MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N° 53

15 mars 1969

Association Internationale de Géodésie

Commission Permanente des Marées Terrestres

Editeur Prof. Paul MELCHIOR
Observatoire Royal de Belgique
3. Avenue Circulaire
Bruxelles 18

Bulletin d'Informations des Marées Terrestres N° 53

Table des Matières

En outre, cette théorie propose un modèle en meilleur accord avec les résultats connus concernant la constitution interne du globe terrestre.

Les indications bibliographiques sont mentionnées dans le texte sous le nom de l'auteur mais la date de publication et les autres éléments bibliographiques sont indiqués à la fin de travail, par ordre alphabétique des auteurs cités.

La réalisation du travail présenté fut facilité grâce à une bourse d'étude du Pays, attribuée par l'Institut de Haute Culture.

Au Professeur Docteur V.H. de Lemos, j'adresse mes remerciements pour les conseils et les facilités accordées durant la réalisation de ce travail.

LISBONNE, Juillet 1956.

1. Préliminaires.

Les observations astronomiques, montrant que les latitudes terrestres subissent des variations dans le temps, avaient été obtenues au siècle passé mais la détermination de la périodicité doit son origine à de nombreuses recherches, Chandler ayant été le premier savant qui parvint à atteindre les résultats les plus satisfaisants à la fin du siècle passé, tout en obtenant cependant pour la période des variations de latitude une valeur différente de la valeur calculée théoriquement.

Une explication qualitative de la raison pour laquelle la période déterminée par Chandler était supérieure à la valeur prévue théoriquement, basée sur la connaissance de ce que la Terre n'était pas parfaitement rigide mais possédait une certaine élasticité, fut donnée par S.NEWCOMB (1892) peu de temps après les remarquables recherches de Chandler.

Cependant, en raison du manque de connaissances concernant la constitution interne de la Terre, il ne fut pas possible de déterminer quantitativement l'influence de l'élasticité dans l'allongement de la période de variation de latitude.

Outre l'ignorance de la constitution intérieure de la Terre, la résolution des équations différentielles qui représentent le mouvement, offre également des difficultés, de sorte que c'est seulement récemment qu'il a été possible de déterminer les solutions quantitatives de ce problème.

La détermination de la période de variation des latitudes qui, comme cela se vérifiera, correspond à l'oscillation libre du système, est liée à la détermination des amplitudes des nutations qui s'obtiennent en considérant les oscillations forcées du système.

Les nutations qui présentent le plus d'intérêt sont : la nutation dont la période est approximativement égale à 19 ans (représentée par la valeur de la constante de nutation en obliquité), la nutation dont la période est égale à 2 semaines et finalement la nutation semi-annuelle. Ce sont ces nutations qui présentent les plus fortes amplitudes et qui, pour cela, pourront être les plus affectées par la constitution interne de la Terre adoptée dans nos calculs.

En particulier, la différence existant entre la valeur calculée et la valeur observée de la constante de nutation pourra être expliquée par le choix d'un modèle terrestre en meilleur accord avec les connaissances actuelles de la constitution interne de la Terre.

2. Importance du modèle choisi pour la constitution interne de la Terre

Les modèles adoptés pour représenter la constitution de l'intérieur de la Terre se sont modifiés successivement à mesure que les connaissances concernant les conditions physiques à l'intérieur de la Terre ont progressé : ainsi pouvons-nous signaler les modèles simples, conçus au temps de Lord KELVIN qui supposait que la Terre était constituée d'une croûte de petite épaisseur et d'un noyau liquide, jusqu'aux modèles actuels dans lesquels on prend en considération les variations de la densité et des différentes constantes en fonction de la profondeur.

Une caractéristique de presque tous les modèles consiste à supposer que la Terre est sphérique parce que cette hypothèse facilite l'intégration des équations différentielles considérées dans lesquelles on ne peut qu'utiliser les fonctions sphériques.

Il existe d'autres modèles qui considèrent la Terre comme un élipsoïde de révolution, mais les calculs résultant de la considération de fonctions qui ne sont pas sphériques, sont beaucoup plus compliqués.

Les modèles terrestres, du type WIECHERT, supposent que la Terre est sphérique, constituée par un noyau de densité uniforme, entouré d'une enveloppe de densité uniforme également, la densité du noyau étant supérieure à la densité de l'enveloppe.

Les désavantages de ces modèles résultent de ce qu'ils ne tiennent pas compte des paramètres variables et du fait, en outre, qu'ils considèrent la densité comme uniforme tant dans l'enveloppe que dans le noyau.

Ces modèles, parmi tant d'autres, ont été largement utilisés en raison des simplifications qu'ils introduisent dans nos calculs.

Certaines modifications des modèles de Wiechert prennent en considération quelques paramètres élastiques mais en supposant qu'ils sont uniformes.

On a aussi envisagé la possibilité de modèles terrestres dans lesquels la densité et les paramètres élastiques varient avec la distance au centre de la Terre, suivant des expressions passablement compliquées.

Ils permettent en tous cas de déterminer les nombres h et k de la marée terrestre. Le désavantage de ces modèles réside dans le fait que les fonctions qui traduisent la variation de la densité et des paramètres élastiques ne représentent pas convenablement les variations connues de la densité et de l'élasticité. La connaissance actuelle de la variation de densité et des paramètres élastique dans l'intérieur de la Terre, avec une précision plus satisfaisante, a été obtenue à partir de données fournies par la séismologie, grâce aux recherches effectuées par K.E. BULLEN (1953).

Utilisant un modèle de l'intérieur de la Terre, (basé sur les valeurs obtenues par Bullen) formé d'un noyau liquide et d'une enveloppe solide, H. TAKEUCHI (1950) parvint à déterminer théoriquement les valeurs satisfaisantes pour les nombres h, k et l, caractéristiques de la marée de la partie solide de la Terre.

3. Caractéristiques du modèle terrestre adopté dans cette recherche.

Les recherches faites antérieurement sur la période de variation des latitudes et la constante de nutation, ont montré l'importance non seulement de l'existence d'un noyau liquide, noyau dont le module de rigidité μ est égal à 0, mais aussi de la considération de l'élasticité terrestre; parmi les recherches plus récentes qui justifient ce point de vue, on doit mentionner celles de H. JEFFREYS (1949 - 1950).

De cette façon, on considère pour modèle de la constitution interne de la Terre un modèle formé par un noyau liquide entouré d'une enveloppe solide, dans lequel la densité et les constantes élastiques sont fonction du rayon de la Terre. On considère la Terre comme un sphéroïde de révolution, les dimensions de l'enveloppe étant définies par les valeurs : $1 \geqslant \xi \geqslant 0,5447$ et celles du noyau par les valeurs : $0,5447 \geqslant \xi \geqslant 0$, posant $\xi = \frac{r}{a}$ où a est le rayon moyen de la surface extérieure de la Terre et r la distance au centre de la Terre.

On adopte pour les valeurs de la densité et des constantes élastiques dans l'enveloppe, les valeurs correspondantes du modèle terrestre désigné par Takeuchi (1950) comme modèle 2.

La justification de l'adoption des valeurs employées par Takeuchi, réside dans le fait qu'on utilise la théorie relative à l'enveloppe développée par cet auteur, en ce sens que les déplacements élastiques dans l'enveloppe peuvent être considérés comme obtenus par la solution statique, car les périodes libres du système sont beaucoup plus courtes.

La densité du noyau liquide sera donnée par l'équation suivante :

$$\rho_o = 13{,}485 \frac{\sin q\xi_1}{q\xi_1} \qquad [3,1]$$

où $q = 1{,}50$ est une constante et $\xi_1 = \frac{r}{a_1}$ a_1 étant le rayon moyen du noyau.

Les valeurs de la masse et du moment d'inertie moyen du noyau, obtenues à partir de cette équation de densité, sont en accord avec les valeurs déduites des recherches de K.E.Bullen.

Vu les dimensions du noyau par rapport aux dimensions de la Terre et vu le peu de précision des données relatives à la densité dans la partie du noyau voisine du centre de la Terre, il n'y a pas besoin d'adopter une répartition de la densité identique à celle obtenue par Bullen, dès lors que les valeurs obtenues pour la masse et pour le moment d'inertie moyen, concordent avec les valeurs déterminées par Bullen.

En outre, l'adoption d'une loi de densité, du type indiqué ci-dessus, facilite les calculs.

Supposons que la Terre se trouve dans un état tel que la tension initiale que l'on considère comme étant une pression hydrostatique, équilibre le géo-potentiel de la Terre au stade initial, on a :

$$\frac{\partial p_o}{\partial x_i} = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad [3,2]$$

le géo-potentiel étant

$$\psi = U_o + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})$$

où ω représente la vitesse angulaire de rotation de la Terre, et ρ_o, p_o et U_o représentent la densité, la pression hydrostatique et le potentiel d'attraction newtonienne au point de coordonnées x_i dans l'état initial.

On considère que la tension terrestre, perturbée par rapport à sa position initiale, se compose de deux parties, l'une étant la tension initiale et l'autre la tension additionnelle. On considère que la tension additionnelle se rapporte à une déformation obéissant à la loi de HOOKE.

4. Expression des déplacements.

Les expressions adoptées pour les déplacements, dans l'enveloppe et dans le noyau, sont conditionnées par le modèle terrestre choisi.

Le système de référence adopté est tel que l'axe des ZZ est considéré fixe dans une direction déterminée, tandis que les axes des XX et des YY tournent autour de l'axe des ZZ avec une vitesse angulaire constante ω, égale à la vitesse angulaire de la rotation de la Terre.

On utilise dans cette recherche un système des variables de LAGRANGE. Désignant par x_i les coordonnées d'une particule dans l'état initial de la Terre, on considère que cette particule est déplacée de manière qu'elle arrive à occuper la position $x_i + u_i'$ (u_i' représentant un déplacement donné à la particule) et ensuite grâce à une rotation dont les composantes sont (l, m, n) elle prend la position finale ξ_i.

On suppose que les déplacements indiqués sont des quantités du premier ordre, dans toutes les considérations qui seront faites, de sorte que les déformations du système seront toujours considérées comme de petites déformations. Il en résultera donc :

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1\left(1-\frac{1}{2}l^2\right)+u_1'+l\,(x_3+u_3')-\frac{1}{2}l\,m\,x_2 \\
\xi_2 &= x_2\left(1-\frac{1}{2}m^2\right)+u_2'+m\,(x_3+u_3')-\frac{1}{2}l\,m\,x_1 \\
\xi_3 &= x_3\left(1-\frac{1}{2}l^2-\frac{1}{2}m^2\right)+u_3'-l\,(x_1+u_1')-m\,(x_2+u_2')
\end{aligned} \qquad [4,\ 1]$$

Dans ces équations ne figurent pas les termes contenant la composante n de la rotation de la Terre parce que ces termes, qui sont d'ailleurs d'ordre 2, montrent simplement que le mouvement autour de l'axe des ZZ a une vitesse angulaire constante et n'ont pas d'intérêt pour la solution des équations de LAGRANGE concernant le mouvement du système.

Dans les expressions [4,1] figurent quelques termes d'ordre 2, susceptibles d'être nécessaires pour le calcul de l'énergie cinétique du système.

En considérant seulement les termes du 1er ordre, les expressions [4,1] peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1+u_1'+l\,x_3 = x_1+u_1 \\
\xi_2 &= x_2+u_2'+m\,x_3 = x_2+u_2 \\
\xi_3 &= x_3+u_3'-l\,x_1-m\,x_2 = x_3+u_3
\end{aligned} \qquad \therefore\ \xi_i = x_i+u_i$$

En désignant par

$$\begin{aligned}
u_{\omega 1} &= l\,x_3 \\
u_{\omega 2} &= m\,x_3 \\
u_{\omega 3} &= -\,l\,x_1 - m\,x_2
\end{aligned}$$

on peut écrire $\xi_i = x_i + u_i' + u_{\omega i}$ et $u_i = u_i' + u_{\omega i}$, ces relations conviendront toujours lorsqu'il est seulement nécessaire de considérer les termes du 1er ordre.

Les expressions adoptées pour les déplacements u_i' dans l'enveloppe sont :

$$u_i' = F(\xi)\frac{\partial W_2}{\partial x_i} + \frac{G(\xi)}{a^2} x_i W_2 \qquad [4, 2]$$

où $F(\xi)$ et $G(\xi)$ représentent des fonctions de ξ et W_2 représente une fonction sphérique du 2ème ordre.

Dans notre recherche, les fonctions sphériques d'ordre 2 intéressantes à considérer sont $x_1\, x_3$ et $x_2\, x_3$ (Jeffreys, 1949, page 674).

Les expressions [4,2] sont aussi en accord avec les expressions des déplacements relatifs à l'enveloppe, adoptés dans la solution statique de TAKEUCHI.

Les expressions adoptées pour les déplacements u_i' dans le noyau sont :

$$\begin{aligned}
u_1' &= -\frac{1}{2} l_1^2 x_1 - \frac{1}{2} l_1 m_1 x_2 + \frac{a}{c} l_1 x_3 \\
u_2' &= -\frac{1}{2} l_1 m_1 x_1 - \frac{1}{2} m_1^2 x_2 + \frac{a}{c} m_1 x_3 \qquad [4, 3] \\
u_3' &= -\frac{c}{a}(l_1 + l_0) x_1 - \frac{c}{a}(m_1 + m_0) x_2 + \left(-\frac{1}{2} l_1^2 - \frac{1}{2} m_1^2\right) x_3
\end{aligned}$$

où (l_1, m_1) représente une distorsion qui ne donne pas naissance à quelconque déplacement normal à la surface de l'enveloppe.

Des expressions [4,2] des déplacements dans l'enveloppe, on peut déduire :

1) l'expression de la dilatation cubique

$$\theta = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = [2F'(\xi) + \xi^2 G'(\xi) + 5\xi G(\xi)] \frac{W_2}{a^2 \xi}$$

où $F'(\xi)$ et $G'(\xi)$ représentent les dérivées de $F(\xi)$ et $G(\xi)$ par rapport à ξ.

2) l'expression du déplacement normal.

$$d_n' = l_i u_i' = \frac{2F(\xi) + \xi^2 G(\xi)}{r} W_2 = \frac{q(\xi)}{r} W_2$$

l_i étant les cosinus directeurs de la normale et $q(\xi)$ un nombre dans le cas où l'on considère un harmonique sphérique d'ordre 2.

L'expression du déplacement normal dans le noyau peut se déduire des expressions [4,3] des déplacements dans le noyau :

$$d_n' = l_i u_i' = -l_0 \frac{x_1 x_3}{r} - m_0 \frac{x_2 x_3}{r}$$

5. Expressions du potentiel.

Il est nécessaire de calculer l'expression du travail effectué par le système, afin d'écrire les équations de LAGRANGE du mouvement.
Pour cela, il est utile d'établir les expressions des différents potentiels qui interviennent dans le système.

En fonction de l'attraction newtonienne de la Lune (ou du Soleil) sur la Terre, et de laquelle résulte l'existence des nutations, il y a lieu de considérer un champ de forces dont le potentiel sera représenté par :

$$U_1 = c_1 x_1 x_3 + c_2 x_2 x_3 \qquad [5,1]$$

le travail produit par ces forces étant désigné par W_1.
On peut représenter le potentiel U_1 par l'expression $U_1 = c W_2$, en utilisant la convention que $c = c_1$ ou c_2 lorsque l'harmonique sphérique d'ordre 2 $W_2 = x_1 x_3$ ou $x_2 x_3$ respectivement.

L'attraction newtonienne de la Terre, considérée à l'état initial, sans encore avoir été perturbée, crée un champ de forces dont le potentiel sera désigné par U_o. Comme on considère la Terre animée d'un mouvement de rotation, il y a lieu de considérer le géopotentiel défini par :

$$\Psi = \frac{1}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + U_0 = \Psi_0 + U_0$$

ψ_o représentant la part due au mouvement de rotation.

Il y a lieu de considérer également le potentiel résultant des déplacements internes et qu'on désignera par U_2. On suppose que

$$U_1 + U_2 = K = K(\xi)\, c W_2$$

on représente par K le potentiel résultant de l'action des corps extérieurs et des déplacements internes qui sont occasionnés en partie par la densité additionnelle $-\left(\rho_0 \theta + d_n \frac{d\rho_0}{dr}\right)$.

Pour calculer la valeur du potentiel U_2 il y a lieu de connaître en premier lieu la valeur du potentiel K; on désigne par K_1 la valeur de ce potentiel dans l'enveloppe et par K_2 la valeur du même potentiel dans le noyau. A la surface de séparation entre l'enveloppe et le noyau, à une distance du centre $\xi = a$, nous aurons $K_1(a) = K_2(a)$.

On désigne par K_3 le potentiel dans le noyau, résultant de l'action des corps extérieurs et des déplacements internes du noyau. On peut calculer ce potentiel à partir de l'équation de POISSON

$$\Delta K_3 = 4\pi f d_n \frac{d\rho_0}{dr}$$

dans le noyau $\theta = 0$.

où f représente la constante de gravitation universelle et ΔK_3 le laplacien de K_3. De cette façon, il est possible de calculer la valeur du potentiel

$$K_2 = \{ K_3(\xi) + [K_1(\alpha) - K_3(\alpha)] \} \, c \, W_2$$

$K_1(\alpha)$-$K_3(\alpha)$ étant la valeur du potentiel, dans le noyau, dû aux déplacements internes dans l'enveloppe.

Représentant par U_{2n} la valeur du potentiel des déplacements internes dans le noyau, on a

$$U_{2n} = \{ K_3(\xi) + [K_1(\alpha) - K_3(\alpha) - 1] \} \, c \, W_2$$

6. Intégration de l'équation de Poisson.

En supposant que $K_3 = K_3(\xi_1)\, cW_2$. ξ_1 étant la variable indépendante et W_2 un harmonique sphérique d'ordre 2, on rend plus facile la résolution de l'équation de Poisson.

$$\Delta K_3 = 4\pi f d_n \frac{d\rho_0}{dr}$$

cette équation étant équivalente à :

$$\frac{d^2 K_3(\xi_1)}{d\xi_1^2} + \frac{6}{\xi_1} \cdot \frac{dK_3(\xi_1)}{d\xi_1} = \frac{4\pi f}{c} d_n \frac{d\rho_0}{dr} \qquad [6,\ 1]$$

ρ_0 est en [3, 1]

La solution de cette équation qui intéresse le problème, doit être satisfaisante à condition d'être finie quand $\xi_1 = 0$. Ceci étant, la valeur de K_3 devra être finie au centre de la Terre.

En tenant compte des expressions adoptées pour les déplacements à l'intérieur du noyau et de l'expression utilisée pour représenter la densité, l'équation [6,1] prend l'aspect :

$$D\left(\frac{d^2 K_3(\xi_1)}{d\xi_1^2} + \frac{6}{\xi_1} \cdot \frac{dK_3(\xi_1)}{d\xi_1}\right) = q\,\frac{H_2}{\xi_1^2} \cos q\,\xi_1 - \frac{H_2}{\xi_1^2}\,\frac{\operatorname{sen} q\,\xi_1}{\xi_1}$$

$$\text{où} \quad D = \frac{c}{4\pi f} \quad \text{e} \quad H_2 = -\frac{13{,}4^{\circ}5}{q}\,(l_0\,, m_0)$$

En écrivant

$$P = \frac{dK_3(\xi_1)}{d\xi_1} \qquad Q = \frac{H_2}{\xi_1^2}\left(q \cos q\,\xi_1 - \frac{\operatorname{sen} q\,\xi_1}{\xi_1}\right)$$

l'equation présentera l'aspect suivant :

$$D\left(\frac{dP}{d\xi_1} + \frac{6}{\xi_1} P\right) = Q$$

et la solution sera :

$$D\,K_3(\xi_1) = c + \frac{c'}{5\,\xi_1^5} - \frac{q^3 H_2}{3\times 7} \cdot \frac{\xi_1^2}{2!} + \frac{q^5 H_2}{5 \times 9} \cdot \frac{\xi_1^4}{4!} - \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{q^{(2n+1)} H_2}{(2n+1)(2n+5)} \cdot \frac{\xi_1^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

En tenant compte de la condition de ce que $K_3(\xi_1)$ devra être fini pour $\xi_1 = 0$ c' devra être égal à 0:

$$D\,K_3(\xi_1) = \mathcal{C} - \frac{q^3 H_2}{3\times 7}\cdot\frac{\xi_1^2}{2\,!} + \frac{q^5 H_2}{5\times 9}\cdot\frac{\xi_1^4}{4\,!} - \dots \qquad [6,\ 2]$$

La dérivée sera :

$$D\,K_3'(\xi_1) = -\frac{q^3 H_2}{3\times 7}\,\xi_1 + \frac{q^5 H_2}{5\times 9}\cdot\frac{\xi_1^3}{3\,!} - \dots$$

Les valeurs à la surface du noyau peuvent se calculer à partir de l'expression [6,2]

$$\left(\frac{c_1}{4\pi f},\,\frac{c_2}{4\pi f}\right) K_3(1) = \mathcal{C} + 0{,}6620\,(l_0\,,\,m_0)$$

En désignant par $k = c_1 + i c_2$ et $\zeta_o = l_o + i\,m_o$, ces valeurs peuvent s'écrire en une seule expression

$$\frac{k}{4\pi f}\,K_3(1) = \mathcal{C}' + 0{,}6620\,\zeta_0$$

La valeur de la dérivée à la surface du noyau sera :

$$\frac{k}{4\pi f}\,K_3'(1) = 1{,}209\,\zeta_0 \qquad [6,\ 3]$$

7. Détermination des conditions aux limites

Les expressions employées pour les déplacements de même que le modèle adopté pour la constitution de l'intérieur de la Terre, conditionnent la forme des conditions aux limites. Dans la détermination des conditions aux limites, on néglige les produits des déformations élastiques par l'excentricité.

Une des conditions aux limites correspond à l'hypothèse que la tension tangentielle est nulle, tant à la surface extérieure de la Terre qu'à la surface qui limite le noyau. Cette condition se traduit par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} F'(1) + 2\,F(1) + G(1) &= 0 \\ \alpha\,F'(\alpha) + 2\,F(\alpha) + \alpha^2\,G(\alpha) &= 0 \end{aligned} \qquad [7,\ 1]$$

les valeurs 1 et α signifiant que les grandeurs se réfèrent respectivement à la surface extérieure de l'enveloppe ($\xi = 1$) et à la surface qui limite le noyau ($\xi = \alpha$).

Comme $q(\xi) = 2F(\xi) + \xi^2 G(\xi)$, et vu que le déplacement normal est continu à la surface du noyau, les expressions peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$F'(1) = -\,q(1)$$

$$F'(\alpha) = -\,\frac{q(\alpha)}{\alpha}$$

Il y a lieu également de considérer les conditions aux limites relatives au potentiel dû aux déplacements dans l'intérieur du corps.

Ce sera :

$$U_2 = [K_1(\xi) - 1]\, c\, W_2 \qquad \text{pour} \quad \xi < 1$$

$$U_2 = [K_1(1) - 1]\left(\frac{a}{r}\right)^5 c\, W_2 \quad \text{pour} \quad \xi > 1$$

Sur la surface extérieure de l'enveloppe, il faut que

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=1+} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=1-} = -\, 4\,\pi f \rho_0(1)\, q(1)\, W_2$$

ou bien que

$$c\,\{\, 5[K_1(1) - 1] + K_1'(1)\,\} = 4\,\pi f \rho_0(1)\, q(1)$$

comme $D = \dfrac{c}{4\,\pi f}$ on obtient

$$K_1'(1) + 5\, K_1(1) = 5 + \rho_0(1)\,\frac{q(1)}{D}$$

A la surface qui limite le noyau, on aura d'une manière analogue

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\alpha+} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\alpha-} = -\, 4\,\pi f [\rho_0(\alpha-) - \rho_0(\alpha+)]\,\frac{q(\alpha)}{a\alpha}\, W_2$$

comme

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\alpha+} = K_1'(\alpha)\,\frac{c\, W_2}{a} \qquad \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\alpha-} = K_3'(\alpha)\,\frac{c\, W_2}{a}$$

on obtient

$$c\,[K_1'(\alpha) - K_3'(\alpha)] = 4\,\pi f [\rho_0(\alpha+) - \rho_0(\alpha-)]\,\frac{q(\alpha)}{\alpha}$$

ou finalement

$$K_1'(\alpha) = K_3'(\alpha) + [\rho_0(\alpha+) - \rho_0(\alpha-)]\,\frac{q(\alpha)}{\alpha D}$$

Une autre condition à la limite correspond au fait que la vitesse normale doit être continue à la surface qui limite le noyau. On désigne par $\nu(\alpha+)$ la vitesse normale à la surface qui limite le noyau et du côté de l'enveloppe, ce sera

$$v(\alpha+) = \frac{x_1 x_3}{a_1}\left(\dot{s}_1 + \dot{l}\;\frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2}\right) + \frac{x_2 x_3}{a_1}\left(\dot{s}_2 + \dot{m}\;\frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2}\right)$$

où $(a_1 c_1)$ sont les demi-axes du sphéroïde, relatif au noyau, et compte tenu de ce que

$$q(\alpha)\, W_2 = s_1 x_1 x_3 + s_2 x_2 x_3,$$

$\nu(a-)$ étant la vitesse normale du côté du noyau, on aura :

$$v(\alpha -) = \frac{x_1 x_3}{a_1}\left(\frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2}\dot{l} + \dot{l}_0\right) + \frac{x_2 x_3}{a_1}\left(\frac{c_1^2 - a_1^2}{c_1^2}\dot{m} + \dot{m}_0\right)$$

Comme il faudra que $\nu(a+)$ soit égal à $\nu(a-)$, on vérifie qu'il faut remplacer la rotation (l,m) du noyau par :

$$\begin{aligned} l'' &= l + \frac{c_1^2}{c_1^2 - a_1^2}(s_1 - l_0) \\ m'' &= m + \frac{c_1^2}{c_1^2 - a_1^2}(s_2 - m_0) \end{aligned} \qquad [7,\ 2]$$

On peut condenser ces deux expressions en une expression unique, en introduisant les variables

$$\zeta'' = l'' + im'' \qquad \zeta = l + im \qquad \psi = s_1 + is_2 \qquad \zeta_0 = l_0 + im_0$$

on obtient

$$\zeta'' = \zeta + \frac{c_1^2}{c_1^2 - a_1^2}(\psi - \zeta_0) \qquad [7,\ 3]$$

8. Adaptation de la solution de Takeuchi relative à l'enveloppe.

Conformément à ce qu'on a dit antérieurement au § 3, on utilise pour l'enveloppe, la solution statique obtenue dans la recherche de H. Takeuchi. Cette solution est obtenue à partir d'un système d'équations du mouvement, constitué de trois équations différentielles du 2ème ordre, dont l'une résulte de l'équation de Poisson, équations qui concernent les variables dépendantes F_T, G_T et K_T (l'indice T signifie que les grandeurs respectives sont obtenues à partir d'une théorie développée par Takeuchi, afin qu'il n'y ait pas de confusion avec les valeurs adoptées dans ce présent travail) ; on vérifie toutefois que ces variables ne sont plus convenables pour le problème qu'on doit résoudre.

Il sera plus utile de chercher à mettre en relation les variables utilisées pour les déplacements et les conditions aux limites de la théorie de Takeuchi avec les autres expressions obtenues et qui sont :

1) à la surface de l'enveloppe

$$\begin{aligned} F'(1) + 2F(1) + G(1) &= 0 \\ 2F(1) + G(1) &= q(1) \\ K_1'(1) + 5K_1(1) &= 5 + \rho_0(1)\frac{q(1)}{D} \end{aligned} \qquad [8,\ 1]$$

2) à la surface du noyau

$$\alpha F'(\alpha) + 2F(\alpha) + \alpha^2 G(\alpha) = 0$$
$$2F(\alpha) + \alpha^2 G(\alpha) = q(\alpha) \qquad [8,\ 2]$$
$$K_1'(\alpha) = K_3'(\alpha) + [\rho_0(\alpha +) - \rho_0(\alpha -)]\frac{q(\alpha)}{\alpha D}$$

A partir de ces expressions, on peut déduire les correspondances suivantes

$$\begin{array}{cccc} F_T(\xi) & G_T(\xi) & q_T(\xi) & \frac{1}{D}K_T(\xi) \\ F(\xi) & G(\xi) & q(\xi) & K(\xi) \end{array}$$

On vérifie ainsi que les variables adoptées par Takeuchi ne présentent pas toutes les mêmes dimensions. En outre, pour qu'elles soient équivalentes aux variables adoptées dans la présente recherche, il sera utile de les multiplier par le facteur ca^2.

Le modèle adopté pour l'enveloppe est le modèle désigné dans la théorie de Takeuchi, par le modèle terrestre 2. En substituant dans les équations [8,1] et [8,2] les valeurs de α = 0,5447, $\rho_o(1)$ = 3,0 g/cm^3, $\rho_o(\alpha+)$ = 5.53 g/cm^3 correspondant au modèle adopté par Takeuchi, et encore la valeur de $\rho_o(\alpha-)$ = 8,97 g/cm^3 obtenue à partir de l'expression de la densité [3,1] adoptée pour le noyau, on peut écrire les équations citées, sous l'aspect suivant :

1) à la surface de l'enveloppe

$$F'(1) = -q(1)$$
$$2F(1) + G(1) = q(1)$$
$$D[K_1'(1) + 5K_1(1)] = 5D + \rho_0(1)q(1)$$

2) à la surface du noyau

$$0{,}5447\, F'(\alpha) = -q(\alpha)$$
$$2F(\alpha) + 0{,}2967\, G(\alpha) = q(\alpha)$$
$$D K_1'(\alpha) = D K_3'(\alpha) - 6{,}315\, q(\alpha).$$

A partir de ces expressions, on constate qu'on peut exprimer la solution obtenue par Takeuchi, en fonction des variables q(1), q(α), D et $K_3(\alpha)$. Dans le travail cité de Takeuchi ne figurent cependant pas les valeurs correspondant à toutes les valeurs intermédiaires de ξ utilisées ; ces valeurs ont été d'ailleurs aimablement communiquées par l'auteur. De cette façon, il a été possible d'exprimer les valeurs, à la surface de l'enveloppe et à la surface du noyau, en fonction des variables adoptées dans la présente recherche. On a obtenu les résultats suivants :

1) à la surface de l'enveloppe

$$
\begin{aligned}
F'(1)&=-q(1)\\
G'(1)&=3{,}505\ q(1)-2{,}075\ q(\alpha)-0{,}003234\ DK_3'(\alpha)-0{,}1477\ D\\
DK_1'(1)&=1{,}081\ q(1)-0{,}7777\ q(\alpha)+0{,}02872\ DK_3'(\alpha)-0{,}2241\ D\\
F(1)&=0{,}1219\,q(1)-0{,}06215\,q(\alpha)-0{,}0005845\,DK_3'(\alpha)+0{,}04244\,D\\
G(1)&=0{,}7562\,q(1)+0{,}1243\ q(\alpha)+0{,}001171\ DK_3'(\alpha)-0{,}08492\,D\\
DK_1(1)&=0{,}3838\,q(1)+0{,}1555\ q(\alpha)-0{,}00575\ DK_3'(\alpha)+1{,}045\ D
\end{aligned}
$$

2) à la surface du noyau

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha)&=-1{,}836\ q(\alpha)\\
G'(\alpha)&=24{,}667\ q(1)-10{,}247\ q(\alpha)-0{,}0002401\ DK_3'(\alpha)+1{,}839\ D\\
DK_1'(\alpha)&=DK_3'(\alpha)-6{,}315\ q(\alpha)\\
F(\alpha)&=0{,}3194\ q(1)+0{,}1901\ q(\alpha)-0{,}0006165\ DK_3'(\alpha)+0{,}03546\,D\\
G(\alpha)&=-2{,}1528\ q(1)+2{,}089\ q(\alpha)+0{,}004155\ DK_3'(\alpha)-0{,}2390\,D\\
DK_1(\alpha)&=0{,}007872\ q(1)+1{,}056\ q(\alpha)-0{,}1110\ DK_3'(\alpha)+1{,}102\ D
\end{aligned}
$$

Les valeurs des coefficients de D, q(1), q(α) et $DK'_3(\alpha)$, relatifs à $Y(\xi) = [F'(\xi), G'(\xi), DK'_1(\xi), F(\xi), G(\xi), DK_1(\xi)]$ sont données par les matrices suivantes

$\xi=\alpha=0{,}5447$

$$
Y(0{,}5447)=\begin{bmatrix}
0{,}000 & 0{,}000 & -1{,}836 & 0{,}000\\
1{,}839 & 24{,}667 & -10{,}247 & -0{,}000240\\
0{,}000 & 0{,}000 & -6{,}315 & 1{,}000\\
0{,}03546 & 0{,}3194 & 0{,}1901 & -0{,}000617\\
-0{,}2390 & -2{,}153 & 2{,}089 & 0{,}004155\\
1{,}102 & 0{,}00787 & 1{,}056 & -0{,}1110
\end{bmatrix}
$$

$\xi=0{,}5918$

$$
Y(0{,}5918)=\begin{bmatrix}
0{,}01431 & -0{,}06861 & -1{,}297 & 0{,}000182\\
1{,}056 & 15{,}200 & -8{,}713 & -0{,}009271\\
-0{,}04246 & 0{,}4859 & -4{,}328 & 0{,}6112\\
0{,}03573 & 0{,}3171 & 0{,}1184 & -0{,}000610\\
-0{,}1730 & -1{,}239 & 1{,}638 & 0{,}003885\\
1{,}101 & 0{,}02026 & 0{,}8099 & -0{,}07397
\end{bmatrix} Y(\alpha)
$$

$\xi=0{,}6389$

$$
Y(0{,}6389)=\begin{bmatrix}
0{,}01424 & -0{,}2113 & -0{,}8942 & 0{,}000294\\
0{,}6314 & 9{,}830 & -6{,}852 & -0{,}01056\\
-0{,}07319 & 0{,}7227 & -3{,}073 & 0{,}3884\\
0{,}03633 & 0{,}3096 & 0{,}06848 & -0{,}000600\\
-0{,}1343 & -0{,}6621 & 1{,}272 & 0{,}003396\\
1{,}098 & 0{,}04895 & 0{,}6381 & -0{,}05093
\end{bmatrix} Y(\alpha)
$$

$\xi=0{,}6860$

$$
Y(0{,}6860)=\begin{bmatrix}
0{,}01637 & -0{,}2967 & -0{,}6621 & 0{,}000236\\
0{,}3897 & 6{,}614 & -5{,}236 & -0{,}009575\\
-0{,}09751 & 0{,}8475 & -2{,}246 & 0{,}2553\\
0{,}03705 & 0{,}2976 & 0{,}03221 & -0{,}000583\\
-0{,}1109 & -0{,}2817 & 0{,}9889 & 0{,}002922\\
1{,}0942 & 0{,}08592 & 0{,}5144 & -0{,}03605
\end{bmatrix} Y(\alpha)
$$

$\xi = 0{,}7331$

$$Y(0{,}7331) = \begin{bmatrix} 0{,}01759 & -0{,}3714 & -0{,}5041 & 0{,}000156 \\ 0{,}2492 & 4{,}610 & -4{,}002 & -0{,}008207 \\ -0{,}1173 & 0{,}9220 & -1{,}565 & 0{,}1728 \\ 0{,}03785 & 0{,}2817 & 0{,}00504 & -0{,}000575 \\ -0{,}09618 & -0{,}02156 & 0{,}7732 & 0{,}002509 \\ 1{,}089 & 0{,}1276 & 0{,}4228 & -0{,}02614 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}7802$

$$Y(0{,}7802) = \begin{bmatrix} 0{,}01875 & -0{,}4369 & -0{,}3947 & 0{,}000061 \\ 0{,}1609 & 3{,}370 & -3{,}096 & -0{,}006795 \\ -0{,}1337 & 0{,}9724 & -1{,}298 & 0{,}1201 \\ 0{,}03869 & 0{,}2626 & -0{,}01593 & -0{,}000569 \\ -0{,}08666 & 0{,}1633 & 0{,}6073 & 0{,}002156 \\ 1{,}083 & 0{,}1721 & 0{,}3532 & -0{,}01934 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}8273$

$$Y(0{,}8273) = \begin{bmatrix} 0{,}01764 & -0{,}5135 & -0{,}3095 & -0{,}000023 \\ 0{,}09922 & 2{,}609 & -2{,}433 & -0{,}005509 \\ -0{,}1190 & 1{,}009 & -1{,}032 & 0{,}08539 \\ 0{,}03955 & 0{,}2397 & -0{,}03226 & -0{,}000569 \\ -0{,}08065 & 0{,}3022 & 0{,}4781 & 0{,}001864 \\ 1{,}076 & 0{,}2187 & 0{,}2989 & -0{,}01455 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}8744$

$$Y(0{,}8744) = \begin{bmatrix} 0{,}01689 & -0{,}5890 & -0{,}2382 & -0{,}000094 \\ 0{,}05117 & 2{,}163 & -2{,}003 & -0{,}004563 \\ -0{,}1643 & 1{,}037 & -0{,}8529 & 0{,}05327 \\ 0{,}04033 & 0{,}2134 & -0{,}04497 & -0{,}000573 \\ -0{,}07715 & 0{,}4126 & 0{,}3750 & 0{,}001633 \\ 1{,}069 & 0{,}2669 & 0{,}2549 & -0{,}01113 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}9215$ (abaixo)

$$Y(0{,}9215-) = \begin{bmatrix} 0{,}01644 & -0{,}6673 & -0{,}1741 & -0{,}000119 \\ 0{,}00248 & 2{,}105 & -1{,}807 & -0{,}003953 \\ -0{,}1798 & 1{,}087 & -0{,}7439 & 0{,}01587 \\ 0{,}04115 & 0{,}1841 & -0{,}05481 & -0{,}000578 \\ -0{,}07582 & 0{,}5109 & 0{,}2865 & 0{,}001438 \\ 1{,}061 & 0{,}3168 & 0{,}2176 & -0{,}008607 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}9215$ (acima)

$$Y(0{,}9215+) = \begin{bmatrix} 0{,}02770 & -0{,}6036 & -0{,}1832 & -0{,}000141 \\ -0{,}09752 & 2{,}949 & -2{,}154 & -0{,}003581 \\ -0{,}1901 & 0{,}6258 & -0{,}8208 & 0{,}01584 \\ 0{,}04115 & 0{,}1841 & -0{,}05481 & -0{,}000578 \\ -0{,}07582 & 0{,}5109 & 0{,}2865 & 0{,}001438 \\ 1{,}061 & 0{,}3168 & 0{,}2176 & -0{,}008607 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 0{,}9607$

$$Y(0{,}9607) = \begin{bmatrix} 0{,}01732 & -0{,}7880 & -0{,}09393 & -0{,}000089 \\ -0{,}1132 & 3{,}090 & -2{,}050 & -0{,}003359 \\ -0{,}2054 & 0{,}8565 & -0{,}7874 & 0{,}03609 \\ 0{,}01206 & 0{,}1568 & -0{,}06027 & -0{,}000583 \\ -0{,}07992 & 0{,}6285 & 0{,}2015 & 0{,}001303 \\ 1{,}053 & 0{,}3459 & 0{,}1861 & -0{,}007010 \end{bmatrix} Y(\alpha)$$

$\xi = 1,0000$

$$Y(1,0000) = \begin{bmatrix} 0,000 & -1,000 & 0,000 & 0,000 \\ -0,1477 & 3,505 & -2,075 & -0,003234 \\ -0,2241 & 1,081 & -0,7777 & 0,02872 \\ 0,01244 & 0,1219 & -0,06215 & 0,0005815 \\ -0,08492 & 0,7562 & 0,1243 & 0,001171 \\ 1,015 & 0,3838 & 0,1555 & -0,00575 \end{bmatrix} Y(z)$$

On constate ainsi que les valeurs adoptées pour ξ représentent des intervalles de 300 km, entre la surface du noyau et la surface de discontinuité correspondant à $\xi = 0,9215$. Entre $\xi = 0,9215$ et la surface de l'enveloppe, les intervalles sont de 250 km.

9. Résolution de l'expression analytique du travail.

Le travail dû à l'attraction newtonienne, pour une petite variation δu_i du déplacement u_i sera

$$\delta W = \int\int\int_V \rho_0 \left(\frac{\partial U_0}{\partial x_i} + u_k \frac{\partial^2 U_0}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \right) \delta u_i \, d v$$

on considère seulement dans cette expression les termes jusqu'au 2ème ordre et les dérivées sont calculées dans la position actuelle ; V se réfère au volume total occupé par la Terre.

Il convient de plus de considérer le géopotentiel Ψ, en additionnant au potentiel U_0 le terme Ψ_0, et de séparer le potentiel U_2, dû aux déplacements internes, en une partie U_{20} provenant de $u_{\omega i}$, et une autre partie U_2' provenant de u_i' ce qui donne $U_2 = U_{20} + U_2'$.
On aura donc :

$$\delta W = \int\int\int_V \rho_0 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + u_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{\partial (U_{20} + U_2')}{\partial x_i} \right] \delta u_i \, d v$$

L'expression du travail, dû à l'attraction newtonienne sera

$$W = \int\int\int_V \rho_0 \left[u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial (U_{20} + U_2')}{\partial x_i} \right] d v \qquad [9, 1]$$

Il est intéressant de déterminer maintenant l'expression du travail dû aux tensions.

Comme la tension initiale est une pression hydrostatique $-p_0$ et $\Delta_1 v$ étant l'augmentation de volume d'un élément du corps, le travail correspondant à cette augmentation de volume sera

$$W_p = \int\int\int_V p_0 \Delta_1 v \, d v$$

Considérant que :

$$\Delta_1 v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

en abandonnant les termes de l'ordre supérieur au 2ème ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} W_p &= \iiint_V p_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dv = \\ &= \iint_S p_0\left(l_i u_i + \frac{1}{2} l_i u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} l_k u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) ds - \\ &- \iiint_V \left[u_i \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] dv \end{aligned}$$

S désigne la surface qui limite le volume V.

Dans cette expression, l'intégrale de surface est nulle ; elle est nulle à la surface extérieure parce que $p_o = 0$: à la surface de discontinuité, qui limite le noyau, la pression initiale est constante et continue à travers la surface de discontinuité, l'intégrale de surface étant aussi nulle parce que sa valeur doit être égale, soit qu'on utilise les expressions des déplacements de l'enveloppe, soit celles du noyau, qui ont des signes contraires (on suppose que l'enveloppe et le noyau sont ajustés en tous les points).

De cette manière, on retiendra simplement

$$W_p = -\iiint_V \left[u_i \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] dv$$

Comme on suppose que la pression initiale est hydrostatique, en vérifiant la relation [3,2] on peut écrire :

$$\begin{aligned} W_p = \iiint_V \rho_0 \Big[&- u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \\ &+ \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big] dv. \end{aligned} \qquad [9,\ 2]$$

La tension additionnelle est déterminée par la loi de Hooke $\lambda\theta\delta_{ik} + 2\mu e_{ik}$, λ et μ étant les coefficients de Lamé, e_{ik} les composantes de déformation et δ_{ik} le symbole de Kronecker. Le travail correspondant sera :

$$W_e = -\frac{1}{2}\iiint_V (\lambda\,\theta\,\delta_{ik} + 2\,\mu\, e_{ik})\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dv \qquad [9,\ 3]$$

En additionnant les expressions [9,1], [9,2] et [9,3] on obtient :

$$
\begin{aligned}
W = \int\!\!\int\!\!\int_V \rho_0 \Big[& \frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial (U_{20} + U_2)}{\partial x_i} - \\
& - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Big] dv - \qquad [9,4] \\
& - \frac{1}{2} \int\!\!\int\!\!\int_V (\lambda \theta \delta_{ik} + 2 \mu e_{ik}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dv
\end{aligned}
$$

Il est possible de simplifier le premier terme de [9,4]. Pour ceci, on doit noter qu'on peut écrire

$$
U_{20} = - u_{\omega i} \frac{\partial U_0}{\partial x_i} = - u_{\omega i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + u_{\omega i} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_i}
$$

On obtient ainsi

$$
\begin{aligned}
& \int\!\!\int\!\!\int_V \rho_0 \Big[\frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial U_2'}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial U_{20}}{\partial x_i} - \\
& \quad - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Big] dv = \\
& = \int\!\!\int\!\!\int_V \rho_0 \Big[\frac{1}{2} u_i u_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial U_2'}{\partial x_i} + \\
& \quad + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(- u_{\omega k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + u_{\omega k} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k} \Big) - \\
& \quad - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Big] dv
\end{aligned}
$$

Cependant comme $u_k = u_{\omega k} + u_k'$ $\theta = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_k'}{\partial x_k}$ on aura :

$$
\begin{aligned}
& \int\!\!\int\!\!\int_V \rho_0 \Big[\frac{1}{2} u_i u_{\omega k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{2} u_i u_k' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \\
& + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial U_2'}{\partial x_i} - \frac{1}{2} u_i u_{\omega k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial u_{\omega k}}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \\
& + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial u_{\omega k}}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_i u_{\omega k} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_k} + \\
& + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\omega k}}{\partial x_i} \Big] dv =
\end{aligned}
$$

$$= \int\int\int_V \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} u_i \left[u'_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u_{\omega k}}{\partial x_i}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k} + u_{\omega k}\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x_i \partial x_k}\right] + u_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv =$$

$$= \int\int\int_V \rho_0 u_{\omega i} \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv +$$

$$+ \int\int\int_V \rho_0 u'_i \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv$$

examinant l'expression [5,1], on peut intégrer le terme U_1 dans la première partie de la dernière expression, obtenant

$$= (A - C)(c_1 l + c_2 m) + \frac{1}{2}\int\int\int_V \rho_0 u_{\omega i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right] dv +$$

$$+ \int\int\int_V \rho_0 u'_i \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv$$

où A et C représentent les moments d'inertie principaux de la Terre.
De cette manière, l'expression [9,4] aura l'aspect suivant :

$$W = (A - C)(c_1 l + c_2 m) + \frac{1}{2}\int\int\int_V \rho_0 u_{\omega i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right] dv +$$

$$+ \int\int\int_V \rho_0 u'_i \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \right.\right. \qquad [9,\ 5]$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\omega k}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv -$$

$$- \frac{1}{2}\int\int\int_V (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2\mu e'_{ik}) \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} dv$$

en désignant par θ' et e'_{ik} la dilatation cubique et les composantes de la déformation relatives aux déplacements μ'_i

Vu que les déplacements dans le noyau et dans l'enveloppe ont des expressions différentes, il convient de calculer séparément l'expression du travail pour le noyau et pour l'enveloppe.

A) Dans le noyau

Les termes de l'expression [9,5] contenant Ψ_o, correspondent à une partie d'énergie cinétique qui, comme on le vérifiera dans le § 14, n'est pas considérée actuellement.

Comme on a émis l'hypothèse que le noyau se trouve dans un état tel que $\mu = 0$, ce qui équivaut à être dans un état liquide, et considérant seulement les termes jusqu'au 2ème ordre, on aura

$$\int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}\right] + \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial U'_2}{\partial x_i}\right\} dv = -\frac{1}{2}\int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} dv + \qquad [9,6]$$
$$+ \int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2} u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_1 + \frac{1}{2} U'_2\right] dv$$

V_1 étant le volume du noyau limité par la surface S_1 de séparation entre le noyau et l'enveloppe. On peut écrire l'expression [9,6] sous la forme suivante

$$-\frac{1}{2}\int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} dv +$$
$$+ \int\int_{S_1} \rho_0 u'_i l_i \left[\frac{1}{2} u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_1 + \frac{1}{2} U'_2\right] ds -$$
$$- \int\int\int_{V_1}\left[\frac{1}{2} u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_1 + \frac{1}{2} U'_2\right] \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 u'_i)\, dv$$

toutefois $d'_n = l_i u'_i$, $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_k} = - l_k g$, g étant la gravité (considérée positive dans la direction où le rayon r diminue et $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 u'_i) = \dfrac{d\rho_0}{dr} d'_n$ en considérant seulement les termes du 1er ordre, donc :

$$= \frac{1}{2}\int\int\int_{V_1} \rho_0 g d'_n \theta' dv + \int\int_{S_1} \rho_0 d'_n \left[-\frac{1}{2} g d'_n + U_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U'_2 \right] ds - \int\int\int_{V_1}\left[-\frac{1}{2} d'_n g + U_1 + \frac{1}{2} U'_2\right] \frac{d\rho_0}{dr} d'_n dv$$

comme le 1er terme de cette expression est d'ordre supérieur au 2ème ordre, il ne sera pas pris en considération, retenant uniquement

$$\int\!\!\int_{S_1} \rho_0 \left(-\frac{1}{2} g\, d_n'^2 + U_1\, d_n' + \frac{1}{2}\, U_2'\, d_n'\right) ds\, -$$
$$- \int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \left(-\frac{1}{2} d_n' g + U_1 + \frac{1}{2}\, U_2'\right) \frac{d\rho_0}{dr} d_n'\, dv \qquad [9,7]$$

On peut aussi simplifier le second terme de l'expression [9,5] :

$$\frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \rho_0\, u_{\omega i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k'\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k} + \frac{\partial U_2'}{\partial x_i}\right] dv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \rho_0\, u_{\omega i}\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k} dv\, +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \rho_0\, u_{\omega i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k'\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_2'\right) dv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \rho_0\, u_{\omega i}\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_k} dv\, +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\!\!\int_{S_1} \rho_0\, u_{\omega i}\, l_i\left(u_k'\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_2'\right) ds\, -$$
$$- \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \left(u_k'\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U_2'\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0\, u_{\omega i})\, dv$$

cependant comme

$$l_i\, u_{\omega i} = d_{n\omega} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0\, u_{\omega i}) = \frac{d\rho_0}{dr} d_{n\omega} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = -l_k g \qquad [9,8]$$

on peut écrire :

$$= \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} \rho_0\, d_{n\omega}\, g\, 0'\, dv + \frac{1}{2}\int\!\!\int_{S_1} \rho_0\, d_{n\omega}(-d_n' g + U_2')\, ds\, -$$
$$- \frac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int_{V_1} (-d_n' g + U_2')\frac{d\rho_0}{dr} d_{n\omega}\, dv\,.$$

En vertu de ce qu'on considère le noyau comme étant un sphéroïde, les termes seront très petits parce que outre qu'ils sont de 2ème ordre, ils contiennent encore l'excentricité par l'intermédiaire du déplacement normal $d_{n\omega}$.

Le dernier terme de l'expression [9,5] sera d'ordre supérieur au 2ème ordre et de ce fait, on n'en tiendra pas compte.

B) Dans l'enveloppe

Par analogie avec ce qui se passe dans le noyau, les termes en Ψ_o de l'expression [9,5] seront considérés dans le § 13, où on définit l'expression de l'énergie cinétique de l'enveloppe.

On peut simplifier les deux derniers termes de l'expression [9,5] qui contiennent les déplacements u'_i, en examinant les équations d'équilibre d'un corps déformable. On peut écrire ces équations sous la forme suivante

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad [9,9]$$

U étant le potentiel de toutes les forces qui agissent sur le corps et p_{ik} la somme des tensions appliquées au corps. En accord avec les hypothèses adoptées, nous aurons :

$$U = \Psi + U_1 + U'_2 \qquad p_{ik} = p^0_{ik} + p'_{ik}$$

$p^0_{ik} = -\delta_{ik}\left(p_0 - u'_j \frac{\partial p_0}{\partial x_j}\right)$ étant la tension initiale, qu'on suppose être une pression hydrostatique et $p'_{ik} = \lambda\,\theta'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik}$ la tension additionnelle.

Comme la densité est déterminée par l'expression $\rho = \rho_0 - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 u'_k)$, on peut écrire les équations [9,9]

$$\rho_0 \frac{\partial (U_1 + U'_2)}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} u'_k + \rho_0 \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} +$$
$$+ \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k}\rho_0 u'_k + \frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda\,\theta'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik}) = 0 .$$

Laissant de côté les termes supérieurs au 2ème ordre, on obtient

$$\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\partial (U_1 + U'_2)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 u'_k)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \delta_{ik}\frac{\partial p_0}{\partial x_k} +$$
$$+ \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u'_j \frac{\partial p_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda\,\theta'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik}) = 0$$

en tenant compte de la relation [3,2] et faisant un changement convenable des indices

$$\left[\rho_0 - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 u'_k)\right]\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \frac{\partial (U_1 + U'_2)}{\partial x_i}\right) - \delta_{ik}\frac{\partial p_0}{\partial x_k} +$$
$$+ \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u'_j \frac{\partial p_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda\,\theta'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik}) = 0 .$$

En faisant attention à ce que $\dfrac{\partial(\rho_0, \Psi)}{\partial(x_i, x_k)} = 0$, on peut écrire les équations sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial(U_1 + U'_2)}{\partial x_i} + \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} u'_k + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2 \mu e'_{ik}) = 0 . \qquad [9, 10]$$

Ces équations peuvent aussi se déduire à partir de la solution statique de Takeuchi.

Tenant compte de ce que le dernier terme de l'expression [9,5] peut s'écrire sous la forme suivante

$$-\frac{1}{2} \int\int_{S_0} (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2 \mu e'_{ik}) l_k u'_i \, ds + \\ + \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2 \mu e'_{ik}) \, dv$$

V_0 étant le volume de l'enveloppe limité par la surface S_0, multipliant les équations [9, 10] par $\frac{1}{2} u'_i$ et soustrayant deux intégrales de l'expression [9,5] ainsi modifiée, on obtient

$$\frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_{\omega i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_2}{\partial x_i} \right] dv + \\ + \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u'_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dv - \\ - \frac{1}{2} \int\int_{S_0} l_k u'_i (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2 \mu e'_{ik}) \, ds \qquad [9, 11]$$

On peut simplifier encore le 1er terme de l'expression [9, 11]

$$\frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_{\omega i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_2}{\partial x_i} \right] dv = \\ = - \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_{\omega i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} dv + \\ + \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_{\omega i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U'_2 \right) dv = \\ = - \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_{\omega i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} dv + \\ + \frac{1}{2} \int\int_{S_0} \rho_0 u_{\omega i} l_i \left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U'_2 \right) ds - \\ - \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \left(u'_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + U'_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 u_{\omega i}) \, dv$$

en tenant compte des expressions [9, 7]

$$= \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} \rho_0 d_{n\omega} g \theta' dv + \frac{1}{2} \int\int_{S_0} \rho_0 d_{n\omega} (- d'_n g + U'_2) \, ds - \\ - \frac{1}{2} \int\int\int_{V_0} (- d'_n g + U'_2) \frac{d \rho_0}{dr} d_{n\omega} \, dv .$$

En vertu de ce que ces termes sont très petits, pour les raisons déjà indiquées lorsque l'on a traité du noyau, ils ne seront pas considérés dans l'expression finale du travail.

*

* *

En considérant les expressions obtenues pour le travail, venant du noyau et de l'enveloppe, on peut écrire finalement l'expression du travail du système

$$W = (A - C)(c_1 l + c_2 m) + \iint_{S_1} \rho_0 \left(-\frac{1}{2} g\, d_n'^2 + U_1 d_n' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U_2' d_n' \right) ds - \iiint_{V_1} \left(-\frac{1}{2} d_n' g + U_1 + \frac{1}{2} U_2' \right) \frac{d\rho_0}{dr} d_n'\, dv +$$
$$+ \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_0 u_i' \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dv - \frac{1}{2} \iint_{S_0} l_k u_i' (\lambda \theta' \delta_{ik} + 2 \mu e_{ik}') ds \quad [9,12]$$

qui proviennent des expressions [9,5] [9,7] et [9, 11].

10. Calcul numérique des divers termes du travail.

Il convient d'écrire en détails les différents termes de l'expression [9, 11] d'une manière telle qu'elle permette de calculer plus facilement leurs valeurs numériques.

Le terme

$$\frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_0 u_i' \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dv = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_0 \left[F(\xi) \frac{\partial W_2}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{G(\xi)}{a^2} x_i W_2 \right] c \frac{\partial W_2}{\partial x_i} dv$$

se rattache à l'expression [4,2] des déplacements dans l'enveloppe et à l'expression [5,1] du potentiel : prenant en considération que

$$x_i \frac{\partial W_2}{\partial x_i} = 2 W_2 \qquad \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_i} \right)^2 d\sigma = \frac{2 \times 5}{r^2} \iint_{\Sigma} W_2^2\, d\sigma$$

on obtient

$$= \frac{c}{2} \iiint_{V_0} \rho_0 \left[\frac{2 \times 5}{r^2} F(\xi) + \frac{2 G(\xi)}{a^2} \right] W_2^2\, dv$$

mais $W_2 = r^2 S_2$, S_2 étant une fonction harmonique de surface sphérique, et désignant par $M = \iint S_2^2\, d\Omega$, où $d\Omega = \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi$, on en vient à

$$= c M a^5 \int_{\alpha}^{1} \rho_0 [5 F(\xi) + \xi^2 G(\xi)] \xi^4 d\xi$$

Dans l'intégration numérique de cette expression, où sont connues les valeurs des dérivées $F'(\xi)$ et $G'(\xi)$, on a utilisé une formule obtenue par Jeffreys (1953), qui donne

$$= 10^{12} M a^3 [0{,}03796\, D^2 + 0{,}3768\, D q(1) +$$
$$+ 0{,}05907\, D q(\alpha) - 0{,}0004503\, D^2 K_3(\alpha)]. \quad [10, 1]$$

L'expression

$$l_k(\lambda\,0'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik}) = \frac{\mu}{a\,\xi}\,\frac{\partial W_2}{\partial x_i}[2\,F(\xi) + \xi\,F'(\xi) + \xi^2\,G(\xi)] +$$
$$+ \frac{x_i\,W_2}{a^3\,\xi^2}\{\lambda\,[2\,F'(\xi) + \xi^2\,G'(\xi) + 5\,\xi\,G(\xi)] +$$
$$+ \mu\,[2\,F'(\xi) + 2\,\xi^2\,G'(\xi) + 4\,\xi\,G(\xi)]\}\,.$$

Se rattachant à ce que par hypothèse il n'y a pas de tensions tangentielles au niveau des surfaces qui limitent l'enveloppe et le noyau, l'expression $2F(\xi) + \xi F'(\xi) + \xi^2 G(\xi)$ sera égale à 0 pour $\xi = 1$ et pour $\xi = \alpha$. De cette manière, on aura :

$$-\frac{1}{2}\int\!\!\int_{S_0} l_k\,u'_i(\lambda\,0'\,\delta_{ik} + 2\,\mu\,e'_{ik})\,ds = -\frac{1}{2}\int\!\!\int_{S_0}\frac{W_2}{a^3\xi^2}\{\lambda\,[2\,F'(\xi) +$$
$$+ \xi^2\,G'(\xi) + 5\,\xi\,G(\xi)] + \mu\,[2\,F'(\xi) + 2\,\xi^2\,G'(\xi) + 4\,\xi\,G(\xi)]\}\,q(\xi)\,W_2\,ds =$$
$$= \left[-\frac{a^3\,\xi^4}{2}\,M\,\{\lambda\,[2\,F'(\xi) + \xi^2\,G'(\xi) + 5\,\xi\,G(\xi)] + \mu\,[2\,F'(\xi) +\right.$$
$$\left.+ 2\,\xi^2\,G'(\xi) + 4\,\xi\,G(\xi)]\}\,q(\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=1} = \frac{a^3\,M}{2}\{-[\lambda\,(1)\,(2\,F'(1) +$$
$$+ G'(1) + 5\,G(1)) + \mu\,(1)\,(2\,F'(1) + 2\,G'(1) + 4\,G(1))]\,q(1) +$$
$$+ \alpha^4\,[\lambda\,(\alpha)\,(2\,F'(\alpha) + \alpha^2\,G'(\alpha) + 5\,\alpha\,G(\alpha)) + \mu\,(\alpha)\,(2\,F'(\alpha) +$$
$$+ 2\,\alpha^2\,G'(\alpha) + 4\,\alpha\,G(\alpha))]\,q(\alpha)\}$$

comme

$$\lambda\,(1) = 0{,}68\times10^{12}\ \text{dynes/cm}^2 \qquad \mu\,(1) = 0{,}6\times10^{12}\ \text{dynes/cm}^2$$
$$\lambda\,(\alpha) = 4{,}61\times10^{12}\ \text{»} \qquad \mu\,(\alpha) = 2{,}93\times10^{12}\ \text{»}$$

on obtient

$$= 10^{12}\,M\,a^3\left\{-\frac{q(1)}{2}[-0{,}7702\,D + 8{,}415\,q(1) -\right.$$
$$- 3{,}181\,q(\alpha) + 0{,}000712\,D\,K'_3(\alpha)] +$$
$$+ \frac{q(\alpha)}{2}[0{,}1047\,D + 3{,}158\,q(1) - \qquad [10,\,2]$$
$$\left.- 1{,}757\,q(\alpha) + 0{,}002263\,D\,K'_3(\alpha)]\right\}$$

Un des termes de l'intégrale de surface de l'expression [9,7] est

$$\int\!\!\int_{S_1}\rho_0\left(-\frac{1}{2}\,g\,d'^2_n\right)ds = -\frac{1}{2}\,g(\alpha)\,\rho_0(\alpha)\int\!\!\int_{S_1} d'^2_n\,ds = \qquad [10,\,3]$$
$$= -10^{12}\,M\,a^3\,q^2(\alpha)\times0{,}2605$$

Les termes restants de l'intégrale de surface de [9,7] sont :

$$\int\int_{S_1} \rho_0 \left(U_1 d'_n + \frac{1}{2} U'_2 d'_n \right) d s =$$
$$= \rho_0(\alpha) \frac{q(\alpha)}{a\alpha} \int\int_{S_1} \left(U_1 + \frac{1}{2} U'_2 \right) W_2 d s =$$
$$= \rho_0(\alpha) q(\alpha) \int\int_{S_1} \left[1 + \frac{1}{2} (K'_2(\alpha) - 1) \right] c \, W_2^2 d s =$$
$$= \rho_0(\alpha) q(\alpha) \frac{1}{2} [K'_2(\alpha) + 1] c \int\int_{S_1} W_2^2 d s$$

comme

$$D K_2(\alpha) = 0{,}007872\, q(1) + 1{,}0564\, q(\alpha) - 0{,}1110\, D K'_3(\alpha) + 1{,}1021\, D$$

on obtient

$$= 10^{12} M a^3 q(\alpha) [0{,}1537\, D + 0{,}0005758\, q(1) + + 0{,}07727\, q(\alpha) - 0{,}008117\, D K'_3(\alpha)] \qquad [10,4]$$

Les termes de l'intégrale de volume de l'expression [9,7] donnent naissance aux valeurs suivantes :

$$\frac{1}{2} \int\int\int_{V_1} g \frac{d\rho_0}{d r} d'^2_n d v = - 10^{12} M a^3 \times 0{,}03262 (l_0^2 + m_0^2) \qquad [10,5]$$

étant donné que

$$g \frac{d\rho_0}{d \xi_1} = 4 \pi f \frac{13{,}485^2}{4{,}5} a_1 \left(\frac{sen\, 1{,}5\, \xi_1 \cos 1{,}5\, \xi_1}{\xi_1} - \frac{sen^2\, 1{,}5\, \xi_1}{1{,}5\, \xi_1^2} \right)$$

$$- \int\int\int_{V_1} U_1 \frac{d\rho_0}{d r} d'_n d v = - M a^3\, 10^{12} \times 0{,}01971 (l_0 D + m_0 D) \qquad [10,6]$$

$$- \frac{1}{2} \int\int\int_{V_1} U'_2 \frac{d\rho_0}{d r} d'_n d v =$$
$$= - \frac{c}{2} \int\int\int_{V_1} K_3(\xi)\, W_2 \frac{d\rho_0}{d r} d'_n d v$$
$$- \frac{c}{2} [K_1(\alpha) - K_3(\alpha) - 1] \int\int\int_{V_1} W_2 \frac{d\rho_0}{d r} d'_n d v = \qquad [10,7]$$
$$= 10^{12} M a^3 [0{,}001432 (l_0^2 + m_0^2) - 0{,}001006 (l_0 D + m_0 D) -$$
$$- 0{,}00007756 (l_0\, q(1) + m_0\, q(1)) - 0{,}01041 (l_0\, q(\alpha) +$$
$$+ m_0\, q(\alpha)) + 0{,}001093 (l_0 D K'_3(\alpha) + m_0 D K'_3(\alpha))]$$

11. Divers aspects de l'expression du travail.

En additionnant les valeurs obtenues dans les expressions [10,1] à celle de [10,7] du paragraphe antérieur et introduisant la valeur de $DK_3^1(\alpha)$, déterminée à partir de l'expression [6,3], il sera possible d'écrire :

$$\begin{aligned} W = (A - C)(c_1 l + c_2 m) + M a^3 10^{12} \{ 0{,}7619\, D\, q(1) + \\ + 0{,}2651\, D\, q(\alpha) - 4{,}208\, q^2(1) + 3{,}170\, q(1)\, q(\alpha) - \\ - 1{,}062\, q^2(\alpha) - 0{,}02876\,(l_0^2 + m_0^2) - 0{,}02171\,(l_0 D + \\ + m_0 D) - 0{,}0008674\,(l_0\, q(1) + m_0\, q(1)) - \\ - 0{,}02591\,(l_0\, q(\alpha) + m_0\, q(\alpha)) \end{aligned} \qquad [11,1]$$

Dans cette expression, ne sont pas inclus les termes qui ne présentent pas d'intérêt pour la détermination des équations de Lagrange du mouvement du système.

Pour la détermination des nombres caractéristiques de la marée terrestre, il convient d'écrire l'expression du travail en fonction du moment d'inertie C de la Terre et de la gravité $g(1)$ à la surface de la Terre, présentant ainsi l'aspect :

$$\begin{aligned} W = (A - C)(c_1 l + c_2 m) + \frac{C g(1)}{a} \{ 0{,}1323\, D\, q(1) + \\ + 0{,}04620\, D\, q(\alpha) - 0{,}7305\, q^2(1) + 0{,}5505\, q(1)\, q(\alpha) - \\ - 0{,}1817\, q^2(\alpha) - 0{,}004993\,(l_0^2 + m_0^2) - 0{,}003769\,(l_0 D + \\ + m_0 D) - 0{,}0001506\,(l_0\, q(1) + m_0\, q(1)) - \\ - 0{,}004497\,(l_0\, q(\alpha) + m_0\, q(\alpha)) \} \end{aligned} \qquad [11,2]$$

En représentant la valeur de $q(1)\, W_2$, à la surface de l'enveloppe, par l'expression $r_1 x_1 x_3 + r_2 x_2 x_3$, la valeur $q(\alpha)\, W_2$, à la surface du noyau par l'expression $s_1 x_1 x_3 + s_2 x_2 x_3$ et en tenant compte de l'expression [5,1] du potentiel U_1, la valeur [11,1] de l'expression du travail peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 2W = 2(A - C)(c_1 l + c_2 m) - C\omega^2 \{ 423{,}5\,(r_1^2 + r_2^2) - \\ - 319{,}1\,(r_1 s_1 + r_2 s_2) + 106{,}9\,(s_1^2 + s_2^2) + \\ + 0{,}08729\,(l_0 r_1 + m_0 r_2) + 2{,}607\,(l_0 s_1 + m_0 s_2) + \\ + 2{,}895\,(l_0^2 + m_0^2) \} + C \{ (0{,}4861\, r_1 + 0{,}1692\, s_1 - \\ - 0{,}01385\, l_0)\, c_1 + (0{,}4861\, r_2 + 0{,}1692\, s_2 - \\ - 0{,}01385\, m_0)\, c_2 \} . \end{aligned} \qquad [11,3]$$

Celle-ci est la forme la plus convenable de l'expression du travail pour la détermination des équations de Lagrange du mouvement.

12. Valeurs caractéristiques de la marée terrestre

La représentation de l'amplitude de la marée de la partie solide de la Terre, lorsqu'on considère que le potentiel générateur des marées est représenté par une fonction sphérique harmonique de 2ème ordre, est habituellement faite en utilisant les nombres représentés par les lettres h et k, introduites par LOVE et encore par la lettre l (Jeffreys, 1952 p. 203) ; on considère aussi diverses combinaisons de ces nombres caractéristiques de la marée terrestre.

L'expression du travail fut déterminée en considérant une solution statique pour l'enveloppe, et pour cette raison, il est possible de déterminer les valeurs de h et k à partir de la condition que les valeurs de q(1) et q(α) devront exprimer la partie principale correspondant à la solution statique de l'expression du travail.

De la résolution du système

$$\begin{aligned} -1{,}4609\, q(1) + 0{,}5505\, q(\alpha) + 0{,}1323\ \ D &= 0 \\ 0{,}5505\, q(1) - 0{,}3633\, q(\alpha) + 0{,}04620\, D &= 0 \end{aligned}$$

on tire q(α) = 0,616 D et q(1) = 0,323 D, permettant de déterminer la valeur suivante pour h = 0,595.

En substituant les valeurs obtenues pour q(1) et q(α), dans l'expression de $DK_1(1)$ déterminée par [8,3], on obtient k = 0,272. D'une façon analogue, à partir de l'expression de F(1) donnée par [8,3] on détermine la valeur de l = 0,0816.

Les valeurs obtenues pour h, k et l à partir de la théorie développée dans la présente recherche, ne sont pas en accord uniquement avec les valeurs déterminées par Takeuchi, pour le modèle terrestre désigné par le modèle 2, mais aussi avec les valeurs déterminées expérimentalement par différentes méthodes. Cette concordance des résultats sert de confirmation aux méthodes utilisées et aux hypothèses faites antérieurement.

13. Expression de l'énergie cinétique de l'enveloppe.

L'énergie cinétique de l'enveloppe sera déterminée à partir de l'expression

$$\begin{aligned} 2\,T_0 &= \iiint_{V_0} \rho_0 [(\dot\xi_1 - \omega\,\xi_2)^2 + (\dot\xi_2 + \omega\,\xi_1)^2 + \dot\xi_3^2]\, d\,v = \\ &= \iiint_{V_0} \rho_0 [\dot\xi_i^2 + 2\,\omega\,(\xi_1\,\dot\xi_2 - \dot\xi_1\,\xi_2) + \omega^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)]\, d\,v \end{aligned} \qquad [13,\ 1]$$

l'intégrale étant calculée dans la position initiale et en adoptant la convention habituelle de représenter $\dfrac{d\,\xi_i}{d\,t}$ par $\dot\xi_i$. Les valeurs des coordonnées ξ_i sont déterminées par les expressions [4,1] les valeurs de u'_i étant définies par [4,2].

Les termes de l'expression [13,1] sont calculés séparément, en abandonnant les termes de l'ordre supérieur au 2ème .

On aura :

$$\iiint_{V_0} \rho_0\, \dot\xi_i^2\, dv = \iiint_{V_0} \rho_0\, [\dot u_i'^2 + \dot l^2 (x_1^2 + x_3^2) + \dot m^2 (x_2^2 + x_3^2) + 2\, \dot u_{\omega i}\, \dot u_i']\, dv$$

Comme les périodes des phénomènes qu'il y a intérêt à considérer sont grandes en comparaison avec les périodes des vibrations élastiques du globe terrestre, on peut abandonner les termes $\dot{u}_i'^2$ et $2\dot{u}_{\omega i}\dot{u}_i'$, réduisant l'expression à la valeur de

$$\iiint_{V_0} \rho_0 [\dot{l}^2 (x_1^2 + x_3^2) + \dot{m}^2 (x_2^2 + x_3^2)\, d\,v = A_0 (\dot{l}^2 + \dot{m}^2) \qquad [13,2]$$

A_o et C_o étant les moments principaux d'inertie de l'enveloppe.

Le terme

$$2\,\omega \iiint_{V_0} \rho_0 (\xi_1 \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 \xi_2)\, d\,v =$$

$$= 2\,\omega \iiint_{V_0} \rho_0 [x_1 \dot{u}_2' - x_2 \dot{u}_1' + u_1' \dot{u}_2' - u_2' \dot{u}_1' + (l\,\dot{u}_2' - m\,\dot{u}_1')\,x_3 +$$

$$+ (x_1 \dot{m} - x_2 \dot{l})\, u_3' + (u_1' \dot{m} - u_2' \dot{l})\,x_3 + (l\dot{m} - m\dot{l})\,x_3^2 + (x_1 m - x_2 l)\,\dot{u}_3'\,]\,dv$$

En abandonnant les termes contenant $\dot{u}_i'$ pour les raisons indiquées antérieurement, on a

$$2\,\omega \iiint_{V_0} \rho_0 [(x_1 \dot{m} - x_2 \dot{l})\, u_3' + (u_1' \dot{m} - u_2' \dot{l})\,x_3 + (l\,\dot{m} - m\,\dot{l})\,x_3^2]\,dv =$$

$$= 2\,\omega \iiint_{V_0} \rho_0\, u_i' \frac{\partial}{\partial x_i} [x_3 (\dot{m}\, x_1 - \dot{l}\, x_2)]\, d\,v +$$

$$+ 2\,\omega \iiint_{V_0} \rho_0 (l\,\dot{m} - m\,\dot{l})\, x_3^2\, d\,v$$

en désignant par $\Phi_1 = \omega\, x_3 (\dot{m}\, x_1 - \dot{l}\, x_2)$ on peut écrire :

$$= 2 \iiint_{V_0} \rho_0\, u_i' \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}\, d\,v + \omega (2\,A_0 - C_0)(l\,\dot{m} - m\,\dot{l}) \qquad [13,3]$$

vérifiant ainsi que le calcul de l'intégrale précédente revient à additionner le potentiel Φ_1 au potentiel U_1 de l'attraction newtonienne, considéré dans l'expression du travail [9,5].

Le calcul du dernier terme de l'expression [13,1] donnera :

$$\omega^2 \iiint_{V_0} \rho_0 [l^2 (x_3^2 - x_1^2) + m^2 (x_3^2 - x_2^2)]\, d\,v +$$

$$+ 2\,\omega^2 \iiint_{V_0} \rho_0 [(l\,x_1 + m\,x_2)\, u_3' + (l\,u_1' + m\,u_2')\, x_3]\, d\,v =$$

$$= \omega^2 (A_0 - C_0)(l^2 + m^2) + 2\,\omega^2 \iiint \rho_0\, u_i' \frac{\partial}{\partial x_i} [x_3\,(l\,x_1 + m\,x_2)]\, d\,v$$

en ne considérant pas les termes qui n'ont pas d'intérêt pour la formation des équations du mouvement, il restera :

$$\omega^2 \iiint_{V_0} \rho_0 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\, d\,v =$$

$$= \omega^2 \iiint_{V_0} \rho_0 [x_1^2 (1 - l^2) + x_2^2 (1 - m^2) + u_1'^2 + u_2'^2 + (l^2 + m^2)\, x_3^2 +$$

$$+ 2\,(u_1' x_1 + u_2' x_2) + 2\,(l\,x_1 + m\,x_2)\, u_3' + 2\,(l\,u_1' + m\,u_2')\, x_3]\, d\,v$$

et en prenant $\Phi_2 = \omega^2 x_3 (l x_1 + m x_2)$

$$= \omega^2 (A_0 - C_0)(l^2 + m^2) + 2 \int\int\int_{V_0} \rho_0 u_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} dv \qquad [13,4]$$

le calcul de cette intégrale étant équivalent au calcul de l'intégrale de l'expression du travail contenant le potentiel U_1 depuis que s'additionne à lui le potentiel Φ_2. Ce sont ces termes qui correspondent aux termes contenant Ψ_o de l'expression [9,5] du travail.

Réunissant dans une unique expression, les différents termes [13,2], [13,3] et [13,4] obtenus pour l'énergie cinétique de l'enveloppe, on en arrive à

$$\begin{aligned} 2 T_0 = {} & A_0(\dot{l}^2 + \dot{m}^2) + \omega(2 A_0 - C_0)(l \dot{m} - m \dot{l}) + \\ & + \omega^2 (A_0 - C_0)(l^2 + m^2) \end{aligned} \qquad [13,5]$$

en considérant encore que, au potentiel U_1, s'additionnent les potentiels Φ_1 et Φ_2 cela devient :

$$U_1 + \Phi_1 + \Phi_2 = [c_1 + \omega(\dot{m} + l\omega)] x_1 x_3 + [c_2 + \omega(-\dot{l} + m\omega)] x_2 x_3 \quad [13,6]$$

14. Expression de l'énergie cinétique de l'enveloppe

Par analogie avec le procédé utilisé pour la détermination de l'énergie cinétique de l'enveloppe l'énergie cinétique du noyau sera déterminée à partir de l'expression :

$$2 T_1 = \int\int\int_{V_1} \rho_0 [\dot{\xi}_i^2 + 2\omega(\xi_1 \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 \xi_2) + \omega^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)] dv \quad [14,1]$$

où les valeurs de ξ_i sont déterminées par [4,1] et u'_i ayant les valeurs indiquées dans [4,3]

Le fait que la Terre a un mouvement permanent autour de l'axe des ZZ, indique que les équations du mouvement doivent se vérifier pour les perturbations dont la vitesse est $-\omega$; ce résultat permet effectivement de déterminer l'énergie cinétique du noyau.

Le premier terme de l'expression [14,1] donnera :

$$\begin{aligned} & \int\int\int_{V_1} \rho_0 \dot{\xi}_i^2 dv = \int\int\int_{V_1} \rho_0 [\dot{u}_i'^2 + \dot{l}^2(x_1^2 + x_3^2) + \dot{m}^2(x_2^2 + \\ & + x_3^2) + 2 \dot{u}_{\omega i} \dot{u}'_i] dv = \int\int\int_{V_1} \rho_0 [\dot{l}^2(x_1^2 + x_3^2) + \dot{m}^2(x_2^2 + \\ & + x_3^2)] dv + \int\int\int_{V_1} \rho_0 \dot{u}_i'^2 dv + 2 \int\int\int_{V_1} \rho_0 \dot{u}_{\omega i} \dot{u}'_i dv = \\ & = A_1(\dot{l}^2 + \dot{m}^2) + A_1(\dot{l}_1^2 + \dot{m}_1^2) + \frac{c}{a} \frac{F_1}{2}(\dot{l}_0^2 + \dot{m}_0^2) + \\ & + \frac{c}{a} F_1(\dot{l}_1 \dot{l}_0 + \dot{m}_1 \dot{m}_0) + (F_1 + F_3)(\dot{l} \dot{l}_1 + \dot{m} \dot{m}_1) + \\ & + F_1(\dot{l} \dot{l}_0 + \dot{m} \dot{m}_0) \end{aligned} \qquad [14,2]$$

où A_1 et C_1 sont les moments principaux d'inertie du noyau, et F_1, F_3 sont définis par :

$$F_1 = \frac{c}{a} C_1 , \; F_3 = \frac{a}{c}(2 A_1 - C_1) .$$

Le calcul du second terme de l'expression [14,1] donnera :

$$\begin{aligned}
2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (\xi_1 \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 \xi_2)\, d v = 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 [& x_1 \dot{u}'_2 - x_2 \dot{u}'_1 + u'_1 \dot{u}'_2 - \\
& - u'_2 \dot{u}'_1 + (l \dot{u}'_2 - m \dot{u}'_1) x_3 + (x_1 m - x_2 l) \dot{u}'_3 + (x_1 \dot{m} - x_2 \dot{l}) u'_3 + \\
& + (u'_1 \dot{m} - u'_2 \dot{l}) x_3 + (l \dot{m} - m \dot{l}) x_3^2]\, d v = 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (u'_1 \dot{u}'_2 - \\
& - u'_2 \dot{u}'_1)\, d v + 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (l \dot{u}'_2 - m \dot{u}'_1) x_3 \, d v + 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (x_1 m - \\
& - x_2 l) \dot{u}'_3 \, d v + 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (l \dot{m} - m \dot{l}) x_3^2 \, d v + \qquad [14, 3] \\
& + 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 [(x_1 \dot{m} - x_2 \dot{l}) u'_3 + (u'_1 \dot{m} - u'_2 \dot{l}) x_3]\, d v
\end{aligned}$$

En calculant séparément les différents termes de cette expression, on obtient

$$2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (u'_1 \dot{u}'_2 - u'_2 \dot{u}'_1)\, d v = \omega \frac{a}{c} F_3 (l_1 \dot{m}_1 - \dot{l}_1 m_1)$$

$$2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (l \dot{u}'_2 - m \dot{u}'_1) x_3 \, d v = \omega F_3 (l \dot{m}_1 - m \dot{l}_1)$$

$$2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (x_1 m - x_2 l) \dot{u}'_3 \, d v = \omega F_1 (l \dot{m}_1 - m \dot{l}_1 + l \dot{m}_0 - m \dot{l}_0)$$

$$\begin{aligned}
& 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 [(x_1 \dot{m} - x_2 \dot{l}) u'_3 + (u'_1 \dot{m} - u'_2 \dot{l}) x_3]\, d v = \\
& = 2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} [x_3 (\dot{m} x_1 - \dot{l} x_2)]\, d v = 2 \int\int\int_{V_1} \rho_0 u'_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}\, d v
\end{aligned}$$

le potentiel $\Phi_1 = \omega x_3 (\dot{m} x_1 - \dot{l} x_2)$, ce résultat est identique à celui obtenu dans l'expression [13,3]

$$2\omega \int\int\int_{V_1} \rho_0 (l \dot{m} - m \dot{l}) x_3^2 \, d v = \omega (2 A_1 - C_1)(l \dot{m} - \dot{l} m) .$$

De cette façon, l'expression [14,3] aura l'aspect suivant :

$$\begin{aligned}
& \omega \frac{a}{c} F_3 (l_1 \dot{m}_1 - \dot{l}_1 m_1) + \omega (F_1 + F_3)(l \dot{m}_1 - m \dot{l}_1) + \qquad [14, 4] \\
& + \omega F_1 (l \dot{m}_0 - m \dot{l}_0) + \omega (2 A_1 - C_1)(l \dot{m} - \dot{l} m)
\end{aligned}$$

les termes étant encore dépendants du potentiel Φ_1.

A partir du dernier terme de l'expression [14,1] on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
&\omega^2(A_1 - C_1)(l^2 + m^2) + \omega^2 \frac{a}{c}\,\frac{F_3 - F_1}{2}(l_1^2 + m_1^2) - \\
&- \omega^2 \frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2}(l_0^2 + m_0^2) - \omega^2 \frac{c}{a} F_1 (l_1 l_0 + m_1 m_0) + \qquad [14,\ 5] \\
&+ \omega^2 \iiint_{V_1} \rho_0 [2(l x_1 + m x_2) u_3' + 2(l u_1' + m u_2') x_3]\, d\mathcal{V}
\end{aligned}$$

Ce dernier terme peut s'écrire de la manière suivante :

$$2 \iiint_{V_1} \rho_0\, u_i' \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} d v \quad \text{où} \quad \Phi_2 = \omega^2 x_3 (l x_1 + m x_2) \,;$$

on obtient ainsi un résultat identique à celui de [13,4]

L'énergie cinétique du noyau sera ainsi représentée par la somme des termes [14,2], [14,4] et [14,5], ce qui donne

$$\begin{aligned}
2 T_1 = {} & A_1 (\dot{l}^2 + \dot{m}^2) + A_1 (\dot{l}_1^2 + \dot{m}_1^2) + \frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2}(\dot{l}_0^2 + \dot{m}_0^2) + \\
& + \frac{c}{a} F_1 (\dot{l}_1 \dot{l}_0 + \dot{m}_1 \dot{m}_0) + (F_1 + F_3)(\dot{l}\dot{l}_1 + \dot{m}\dot{m}_1) + \\
& + F_1 (\dot{l}\dot{l}_0 + \dot{m}\dot{m}_0) + \omega \frac{a}{c} F_3 (l_1 \dot{m}_1 - \dot{l}_1 m_1) + \\
& + \omega (F_1 + F_3)(l \dot{m}_1 - m \dot{l}_1) + \omega F_1 (l \dot{m}_0 - m \dot{l}_0) + \qquad [14,\ 6] \\
& + \omega (2 A_1 - C_1)(l \dot{m} - \dot{l} m) + \omega^2 (A_1 - C_1)(l^2 + m^2) + \\
& + \omega^2 \frac{a}{c}\,\frac{F_3 - F_1}{2}(l_1^2 + m_1^2) - \omega^2 \frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2}(l_0^2 + m_0^2) - \\
& - \omega^2 \frac{c}{a} F_1 (l_1 l_0 + m_1 m_0)
\end{aligned}$$

en considérant encore les potentiels Φ_1 et Φ_2, additionnés au potentiel U_1, en accord avec [13,6].

15. Détermination du Lagrangien au système

Pour déterminer le Lagrangien, il suffit d'additionner les expressions obtenues pour le travail et pour l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique de l'enveloppe est représentée par l'expression [13,5] et l'énergie cinétique du noyau par l'expression [14,6], devant en tous cas se référer à la condition [7,2] relative à la rotation (l,m) du noyau.

L'aspect plus convenable de l'expression du travail est celui indiqué par [11,3], prenant en considération que les potentiels Φ_1 et Φ_2 doivent s'additionner au potentiel U_1, selon ce qui est indiqué dans l'expression [13,6]. Le lagrangien sera ainsi

$$
\begin{aligned}
2L = {} & A_0(\dot l^2 + \dot m^2) + \omega(2A_0 - C_0)(l\dot m - m\dot l) + \omega^2(A_0 - C_0)\cdot \\
& \cdot(l^2 + m^2) + A_1(\dot l''^2 + \dot m''^2) + A_1(\dot l_1^2 + \dot m_1^2) + \frac{c}{a}\frac{F_1}{2}(\dot l_0^2 + \dot m_0^2) + \\
& + \frac{c}{a}F_1(\dot l_1 \dot l_0 + \dot m_1 \dot m_0) + (F_1 + F_3)(\dot l'' \dot l_1 + \dot m'' \dot m_1) + F_1(\dot l'' \dot l_0 + \\
& + \dot m'' \dot m_0) + \omega\frac{a}{c}F_3(l_1 \dot m_1 - \dot l_1 m_1) + \omega(F_1 + F_3)(l'' \dot m_1 - m'' \dot l_1) + \\
& + \omega F_1(l'' \dot m_0 - m'' \dot l_0) + \omega(2A_1 - C_1)(l'' \dot m'' - \dot l'' m'') + \\
& + \omega^2(A_1 - C_1)(l''^2 + m''^2) + \omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3 - F_1}{2}(l_1^2 + m_1^2) - \\
& - \omega^2\frac{c}{a}\frac{F_1}{2}(l_0^2 + m_0^2) - \omega^2\frac{c}{a}F_1(l_1 l_0 + m_1 m_0) + 2(A - C)\cdot \\
& \cdot(c_1 l + c_2 m) - C\omega^2\{423{,}5(r_1^2 + r_2^2) - 319{,}1(r_1 s_1 + r_2 s_2) + \\
& + 106{,}9(s_1^2 + s_2^2) + 0{,}08729(l_0 r_1 + m_0 r_2) + 2{,}607(l_0 s_1 + m_0 s_2) + \\
& + 2{,}895(l_0^2 + m_0^2)\} + C\{(0{,}4861\, r_1 + 0{,}1692\, s_1 - 0{,}01385\, l_0)\cdot[c_1 + \\
& + \omega(\dot m + l\omega)] + (0{,}4861\, r_2 + 0{,}1692\, s_2 - 0{,}01385\, m_0)[c_2 + \omega(-\dot l + m\omega)]\}.
\end{aligned}
$$

16. Formation des équations du mouvement du système.

En considérant que toutes les variables qui apparaissent dans les équations de Lagrange du mouvement du système sont proportionnelles à $e^{i\gamma t}$, on peut écrire les équations du mouvement sous un aspect plus condensé, en introduisant les grandeurs suivantes

$$
\begin{array}{llll}
\zeta = l + i m & \zeta_1 = l_1 + i m_1 & \varphi = r_1 + i r_2 & k = c_1 + i c_2 \\
\zeta'' = l'' + i m'' & \zeta_0 = l_0 + i m_0 & \psi = s_1 + i s_2 & P = \eta + i \nu
\end{array}
$$

où (η, ν) représentent une paire de multiplicateurs indéterminés.

Les équations du mouvement présentent alors l'aspect suivant :

$$
\begin{aligned}
& \zeta_1\left[\gamma^2 A_1 + \gamma\omega\frac{a}{c}F_3 + \omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3 - F_1}{2}\right] + \zeta''\left[\gamma^2\frac{F_1 + F_3}{2} + \right. \\
& \left. + \gamma\omega\frac{F_1 + F_3}{2}\right] + \zeta_0(\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} = 0
\end{aligned}
\qquad [16,1]
$$

$$
\begin{aligned}
& \zeta''[\gamma^2 A_1 + \gamma\omega(2A_1 - C_1) + \omega^2(A_1 - C_1)] + \\
& + \zeta_1\left[\gamma^2\frac{F_1 + F_3}{2} + \gamma\omega\frac{F_1 + F_3}{2}\right] + \\
& + \zeta_0\left[\gamma^2\frac{F_1}{2} + \gamma\omega\frac{F_1}{2}\right] - P = 0
\end{aligned}
\qquad [16,2]
$$

$$\zeta[\gamma^2 A_0 + \gamma\omega(2A_0 - C_0) + \omega^2(A_0 - C'_0)] + \frac{C\omega}{2}(\gamma + \omega)(0{,}4861\,\varphi + $$
$$+ 0{,}1692\,\psi - 0{,}01385\,\zeta_0) + k(A - C) + P = 0 \qquad [16,\ 3]$$

$$C\omega^2(-423{,}5\,\varphi + 159{,}5\,\psi - 0{,}04365\,\zeta_0) + $$
$$+ 0{,}2431\,C[k + \omega(\gamma + \omega)\zeta] = 0 \qquad [16,\ 4]$$

$$C\omega^2(+159{,}5\,\varphi - 106{,}9\,\psi - 1{,}304\,\zeta_0) + $$
$$+ 0{,}0846\,C[k + \omega(\gamma + \omega)\zeta] - 194{,}2\,P = 0 \qquad [16,\ 5]$$

$$(\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2}\zeta_1 + (\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2}\zeta_0 + \zeta''\left[\gamma^2\frac{F_1}{2} + \right.$$
$$\left. + \gamma\omega\frac{F_1}{2}\right] - \frac{C\omega^2}{2}(0{,}08729\,\varphi + 2{,}607\,\psi + \qquad [16,\ 6]$$
$$+ 5{,}790\,\zeta_0) - 0{,}01385\,\frac{C}{2}[k + \omega(\gamma + \omega)\zeta] + 194{,}2\,P = 0$$

Ce système d'équations correspond au cas plus général qui sera considéré dans cette recherche, en accord avec les hypothèses faites sur le modèle adopté pour la constitution intérieure de la Terre. Ces équations permettent ainsi de considérer différents cas particuliers qui correspondent à des modèles plus simples, adoptés pour la constitution interne de la Terre par différents chercheurs.

Dans les paragraphes suivants où il sera traité de la résolution de ce système d'équations du mouvement, différents cas particuliers seront aussi envisagés. La considération des cas particuliers montre que la présente théorie englobe les cas étudiés par d'autres auteurs et fournit aussi une vérification au moyen des résultats déterminés à partir de ces cas particuliers.

Outre ces équations on doit encore considérer la condition [7,3] qui fournit une relation de plus entre quelques variables.

17. Particularités de la solution du système des équations du mouvement.

Dans la résolution du système des équations du paragraphe antérieur, on considère deux cas distincts.

1° - Quand le système ne se trouve pas sous l'action de forces extérieures, c'est-à-dire sans considérer l'action des corps extérieurs ; de cette manière, on suppose que k = 0 dans le système des équations du mouvement ce qui correspond à la détermination des oscillations libres du système. Parmi les solutions du système, celle qui présente le plus d'intérêt se rapporte à la nutation eulérienne libre, dont la période est appelée aussi période de variation de latitude ou période de Chandler, désignations adoptées par différents auteurs. Les autres oscillations libres du système correspondent à des mouvements relatifs du noyau et de l'enveloppe ou des mouvements de tout le corps.

2° - Quand le système se trouve sous l'action des corps extérieurs, ce qui correspond à résoudre les équations du mouvement supposant que $k \neq 0$. Cette solution correspond ainsi à la détermination des oscillations forcées du système et, dans les cas qui seront considérés, on suppose que les forces perturbatrices varient lentement leur position dans l'espace. Quelques-unes des nutations qui satisfont à cette condition sont : la nutation de période 6.800 jours (approximativement 19 ans), la nutation de période 13,7 jours (nutation bi-mensuelle) et la nutation de période 183 jours (nutation semi-annuelle), celles ci sont des nutations étudiées auparavant, non seulement parce que ce sont des nutations qui présentent une plus grande amplitude (et donc plus faciles à comparer avec les valeurs déterminées par observations astronomiques), mais aussi parce que ce sont ces nutations qui devront être plus affectées par le modèle adopté pour la constitution intérieure de la Terre, conformément à ce qui fut démontré par différents auteurs, entre autres POINCARE (1910) et JEFFREYS (1949). En raison de son importance pour la résolution des équations du mouvement, il convient d'écrire séparément le déterminant principal du système, appelé déterminant I à la page annexée qui suit.

Dans les différents cas particuliers qui seront examinés successivement dans les paragraphes suivants, on aura l'occasion de vérifier l'importance des solutions obtenues, quand on égale à zéro le déterminant du système des équations du mouvement, solutions approximativement groupées par paires et se distinguant par l'intérêt qu'offrent les solutions proches des valeurs $\gamma = 0$ et $\gamma = -\omega$.

L'importance de l'existence d'un noyau liquide, dans le modèle adopté pour la constitution intérieure de la Terre, dérive du fait qu'il existe des solutions du système des équations du mouvement groupées approximativement par paires, donnant naissance au phénomène que Poincaré désigne par double résonance. Dans le cas de la résonance simple, l'existence du noyau liquide n'a pas d'influence sur la période des oscillations vu qu'alors le système se comporte comme un corps solide.

18. Détermination de la période de nutation eulérienne libre.

Pour déterminer les périodes des oscillations libres du corps, il sera nécessaire de considérer que $k = 0$ dans le système des équations du mouvement. Il y a intérêt à considérer certains cas particuliers qui correspondent à différents modèles terrestres, en considérant tout d'abord les modèles plus simples et ensuite les modèles terrestres qui se rapprochent le plus de la constitution actuellement admise pour l'intérieur de la Terre.

1° Corps solide, de forme sphéroïdale, rigide.

Seront nulles toutes les équations, exceptée l'équation [16,3] qui aura l'aspect suivant :

$$(\gamma + \omega)\ \xi [A\gamma + \omega (A - C)] = 0$$

Les solutions seront $\gamma = -\omega$ et $\gamma = \frac{C - A}{A}\ \omega = \frac{1}{305}\ \omega$ donnant ainsi pour la période de nutation eulérienne libre, la valeur de 305 jours.

2° - Corps solide, de forme sphéroïdale, élastique.

Toutes les équations seront nulles, à l'exception des équations [16,3] et [16,4] qui auront l'aspect suivant

$$\gamma C_1(\gamma + \omega)(\zeta_1 + \zeta) = 0$$

$$(\gamma + \omega)\{\zeta[\gamma A + \omega(A - C)] + C_1\gamma\zeta_1\} = 0$$

Les périodes des oscillations libres s'obtiennent en égalant à zéro le déterminant de ce système. Les solutions seront $\gamma = -\omega$ et $\gamma = \frac{1}{319}\omega$ la période de nutation eulérienne libre étant alors de 319 jours.

3° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide.

Toutes les équations seront nulles, exceptées les équations [16,1] et [16,3], en considérant que $\zeta' = \zeta$, $F = \frac{c}{a} C_1$ et $F^2 = C_1 (2A_1 - C_1)$ Les équations citées prennent l'aspect suivant :

$$\gamma[\zeta_1(\gamma A_1 + \omega C_1) + \zeta F(\gamma + \omega)] = 0$$

$$(\gamma + \omega)\{\zeta[\gamma A + \omega(A - C)] + F\gamma\zeta_1\} = 0$$

Les périodes des oscillations libres s'obtiennent en égalant à zéro le déterminant de ce système. Les solutions obtenues sont

$$\gamma = 0 \qquad \gamma = \frac{C - A}{A_0}\omega \qquad \gamma = -\omega \qquad \gamma = -(1 + \epsilon'')\omega$$

ϵ'' étant une quantité de l'ordre de grandeur de l'excentricité ; on vérifie ainsi que les solutions sont groupées approximativement par paires, aux environs de zéro et aux environs de $-\omega$.
La période de nutation eulérienne libre sera maintenant de 272 jours.

4° - Corps constitué par une enveloppe rigide, de forme sphéroïdale, et un noyau liquide supposé sphérique.

On aura $A_1 = C_1 = F$ et $\zeta'' = \zeta$, les équations [16,1] et [16,3] étant les seules équations du mouvement du système

$$(\gamma + \omega)[\gamma A + \omega(A - C)]\zeta + 0{,}2431\, C\omega(\gamma + \omega)\varphi = 0$$

$$0{,}2431\, C\omega(\gamma + \omega)\zeta - 423{,}5\, C\omega^2\varphi = 0$$

Le déterminant formé dans le système de ces deux équations étant égalé à zéro, on obtient pour solutions $\gamma = 0$, $\gamma = -\omega$. et $\gamma = \frac{C_0 - A_0}{A_0}\omega$.

DETERMINANTE I

$$
\begin{vmatrix}
\gamma^2 A_1 + \gamma\omega \frac{a}{c} F_3 + \omega^2 \frac{a}{c} \frac{F_3 - F_1}{2} & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} \\
\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2} & (\gamma+\omega)[\gamma A_1 + \omega(A_1 - C_1)] & 0 & 0 & 0 & -1 & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} \\
0 & 0 & (\gamma+\omega)[\gamma A_0 + \omega(A_0 - C_0)] & 0{,}2431\, C\omega(\gamma+\omega) & 0{,}0846\, C\omega(\gamma+\omega) & 1 & -0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega) \\
0 & 0 & 0{,}2431\, C\omega(\gamma+\omega) & -423{,}5\, C\omega^2 & 159{,}5\, C\omega^2 & 0 & -0{,}04365\, C\omega^2 \\
0 & 0 & 0{,}0846\, C\omega(\gamma+\omega) & 159{,}5\, C\omega^2 & -106{,}9\, C\omega^2 & -194{,}2 & -1{,}304\, C\omega^2 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -194{,}2 & 0 & 194{,}2 \\
(\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} & -0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega) & -0{,}04365\, C\omega^2 & -1{,}304\, C\omega^2 & 194{,}2 & (\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} - 2{,}895\, C\omega^2
\end{vmatrix}
$$

DETERMINANTE II

$$
\begin{vmatrix}
\gamma^2 A_1 + \gamma\omega \frac{a}{c} F_3 + \omega^2 \frac{a}{c} \frac{F_3 - F_1}{2} & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2} & (\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} \\
\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2} & (\gamma+\omega)[\gamma A + \omega(A - C)] & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega) \\
(\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} & \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega) & (\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} - 2{,}895\, C\omega^2
\end{vmatrix}
$$

La racine $\gamma = \dfrac{C_0 - A_0}{A_0}\,\omega$ correspond à la nutation eulérienne libre de l'enveloppe et qui n'est pas affectée par l'existence du noyau liquide; la période est de 297 jours.

5° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide, considérant que $F_1 \neq F_3$

Lex équations du mouvement du système matériel seront les équations [16,1] et [16,3] avec $\zeta''' = \zeta$,

$$\zeta_1\left[\gamma^2 A_1 + \gamma\omega\frac{a}{c}F_3 + \omega^2\frac{a}{c}\,\frac{F_3 - F_1}{2}\right] + \zeta(\gamma+\omega)\gamma\frac{F_1 + F_3}{2} = 0$$

$$(\gamma+\omega)\left\{\zeta[\gamma A + \omega(A - C)] + \frac{F_1 + F_3}{2}\gamma\zeta_1\right\} = 0$$

Les solutions que l'on obtient, en égalant à zéro le déterminant de ce système, sont $\gamma = 0$, $\gamma = -\omega$, $\gamma = \dfrac{-\epsilon' A + (C - A)}{A_0}\,\omega$ et $\gamma = -(1+\epsilon'')\omega$, ϵ' étant une quantité négligée par rapport à l'excentricité et ϵ''' une quantité d'ordre de grandeur de l'excentricité. La période de nutation eulérienne libre sera ainsi égale à 272 jours.

6° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide dans lequel on considère $F_1 \neq F_3$ et où existe le déplacement ζ_0

Comme $\zeta''' = \zeta$, les équations du mouvement du système seront les équations [16,1], [16,3] et [16,6] soit :

$$\left[\gamma^2 A_1 + \gamma\omega\frac{a}{c}F_3 + \omega^2\frac{a}{c}\,\frac{F_3 - F_1}{2}\right]\zeta_1 + \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1 + F_3}{2}\zeta +$$
$$+ (\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2}\zeta_0 = 0$$

$$\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1 + F_3}{2}\zeta_1 + (\gamma+\omega)[\gamma A + \omega(A - C)]\zeta +$$
$$+\left[\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\,C\omega(\gamma+\omega)\right]\zeta_0 = 0$$

$$(\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2}\zeta_1 + \left[\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\,C\omega(\gamma+\omega)\right]\zeta +$$
$$+\left[(\gamma^2 - \omega^2)\frac{c}{a}\,\frac{F_1}{2} - 2{,}895\,C\omega^2\right]\zeta_0 = 0$$

L'équation qui permet de déterminer les périodes des oscillations libres, s'obtient en égalant à zéro le déterminant du système, appelé déterminant II de la page annexée.

La solution correspondant à la nutation eulérienne libre indique une période de 296 jours.

7° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide où $F_1 = F_3 = F$

Les équations du mouvement du système matériel seront les équations [16,1] à [16,5]. La période obtenue pour la nutation eulérienne libre est de 401 jours.

8° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide, où $F_1 \neq F_3$ et $\zeta_o = 0$

Le système des équations du mouvement est constitué par les équations [16,1] à [16,5], on obtient pour la période de nutation eulérienne libre 413 jours.

9° - Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide, ayant un déplacement ζ_o

Ceci est le cas le plus généralement considéré et les équations du mouvement du corps sont les équations [16,1] à [16,6]. La nutation eulérienne libre a dans ce cas, une période de 420 jours.

Pour une plus grande facilité de comparaison dans les résultats obtenus, il convient de grouper dans le tableau I, les valeurs déterminées pour les périodes de nutation eulérienne libre, en considérant différents modèles terrestres.

Tableau I

	Modèle terrestre	Période calculée (jours sidéraux)
1°	Le tout solide, sphéroïdal, rigide	305
2°	Le tout solide, sphéroïdal, élastique	319
3°	Sphéroïdal, enveloppe rigide, noyau liquide	272
4°	Enveloppe rigide (sphéroïdal), noyau liquide (sphérique)	297
5°	Sphéroïdal, enveloppe rigide, noyau liquide ($F_1 \neq F_3$)	272
6°	Sphéroïdal, enveloppe rigide, noyau liquide ($F_1 \neq F_3$, $\zeta_o \neq 0$)	296
7°	Sphéroïdal, enveloppe élastique, noyau liquide	401
8°	Sphéroïdal, enveloppe élastique, noyau liquide ($F_1 \neq F_3$, $\zeta_o = 0$)	413
9°	Sphéroïdal, enveloppe élastique, noyau liquide ($F_1 \neq F_3$, $\zeta_o \neq 0$)	420

Des valeurs écrites ci-dessus, on peut tirer les conclusions suivantes :
Quand on considère un modèle complètement solide, l'existence de l'élasticité augmente la période, en accord avec les modèles 1° et 2°, déduisant aussi ces résultats quand on compare les modèles terrestres 3° et 7°, constitués par une enveloppe et un noyau.

La comparaison des modèles complètement solides, avec les modèles possédant un noyau liquide, permet d'affirmer que l'existence d'un noyau liquide diminue la période de nutation eulérienne libre dès qu'on considère l'enveloppe comme étant rigide. Ce fait montre l'importance de la considération du noyau liquide dans les différents modèles terrestres.

L'importance de considérer le noyau comme étant sphéroïdal est indiquée par le modèle 4, dans lequel on conclut que la nutation eulérienne libre n'est pas affectée par l'existence d'un noyau sphérique.

Examinant les valeurs obtenues dans les 3^e, 5^e et 6^e modèles, on vérifie que l'existence du déplacement F_0 dans le noyau, augmente la période, à mesure que l'hypothèse que $F_1 \neq F_3$, ne provoque pas quelqu'altération dans la valeur de la période.

Les modèles terrestres dans lesquels on prend en considération l'élasticité de l'enveloppe, en supposant que le noyau est liquide, ont comme conséquence l'augmentation appréciable de la période, en vérifiant que la considération de l'élasticité de l'enveloppe compense le plus souvent l'influence du noyau liquide qui, isolément, provoque une diminution de la période de nutation eulérienne libre.

Pour les valeurs obtenues dans les 7^e, 8^e et 9^e modèles, l'importance fondamentale de la considération de l'élasticité se vérifie ainsi dans quelque modèle terrestre qui prétend représenter, approximativement, les conditions existantes à l'intérieur de la Terre.

Dans les modèles terrestres 7^e et 8^e dans lesquels on prend en considération l'élasticité, on vérifie que le fait de considérer $F_1 \neq F_3$ a pour conséquence une petite augmentation de la période.

La considération du déplacement ζ_0 dans le modèle terrestre 9^e, se traduit par une augmentation de la période, confirmant ainsi la conclusion déjà obtenue pour le modèle 6^e. Ce dernier modèle considéré est celui qui correspond au modèle terrestre le plus généralement utilisé, dans la présente recherche, c'est aussi celui qui conduit à une valeur plus grande pour la période de nutation eulérienne libre.

19. Comparaison entre les valeurs théoriques et observées de la période de nutation eulérienne libre.

Malgré les diverses tentatives faites au siècle passé, pour déterminer la période de nutation eulérienne libre, à partir d'observations astronomiques du phénomène des variations de latitude, ce fut seulement à la fin de ce siècle qu'on réussit à obtenir des résultats concluants, grâce aux remarquables recherches de Chandler. Une des principales difficultés rencontrées réside dans le fait qu'on recherchait des périodicités de l'ordre de grandeur de 305 jours alors que, conformément à ce qui se vérifie dans les travaux de Chandler, la période déterminée dans les observations est de l'ordre de 14 mois. L'explication de ce fait est indiquée dans le § antérieur et résulte de ce que la Terre présente une certaine élasticité.

Avec l'institution du Service International des Latitudes, les observations astronomiques des variations de latitude n'augmentent pas seulement en nombre mais aussi en précision. Aux premiers temps du Service International des Latitudes, on avait la conviction de ce que, à mesure que l'on augmenterait le nombre d'observations de variations de latitude, plus facilement apparaîtrait la détermination de la période nutation eulérienne libre. Les nombreuses recherches effectuées, basées sur les résultats obtenus par le Service International des Latitudes, ont cependant montré les difficultés existantes pour la détermination de la période, et, on n'a pas encore réussi à atteindre des résultats satisfaisants.

Les investigations plus récentes, ayan pour but la détermination de la période de nutation eulérienne libre et comprenant le plus grand nombre d'observations, sont celles de Jeffreys (1940), Nicolini (1950) et dernièrement les résultats provisoires de A.M.Walker et A.Young (1955).

La grande majorité des recherches faites sont basées sur l'analyse harmonique des séries d'observations, ce fut par exemple, le travail de Nicolini critiqué par Danjon et Guinot (1954) qui, à partir des mêmes observations, obtiennent des périodes différentes en vertu d'un groupement différent des séries d'observations. L'utilisation de l'analyse harmonique dans la détermination de la période de la nutation eulérienne libre présente ainsi certaines difficultés, excepté en tous cas les observations de Jeffreys (1940) et de Walker et Young (1955) qui se basent sur des modèles statistiques déterminés qui de toute façon sont aussi sujets à objections.

Les valeurs plus récentes, indépendamment du processus utilisé dans l'analyse des observations sont indiquées dans le tableau II.

Tableau II

Auteur	Intervalles des observations	Période déterminée
Jeffreys (1940)	1892 – 1933	447,9 ± 7,0 j.s.
	1908 – 1921	440,2 ± 5,9 j.s.
Nicolini (1950)	1923 – 1942	1,148 ± 0,003 ans
	1907 – 1917	1,200 ± 0,007 »
Danjon & Guinot (1954) .	1890 – 1924	435 ± 2 jours
	1929 – 1953	428 ± 2 »
Walker & Young (1955) .	1900 – 1935	462 ± 14,2 j.s.m.

Un simple examen des valeurs indiquées dans ce tableau montre les différences obtenues dans les résultats, à partir du même ensemble d'observations. Certains auteurs admettent pour cela l'hypothèse d'une variabilité de la période de nutation eulérienne libre. On doit en tous cas noter que les différences obtenues parmi les résultats des différents auteurs, malgré les processus variés utilisés dans leur détermination, n'excèdent pas 10 %

Afin qu'il soit possible de comparer les valeurs obtenues pour la période, à partir des observations, avec la valeur théorique déterminée dans le § 18, il est nécessaire de tenir compte des effets provenants de l'existence des océans, avec leurs marées et leurs courants, tout en considérant encore l'obstruction provoquée par les continents dans les mouvements de la masse liquide de la Terre. Ces différents effets furent étudiés par Larmor (1915) qui arriva à la conclusion que la valeur théorique de la période de nutation eulérienne libre devrait être augmentée, approximativement de 15 jours. De cette façon, on peut affirmer que la valeur obtenue pour la période, dans la présente recherche, est de l'ordre de 435 jours.

En comparant la valeur théorique ainsi déterminée, avec les valeurs observées dans le tableau II, on vérifie que la théorie développée dans cette recherche permet d'arriver à un résultat qui est en accord avec les résultats expérimentaux.

20. Résolution des équations du mouvement dans le cas de la nutation de période 6.800 jours.

Les oscillations forcées du système matériel sont obtenues en considérant que, dans les équations du mouvement, les termes contenant k sont différents de zéro. En supposant que la position des forces perturbatrices dans l'espace varie lentement au cours du temps, suivant un facteur e^{int}, on peut considérer que

$$\gamma = -\omega + n \qquad [20,1]$$

dans les équations du mouvement. Dans le cas qui est intéressant à présent de considérer, $\frac{n}{\omega}$ sera = à $-\frac{1}{6.800}$ correspondant à la nutation lunaire de période approximativement égale à 19 années.

Il convient de considérer, comme modèle de comparaison, le modèle terrestre correspondant au cas où l'on suppose la Terre rigide: on aura ainsi

$$k = -\frac{n(C\omega - An)}{C - A}\beta \qquad [20, 2]$$

$$\zeta = (1 + p)\beta$$

p étant égal à 0 lorsque l'on considère la Terre comme rigide.

Les différents modèles terrestres considérés seront :

1° - Corps solide, de forme sphéroïdale, rigide.

L'équation qui représente le mouvement du système matériel sera l'équation [16,3] qui prend la forme suivante :

$$(\gamma + \omega)\zeta[A\gamma + (A - C)\omega] = -(A - C)k \qquad [20,3]$$

En tenant compte des valeurs [20,2] de k et [20,1] de γ on obtient $\xi = \beta$, ce qui veut dire que quelque soit la valeur de $\frac{n}{\omega}$ l'amplitude du déplacement n'est pas modifiée, résultat que l'on pouvait espérer en vertu de ce que le corps est solide et rigide.

2° - Corps solide, de forme sphéroïdale, élastique.

Les équations du mouvement du système matériel seront les équations [16,3] et [16,4] qui auront l'aspect suivant :

$$(\gamma+\omega)[\gamma A + \omega(A-C)]\zeta + 0{,}2431\, C\omega(\gamma+\omega)\varphi = -(A-C)k \qquad [20,4]$$

$$0{,}2431\, C\omega(\gamma+\omega)\zeta - 423{,}5\, C\omega^2\varphi = -0{,}2431\, Ck \qquad [20,5]$$

La résolution de ce système d'équations permet de vérifier que $\xi = \beta$, ceci étant, l'existence de l'élasticité n'altère pratiquement pas l'amplitude du déplacement du corps; la valeur de ϕ est : $\phi = 0{,}0000257\ \beta$.

3° Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide.

Les équations qui dans ce cas représentent le mouvement sont les équations [16,1] et [16,3], en considérant que $\xi'' = \xi$, $F_1 = F_3 = F$

$$\gamma[\zeta_1(\gamma A_1 + \omega C_1) + \zeta F(\gamma + \omega)] = 0 \qquad [20,6]$$

$$(\gamma + \omega)\{\zeta[\gamma A + \omega(A - C)] + F\gamma\zeta_1\} = -(A - C)k \qquad [20,7]$$

En résolvant ce système d'équations, on obtient pour le déplacement ξ de l'enveloppe la valeur $\xi = (1 - 0{,}00647).\ \beta = 0{,}99353.\beta$ concluant ainsi que p = - 0,00647. Le déplacement du noyau sera $\xi_1 = -\ 0{,}0539\ \beta$.

4° Corps constitué par une enveloppe rigide, de forme sphéroïdale et d'un noyau liquide, supposé sphérique.

Comme $A_1 = C_1 = F$ et $\xi'' = \xi$, les équations [16,1] et [16,3] du mouvement du système matériel auront la forme suivante :

$$\gamma(\gamma+\omega)\, C_1(\zeta_1+\zeta)=0 \qquad [20,8]$$

$$(\gamma+\omega)\,\{\zeta[\gamma A+\omega(A-C)]+C_1\gamma\zeta_1\}=-(A-C)k \qquad [20,9]$$

On aura :

$$\zeta=\frac{1}{\gamma+\omega}\cdot\frac{-(A-C)k}{\gamma A+\omega(A-C)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(An-C\omega)\beta}{An-C\omega}=\beta$$

en concluant que l'amplitude du déplacement de l'enveloppe n'est pas modifiée par l'existence du noyau liquide, quelle que soit la valeur de période considérée. Comme on le vérifie, la valeur de p sera égale à zéro malgré que le noyau est liquide. Le déplacement du noyau $\xi_1 = -\beta$.

5° *Corps de forme sphéroïdale constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide où $F_1 \neq F_3$.*

Comme $\xi'' = \xi$ les équations du mouvement seront les équations [16,1] et [16,3]

$$\zeta_1\left[\gamma^2 A_1+\gamma\omega\frac{a}{c}F_3+\omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3-F_1}{2}\right]+\zeta(\gamma+\omega)\gamma\frac{F_1+F_3}{2}=0 \qquad [20,10]$$

$$(\gamma+\omega)\left\{\zeta[\gamma A+\omega(A-C)]+\frac{F_1+F_3}{2}\gamma\zeta_1\right\}=-(A-C)k \qquad [20,11]$$

La résolution de ce système permet de déterminer la valeur de

$$\zeta=\frac{-(A-C)k\left[\gamma^2 A_1+\gamma\omega\frac{a}{c}F_3+\omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3-F_1}{2}\right]}{(\gamma+\omega)\left\{\left[\gamma^2 A_1+\gamma\omega\frac{a}{c}F_3+\omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3-F_1}{2}\right][\gamma A+\omega(A-C)]-(\gamma+\omega)\gamma^2\left(\frac{F_1+F_3}{2}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{\gamma+\omega}\cdot\frac{-(A-C)k}{[\gamma A+\omega(A-C)]-\dfrac{(\gamma+\omega)\gamma^2\left(\frac{F_1+F_3}{2}\right)^2}{\gamma^2 A_1+\gamma\omega\frac{a}{c}F_3+\omega^2\frac{a}{c}\frac{F_3-F_1}{2}}}$$

tenant compte des valeurs [20,1] et [20,2] de γ et k, respectivement, on obtient :

$$=\frac{\beta}{1-\dfrac{n(n^2-2n\omega+\omega^2)\left(\frac{F_1+F_3}{2}\right)^2}{(An-C\omega)\left\{A_1n^2+n\omega\left(\frac{a}{c}F_3-2A_1\right)+\omega^2\left[A_1-\frac{a}{c}F_3+\frac{a}{c}\frac{F_3-F_1}{2}\right]\right\}}} \qquad [20,12]$$

Comme $\frac{n}{\omega}=-\frac{1}{6800}<<1$, on peut simplifier cette expression, et on obtient le résultat suivant: $\xi=(1-0{,}00648)\cdot\beta=0{,}99352\cdot\beta$, de cette manière la valeur de p sera dans ce cas - 0,00648. Dans le noyau, le déplacement $\xi_1 = 0{,}0605\,\beta$.

6º *Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide où on considère $F_1 \neq F_3$ et où existe le déplacement ξ_o.*

Vu que $\xi' = \xi$, les équations du mouvement du système matériel sont les équations [16,1], [16,3] et [16,6] qui présentent la forme suivante

$$\left[\gamma^2 A_1 + \gamma\omega \frac{a}{c} F_3 + \omega^2 \frac{a}{c} \frac{F_3 - F_1}{2}\right]\zeta_1 + \\ + \gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2}\zeta + (\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2}\zeta_0 = 0 \qquad [20, 13]$$

$$\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1+F_3}{2}\zeta_1 + (\gamma+\omega)[\gamma A + \omega(A-C)]\zeta + \\ + \left[\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega)\right]\zeta_0 = -(A-C)k \qquad [20, 14]$$

$$(\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2}\zeta_1 + \left[\gamma(\gamma+\omega)\frac{F_1}{2} - 0{,}00693\, C\omega(\gamma+\omega)\right]\zeta + \\ + \left[(\gamma^2-\omega^2)\frac{c}{a}\frac{F_1}{2} - 2{,}895\, C\omega^2\right]\zeta_0 = 0{,}00661\, Ck \qquad [20, 15]$$

La résolution de ce système permet de déterminer la valeur suivante pour le déplacement de l'enveloppe: $\xi = 0{,}9939\ \beta$ en vérifiant que p = - 0,00611. Les valeurs des autres inconnues sont : $\xi_1 = 0{,}0605\ \beta$ et $\xi_o = 0{,}00000303\ \beta$.

7º *Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide où $F_1 = F_3 \neq F$.*

Les équations du mouvement du corps seront les équations [16,1] à [16,5]. La résolution de ce système d'équations permet de déterminer :

$$\zeta = 0{,}9956\,\beta \qquad p = -0{,}00443 \qquad \zeta_1 = 0{,}0592\,\beta$$
$$\zeta'' = 0{,}976\,\beta \qquad \varphi = 0{,}0000635\,\beta \qquad \psi = 0{,}000100\,\beta.$$

8º *Corps de forme sphéroïdale constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide où $F_1 = F_3$*

Le système d'équations du mouvement est constitué par les équations [16,1] à [16,5], en déterminant pour le déplacement de l'enveloppe, la valeur $\xi = 0{,}9956\ \beta$. On vérifie ainsi que dans ce modèle p est = à - 0,00443. Les valeurs restantes sont

$\xi_1 = 0{,}0592\ \beta$, $\xi'' = 0{,}976\ \beta$, $\phi = 0{,}0000635\ \beta$ et $\psi = 0{,}000100\ \beta$.

9º *Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide où existe le déplacement* ξ_o

Ce modèle correspond au cas plus général, considéré dans ce travail, les équations du mouvement étant constituées par les équations [16,1] à [16,6]. La valeur déterminée par le déplacement de l'enveloppe est $\xi = 0{,}99866\ \beta$ à laquelle correspond la valeur suivante de p = - 0,00134 Les valeurs des autres inconnues sont :

$$\zeta_1 = 0{,}0702\ \beta \qquad \zeta'' = 1{,}155\ \beta \qquad \zeta_0 = 0{,}000910\ \beta$$

$$\varphi = 0{,}0000660\ \beta \qquad \psi = 0{,}000107\ \beta$$

Les valeurs obtenues comme solutions des équations du mouvement, correspondantes aux différents modèles terrestres, sont réunies dans le tableau III

Tableau III

Modelo terrest.	ζ	p	ζ_1	ζ''	ζ_0	φ	ψ
1.º	β	0	—	—	—	—	—
2.º	β	0	—	—	—	0,0000257 β	—
3.º	0,99353 β	−0,00647	−0,0539 β	—	—	—	—
4.º	β	0	$-\beta$	—	—	—	—
5.º	0,99352 β	−0,00648	0,0605 β	—	—	—	—
6.º	0,99389 β	−0,00611	0,0605 β	—	0,00000303 β	—	—
7.º	0,99557 β	−0,00443	0,0592 β	0,976 β	—	0,0000635 β	0,000100 β
8.º	0,99557 β	−0,00443	0,0592 β	0,976 β	—	0,0000635 β	0,000100 β
9.º	0,99866 β	−0,00134	0,0702 β	1,155 β	0,000910 β	0,0000660 β	0,000107 β

L'examen des valeurs inscrites dans le tableau III permet de tirer les conclusions suivantes :

Dans le cas des modèles terrestres 1º et 2º, que l'on considère complètement solides, on vérifie que l'existence de l'élasticité n'altère pas la valeur de p, le modèle terrestre 2º considéré, se comportant comme si le corps était rigide.

Quand le modèle terrestre possède un noyau liquide, supposé sphérique, on vérifie ainsi que la valeur de p ne s'altère pas par rapport aux valeurs obtenues avec les modèles 1º et 2º. On vérifie ainsi que tous les modèles terrestres considérés comme ayant un noyau sphérique, ne présentent pas de variations d'amplitude du déplacement de l'enveloppe par rapport aux modèles terrestres considérés comme étant entièrement solides. Les valeurs obtenues pour p, dans les modèles indiqués 1º, 2º et 4º, montrent que le déplacement de l'enveloppe est indépendant de la période de nutation considérée ceci étant, dans le cas des modèles complètement solides ou possédant un noyau sphérique, il n'y a pas de variation d'amplitude du déplacement de l'enveloppe.

La considération des modèles terrestres, formés d'une enveloppe et d'un noyau liquide (excepté le cas du noyau sphérique), a comme conséquence la diminution de l'amplitude du déplacement de l'enveloppe, les valeurs de p étant toujours négatives.

Dans le cas des modèles terrestres constitués par une enveloppe et un noyau liquide, en comparant les valeurs déterminées pour ξ, en supposant l'enveloppe rigide (3°, 5° et 6°) ou élastique (7°, 8° et 9°) on vérifie que l'existence de l'élasticité provoque une augmentation de valeur de ξ. L'influence de l'élasticité dans les résultats obtenus provient du fait que l'on considère des noyaux liquides sphéroïdaux, vu que, comme on l'a dit antérieurement, dans les modèles terrestres solides ou à noyau liquide sphérique, l'élasticité n'occasionne aucune variation d'amplitude.

L'hypothèse que $F_1 \neq F_3$, dans le noyau liquide, ne provoque pas de variations par rapport aux valeurs obtenues quand on considère $F_1 = F_3$, soit qu'on considère l'enveloppe comme rigide (modèles 3° et 5°) soit comme élastique (modèles 7° et 8°).

L'existence du déplacement ξ_0 dans le noyau a comme conséquence une augmentation dans la valeur d'amplitude du déplacement ξ de l'enveloppe, conformément à ce qu'on vérifie en comparant les résultats indiqués par les modèles 6° et 9°, avec les résultats des modèles 5° et 8°. L'augmentation est plus accentuée dans le cas du modèle terrestre 9°, qui correspond au modèle le plus complexe considéré dans cette recherche.

21. Considérations concernant les différentes valeurs théoriques et observées, de la constante de nutation.

L'amplitude de la nutation en obliquité, dont la période est de 6.800 jours, est désignée habituellement comme la constante de nutation. Le fait que cette nutation possède une période de l'ordre de 19 ans a comme conséquence la nécessité d'effectuer des séries d'observations astronomiques assez prolongées, afin que l'on puisse embrasser plusieurs périodes de cette constante. Il arrive cependant que quelques unes des valeurs déterminées pour la constante de nutation, à partir d'observations astronomiques, se rapportent, à intervalles de temps inférieurs, à deux périodes complètes de cette nutation ; malgré ce qui a été dit, les différentes valeurs obtenues présentent une concordance, ce qui est à signaler en raison de ce que les méthodes d'observation utilisées sont assez différentes les unes des autres.

Les principaux résultats déterminés sont résumés dans le tableau IV.

Tableau IV

Auteur	Durée des observations	Valeur de la constante de nutation
Newcomb (1895) . .	Utilisant les observations anciennes de grande confiance.	9'',210 ± 0'',008
Przybyllok (1920) . .	1900 – 1915	9'',2069 ± 0'',0030
Spencer Jones (1939) . .	1911 – 1936	9'',2066 ± 0'',0055
Morgan (1943)	1903 – 1925	9'',206 ± 0'',007

La valeur déterminée par Newcomb (1895) est basée sur les observations effectuées durant des périodes de nutation différentes et par différentes méthodes d'observation, mais elle a l'inconvénient commun aux observations astronomiques effectuées il y a plus d'un siècle, c'est le peu de précision par rapport aux observations modernes.

La valeur déterminée par Przybyllok se base sur les premières années d'observations du Service International de Latitudes, lorsqu'il y avait le plus grand nombre de stations astronomiques consacrées à l'observation des variations de latitude. Elle a encore la supériorité sur les observations qui ont été faites suivant les mêmes procédés et qui présentent une bonne précision. Elle présente l'inconvénient d'un intervalle d'observations portant sur un petit nombre d'années.

Sont actuellement en cours, différentes recherches ayant pour but de déduire la valeur de la constante de nutation à partir de toutes les observations faites par le Service International de Latitudes, depuis ses débuts.

La détermination de Spencer Jones (1939) se base sur les observations faites à Greenwich avec le "Cookson floating telescope". L'avantage de ces observations est qu'elles sont toutes effectuées avec le même instrument et en utilisant toujours la même méthode d'observation.

La détermination faite par Morgan (1943) se base aussi sur les observations faites avec le même instrument et par le même processus (observations méridiennes de 15 étoiles circumpolaires) durant un certain intervalle de temps.

Les deux dernières déterminations de la constante de nutation présentent l'inconvénient de ne pas contenir au moins, deux périodes complètes de nutation.

Malgré les déterminations plus récentes donnant pour valeur la plus probable de la constante de nutation 9",207, on continue cependant à adopter dans tous les calculs astronomiques pour valeur de cette constante fondamentale de l'Astronomie, la valeur 9",210 obtenue par Newcomb.

Les déterminations théoriques de la constante de nutation sont basées sur la valeur de la constante de précession et sur la valeur de la masse de la Lune. A partir des valeurs de ces quantités déterminées par Newcomb, on déduit la valeur 9",220 pour la valeur théorique de la constante de nutation. La valeur plus récente est 9",2272 ± 0",0008, déterminée par Spencer Jones (1941), à partir des observations de Eros.

Ces déterminations théoriques de la constante de nutation sont faites à partir de l'hypothèse que la Terre se comporte comme si elle était rigide.
Les connaissances actuelles concernant l'intérieur de la Terre, obtenues principalement à partir de données sismologiques, indiquent cependant que la Terre ne se comporte pas comme un corps rigide. Le rapport entre les valeurs observée et calculée de la constante de nutation, indique ainsi le comportement de la Terre vis à vis de la nutation de période égale à 6.800 jours.

A partir des valeurs observée (9",210) et théorique (9",220), obtenues par Newcomb, on déduit pour p la valeur - 0,0011. Considérant la valeur observée (9",207), obtenue à partir des observations plus récentes, et la valeur théorique (9",227), obtenue par Spencer Jones, on déduit pour la valeur de p la valeur - 0,0022. On conclut ainsi que la valeur de p, déterminée à partir d'une théorie qui prétend expliquer le désaccord existant entre la valeur théorique et la valeur observée, devra être comprise entre les valeurs indiquées ci-dessus.

Des valeurs de p écrites dans le Tableau III et obtenues à partir des différents modèles terrestres, on conclut que le modèle terrestre 9° considéré, permet de déterminer pour p une valeur qui est dans les limites indiquées précédemment.

22. Résolution des équations du mouvement dans le cas de la nutation de période de 13,7 jours.

La nutation lunaire de période égale à 13,7 jours est désignée couramment comme nutation bimensuelle. Les oscillations forcées du système matériel, correspondant à cette nutation, sont obtenues en considérant les équations du mouvement du § 16, en supposant que :

$$k = 0 \text{ et } \gamma = -\omega + n \text{ où } \frac{n}{\omega} = \frac{1}{13,7}$$

Dans la résolution des équations du mouvement, il sera nécessaire de considérer les termes en $\frac{n^2}{\omega^2}$, en raison de ce que la valeur de $\frac{n}{\omega}$ n'est pas très petite par rapport à l'unité. On considère aussi comme modèle de comparaison, le modèle correspondant à la valeur de k indiquée dans l'expression [20,1].

Les différents modèles terrestres considérés seront :

1° Corps solide, de forme sphéroïdale, rigide.

Le mouvement du système matériel sera représenté par l'équation [16,3] qui aura la forme indiquée dans [20,3].

Tenant compte des valeurs de k et γ, la solution de cette équation sera $\xi = \beta$, indiquant que la valeur obtenue est indépendante de la période de nutation.

2° Corps solide, de forme sphéroïdale, élastique.

Le mouvement du système matériel sera représenté par les équations [16,3] et [16,4], présentant l'aspect indiqué par les équations [20,4] et [20,5].

A partir des équations [20,4] et [20,5], on détermine la valeur $\xi = \beta$ et donc p = 0, en vérifiant que l'existence de l'élasticité n'a pas d'influence sur la valeur de ξ qui continue à être indépendante de la période de nutation. Le déplacement radial à la surface de l'enveloppe $\phi = -0,0118\,\beta$

3º *Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe rigide et d'un noyau liquide.*

Les équations qui représentent le mouvement du corps sont les équations [20,6] et [20,7]. La valeur obtenue pour ξ est :

$$\zeta = \frac{\beta}{1 - \frac{C_1(2A_1 - C_1)n(n-\omega)}{[(C_1 - A_1)\omega + A_1 n](An - C\omega)}} \qquad [22,1]$$

En remplaçant dans cette expression les valeurs numériques connues, on obtient $\xi = 1{,}115\ \beta$ et par conséquent p = 0,115. On vérifie ainsi que l'amplitude du déplacement de l'enveloppe augmente dans ce cas. Dans le noyau ξ_1 sera égal à - 1,080 β.

4- *Corps constitué d'une enveloppe rigide, de forme sphéroïdale et d'un noyau liquide supposé sphérique.*

Les équations du mouvement du système matériel sont les équations [20,8] et [20,9], en vérifiant que la valeur de ξ est indépendante de la période de nutation considérée. Le déplacement du noyau est $\xi_1 = -\beta$.

5º *Corps de forme sphéroïdale constitué d'une enveloppe rigide et d'un noyau liquide dans lequel $F_1 \neq F_3$*

Les équations du mouvement du corps sont les équations [20,10] et [20,11], la valeur de ξ étant donnée par l'équation [20,12]. En remplaçant la valeur de $\frac{n}{\omega} = \frac{1}{13{,}7}$ dans l'équation [20,11] on obtient $\xi = 1{,}115\ \beta$ et p = 0,115. La valeur de $\xi_1 = -1{,}074\ \beta$.

6º *Corps de forme sphéroïdale constitué d'une enveloppe rigide et d'un noyau liquide (dans lequel on considère $F_1 \neq F_3$ et où existe le déplacement ξ_0)*

Le système des équations du mouvement du corps est constitué par les équations [20,13], [20,14] et [20,15]. La valeur obtenue pour ξ est 1,105 β et par conséquent p = 0,105. Les valeurs des autres inconnues sont :

$$\xi_1 = -0{,}991\ \beta \qquad \xi_0 = 0{,}00119\ \beta$$

7º *Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe élastique et un noyau liquide (avec $F_1 = F_3$).*

Les équations [16,1] à [16,5] constituent les équations du mouvement du système, à partir desquelles se déterminent les valeurs

$\xi = 1{,}0395\ \beta$ (en faisant p = 0,0395), $\xi_1 = -13{,}47\ \beta$, $\xi'' = 13{,}95\ \beta$, $\phi = -0{,}0375\ \beta$ et $\psi = -0{,}0665\ \beta$

8º *Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe élastique et d'un noyau liquide (avec $F_1 \neq F_3$).*

Les équations [16,1] à [16,5] constituent les équations du mouvement du système, à partir desquelles se déterminent les valeurs

$$\xi = 1{,}0395\,\beta \qquad p = 0{,}0395 \qquad \zeta_1 = -13{,}47\,\beta$$
$$\zeta'' = 13{,}95\,\beta \qquad \varphi = -0{,}0375\,\beta \qquad \psi = -0{,}0665\,\beta$$

9º *Corps de forme sphéroïdale constitué d'une enveloppe élastique et d'un noyau liquide dans lequel existe le déplacement ξ_o*

Les équations du mouvement du système matériel sont les équations [16,1] à [16,6], on obtient pour la valeur de ξ la valeur 1,0649 β et par conséquent p = 0,0649. Ce modèle terrestre correspond au cas le plus généralement considéré.
Les valeurs des autres inconnues sont :

$$\zeta_1 = -6{,}851\,\beta \qquad \zeta'' = 20{,}66\,\beta \qquad \zeta_0 = 0{,}0268\,\beta$$
$$\varphi = -0{,}0404\,\beta \qquad \psi = -0{,}0741\,\beta$$

On peut réunir dans le Tableau V les valeurs obtenues pour les inconnues, correspondant aux différents modèles terrestres.

Tableau V

Modèle terrest.	ξ	p	ζ_1	ζ''	ζ_0	φ	ψ
1.º	β	0	—	—	—	—	—
2.º	β	0	—	—	—	$-0{,}0118\beta$	—
3.º	$1{,}115\beta$	0,115	$-1{,}080\beta$	—	—	—	—
4.º	β	0	$-\beta$	—	—	—	—
5.º	$1{,}115\beta$	0,115	$-1{,}074\beta$	—	—	—	—
6.º	$1{,}105\beta$	0,105	$-0{,}991\beta$	—	$0{,}00119\beta$	—	—
7.º	$1{,}0395\beta$	0,0395	$-13{,}47\beta$	$13{,}95\beta$	—	$-0{,}0375\beta$	$-0{,}0665\beta$
8.º	$1{,}0395\beta$	0,0395	$-13{,}47\beta$	$13{,}95\beta$	—	$-0{,}0375\beta$	$-0{,}0665\beta$
9.º	$1{,}0649\beta$	0,0649	$-6{,}851\beta$	$20{,}66\beta$	$0{,}0268\beta$	$-0{,}0404\beta$	$-0{,}0741\beta$

La comparaison des valeurs indiquées dans ce Tableau permet de tirer les conclusions suivantes :

Les modèles terrestres où on suppose la Terre comme étant solide, ceci étant, les modèles 1º et 2º montrent que la valeur de ξ obtenue est indépendante de la période de nutation. L'existence de l'élasticité dans le modèle 2º, ne provoque aucune modification dans le résultat final.

Dans le cas où la Terre est considérée comme étant constituée d'une enveloppe et d'un noyau supposé sphérique (modèle 4°), on vérifie aussi que la valeur de ξ est indépendante de la période de nutation.

Les conclusions obtenues relatives aux modèles 1°, 2° et 4° sont par conséquent identiques à celles formulées dans le § 20.

En examinant le tableau antérieur, on vérifie que l'examen des modèles terrestres, formés d'une enveloppe et d'un noyau liquide, a comme conséquence l'augmentation d'amplitude du déplacement ξ de l'enveloppe, ceci étant, les valeurs de p sont toujours positives.

La considération de l'élasticité (modèles 7°, 8° et 9°), dans les modèles terrestres composés d'une enveloppe et d'un noyau sphéroïdal, provoque une diminution d'amplitude de ξ en comparaison avec les modèles où on considère l'enveloppe comme rigide (modèles 3°, 5° et 6°). On vérifie ainsi l'influence de l'élasticité dans ce type de modèles terrestres.

Les valeurs obtenues pour ξ dans les modèles terrestres où on considère $F_1 = F_3$ (modèles 3° et 7°) ne diffèrent pratiquement pas des valeurs obtenues dans les modèles terrestres où on considère $F_1 \neq F_3$ (modèles 5° et 8°), n'ayant aucune influence appréciable de l'élasticité.

En comparant les modèles terrestres où on n'a pas considéré le déplacement ξ_o (modèles 5° et 8°) avec les modèles où on a considéré ξ_o (modèles 6° et 9°), on vérifie que le fait de considérer $\xi_o \neq 0$ provoque une petite variation dans la valeur de l'amplitude du déplacement ξ, cette variation étant un peu plus accentuée dans les modèles où on prend en considération l'élasticité (modèles 8° et 9°).

L'examen des valeurs obtenues pour les autres grandeurs permet d'arriver à des conclusions équivalentes aux conclusions obtenues pour le déplacement de l'enveloppe.

23. Possibilité de comparaison des valeurs théoriques de la nutation bimensuelle avec les valeurs observées.

On considère la nutation lunaire dont la période est approximativement égale à deux semaines comme une nutation à courte période. En considérant la Terre comme rigide, on peut calculer la valeur théorique de cette nutation, en déduisant pour la valeur d'amplitude de la nutation en obliquité la valeur 0",0884.

Le fait que l'amplitude de cette nutation est petite, a comme conséquence la difficulté de déterminer sa valeur à partir d'observations astronomiques. Les observations astronomiques qui pourront permettre la détermination de cette nutation, devront être des observations possédant une haute précision et, pour cela, on devra utiliser des méthodes d'observation et des instruments astronomiques qui offrent des garanties pour obtenir la précision nécessaire.

Pour ces raisons, il y a eu peu de recherches ayant pour fin de déterminer la valeur de cette nutation à partir d'observations astronomiques.

En analysant les observations effectuées avec l'instrument zénital photographique de Washington, durant l'intervalle 1931-1952, Morgan (1952) a interprêté les résultats obtenus comme indiquant qu'il n'existe aucune correction à la valeur théorique calculée.

A partir des observations de variation de latitude, effectuées dans les stations de Carloforte et Ukiah, appartenant au Service International de Latitudes, durant l'intervalle de temps 1899-1934, Fedorov (1954) a déterminé la valeur 0",096 pour l'amplitude de la nutation bimensuelle en obliquité; cependant, dans la communication citée, on ne donne pas de détails suffisants sur la manière grâce à laquelle furent effectués les calculs pour la détermination de cette valeur à partir des observations.

En admettant comme valeur observée, la valeur déterminée par Fedorov le rapport entre les valeurs observée (0",096) et théorique (0",0884) indique pour valeur de l'amplitude du déplacement de l'enveloppe 1,086. En comparant cette valeur avec les valeurs de ξ inscrites dans le Tableau V, on vérifie que la différence par rapport aux modèles 7° et 8° est de l'ordre de 4 % et par rapport au modèle 9°, la différence est de l'ordre de 2 %.

En raison cependant du manque de données obtenues à partir des observations, pour les autres raisons indiquées, il n'est pas possible d'effectuer une comparaison qui mérite une relative confiance, entre les valeurs observées et les valeurs théoriques..

En supposant que le modèle terrestre le plus convenable soit le modèle 9°, conformément à ce qui fut vérifié dans le cas de la constante de nutation, on peut prévoir que la nutation bimensuelle en obliquité devra avoir une amplitude de 0",0941. Conformément à ce qui fut déjà dit, en fonction de la faible valeur de l'amplitude, il sera difficile de vérifier la prévision mentionnée ci-dessus.

24. Considérations à propos de la solution des équations du mouvement dans le cas de la nutation de période de 183 jours.

La nutation de période égale à 183 jours est causée par le Soleil; on l'appelle ainsi nutation solaire semi- annuelle. La détermination des oscillations forcées du système matériel, correspondant à cette nutation, s'obtient en résolvant les équations du mouvement du § 16 dans le cas où $k \neq 0$ et $\gamma = -\omega + n$ avec maintenant $\frac{n}{\omega} = \frac{1}{183}$

Comme modèle de comparaison, on considère le modèle terrestre auquel correspond la valeur de k définie par [20,2]. Il est intéressant d'examiner les différents modèles terrestres considérés pour les nutations déjà analysées et qui sont :

1º Corps solide, de forme sphéroïdale, rigide.

L'équation du mouvement du système matériel sera l'équation [20,3], en obtenant la conclusion déjà connue de ce que la valeur du déplacement ξ est indépendante de la période de nutation.

2º Corps solide, de forme sphéroïdal, élastique.

Les équations qui représentent le mouvement du corps sont les équations [20,4] et [20,5]. La valeur déterminée pour le déplacement de l'enveloppe est $\xi = \beta$, en vérifiant on verra une fois de plus que l'élasticité n'influence pratiquement pas la valeur de ξ. On aura ϕ = - 0,000950 β.

3º Corps de forme sphéroïdale, constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide.

Le mouvement du système matériel est représenté par les équations [20,6] et [20,7]. La valeur de ξ est donnée par [22,1] et en introduisant dans cette expression les valeurs numériques se référant à la nutation solaire semi-annuelle, on obtient ξ = 1,0786 β, p = 0,0786.
Le déplacement du noyau est ξ_1 = - 0,736 β.

4º Corps constitué d'une enveloppe rigide de forme sphéroïdale et d'un noyau liquide, supposé sphérique.

Les équations du mouvement du corps sont les équations [20,8] et [20,9], en déduisant aussi que la valeur de ξ est indépendante de la période de nutation, on aura $\xi_1 = -\beta$.

5º Corps de forme sphéroïdale constitué par une enveloppe rigide et un noyau liquide où $F_1 \neq F_3$.

Les équations du mouvement du corps sont les équations [20,10] et [20,11]. La valeur de ξ est donnée par l'expression [20,12] et, substituant par les valeurs numériques se référant à la nutation considérée dans ce paragraphe, on obtient ξ = 1,0784 β. Le déplacement du noyau ξ_1 = - 0,732 β.

6º Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe rigide et d'un noyau liquide (où on considère $F_1 \neq F_3$ et où existe le déplacement ξ_0).

Le mouvement du corps est représenté par les équations [20,13], [20,14] et [20,15]. Les valeurs obtenues sont :

$$\xi = 1{,}0781\ \beta \quad p = 0{,}0781 \quad \xi_1 = -0{,}730\ \beta \quad \xi_0 = 0{,}0000388\ \beta$$

7º Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe élastique et d'un noyau liquide (avec $F_1 \neq F_3$).

Le système des équations [16,1] à [16,5] représente le mouvement du corps. On obtient les valeurs suivantes :

$$\zeta = 1{,}0429\,\beta \qquad p = 0{,}0429 \qquad \zeta_1 = -1{,}335\,\beta \qquad \zeta'' = 1{,}962\,\beta$$
$$\varphi = -0{,}00273\,\beta \qquad \psi = -0{,}00473\,\beta$$

8° *Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe élastique et d'un noyau liquide (avec $F_1 \neq F_3$.*

Le mouvement du système matériel est représenté par les équations [16,1] à [16,5] à partir desquelles se déterminent les valeurs :

$$\zeta = 1{,}0429\,\beta \qquad p = 0{,}0429 \qquad \zeta_1 = -1{,}335\,\beta \qquad \zeta'' = 1{,}962\,\beta$$
$$\varphi = -0{,}00273\,\beta \qquad \psi = -0{,}00473\,\beta$$

9° *Corps de forme sphéroïdale, constitué d'une enveloppe élastique et d'un noyau liquide où existe le déplacement ξ_o*

Ce modèle est le modèle le plus complexe considéré et les équations du mouvement sont les équations [16,1] à [16,6]. Les valeurs obtenues sont :

$$\zeta = 1{,}0801\,\beta \qquad p = 0{,}0801 \qquad \zeta_1 = -0{,}654\,\beta \qquad \zeta'' = 1{,}042\,\beta$$
$$\zeta_0 = -0{,}00553\,\beta \qquad \varphi = -0{,}00296\,\beta \qquad \psi = -0{,}00533\,\beta$$

Pour la facilité de la comparaison, on a transcrit dans le tableau VI les valeurs obtenues pour les différents modèles terrestres.

Tableau VI

Modèle terrest.	ζ	p	ζ_1	ζ''	ζ_0	φ	ψ
1.°	β	0	—	—	—	—	—
2.°	β	0	—	—	—	$-0{,}000950\,\beta$	—
3.°	$1{,}0786\,\beta$	0,0786	$-0{,}736\,\beta$	—	—	—	—
4.°	β	0	$-\beta$	—	—	—	—
5.°	$1{,}0784\,\beta$	0,0784	$-0{,}732\,\beta$	—	—	—	—
6.°	$1{,}0781\,\beta$	0,0781	$-0{,}730\,\beta$	—	$0{,}0000388\,\beta$	—	—
7.°	$1{,}0429\,\beta$	0,0429	$-1{,}335\,\beta$	$1{,}962\,\beta$	—	$-0{,}00273\,\beta$	$-0{,}00473\,\beta$
8 °	$1{,}0429\,\beta$	0,0429	$-1{,}335\,\beta$	$1{,}962\,\beta$	—	$-0{,}00273\,\beta$	$-0{,}00473\,\beta$
9.°	$1{,}0801\,\beta$	0,0801	$-0{,}654\,\beta$	$1{,}042\,\beta$	$-0{,}00553\,\beta$	$-0{,}00296\,\beta$	$-0{,}00533\,\beta$

Des valeurs inscrites dans le tableau VI, on peut conclure :

Les modèles terrestres 1° et 2°, où l'on considère un corps solide, indiquent que les valeurs de ξ ne varient pas avec la période de nutation. L'existence de l'élasticité (modèle 2°) n'engendre pratiquement aucune modification dans la valeur de ξ, la valeur de ϕ étant également petite par rapport aux autres modèles (7°, 8° et 9°).

Dans le modèle 4°, considéré comme ayant un noyau liquide, du fait que le noyau est sphérique, il n'existe pas de modification dans la valeur de ξ, le déplacement ξ_1 de l'enveloppe ne variant pas non plus.

Les modèles terrestres de forme sphéroïdale, constitués d'une enveloppe et d'un noyau liquide, conduisent à des valeurs positives de p, donnant une augmentation de l'amplitude par rapport au modèle rigide pris pour comparaison. Les valeurs de l'amplitude du déplacement ξ du noyau varient aussi, mais sa variation est affectée par l'existence d'autres déplacements.

L'existence de l'élasticité dans les modèles 7° et 8° provoque une diminution de l'amplitude de ξ et une augmentation de l'amplitude de ξ_1 par rapport aux modèles considérés comme rigides (3°, 5° et 6°) mais dans le modèle 9° cela n'arrive pas en vertu de l'existence du déplacement additionnel ξ_o dans le noyau.

Le fait de considérer $F_1 = F_3$ (modèles 3° et 7°) où $F_1 \neq F_3$ (modèles 5° et 8°) ne provoque aucune variation dans les valeurs obtenues pour les inconnues, l'élasticité n'exerçant aucune influence.

L'influence du déplacement ξ_o du noyau est plus accentuée dans le modèle terrestre 9°, où on a considéré le corps comme élastique, que dans le modèle 6° où le corps est considéré comme rigide. Alors que la valeur de ξ_o est assez petite dans le modèle 6°, on vérifie que la valeur de ce déplacement dans le modèle 9° est déjà appréciable. Il en résulte que les amplitudes de ξ et ξ_1 varient plus quand on compare les modèles 8° et 9° que lorsqu'on compare les modèles 5° et 6°, c'est-à-dire quand on compare les modèles où existe le déplacement ξ_o (modèles 6° et 9°) avec les modèles où n'existe pas ce déplacement (modèles 5° et 8°).

*

* *

La valeur théorique de l'amplitude de la nutation semi-annuelle en obliquité est 0",5522, partant de l'hypothèse que la Terre est un corps rigide. En raison de la petite amplitude de cette nutation, il n'a pas été effectué d'observations astronomiques afin de déterminer sa valeur, vu les difficultés déjà indiquées dans le § 23.

Parmi les sujets se référant aux nutations, on note l'existence de nombreuses observations ayant pour but la détermination de la constante de nutation, mais on note une certaine carence d'observations astronomiques plus précises qui permettraient de déterminer les valeurs des nutations de moindre amplitude, parmi lesquelles la nutation semi-annuelle.

A cause de cela, il n'est pas possible de comparer les valeurs théoriques avec les valeurs déterminées à partir d'observations, les calculs effectués dans ce paragraphe permettant en tous cas de prévoir une amplitude de 0,"5964 pour la nutation semi-annuelle déterminée à partir d'observations astronomiques. La valeur indiquée se réfère au modèle terrestre 9°, subissant de petites variations par rapport aux autres modèles considérés.