be referred to later in this study show that the values of amplitude factors $\mathcal{S} = 1 + h - 3/2 k$ to be observed by gravimeters and $\mathcal{T} = 1 + k - h$ to be observed by pendulums hardly depend on the accepted model. Theoretical results are influenced first of all by the shape of the core and by the shear modulus of the core material.

Relative poorness in information of \mathcal{S} and \mathcal{T} is according to our opinion to be attributed to two reasons :

- a/ the value of amplitude factors differ only slightly from values holding for the rigid Earth ,
- b/ results of Molodensky's theory [8] obtained on the basis of usually accepted models confirm the result of Melchior [2] that $h \approx 1/2 k$. Thus even if the value of Love numbers h and k does change in the course of model calculations, these changes in amplitude factors vitiate one another to a significant extent.

There are two possibilities to increase the efficiency of investigating earth tides :

- a/ it must be achieved by rendering the observations more accurate that the amplitude factor of the biggest tidal waves are determined with an error of 0,1 per cent or even less. This path is followed in general, on the basis of the present situation, however, it can hardly be expected that error values of amplitude factors will decrease below this error limit in the near future. This would be made difficult by the fact that the reliability of harmonic analysis techniques in use at present is several tenth per cent depending on the quality of the investigated series of measurement data.
- b/ determination of Love's numbers is attempted from the investigation of such natural phenomena in which h and k do not appear together. This possibility has not yet been utilized since observation of such phenomena could not be carried out with the required accuracy. This group of phenomena comprises among others dilatational variations of the water table caused by lunisolar effect.

1. Theoretical questions

Dilatation generated in the elastic Earth by lunisolar effect $D/a/$ can be described by the following equation [8] :

$$D_n(\tau) = f_n(\tau) \cdot \frac{V \cdot a^{n-1}}{g} \quad /1/$$

where

$$f_n(\tau) = H'_n(\tau) + \frac{2}{r} H_n(\tau) - \frac{n(n+1)}{r^2} T_n(\tau) \quad /2/$$

$H'_n/r/$ and $T_n/r/$ can be expressed by the Love numbers $h'_n/r/$ and $l_n/r/$ in the following form :

$$H'_n(\tau) = h'_n(\tau) \frac{r^n}{a^{n-1}} \quad /3/$$

$$T_n(\tau) = l_n(\tau) \frac{r^{n+1}}{a^{n-1}} \quad /4/$$

In /1/, /2/, /3/ and /4/

W_n - n-th order tide potential

a - radius of the Earth / $a \gg r \gg 0$ /

g - gravity at the Earth's surface

' means derivations according to radius/.

In /2/ $H'_n(r)$ at the surface $r = a$ can be determined by departing from that the values of normal stresses N (17) over the Earth's surface are equal to zero [8] :

$$N(a) = (\lambda(a) + 2\mu(a)) \cdot H'_n(a) + \lambda(a) \left(\frac{2}{a} H_n(a) - \frac{n(n+1)}{r^2} T_n(a) \right) = 0 \quad /5/$$

Then from /3/, /4/ and /5/ we can express H'_n/a in the following form :

$$H'_n = \frac{\lambda(a) [2h_n(a) - n(n+1)l_n(a)]}{\lambda(a) + 2\mu(a)}$$

In this way from /2/ f/a appears in the following form /n=2/ :

$$f_2(a) = 2h_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) - 6l_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \quad /6/$$

The same formula we got from [4] with held /2/ :

$$D_n(a) = \left[a h'_n + (n+2) h_n - n(n+1) l_n \right] \frac{W_n}{a g}$$

if it is accepted that /3/ gives :

$$H'_n(r) = n \frac{r^{n-1}}{a^{n-1}} h_n(r) + \frac{r^n}{a^{n-1}} h'_n(r)$$

If f/a can be determined experimentally, this would be important for increasing the efficiency of tide investigations. On the basis of Molodensky's theory we carried out earlier the determination of Love numbers h_2 , k_2 and l_2 for various models [6] . These results , as well as number f obtained on the basis of equation /6/ are presented in Table 1. It can be readily seen from this table that the

variations of f obtained for the different models are bigger as variations δ and γ . /The average deviations from the mean in the case of δ , γ and f respectively are 0.175 %, 0.425 % and 1.767 %./ This fact can be explained with that in /6/ h and k do not appear together and with different Love number combinations :

$$\delta_2 = 1 + h_2 - \frac{3}{2} k_2 \approx 1 + \frac{1}{4} h_2$$

$$\gamma_2 = 1 + k_2 - h_2 \approx 1 - \frac{1}{2} h_2$$

$$f_2 = \frac{4}{3} h_2 - 4 l_2 \approx \frac{3}{4} h_2$$

/if $k_2 \approx 1/2 h_2$, $l_2 \approx 0.15 h_2$ and $\mu/a \approx \lambda/a$ /.

The dynamical effect of the liquid core in case of f appear in a more pronounced form. Model II of Molodensky [9] yields the following results :

$$\delta_{0_1} - \delta_{k_1} = 1.164 - 1.143 = 0.021 \quad (1.8\%)$$

$$\gamma_{0_1} - \gamma_{k_1} = 0.686 - 0.727 = -0.041 \quad (5.8\%)$$

$$f_{0_1} - f_{k_1} = 0.495 - 0.377 = 0.117 \quad (23.7\%)$$

Observation of dilatational variations of the water table is rendered possible in boreholes crossing water saturated porous beds.

The pressure variations caused by tides in a porous aquifer in static condition [2] :

$$P = -\frac{\Delta}{S}$$

where $P = \rho \cdot g \cdot X$

the hydrostatic pressure

ρ - the water density

g - gravity

X - amplitude of the water table variations/

$$\Delta = \phi \cdot A = \phi \cdot \frac{W_2}{a \cdot g} \quad - \text{ the dilatation}$$

$$A = \frac{W_2}{a \cdot g} \quad - \text{ is the theoretical amplitude}$$

W_2 - the tidal potential of

a - the Earth's radius/

$$S = \frac{p}{k_f} + \frac{1-p}{k_r} \quad - \text{ the hydraulic capacitivity}$$

/where p is the porosity

k_f and k_r the bulk modulus of the liquid and the rock matrix/.

In this way the fourth Love number can be determined from the following equation :

$$\phi = - \frac{X}{A} \left(\frac{1-p}{k_r} + \frac{p}{k_f} \right) \cdot S \cdot g \quad /7/$$

The volume taking part in the dilatational water movement /T/ can be estimated on the basis of the dilatated liquid quantity:

$$T = \frac{\Delta T}{\phi \cdot A} \quad /8/$$

The skin depth d is

$$d = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$

where ω is the frequency and α the hydraulic diffusivity which can be expressed in the following way :

$$\alpha = \frac{c}{S \cdot S} = \frac{c}{S \left(\frac{p}{k_f} + \frac{1-p}{k_r} \right)} \cdot S \cdot g$$

/here c is the hydraulic conductivity/ and so the skin depth can be determined from the following equation :

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{\omega \cdot \rho} \cdot \left(\frac{1-p}{k_r} + \frac{p}{k_f} \right)^{-1}} \quad /9/$$

If $p = 0.30$, $k_f = 2.25 \cdot 10^{10} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$,

$$k_r = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}, \quad \rho = 1,0 \text{ g/cm}^3,$$

then the skin depth is 250 m for semidiurnal and 352 m for diurnal waves. According to formula /8/ $/f = 0.48/$ the liquid volume /T/ taking part in water movement is $\approx 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3$.

On the basis of the aforesaid it can be concluded that surroundings of the borehole with a radius of several hundred meters are involved in the dilatational water movement. For the investigation of f it is required that the aquifer particularly within the surroundings of the first hundred meters radius be homogenous.

2. Discussion

Problems encountered in processing survey results were related to recording, on the one hand, and to difficulties in calibration, on the other. The latter had a connection with the geological model required by formula /7/.

Among problems of recording the effects of air pressure have been investigated. Variations of the water table follow changes in air pressure like a barometer. Water movements produced in this way may sometimes reach such an extent that they suppress completely tidal effects on the dilatational curve.

Thus, in this instance elimination of the barometric effects has a decisive importance. Since air pressure variations appear on the frequencies of tides as well, the possibility of filtering this effect is out of question. For curves investigated by us the following procedure was taken: we have determined the Fournier transform of air pressure variations and water table oscillations on frequencies far away from tidal waves. Investigating the correlation of these calculation it was established that there is a close and linear relationship between the two types of spectra. Thus the calculation of linear regression has a firm basis. By the aid of the regression straight obtained in this way a portion of water table oscillation falling in the frequency range of tides can be made free of air pressure effects.

So far we have investigated amplitude spectra only. Their property favourable for us, namely the independence of phase, has been utilized. Air pressure variation exert a twofold effect on the water table :

- effect of air pressure which is valid directly over the given observation point ,
- crust deforming effect of air pressure, for the calculation of which it is necessary to take into account a greater but not exactly determinable environment of the borehole.

Comparison of air pressure curves recorded on various parts of Hungary located at great distances from one another has shown that their shapes coincide for practical purposes, only they are shifted in time. Thus to determine accurately the amplitude spectrum it is enough to involve the barometric time sequence of a single point into the investigation.

Calibration problems as it has already been mentioned are related to the accepted geological model. From formula /7/

it can be seen that determination of the value f is effected by porosity of the aquifer, and by the shear modulus of the liquid and rock matrix.

a/ On the basis of /7/ it can be seen that relationship between f and p is linear. For layers investigated by us $p \approx 0.25$ /and such a value can be regarded as typical/ while the error of determining porosity is $\approx 5\%$, leading to an error of 5% in determining f . Up-to-date techniques of radioactive and electric well logging permit to achieve an accuracy of $< 1\%$ in determining porosity relatively easily, which corresponds to an error of $< 1\%$ in f .

b/ The compression modulus of water is known with satisfactory accuracy, but in the course of calculation it must be taken into consideration that the value of k_f depends on water temperature.

c/ The greatest problem is caused by determining the compression modulus of rock matrix.

For values p and k_r regarded as typical from geological point of view the uncertainty of 5% in k_r gives an error of 1.0% in f . It is favourable to have great values of k_r .

Dependence on k_r decreases with increasing p values. If porosity values are high, however, skin depth increases significantly: assumptions for the geological model must be expanded and we can not be sure any more even in that liquid dilatation takes place only in the borehole observed by us.

3. Investigation of observation results

Two series of 21 days each obtained on the following two stations have been investigated :

- a/ SZARVAS / $\varphi = 46^{\circ} 52'$; $\lambda = 20^{\circ} 33'$ /, depth of the investigated layer is 870.5 to 884.5 m, its material: sand, $p = 24\%$, water temperature 50°C , $k_r = 3 \cdot 10^{11}$.
- b/ KUNADACS / $\varphi = 46^{\circ} 58'$; $\lambda = 19^{\circ} 19'$ /, depth of the investigated layer is 359 to 366 m, its material: sand, $p = 20\%$, temperature 30°C , $k_r = 3 \cdot 10^{11}$.

The observations were carried out by L. Csaba from the Hungarian State Geological Institute.

It has been regarded as beneficial for recording that the static water table is a depth of only several meters from the surface. Statistical characteristics as determined on the basis of amplitude spectra of air pressure and water table variations are presented in Table 2. The error of the regressional straight was estimated on the basis of [1] for a reliability level of 98 per cent. Investigation of reliability for the same level can be checked by determining whether the result in the case of normal distribution / $Z_{\alpha/2}$ / for an error limit of $\alpha = 2\%$ falls outside the range of 0 % correlation, i.e.

$$B = \left| \frac{N-2}{2} \ln \left(\frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}} \right) \right| > Z_{\alpha/2} \quad /10/$$

/where r_{xy} is the correlation coefficient, N is the number of investigated frequencies/. The higher B than $Z_{\alpha/2}$, the better the physical foundation of the result. The spectrum was calculated from the curve of water table variations cleared by the regressional straight obtained in the described manner by the aid of Fourier transformations with the use of Gibb's factors.

In addition to this wave K_1 must be made free of the effect of P_1 on the basis of theoretical amplitude relations, i.e. of the transfer properties of the applied transformation. In our case the 0.318 part of the amplitude of K_1 proved to be the effect of P_1 .

As to the effect of air pressure, it is the highest for K_1 and S_2 waves, but for short sequences the correction of M_2 and O_1 waves is also significant.

The goodness of the applied corrections is illustrated in Table 3 where the ratios K_1/O_1 ; M_2/O_1 and K_1/M_2 obtained from the corrected spectrum are presented and compared to the theoretical values.

Analyses of curves obtained by the aid of gravimeters and pendulums have shown that a sequence of 21 days is too short to furnish accurate values. In spite of this amplitudes of O_1 , K_1 and M_2 waves have been successfully determined even in this case with a satisfactory accuracy with an error of several per cents.

When error values indicated in item 2 are taken into consideration, the error of calculating f presented in Table 4 and realized on the basis of /7/ is 5 to 7 % / it is unlikely to exceed 10 % /. By recording long sequences and using an instrument more accurate than the extremely simple water level recorder available for us it can be expected that the error of measurement will be readily reduced to 0.5 to 1 %, and according to our opinion by determining parameters in formula /7/ more exactly the value of f can be relatively easily determined with an accuracy of 1 to 3 %.

Interpretation of the survey results

1. If value obtained for O_1 wave can be regarded as less influenced by external effects, we can conclude that determined from records value of f is bigger as theoretical /the difference is about 8 % of f theoretical/. This discrepancy can be eliminated if in /7/ we take

$$k_v = 4 \cdot 10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} .$$

But this value is too high for bulk

modulus of the rock matrix.

2. The effect of the liquid core can not be regarded as proved due to the shortness of the sequences, in spite of the fact that the value of $f_{o1} - f_{k1}$ on station SZARVAS is near the theoretically expected one.

3. For both stations $f_{o1} - f_{M2}$ is about 0.06. This difference probably due by indirect effect of the oceans [10].

Acknowledgments:

The author is indepted to prof. P. Melchior for critically reading the manuscript and making his remarks.

The author wishes to thank Mr. L. Csaba for measuring the dilatational variations of the water table.

L i t e r a t u r e

- /1/ Bendat J.S., Piersol A.G., 1973. Random Data. Analysis and Measurement Procedures. Wiley-Interscience, a Division of John Wiley and Sons I. N. C., New York
- /2/ Bodvarsson G., 1970. Confined Fluids as Strain Meters, Journal of Geoph. Res. vol. 75. No 4.
- /3/ Melchior P., 1950. Sur l'influence de la loi de repartition des densités a l'intérieur de la Terre dans les variations Lune-Solaires de la gravité en un point. Geofis. Pura e Appl. 16. fasc 3/4.
- /4/ Melchior P. and all., 1974. Preliminary results obtained with a vertical strainmeter. Physics of the Earth and Planetary Interiors Vo. 9. No 2.
- /5/ Melchior P., 1966. The Earth Tides, Pergamon Press.
- /6/ Varga P., Dependence of the Love numbers upon the Inner Structure of the Earth and Comparison of Theoretical Models with Results of Measurements. Pageoph. 112., 1974.
- 7- Мельхиор, П. 1968. Земные приливы, Мир, Москва.
- 8- Молоденский, М.С. 1953. Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. Труды Геофизического Института № 19 -146-
- 9- Молоденский, М.С. 1961. Теория нутации и суточных земных приливов. Земные приливы и нутация Земли, Издательство АН СССР, Москва.
- 10- Перцев, Б.П. 1967. Оценка влияния морских приливов на земные... Земные приливы и внутреннее строение Земли. Наука, Москва.

Table 1.

Model	k_2	h_2	l_2				f
M GS	0.306	0.614	0.091	1.155	0.692		0.455
M J	0.301	0.613	0.086	1.162	0.688		0.473
M G	0.301	0.607	0.088	1.156	0.694		0.457
AS GS	0.312	0.623	0.088	1.155	0.689		0.479
A J	0.306	0.618	0.085	1.159	0.688		0.484
A G	0.306	0.618	0.085	1.159	0.688		0.484
A GS	0.311	0.622	0.089	1.156	0.689		0.473
AS J	0.307	0.618	0.084	1.158	0.689		0.488
AS G	0.307	0.618	0.085	1.158	0.689		0.484
B J	0.312	0.631	0.090	1.163	0.681		0.481
B G	0.313	0.631	0.090	1.162	0.682		0.481
B GS	0.317	0.635	0.094	1.160	0.682		0.471

- M - Molodensky model [2]
- A - Bullen A model
- B - Bullen B model
- J - velocities after Jeffreys
- G - velocities after Gutenberg
- S - model or velocities smoothed by least squares method

Table 2

Station	Correlation factor	Regression equation /x in mbars y in mm-s/	$B = \left \frac{N-2}{2} \ln \left[\frac{1+\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}} \right] \right > Z_{\alpha/2}$ $\alpha = 2\%$
Kunadacs	0.99	$y = 1.888 + 1.456 x$	9.47 > 2.58
Szarvas	0.99	$y = 1.852 + 1.368 x$	10.11 > 2.58

Table 3

Station	K_1/O_1	M_2/O_1	K_1/M_2
Kunadacs	1.4	1.0	1.3
Szarvas	1.2	1.0	1.2
Theoretical values	1.4	1.1	1.3

Table 4

Station	O_1	K_1	M_2	$O_1 - K_1$	$O_1 - M_2$
Kunadacs	0.536	0.517	0.475	0.019	0.061
Szarvas	0.531	0.447	0.473	0.084	0.058