

MAREES TERRESTRES

BULLETIN D'INFORMATIONS

N° 39

1 avril 1965

Association Internationale de Géodésie

Commission Permanente des Marées Terrestres

Editeur : Prof. Paul M E L C H I O R
Observatoire Royal de Belgique
3, Avenue Circulaire
Bruxelles 18.

Bulletin d'Information des Marées Terrestres n° 39.

Table des Matières

G.Y. LEONTIEV (<i>Traduction</i>) Les charges atmosphériques et hydrologiques temporaires sur la surface de la Terre et leur influence sur le nivellement de haute précision	1365
M.S. MOLODENSKII (<i>Traduction</i>) Influence de la viscosité sur la phase des marées terrestres	1372
You S.D. DOBROCHOTOV, V.Y. LISSENKO (<i>Traduction</i>) Observations des variations de marées de la force de pesanteur à Kiev	1385
G. MITTELSTRASS Eine Bemerkung zur direkten Eichung von Horizontalpendeln	1399
R. MAAZ Zur Bestimmung der Shida'schen Zahl aus Extensometeraufzeichnungen	1402
E. FEDOROV (<i>Traduction</i>) Sur la nature des variations bimensuelles de latitude	1438
E.I. EVTOUCHENKO (<i>Traduction</i>) L'onde bimensuelle dans les variations de latitude de la station de Ukiah	1438
A. Ia. ORLOV (<i>Traduction</i>) Sur les formules de la nutation en déclinaison	1439
E.I. EVTOUCHENKO (<i>Traduction</i>) L'onde lunaire semi-mensuelle dans les variations de latitude de Carloforte de 1922 à 1934	1440
E.P. FEDOROV et E.I. EVTOUCHENKO (<i>Traduction</i>) Variations lunaires semi-mensuelles de latitude d'après les observations de Carloforte et Ukiah de 1899 à 1934	1442
E.I. EVTOUCHENKO (<i>Traduction</i>) L'onde lunaire semi-mensuelle dans les observations de latitude à la station de Mizusawa	1443

LES CHARGES ATMOSPHERIQUES ET HYDROLOGIQUES TEMPORAIRES SUR LA SURFACE DE LA TERRE ET LEUR INFLUENCE SUR LE NIVELLEMENT DE HAUTE PRECISION

G. Y. Leontiev

Recent Crustal Movements, Art. N° 1, The Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR
Moscow 1963.

ВРЕМЕННЫЕ АТМОСФЕРНЫЕ И ВОДНЫЕ НАГРУЗКИ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ВЫСОКОТОЧНОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ В НИЖНЕМ ПОВОЛЖЬЕ

Современные Движения Земной Коры, Сборник Статей М1, Издат. Акад. Наук СССР Москва 1963

L'étude des mouvements actuels de l'écorce terrestre par la méthode des nivellements réitérés a contribué pour beaucoup à l'augmentation de la précision des travaux de nivellement. Après les recherches de I.I. Entine et V.I. Siniagina [9,6] les erreurs systématiques dans les nivellements de 1er ordre ont fortement diminué. On considère [13] que les erreurs systématiques non éliminées dans le nivellement de haute précision sont dues à des variations saisonnières dans l'écorce terrestre. Ces variations peuvent fausser considérablement les résultats de nivellements réitérés et cela surtout dans les régions de plate-formes.

Parmi les nombreuses causes d'inclinaisons de la surface de la Terre, les fléchissements provenant de l'action des charges dues à la pression atmosphérique éveillent un intérêt particulier. Il a été établi par les travaux de V.D. Bontchkovskiy [2,3] que les inclinaisons maxima de la surface de la Terre proviennent de variations de répartition de la pression atmosphérique. La période de ces variations d'inclinaison correspond à la durée de vie des formations de haute pression c'est-à-dire environ 10 jours. Elle correspond aussi à la durée d'un nivellement du terrain par cheminement aller et retour.

Pour établir la dépendance entre la variation de la pression atmosphérique et les différences des cheminements aller et retour nous avons utilisé le nivellement de 1er ordre le long des lignes Syran-Astrakan (1050,3 km) et Prioutnoë-Astrakan (389,4 km). Le nivellement de la première ligne a été effectué en 1951 et celui de la seconde en 1950. Les erreurs quadratiques moyennes calculées d'après les différences des cheminements aller et retour sont égales à :

$$\eta = \pm 0,62 \text{ mm et } \sigma = \pm 0,08 \text{ mm - pour la première ligne}$$

$$\eta = \pm 0,62 \text{ mm et } \sigma = \pm 0,02 \text{ mm - pour la seconde ligne.}$$

Les différences des discordances sont affranchies à un plus haut degré des erreurs accidentelles et systématiques à courte période dans les cheminements de direction opposée d'après les secteurs que les différences analogues en fonction des sections. C'est pourquoi on a fait en premier lieu les différences des discordances d'après les secteurs. Les lignes ont été divisées en plusieurs parties en fonction de la direction du nivellement. Pour chaque partie de la ligne nivelée on a choisi un point central sur la carte synoptique. Les valeurs de la pression atmosphérique ont été relevées sur la carte à partir du point central et sur une distance allant jusque 1500 km. On a utilisé en tout environ 900 cartes synoptiques à partir desquelles on a relevé environ 8.000 valeurs de pression atmosphérique.

Pour chaque jour d'observations on a déduit les valeurs moyennes de la pression atmosphérique pour les deux côtés du point central et pour chaque direction du nivellement.

On a calculé les différences d'après ces moyennes pour chaque jour d'observations :

$$\Delta b = b_{\text{retour}} - b_{\text{aller}}$$

où b_{aller} est la pression atmosphérique moyenne pour la direction de cheminement aller ; b_{retour} est la pression atmosphérique moyenne pour la direction de cheminement inverse.

En utilisant les valeurs trouvées Δb et les dates de mesure des sections dans la direction aller et la direction retour on a calculé les valeurs Δb pour l'époque de nivellement des sections. On a calculé les valeurs moyennes Δb d'après des secteurs d'après les valeurs trouvées Δb pour les sections.

Ensuite, on a obtenu les différences d'après les valeurs b des secteurs

$$\delta b = \Delta b_{\text{aller}} - \Delta b_{\text{retour}}$$

où Δb_{aller} et Δb_{retour} est la différence des pressions moyennes pour le secteur entre le cheminement aller et le cheminement retour.

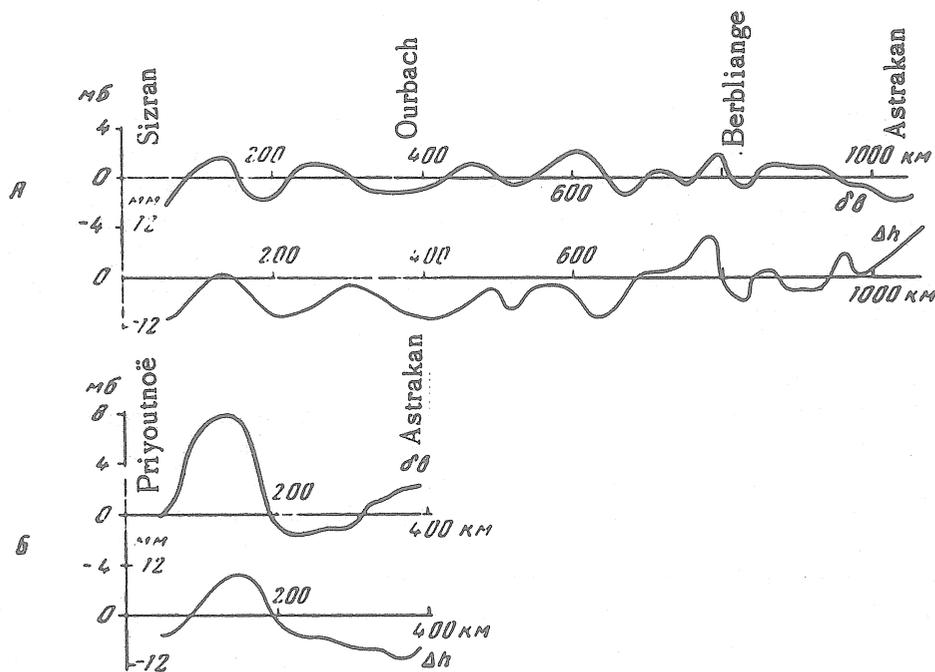


Fig. 1. Changement de répartition de pression atmosphérique (δb) et différences des cheminements de direction opposée (Δh)

A. sur la ligne de Sirane-Astrakan.

B. sur la ligne Priyoutnoë-Astrakan.

Comme l'ont montré les recherches de V.F. Bontchkovskiï [3] basées sur des observations clinométriques avec des pendules horizontaux, la variation des inclinaisons ne correspond pas à l'allure des charges et retarde en moyenne de trois jours. En outre, on a reconnu que les oscillations accidentelles à courte période de la pression atmosphérique n'influencent pas l'allure des inclinaisons. C'est pourquoi lorsqu'on fera la moyenne des valeurs Δb d'après les secteurs, l'influence de ces deux facteurs sera diminuée dans une mesure importante. On a construit des graphiques adoucis (fig. 1) d'après les valeurs obtenues δb et Δb d'après les secteurs. La courbe δh a un sens tout à fait conforme à la pratique météorologique. La courbe Δh par contre a un aspect quelque peu insolite vis à vis de la pratique géodésique : au lieu de la courbe d'accumulation des différences des discordances de cheminements opposés elle représente l'écart des discordances du cheminement opposé par rapport au cheminement direct selon les secteurs. Si on admet que les oscillations de l'écorce terrestre existent, alors cette représentation a un sens physique déterminé. Examinons les courbes adoucies δb et Δh .

Puisque les inclinaisons de la surface de la Terre sont dirigées vers la plus grande charge, les courbes δb et Δh doivent présenter une corrélation directe avec les inclinaisons positives et négatives du lieu. Les courbes adoucies δb et Δh pour les deux lignes montrent une corrélation assez marquée. Des ondes importantes se manifestent dans l'allure de ces courbes avec une longueur de l'ordre d'une centaine de kilomètres. Il n'y a qu'à l'extrémité des lignes qu'on n'observe pas de dépendance directe entre les courbes données. Vraisemblablement, cela est dû au niveau élevé des eaux souterraines dans la vallée de la Volga et aux variations de ce niveau.

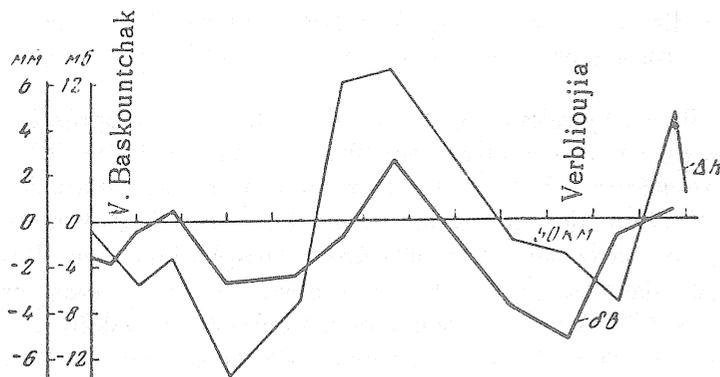


Fig. 2. Variation de la répartition de la pression atmosphérique (δb) et de la différence des cheminements de directions opposées (Δh) d'après les sections pour la région de la Haute Baskountchak - Verblioujia.

Le coefficient de corrélation pour les lignes est relativement peu élevé. Ainsi par exemple de Ourbach jusque Verblioujia on a $r = 0,3$. La plus grande similitude entre les courbes δb et Δh s'est manifestée dans les secteurs où, pendant le temps écoulé entre les cheminements aller et retour, le déplacement des centres de haute et basse pression s'est fait dans des directions opposées. Cela concerne les régions de dômes de sels (Baskountchak supérieur) où coïncide, le plus grand nombre de différences maximales des cheminements aller et retour.

La fig. 2 montre les courbes δb et Δh d'après les sections pour la région haute Baskountchak - Verblioujia.

Ainsi s'établit dans la direction de la latitude et de la longitude une dépendance entre la variation des différences des discordances et la pression atmosphérique d'après les secteurs et même les sections. Les coefficients de corrélation relativement faibles ne permettent pas de calculer les corrections dans les discordances mesurées d'après les équations de G.H. Darwin [2].

$$\eta \frac{d\nu}{dx} = - \frac{\mu \delta h}{2\mu} \left(1 + 2\pi \frac{z}{\lambda} \right) l^{-2\pi \frac{\lambda}{a}} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

où μ est le module de rigidité, h la hauteur des couches de l'atmosphère au point de mesure, δ la densité de l'air, z la profondeur sous la surface de la Terre, x la distance d'après l'horizontale et l la longueur d'onde.

Ceci provient de ce que la variation de la pression atmosphérique peut modifier aussi les autres sources d'erreurs dans le nivellement de haute précision qui ne sont pas en relation avec les inclinaisons de la surface de la Terre. En outre, la valeur du module de rigidité μ entrant dans la formule pour les couches supérieures de la surface de la Terre varie fortement.

D'après les données de V.F. Bontchkovskii et R. Lettau [3.11] la valeur du module de rigidité pour une profondeur de l'ordre de 4 à 5 mètres est égale à $0,3 \cdot 10^{11}$ dyn/cm². Mais pour la profondeur des repères dans le sol la valeur du module de rigidité, à cause de la variation de densité et de l'humidité des terres, doit être fortement réduite. Ainsi, d'après les données de Lettau [11] pour une profondeur de moins de 3 mm $\mu = 0,02 \cdot 10^{11}$ dyn/cm².

Pour la ligne Sirane-Astrakan les valeurs de μ calculées d'après la formule sont en moyenne égales à $0,1 \cdot 10^{11}$ dyn/cm². La valeur obtenue ne peut que fixer l'ordre de grandeur du module de rigidité à ces profondeurs. Si la valeur du module de rigidité était connue pour chaque secteur alors on pourrait introduire des corrections dans les discordances moyennes. Elles correspondraient à la répartition moyenne de la pression atmosphérique pour l'époque de nivellement de chaque secteur. Mais dans ce cas les hauteurs absolues des repères fondamentaux des secteurs voisins ne seront pas égales. C'est pourquoi il convient de réduire les valeurs δb pour chaque secteur à une répartition moyenne de la pression atmosphérique sur plusieurs années et d'après la direction donnée et ensuite introduire la correction. La réduction détaillée au niveau de la mer a été exécutée depuis longtemps déjà lors des travaux d'océanographie [1]. Sur les grands polygones nivelés sur une longue durée, les changements des altitudes absolues des repères fondamentaux doivent être compensés dans une mesure importante puisque les fermetures dans les polygones actuels de haute précision sont souvent plus petites que la différence des cheminement aller et retour sur une distance de quelque cent kilomètres.

Les précipitations atmosphériques, l'évaporation et la fonte de la couverture neigeuse peuvent aussi provoquer des fléchissements de la surface de la Terre, mais leur ordre de grandeur pour le temps écoulé entre les cheminement de directions opposées est plusieurs fois inférieur à celui qui provient de la variation de pression atmosphérique. En outre, le cubage des précipitations est plus compliqué à calculer à cause de leur répartition irrégulière. Mais l'humidification du sol par les précipitations ou la fonte de la couverture neigeuse doit amener une variation du module de rigidité. Cette circonstance peut augmenter les fléchissements provoqués par la variation de pression atmosphérique.

De cette façon, les discordances des cheminements de nivellements de direction opposée sur une longueur de l'ordre de 100 km sont provoquées non par les mouvements des blocs de l'écorce terrestre (comme le supposait J. Vignal [12]) mais par la variation de répartition de la pression atmosphérique. Sur les blocs de granit de l'écorce terrestre les inclinaisons sont habituellement plus importantes.

Sur la longueur de toute une ligne de nivellement, dans l'ordre actuel d'exécution des nivellements et au moment où existent des formations de haute pression il ne se produira pas d'accumulation de différence des discordances. Mais dans les parties isolées de la ligne, les inclinaisons de la surface de la Terre peuvent, à cause de la variation de pression atmosphérique, différer fortement de leurs positions moyennes. Au moment des nivellements réitératifs cette circonstance peut fausser fortement les vitesses des mouvements tectoniques sur les parties isolées de la ligne de nivellement.

Lors des nivellements réitératifs, séparés l'un de l'autre par un intervalle de quelques dizaines d'années, des variations importantes des inclinaisons se produisent non seulement par suite de la variation cyclique de la pression atmosphérique sur plusieurs années mais aussi à cause de la diminution ou de l'augmentation de l'humidification générale du territoire déterminé. Ces variations cycliques des inclinaisons sont interprétées parfois faussement comme des mouvements tectoniques actuels de l'écorce terrestre.

Le nivellement réitératif de 1951 sur la ligne Sirane-Astrakan a révélé que Astrakan montait de plus de 100 mm. Mais pratiquement on peut compter ce déplacement provenant d'Ourbach dont l'altitude ne varie presque pas par rapport à Sirane. Le premier nivellement de 1er ordre ($\eta < 1$ mm et $\sigma < 0,1$ mm) de Ourbach jusque Astrakan a été exécuté en 1928. Les différences des cheminements aller et retour d'après le premier et le second nivellement de Ourbach à Astrakan ne dépassent pas 15 mm. La répartition différente de la pression atmosphérique au moment de ces nivellements n'a pas pu provoquer une élévation systématique aussi importante sur une étendue d'environ 500 km (fig. 3). Mais la variation du régime cyclique de l'atmosphère pour ces années a provoqué une baisse du niveau de la mer Caspienne de 2 mètres [8]. Cela a donné d'une part une déviation de la verticale et d'autre part une inclinaison de la surface de la Terre.

L'élévation ou l'inclinaison, de la surface de la Terre doit être la plus grande dans la direction nord-sud étant donné la configuration de la mer Caspienne.

Conformément aux recherches de G.H. Darwin [10] les fléchissements sous l'influence des marées sont plusieurs fois plus grands que les déviations de la verticale (pour $\mu = 3 \cdot 10^{11}$ dyn/cm²). Mais même pour une moindre valeur du module de rigidité ($\mu = 1,5 \cdot 10^{11}$ dyn/cm²), l'élévation de Ourbach jusque Astrakan ne peut être complètement expliquée par la baisse du niveau de la Mer Caspienne.

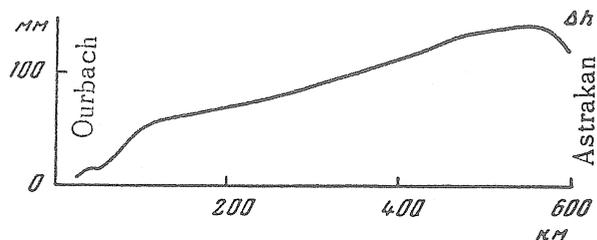


Fig. 3. Elévation (inclinaison) de la surface de la Terre à l'embouchure de la région de la mer Caspienne de 1928 à 1951.

Il est évident que la diminution générale de l'humidification pour ces années se fait sentir sur tout le territoire de la basse contrée de la Caspienne ainsi que l'écoulement de l'eau à partir de la surface asséchée dans la mer. En outre l'abaissement du niveau des eaux du sous-sol provoque un affaissement de la surface de la Terre, ce qu'on voit, en particulier, sur une partie de la courbe (fig. 3) dans la région de Astrakan.

C'est pourquoi on ne peut interpréter les résultats du nivellement comme une élévation tectonique actuelle de l'embouchure de la Caspienne sans prendre en considération toutes les particularités que nous venons de relever. Ce qu'il y a de particulier c'est que cette élévation commence seulement à partir du bord de l'embouchure de la Caspienne - de la terrasse de Jadovskii [4] dans la région de Ourbach.

En conséquence, l'élévation actuelle de l'embouchure de la Caspienne est au fond d'origine exogène.

Il s'ensuit que l'effet des charges extérieures est manifeste dans l'étude des mouvements actuels de l'écorce terrestre par la méthode des nivellements réitérés. Les points cruciaux des nivellements réitérés des diverses années [7] montrent les différentes vitesses des mouvements actuels. Cette différence s'explique habituellement par des erreurs de mesure car on considère [5] que les mouvements tectoniques dans les régions de plate-forme ne peuvent changer de signe en un court laps de temps. L'effet des charges extérieures explique le changement de vitesse et de signe des mouvements actuels de l'écorce terrestre. Puisque la modification des charges extérieures [8] est déterminée principalement par la variation de l'activité solaire, il apparaît possible de relever dans les nombreux nivellements les cycles séparés des mouvements récents de l'écorce terrestre. L'élévation de l'embouchure de la Caspienne s'est produite aussi pratiquement au moment de l'importante augmentation séculaire de l'activité solaire.

Ainsi donc il est nécessaire de tenir compte, au moment de la réduction des données de nivellement de 1^{er} ordre, de la répartition moyenne sur plusieurs années de la pression atmosphérique et de l'humidification générale du territoire. Dans ces conditions on pourra déterminer les vraies valeurs des mouvements tectoniques actuels de l'écorce terrestre.

BIBLIOGRAPHIE

1. BEREZKII A.V.
Dynamique de la mer
Publication d'Hydrométéorologie, 1947.
2. BONTCHIKOVSKII V.F.
Quelques généralisations des résultats d'observations d'inclinaisons de la surface de la Terre.
"Travaux IFZ A.N. SSSR" 1959, N° 7 (174).
3. BONTCHIKOVSKII V.F.
Inclinaisons de la surface de la Terre
"Travaux de Séismologie" in-ga, 1940 N° 99.
4. KOSSIGIN YOU. A.
Tectonique des régions pétrolifères.
T. 2 M.
5. MESCHERIKOV YO. A.
Mouvements verticaux actuels de l'écorce terrestre.
"Travaux Ts. N.Y.Y.G.A. et K", 1958, 123.
6. SINIAGINA M. Y.
Analyse des résultats de nivellement de 1er ordre de l'Union Soviétique.
"Travaux de Ts. N.Y.Y.G.A. et K", 1957, 144.
7. SINIAGINA M.Y.
Mouvements verticaux actuels de l'écorce terrestre.
"Travaux de Ts. N.Y.Y.G.A. et K", 1958, 123.
8. EIGENSON M.S.
Aperçus des manifestations physico-géographiques de l'activité solaire.
Izd. Lvovskovo Yn-ta Lvov 1957.
9. ENTINE Y.Y.
Nivellement de haute précision.
"Travaux de Ts. N.Y.Y.G.A. et K", 1956, 3.
10. DARWIN G.H.
On variations in the vertical due to elasticity of the Earth's surface.
Philosophical Magazine, N XC, 1882.
11. LETTAU H.
Das Horizontaldoppelpendel.
Zeitschrift für Geophysik, XIII, 1937.
12. VIGNAL J.
Nivellement de précision.
Paris, 1948.
13. Voeux de l'Association Internationale de Géodésie.
Bulletin Géodésique, Nouvelle Série, N 22, 1951.

INFLUENCE DE LA VISCOSITE SUR LA PHASE DES MAREES TERRESTRES

Théorie générale de l'effet de la viscosité de l'enveloppe considérée comme un corps de Maxwell sur la phase des marées terrestres et sur l'amortissement du mouvement du pôle

M.S. Molodenskii

Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS Sér. Géoph. N° 10, pp. 1469-1482. 1963.

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ФАЗУ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ

Дана общая теория влияния вязкости оболочки, рассматриваемой как максвелловское тело, на фазу земных приливов и затухание движения полюса.

М. С. МОЛОДЕНСКИЙ

Известия Академии Наук СССР, Серия Геоф. № 10, 1469-1482, 1963

1. L'influence de la viscosité sur la phase des marées terrestres peut être évaluée par la méthode de variation des constantes arbitraires, en prenant comme solution de départ le cas des marées dans la Terre élastique.

Dans les équations différentielles d'équilibre élastique nous pourrions considérer le module de cisaillement $\bar{\mu}$ et les fonctions cherchées comme complexes : désignant l'une d'elles par $\bar{\Phi}_i$ nous écrivons :

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \mu + im, \\ \bar{\Phi}_i &= \Phi_i + i\psi_i.\end{aligned}\quad (1)$$

Le module d'élasticité de volume (bulk modulus) $\lambda + 2/3 \mu$ sera considéré comme une valeur réelle. Pour un processus périodique il est douteux que ces hypothèses puissent éveiller une objection. Les équations différentielles sont linéaires par rapport à $\bar{\mu}$ et $\bar{\Phi}$ et homogènes par rapport à $\bar{\Phi}_i$

$$\sum_i [A_i (\Phi_i + i\psi_i) + B_i (\mu + im) (\Phi_i + i\psi_i)] = 0. \quad (2)$$

De cette équation nous en déduisons deux autres :

$$\sum_i (A_i + B_i \mu) \Phi_i - m \sum_i B_i \psi_i, \quad (3)$$

$$\sum_i (A_i + B_i \mu) \psi_i - m \sum_i B_i \Phi_i. \quad (4)$$

Si $m = 0$ les deux systèmes d'équations différentielles coïncident et sont d'un ordre n ; pour $m \neq 0$ l'ordre des équations double. Pour une valeur faible de m il faut intégrer le système d'ordre n et faire n quadratures comme nous le verrons plus loin.

En considérant en première approximation que m est faible, nous négligerons le second membre dans l'équation (3) c'est-à-dire que nous profitons de la solution pour une sphère élastique idéale.

Ainsi les fonctions Φ_i et le second membre des équations (4) deviennent connues. Dès lors les relations (4) ne diffèrent de (3) que par le fait qu'elles ne sont pas homogènes. Pour l'équation du type (3), nous considérons comme connue l'intégrale générale, c'est-à-dire toutes les fonctions Φ_i (dans leur forme analytique ou numérique). C'est pourquoi pour l'intégration des équations du type (4) on peut se servir de la méthode de la variation des constantes arbitraires. Cherchons une solution sous la forme suivante :

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \Phi_i + \sum_{i=1}^{i=n} D_i \Phi_i, \quad (5)$$

C_i sont des constantes et par conséquent la première somme est la solution générale du système (3), D_i sont des fonctions de r .

2. Prenons les équations d'équilibre pour une sphère idéale élastique sous la forme utilisée dans l'article [1]. L'intégrale générale dans le système des variables H, T, R, L, M, N , a été obtenue à l'aide d'une machine à calculer et est donnée dans les tables des pages 32-39 de [1]. Dans une représentation de l'effet de la viscosité par la formule (1), les équations du type (4) prennent la forme suivante :

$$N - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \left(H' + \frac{2}{r}H - \frac{6}{r^2}T\right) - \mu \left(\frac{4}{3}H' - \frac{4}{3}\frac{H}{r} + \frac{4}{r^2}T\right) =$$

$$= \frac{4}{3}m \left(H' - \frac{H}{r} + \frac{3}{r^2}T\right)_0 = m\lambda_1.$$

$$M - r^2\mu \left(T' + H - \frac{2}{r}T\right) = \left(\frac{M}{\mu}\right)_0 m = m\lambda_2.$$

$$R' - 4\pi\alpha\rho H - \frac{L}{r^2} = 0,$$

$$L' - 6(R - 4\pi\alpha\rho T) = 0, \quad (6)$$

$$M' + Nr^2 + \rho r^2(R + V'H) - 2\mu(H'r^2 - Hr + 5T) =$$

$$= 2m(H'r^2 - Hr + 5T)_0 = m\lambda_3,$$

$$N' - \frac{6}{r^3}M + \frac{6}{r^2}(L - 4\pi rH + 6T) - \frac{4\mu}{r} \left(H' - \frac{1}{r}H + \frac{3}{r^2}T\right) =$$

$$= -\frac{4m}{r} \left(H' - \frac{H}{r} + \frac{3}{r^2}T\right)_0 = m\lambda_4.$$

L'intégrale partielle qui correspond aux conditions aux limites données pour $m = 0$ est désignée par l'indice 0.

Pour calculer les χ_i il convient d'introduire à la place des dérivées les fonctions elles-mêmes provenant des équations différentielles correspondantes. Nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} N - 3 \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{r} H - \frac{3}{r^2} T \right) \right]_0 \\ \chi_2 &= \left(\frac{M}{\mu} \right)_0, \\ \chi_3 &= \chi_4 = 0, \\ \chi_5 &= \frac{3}{2} r^2 \chi_1 + 4T_0, \\ r\chi_6 &= -3\chi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

La substitution de (5) dans (4) fournit un système d'équations algébriques par rapport à $dD_i/dr = D'_i$ (les fonctions D_i elles-mêmes et les constantes C_i n'interviennent pas puisque Φ_i est la solution particulière du système homogène). Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(D'_H \frac{\partial}{\partial H_0} + D'_T \frac{\partial}{\partial T_0} + D'_R \frac{\partial}{\partial R_0} + D'_L \frac{\partial}{\partial L_0} + D'_M \frac{\partial}{\partial M_0} + D'_N \frac{\partial}{\partial N_0} \right) \times \\ & \times (H, T, R, L, M, N) = -m \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} \chi_1, \frac{1}{r^2 \mu} \chi_2, 0, 0, - \right. \\ & \left. - \left(\frac{3}{2} r^2 \chi_1 \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\lambda + 2\mu} + 4T_0 \right), \frac{3}{r} \frac{\lambda + \frac{2}{3} \mu}{\lambda + 2\mu} \chi_1 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

En résolvant par rapport à D'_H , nous obtenons

$$D'_H = m \sum \frac{A_{Hi}}{\Delta} \chi_i = -m \left[\frac{\chi_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \bar{H}}{\partial H_0} + \frac{\chi_2}{r^2 \mu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial H_0} + 4T_0 \frac{\partial \bar{M}}{\partial H_0} \right], \quad (9)$$

les expressions de départ pour D'_T , D'_R , D'_L , D'_M et D'_N .

$\partial \bar{H} / \partial H_0$ est ici le mineur du déterminant composé des coefficients de la partie gauche du système (8), qui correspond à la colonne H et à la ligne H; Δ est le déterminant du système.

Tous les mineurs ne sont déterminés que par la structure de l'enveloppe de la Terre et ne dépendent pas des conditions aux limites (conditions à la surface) et de la structure du noyau. Les fonctions χ_i dépendent encore des conditions aux limites.

A présent pour calculer D'_i il faut exprimer m en fonction de r. On peut écrire :

$$D_i = \int_b^r D'_i dr, \quad (10)$$

puisque les termes contenant C sont inclus en (5). b est ici la limite du noyau.

3. Pour déterminer les six constantes d'intégration C_i nous employons des conditions aux limites complexes. Pour cela nous introduisons dans les conditions aux limites habituelles les valeurs complexes du module de cisaillement et les fonctions obtenues et comme précédemment nous considérerons comme réel le module d'élasticité de volume (bulk modulus) $\lambda + 2/3 \mu$

Pour le modèle N° 3 [1] nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ N &= -m\chi_1 \\ L + 3rR &= 0 \end{aligned} \right\} r = a, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ N + \rho_i(R + HV') &= -m\chi_1 \\ L - \gamma r^2 R - 2rR + 4\pi\kappa\rho_i r^2 H &= 0 \end{aligned} \right\} r = b. \quad (12)$$

En portant les conditions aux limites (11) dans l'intégrale générale (5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi_i(r) &= (C_H + D_H) \frac{\partial \Psi_i}{\partial H_0} + (C_T + D_T) \frac{\partial \Psi_i}{\partial T_0} + \\ &+ (C_R + D_R) \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial R_0} - 3 \frac{\partial \Psi_i}{\partial L_0} \right) - (m\chi_1)_a \frac{\partial \Psi_i}{\partial N_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Cette formule détermine n'importe quelle fonction satisfaisant aux équations différentielles (6) et aux conditions aux limites à la surface (11), au moyen des intégrales partielles $\delta\Psi/\delta H_0$, $\delta\Psi/\delta T_0$, $\delta\Psi/\delta R_0$, $\delta\Psi/\delta L_0$ dont les valeurs sont données dans les tables [1]. A la limite $D_H = D_R = D_T = 0$. C'est pourquoi dans les conditions (12) il faut introduire

$$\Psi_i(b) = \left[C_H \frac{\partial \Psi_i}{\partial H_0} + C_T \frac{\partial \Psi_i}{\partial T_0} + C_R \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial R_0} - 3 \frac{\partial \Psi_i}{\partial L_0} \right) - (m\chi_1)_a \times \frac{\partial \Psi_i}{\partial N_0} \right]_b. \quad (14)$$

A partir des équations (12) on détermine les constantes C_H , C_T et C_R . Après cela la formule (13) avec les valeurs D_i déterminées par la formule (10) permet de déterminer les valeurs de Ψ dans toute l'enveloppe. En particulier à la surface de la sphère, on a

$$\left. \begin{aligned} \Psi_H &= C_H + D_H, & \bar{h} &= h + (C_H + D_H) i \\ \Psi_T &= C_T + D_T, & \bar{l} &= l + (C_T + D_T) i \\ \Psi_R &= C_R + D_R, & \bar{k} &= k + (C_R + D_R) i \end{aligned} \right\} r = a. \quad (15)$$

Ainsi s'obtiennent les valeurs complexes des nombres de Love et par conséquent aussi la variation (due à la viscosité) de la phase des ondes de marées dans les variations de la force de pesanteur et des inclinaisons.

4. Ainsi, le problème de l'effet de la viscosité sur la phase de la marée (si l'on représente son influence par la formule (1)) ne diffère pas sensiblement du problème correspondant de la théorie de l'élasticité.

On peut obtenir l'influence sur l'amplitude de la marée comme aussi la précision de la phase dans l'approximation suivante. Pour cela, nous adaptons les valeurs Ψ_i données par la première approximation et nous l'utilisons pour calculer le second membre en (3); les nouvelles valeurs de Φ_i sont utilisées pour le calcul du second membre de (4).

On peut appliquer le procédé proposé ici pour le calcul des faibles variations dans l'intégrale totale ou partielle dues à une faible variation de l'élasticité ou de la densité. Dans ce cas les second membres des équations du type (4) et également des conditions aux limites représentent les variations dans les premiers membres (avec le signe modifié) pour des variations données des coefficients de Lamé et de la densité.

5. Pour le modèle décrit dans l'article [1] correspondant aux valeurs $h = 0,617$, $l = 0,091$ et $k = 0,302$, M.V. Kramer a calculé des tables à l'aide desquelles le calcul de l'influence de la viscosité sur la phase de la marée nous ramène aux quadratures et à la solution de trois équations algébriques linéaires. Les valeurs des intégrales particulières H_0 , T_0 , R_0 , L_0 , M_0 et N_0 sont données pour $m = 0$ dans la table 1. Les valeurs des mineurs intervenant dans la formule (9), calculées par pas de 0,01 rayon de la Terre sont données dans la Table 2 χ_1 et χ_2 - rapports du type D'_1/m - sont calculés plus loin d'après les formules (9) et d'après les formules de Newton-Kotess $\Delta D_1/m$ ($\Sigma \Delta D_1 = D_1$)

Les résultats sont donnés dans la table 3. Toutes ces tables conviennent pour n'importe quelle loi de variation de m avec la profondeur.

Plus loin à l'aide de l'équation (14) nous obtenons les équations (12) sous l'aspect numérique suivant :

$$\begin{aligned} -0,4793 C_H - 3,7155 C_T + 0,7053 C_R &= -0,2738 m_a, \\ -0,9578 C_H + 53,222 C_T - 3,118 C_R &= -0,2317 m_a + 0,7521 m_b, \\ + 25,669 C_H + 7,520 C_T - 51,397 C_R &= + 4,896 m_a \end{aligned} \quad (16)$$

Ici m_b et m_a sont les valeurs de m aux limites de l'enveloppe

De la solution de ces équations, nous tirons :

$$\begin{aligned} C_H &= + 0,8292 m_a - 0,1721 m_b, \\ C_T &= + 0,0429 m_a + 0,0061 m_b, \\ C_R &= + 0,3341 m_a - 0,0850 m_b. \end{aligned} \quad (17)$$

Pour calculer D_H , D_T et D_R il faut donner la fonction m .

6. Nous évaluerons maintenant le décrement de l'amortissement de l'amplitude du mouvement chandlérien du pôle pour le même modèle de Terre. Il serait intéressant de prendre encore en considération la viscosité du noyau, cependant le problème serait beaucoup plus compliqué. Le rôle de la viscosité peut être important pour un court temps de relaxation dans le noyau.

Nous profiterons des conclusions principales et des indications exposées dans l'article [1]. En outre il faut tenir compte uniquement des déphasages des déplacements dans le manteau par rapport à la phase du pôle de l'axe principal d'inertie. La valeur du nombre de Love k , comme on l'a expliqué dans le travail [1] est proche de sa valeur statique. C'est pourquoi on peut se servir de la théorie exposée.

Admettons, comme cela découle de la théorie des petites oscillations, que l'amplitude de la nutation libre décroît avec le temps comme $e^{-\lambda t}$. Dans la nutation libre le second membre en (78) est égal à zéro et dans le calcul des produits d'inertie d'après la formule (62) et dans

la formule (78) [1] il faut prendre :

$$V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi = \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi$$

Table 1.

r	ρ	μ	$\lambda + 2\mu$	H_0	T_0	R_0	I_0	M_0	N_0
1,00	0,594	0,1734	0,5510	0,617	0,081	1,302	1,094	0	0
0,99	0,6046	0,1878	0,5998	0,6196	0,0853	1,2802	1,0255	0,0057	0,0135
0,98	0,6151	0,2026	0,6499	0,6220	0,0894	1,2585	0,9589	0,0113	0,0266
0,97	0,6257	0,2177	0,7014	0,6243	0,0931	1,2373	0,8943	0,0168	0,0392
0,96	0,6363	0,2333	0,7543	0,6261	0,0964	1,2162	0,8313	0,0221	0,0512
0,95	0,6468	0,2493	0,8084	0,6281	0,0995	1,1953	0,7704	0,0274	0,0625
0,94	0,6574	0,2657	0,8640	0,6297	0,1023	1,1747	0,7111	0,3224	0,0734
0,93	0,66812	0,2956	0,9593	0,6313	0,1050	1,1542	0,6537	0,0372	0,0840
0,92	0,7040	0,3265	1,0575	0,6328	0,1076	1,1338	0,5983	0,0421	0,0938
0,91	0,7269	0,3587	1,1602	0,6342	0,1100	1,1133	0,5450	0,0469	0,1030
0,90	0,7498	0,3924	1,2672	0,6356	0,1121	1,09331	0,4935	0,0513	0,1115
0,89	0,7727	0,4274	1,3784	0,6369	0,1144	1,0726	0,4440	0,0557	0,1190
0,88	0,7956	0,4638	1,4940	0,6381	0,1167	1,0522	0,3965	0,0599	0,1257
0,87	0,8184	0,5014	1,6136	0,6394	0,1186	1,0319	0,3512	0,0638	0,1314
0,86	0,8413	0,5405	1,7378	0,6405	0,1205	1,0116	0,3076	0,0674	0,1361
0,85	0,864	0,5497	1,7752	0,6416	0,1222	0,9914	0,2661	0,0708	0,1402
0,84	0,8526	0,5598	1,8154	0,6427	0,1240	0,9716	0,2260	0,0736	0,1436
0,83	0,8587	0,5701	1,8557	0,6438	0,1255	0,9521	0,1876	0,0760	0,1460
0,82	0,8649	0,5804	1,8966	0,6446	0,1271	0,9330	0,1506	0,0782	0,1477
0,81	0,8710	0,5909	1,9377	0,6455	0,1282	0,9142	0,1150	0,0800	0,1483
0,80	0,8772	0,6014	1,9794	0,6463	0,1295	0,8958	0,0811	0,0813	0,1482
0,79	0,8834	0,6121	2,0215	0,6471	0,1304	0,8776	0,0484	0,0824	0,1472
0,78	0,8895	0,6227	2,0638	0,6480	0,1315	0,8600	0,0172	0,0831	0,1454
0,77	0,8957	0,6336	2,1067	0,6487	0,1322	0,8425	-0,0127	0,0833	0,1427
0,76	0,9018	0,6444	2,1497	0,6494	0,1328	0,8255	-0,0414	0,0835	0,1389
0,75	0,9080	0,6554	2,1934	0,6500	0,1335	0,8089	-0,0686	0,0829	0,1347
0,74	0,9142	0,6665	2,2374	0,6507	0,1341	0,7926	-0,0949	0,0824	0,1295
0,73	0,9203	0,6776	2,2816	0,6512	0,1347	0,7765	-0,1197	0,0812	0,1237
0,72	0,9265	0,6889	2,3261	0,6517	0,1353	0,7610	-0,1433	0,0798	0,1174
0,71	0,9326	0,7002	2,3715	0,6522	0,1357	0,7459	-0,1660	0,0781	0,1106
0,70	0,9388	0,7117	2,4171	0,6526	0,1362	0,7311	-0,1873	0,0760	0,1032
0,69	0,9450	0,7232	2,4631	0,6530	0,1367	0,7168	-0,2075	0,0735	0,0958
0,68	0,9511	0,7348	2,5093	0,6534	0,1371	0,7028	-0,2268	0,0708	0,0882
0,67	0,9573	0,7465	2,5561	0,6534	0,1377	0,6893	-0,2450	0,0676	0,0809
0,66	0,9634	0,7583	2,6030	0,6536	0,1379	0,6762	-0,2623	0,0640	0,0739
0,65	0,9696	0,7702	2,6507	0,6535	0,1384	0,6635	-0,2784	0,0602	0,0678
0,64	0,9758	0,7822	2,6987	0,6535	0,1387	0,6514	-0,2935	0,0559	0,0628
0,63	0,9819	0,7942	2,7468	0,6532	0,1392	0,6396	-0,3077	0,0513	0,0591
0,62	0,9881	0,8063	2,7955	0,6527	0,1398	0,6284	-0,3211	0,0463	0,0577
0,61	0,9942	0,8185	2,8444	0,6520	0,1402	0,6176	-0,3334	0,0409	0,0591
0,60	1,0004	0,8308	2,8940	0,6513	0,1409	0,6074	-0,3449	0,0352	0,0638
0,59	1,0066	0,8433	2,9440	0,6501	0,1416	0,5977	-0,3556	0,0289	0,0729
0,58	1,0127	0,8557	2,9940	0,6488	0,1423	0,5886	-0,3654	0,0222	0,0874
0,57	1,0189	0,8684	3,0448	0,6470	0,1431	0,5800	-0,3744	0,0115	0,1087
0,56	1,0250	0,8810	3,0956	0,6448	0,1441	0,5722	-0,3825	0,0077	0,1381
0,55	1,0312	0,8938	3,1471	0,6422	0,1452	0,5647	-0,3898	-0,0004	0,1775

Table 2.

r	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{I}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial H_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{I}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial T_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial T_0}$
1,00	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0,99	0,9923	0,0226	0,0000	0,0000	0,0011	0,0172	-0,0100	1,0209	-0,0001	0,0000	0,0565	-0,0002
0,98	0,9842	0,0463	0,0000	-0,0002	0,0047	0,0328	-0,0203	1,0440	-0,0007	0,0000	0,1110	-0,0008
0,97	0,9756	0,0708	-0,0001	-0,0005	0,0102	0,0467	-0,0309	1,0692	-0,0015	0,0000	0,1639	-0,0016
0,96	0,9666	0,0962	-0,0002	-0,0008	0,0178	0,0594	-0,0418	1,0970	-0,0026	0,0000	0,2155	-0,0028
0,95	0,9572	0,1229	-0,0005	-0,0013	0,0297	0,0707	-0,0532	1,1283	-0,0042	0,0000	0,2699	-0,0042
0,94	0,9474	0,1497	-0,0006	-0,0019	0,0381	0,0810	-0,0649	1,1612	-0,0056	0,0000	0,3140	-0,0057
0,93	0,9372	0,1785	-0,0012	-0,0025	0,0538	0,0900	-0,0774	1,2001	-0,0079	0,0000	0,3674	-0,0077
0,92	0,9268	0,2075	-0,0017	-0,0033	0,0678	0,0978	-0,0906	1,2406	-0,0100	-0,0001	0,4071	-0,0096
0,91	0,9162	0,2379	-0,0023	-0,0042	0,0850	0,1046	-0,1048	1,2888	-0,0128	-0,0002	0,4541	-0,0118
0,90	0,9053	0,2689	-0,0032	-0,0052	0,1019	0,1103	-0,1196	1,3402	-0,0154	-0,0002	0,4927	-0,0139
0,89	0,8939	0,3014	-0,0042	-0,0063	0,1216	0,1152	-0,1362	1,3988	-0,0186	-0,0002	0,5335	-0,0162
0,88	0,8825	0,3353	-0,0054	-0,0076	0,1419	0,1194	-0,1541	1,4644	-0,0222	-0,0005	0,5729	-0,0186
0,87	0,8706	0,3710	-0,0069	-0,0089	0,1642	0,1228	-0,1734	1,5375	-0,0257	-0,0005	0,6119	-0,0212
0,86	0,8585	0,4084	-0,0085	-0,0104	0,1872	0,1257	-0,1942	1,6182	-0,0297	-0,0005	0,6496	-0,0238
0,85	0,8458	0,4483	-0,0104	-0,0120	0,2122	0,1282	-0,2164	1,7047	-0,0336	-0,0006	0,6866	-0,0263
0,84	0,8325	0,4909	-0,0125	-0,0136	0,2391	0,1304	-0,2408	1,8024	-0,0382	-0,0009	0,7309	-0,0292
0,83	0,8188	0,5358	-0,0148	-0,0154	0,2673	0,1323	-0,2652	1,8986	-0,0422	-0,0009	0,7681	-0,0318
0,82	0,8041	0,5863	-0,0176	-0,0174	0,2998	0,1339	-0,2928	2,0114	-0,0474	-0,0014	0,8165	-0,0351
0,81	0,7889	0,6392	-0,0204	-0,0195	0,3334	0,1352	-0,3216	2,1297	-0,0522	-0,0017	0,8650	-0,0383
0,80	0,7725	0,6981	-0,0238	-0,0216	0,3715	0,1362	-0,3530	2,2594	-0,0578	-0,0020	0,9184	-0,0418
0,79	0,7557	0,7593	-0,0272	-0,0239	0,4102	0,1370	-0,3854	2,3944	-0,0628	-0,0023	0,9711	-0,0453
0,78	0,7376	0,8270	-0,0313	-0,0264	0,4532	0,1375	-0,4208	2,5431	-0,0687	-0,0027	1,0295	-0,0490
0,77	0,7190	0,8977	-0,0349	-0,0286	0,4982	0,1377	-0,4572	2,6961	-0,0730	-0,0019	1,0884	-0,0528
0,76	0,6987	0,9774	-0,0386	-0,0314	0,5478	0,1376	-0,4974	2,8689	-0,0793	-0,0026	1,1542	-0,0568
0,75	0,6776	1,0618	-0,0442	-0,0341	0,6002	0,1373	-0,5396	3,0510	-0,0850	-0,0027	1,2225	-0,0609
0,74	0,6547	1,1561	-0,0498	-0,0374	0,6576	0,1367	-0,5855	3,2521	-0,0918	-0,0033	1,2967	-0,0653
0,73	0,6304	1,2580	-0,0556	-0,0407	0,7190	0,1359	-0,6346	3,4692	-0,0990	-0,0043	1,3756	-0,0699
0,72	0,6047	1,3681	-0,0616	-0,0441	0,7847	0,1347	-0,6867	3,7014	-0,1059	-0,0048	1,4597	-0,0746
0,71	0,5770	1,4891	-0,0683	-0,0478	0,8558	0,1333	-0,7423	3,9512	-0,1130	-0,0052	1,5489	-0,0794
0,70	0,5474	1,6200	-0,0752	-0,0516	0,9316	0,1316	-0,8025	4,2243	-0,1208	-0,0060	1,6451	-0,0846
0,69	0,5158	1,7637	-0,0828	-0,0558	1,0137	0,1297	-0,8662	4,5181	-0,1285	-0,0068	1,7483	-0,0898
0,68	0,4811	1,9244	-0,0915	-0,0606	1,1031	0,1273	-0,9357	4,8421	-0,1378	-0,0083	1,8601	-0,0955
0,67	0,4445	2,0967	-0,0999	-0,0651	1,1986	0,1248	-1,0094	5,1887	-0,1461	-0,0090	1,9792	-0,1013
0,66	0,4048	2,2874	-0,1090	-0,0700	1,3026	0,1220	-1,0885	5,5665	-0,1547	-0,0098	2,1089	-0,1073
0,65	0,3616	2,4980	-0,1195	-0,0756	1,4157	0,1190	-1,1750	5,9821	-0,1654	-0,0115	2,2514	-0,1134
0,64	0,3152	2,7297	-0,1201	-0,0813	1,5371	0,1154	-1,2671	6,4340	-0,1754	-0,0129	2,4030	-0,1201
0,63	0,2638	2,9887	-0,1414	-0,0873	1,6714	0,1116	-1,3643	6,9119	-0,1848	-0,0138	2,5642	-0,1266
0,62	0,2108	3,2596	-0,1536	-0,0941	1,8109	0,1078	-1,4738	7,4577	-0,1975	-0,0162	2,7472	-0,1340
0,61	0,1506	3,5743	-0,1663	-0,1008	1,9682	0,1032	-1,5852	8,0240	-0,2077	-0,0173	2,9446	-0,1411
0,60	0,0861	3,9152	-0,1803	-0,1084	2,1372	0,0985	-1,7124	8,6758	-0,2208	-0,0194	3,1516	-0,1492
0,59	0,0157	4,2936	-0,1957	-0,1170	2,3224	0,0936	-1,8464	9,3716	-0,2351	-0,0226	3,3827	-0,1570
0,58	-0,0608	4,7148	-0,2107	-0,1251	2,5249	0,0881	-1,9919	10,145	-0,2476	-0,0242	3,6383	-0,1656
0,57	-0,1428	5,1711	-0,2265	-0,1339	2,7425	0,0824	-2,1445	10,964	-0,2595	-0,0253	3,9079	-0,1742
0,56	-0,2329	5,6789	-0,2446	-0,1441	2,9806	0,0763	-2,3130	11,877	-0,2754	-0,0286	4,2068	-0,1834
0,55	-0,3325	6,2516	-0,2632	-0,1547	3,2487	0,0700	-2,4977	12,899	-0,2908	-0,0315	4,5494	-0,1927

Table 2 (suite)

r	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial R_0}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial I_0}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial I_0}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial I_0}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial I_0}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial I_0}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial I_0}$
1,00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0,99	0,0179	-0,0004	1,0003	0,0101	0,0000	0,0001	0,0011	-0,1090	0,0600	1,0003	-0,0030	0,0000
0,98	0,0360	-0,0014	1,0012	0,0204	0,0000	0,0006	0,0044	-0,2223	0,1201	1,0012	-0,0117	0,0001
0,97	0,0544	-0,0033	1,0028	0,0309	-0,0001	0,0013	0,0100	-0,3403	0,1803	1,0028	-0,0257	0,0003
0,96	0,0728	-0,0059	1,0049	0,0417	-0,0002	0,0021	0,0180	-0,4637	0,2408	1,0051	-0,0465	0,0006
0,95	0,0916	-0,0096	1,0078	0,0527	-0,0004	0,0031	0,0284	-0,5935	0,3018	1,0080	-0,0769	0,0012
0,94	0,1107	-0,0142	1,0113	0,0640	-0,0009	0,0042	0,0414	-0,7277	0,3627	1,0117	-0,1008	0,0018
0,93	0,1301	-0,0200	1,0155	0,0756	-0,0012	0,0055	0,0573	-0,8715	0,4244	1,0162	-0,1370	0,0028
0,92	0,1504	-0,0271	1,0204	0,0874	-0,0016	0,0068	0,0764	-1,0242	0,4865	1,0215	-0,1717	0,0038
0,91	0,1713	-0,0358	1,0260	0,0996	-0,0021	0,0082	0,0987	-1,1872	0,5489	1,0277	-0,2088	0,0052
0,90	0,1929	-0,0461	1,0323	0,1120	-0,0021	0,0095	0,1241	-1,3606	0,6118	1,0347	-0,2454	0,0066
0,89	0,2154	-0,0587	1,0394	0,1249	-0,0031	0,0110	0,1543	-1,5483	0,6761	1,0427	-0,2804	0,0084
0,88	0,2387	-0,0729	1,0474	0,1381	-0,0034	0,0124	0,1883	-1,7483	0,7408	1,0518	-0,3145	0,0102
0,87	0,2629	-0,0890	1,0561	0,1517	-0,0046	0,0138	0,2270	-1,9653	0,8063	1,0616	-0,3482	0,0126
0,86	0,2881	-0,1094	1,0656	0,1657	-0,0055	0,0152	0,2704	-2,1969	0,8729	1,0727	-0,3800	0,0150
0,85	0,3139	-0,1311	1,0760	0,1802	-0,0063	0,0168	0,3182	-2,4421	0,9400	1,0847	-0,4099	0,0176
0,84	0,3404	-0,1561	1,1087	0,1951	-0,0088	0,0184	0,3722	-2,7094	1,0094	1,0983	-0,5596	0,0210
0,83	0,3670	-0,1818	1,0995	0,2106	-0,0095	0,0200	0,4283	-2,9754	1,0781	1,1127	-0,6180	0,0238
0,82	0,3946	-0,2119	1,1128	0,2265	-0,0125	0,0218	0,4929	-3,2762	1,1503	1,1292	-0,7012	0,0280
0,81	0,4226	-0,2439	1,1269	0,2431	-0,0149	0,0235	0,5609	-3,5845	1,2223	1,1467	-0,7823	0,0320
0,80	0,4515	-0,2803	1,1422	0,2603	-0,0187	0,0255	0,6365	-3,9218	1,2972	1,1657	-0,8792	0,0370
0,79	0,4810	-0,3190	1,1584	0,2781	-0,0221	0,0275	0,7166	-4,2716	1,3723	1,1862	-0,9770	0,0420
0,78	0,5114	-0,3619	1,1757	0,2966	-0,0267	0,0296	0,8047	-4,6512	1,4499	1,2083	-1,0890	0,0476
0,77	0,5426	-0,4079	1,1941	0,3158	-0,0314	0,0317	0,8972	-5,0438	1,5267	1,2303	-1,2051	0,0535
0,76	0,5749	-0,4599	1,2139	0,3359	-0,0376	0,0338	0,9997	-5,4801	1,6086	1,2567	-1,3383	0,0600
0,75	0,6082	-0,5155	1,2347	0,3567	-0,0443	0,0361	1,1083	-5,9374	1,6907	1,2836	-1,4788	0,0669
0,74	0,6429	-0,5766	1,2570	0,3785	-0,0518	0,0384	1,2274	-6,4388	1,7770	1,3140	-1,6349	0,0746
0,73	0,6790	-0,6447	1,2810	0,4015	-0,0606	0,0409	1,3557	-6,9786	1,8662	1,3471	-1,8040	0,0829
0,72	0,7162	-0,7174	1,3058	0,4252	-0,0703	0,0433	1,4924	-7,5532	1,9565	1,3813	-1,9868	0,0916
0,71	0,7549	-0,7970	1,3324	0,4501	-0,0809	0,0459	1,6396	-8,1726	2,0498	1,4183	-2,1845	0,1011
0,70	0,7955	-0,8850	1,3606	0,4764	-0,0937	0,0485	1,7988	-8,8460	2,1467	1,4585	-2,4005	0,1112
0,69	0,8377	-0,9807	1,3903	0,5038	-0,1077	0,0512	1,9689	-9,5716	2,2462	1,5014	-2,6354	0,1218
0,68	0,8818	-1,0848	1,4219	0,5327	-0,1232	0,0540	2,1538	-10,366	2,3514	1,5487	-2,8921	0,1335
0,67	0,9286	-1,2016	1,4556	0,5633	-0,1416	0,0568	2,3519	-11,223	2,4584	1,5982	-3,1706	0,1458
0,66	0,9774	-1,3263	1,4908	0,5953	-0,1613	0,0598	2,5649	-12,153	2,5686	1,6511	-3,4750	0,1586
0,65	1,0290	-1,4653	1,5286	0,6292	-0,1845	0,0628	2,7968	-13,175	2,6868	1,7097	-3,8121	0,1721
0,64	1,0829	-1,6165	1,5677	0,6647	-0,2092	0,0660	3,0445	-14,287	2,8064	1,7712	-4,1735	0,1873
0,63	1,1397	-1,7794	1,6096	0,7025	-0,2372	0,0691	3,3089	-15,475	2,9296	1,8365	-4,5657	0,2022
0,62	1,2015	-1,9676	1,6544	0,7427	-0,2712	0,0726	3,6027	-16,816	3,0639	1,9099	-5,0066	0,2191
0,61	1,2639	-2,1596	1,7009	0,7850	-0,3037	0,0759	3,9068	-18,227	3,1971	1,9851	-5,4672	0,2362
0,60	1,3333	-2,3867	1,7507	0,8299	-0,3473	0,0796	4,2495	-19,839	3,3414	2,0681	-6,0000	0,2552
0,59	1,4054	-2,6276	1,8037	0,8782	-0,3919	0,0832	4,6134	-21,572	3,4942	2,1599	-6,5716	0,2743
0,58	1,4828	-2,8986	1,8590	0,9290	-0,4442	0,0871	5,0084	-23,500	3,6478	2,2541	-7,2061	0,2955
0,57	1,5640	-3,1878	1,9176	0,9832	-0,5007	0,0909	5,4252	-25,554	3,8069	2,3548	-7,8836	0,3167
0,56	1,6505	-3,5069	1,9795	1,0410	-0,5636	0,0949	5,8816	-27,834	3,9792	2,4667	-8,6330	0,3398
0,55	1,7461	-3,8752	2,0465	1,1036	-0,6443	0,0992	6,3859	-30,413	4,1605	2,5880	-9,4980	0,3635

Table 2 (suite)

r	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial M_n}$	$\frac{\partial \bar{H}}{\partial N_n}$	$\frac{\partial \bar{T}}{\partial N_n}$	$\frac{\partial \bar{R}}{\partial N_n}$	$\frac{\partial \bar{L}}{\partial N_n}$	$\frac{\partial \bar{M}}{\partial N_n}$	$\frac{\partial \bar{N}}{\partial N_n}$
1,00	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0,99	-0,0005	0,0264	-0,0059	0,0000	1,0006	-0,0037	-0,0113	-0,0010	-0,0003	-0,0060	0,0608	0,9872
0,98	-0,0017	0,0556	-0,0119	0,0000	1,0024	-0,0072	-0,0218	-0,0028	-0,0015	-0,0122	0,1232	0,9742
0,97	-0,0039	0,0877	-0,0178	-0,0001	1,0054	-0,0108	-0,0315	-0,0052	-0,0033	-0,0185	0,1873	0,9609
0,96	-0,0070	0,1232	-0,0237	-0,0003	1,0106	-0,0143	-0,0404	-0,0079	-0,0059	-0,0251	0,2533	0,9474
0,95	-0,0110	0,1622	-0,0293	-0,0005	1,0182	-0,0177	-0,0487	-0,0121	-0,0090	-0,0317	0,3147	0,9338
0,94	-0,0160	0,2047	-0,0358	-0,0007	1,0252	-0,0212	-0,0564	-0,0134	-0,0136	-0,0386	0,3934	0,9196
0,93	-0,0221	0,2523	-0,0419	-0,0009	1,0337	-0,0246	-0,0636	-0,0171	-0,0184	-0,0458	0,4591	0,9056
0,92	-0,0296	0,3048	-0,0480	-0,0013	1,0390	-0,0278	-0,0701	-0,0201	-0,0243	-0,0533	0,5329	0,8914
0,91	-0,0387	0,3649	-0,0543	-0,0017	1,0482	-0,0311	-0,0758	-0,0236	-0,0312	-0,0612	0,6072	0,8769
0,90	-0,0493	0,4310	-0,0606	-0,0020	1,0561	-0,0342	-0,0806	-0,0271	-0,0390	-0,0695	0,6830	0,8624
0,89	-0,0621	0,5053	-0,0672	-0,0025	1,0662	-0,0373	-0,0848	-0,0300	-0,0478	-0,0781	0,7616	0,8478
0,88	-0,0769	0,5893	-0,0742	-0,0031	1,0793	-0,0404	-0,0883	-0,0306	-0,0577	-0,0872	0,8436	0,8330
0,87	-0,0938	0,6818	-0,0810	-0,0036	1,0926	-0,0437	-0,0912	-0,0294	-0,0687	-0,0968	0,9278	0,8181
0,86	-0,1130	0,7837	-0,0880	-0,0042	1,1063	-0,0467	-0,0937	-0,0260	-0,0808	-0,1067	1,0136	0,8032
0,85	-0,1339	0,8922	-0,0950	-0,0048	1,1202	-0,0496	-0,0968	-0,0169	-0,0940	-0,1171	1,1020	0,7882
0,84	-0,1568	1,0096	-0,1023	-0,0057	1,1355	-0,0529	-0,1000	-0,0043	-0,1080	-0,1278	1,1905	0,7732
0,83	-0,1804	1,1274	-0,1090	-0,0064	1,1519	-0,0558	-0,1041	0,0164	-0,1233	-0,1388	1,2844	0,7582
0,82	-0,2072	1,2594	-0,1166	-0,0075	1,1799	-0,0592	-0,1093	0,0452	-0,1399	-0,1503	1,3825	0,7429
0,81	-0,2358	1,3988	-0,1241	-0,0086	1,2073	-0,0625	-0,1158	0,0839	-0,1576	-0,1622	1,4860	0,7275
0,80	-0,2668	1,5480	-0,1319	-0,0097	1,2388	-0,0661	-0,1237	0,1329	-0,1768	-0,1744	1,5947	0,7119
0,79	-0,2992	1,7018	-0,1392	-0,0108	1,2698	-0,0696	-0,1321	0,1864	-0,1967	-0,1872	1,7032	0,6965
0,78	-0,3346	1,8686	-0,1471	-0,0122	1,3062	-0,0732	-0,1427	0,2541	-0,2182	-0,2006	1,8188	0,6808
0,77	-0,3713	2,0399	-0,1538	-0,0126	1,3439	-0,0769	-0,1544	0,3293	-0,2403	-0,2141	1,9376	0,6652
0,76	-0,4118	2,2292	-0,1621	-0,0143	1,3881	-0,0806	-0,1686	0,4198	-0,2642	-0,2286	2,0633	0,6495
0,75	-0,4543	2,4272	-0,1697	-0,0155	1,4350	-0,0845	-0,1845	0,5225	-0,2890	-0,2435	2,1940	0,6336
0,74	-0,5006	2,6432	-0,1784	-0,0174	1,4877	-0,0886	-0,2037	0,6435	-0,3160	-0,2595	2,3322	0,6175
0,73	-0,5501	2,8739	-0,1873	-0,0195	1,5454	-0,0928	-0,2252	0,7797	-0,3440	-0,2760	2,4774	0,6016
0,72	-0,6027	3,1189	-0,1959	-0,0213	1,6081	-0,0971	-0,2499	0,9340	-0,3731	-0,2930	2,6299	0,5853
0,71	-0,6589	3,3809	-0,2048	-0,0232	1,6761	-0,1015	-0,2783	1,1091	-0,4044	-0,3112	2,7911	0,5690
0,70	-0,7194	3,6642	-0,2142	-0,0254	1,7508	-0,1062	-0,3102	1,3048	-0,4367	-0,3300	2,9610	0,5525
0,69	-0,7837	3,9673	-0,2236	-0,0277	1,8326	-0,1109	-0,3459	1,5250	-0,4706	-0,3500	3,1410	0,5360
0,68	-0,8534	4,2987	-0,2345	-0,0308	1,9226	-0,1161	-0,3876	1,7775	-0,5073	-0,3713	3,3337	0,5191
0,67	-0,9275	4,6519	-0,2445	-0,0332	2,0200	-0,1213	-0,4336	2,0567	-0,5449	-0,3935	3,5372	0,5021
0,66	-1,0068	5,0341	-0,2547	-0,0359	2,1276	-0,1266	-0,4855	2,3703	-0,5840	-0,4165	3,7555	0,4849
0,65	-1,0933	5,4524	-0,2670	-0,0395	2,2475	-0,1321	-0,5443	2,7230	-0,6267	-0,4419	3,9898	0,4678
0,64	-1,1852	5,9046	-0,2787	-0,0429	2,3763	-0,1382	-0,6095	3,1157	-0,6703	-0,4680	4,2384	0,4500
0,63	-1,2819	6,3897	-0,2899	-0,0460	2,5140	-0,1440	-0,6880	3,5827	-0,7176	-0,4962	4,5182	0,4317
0,62	-1,3910	6,9238	-0,3043	-0,0506	2,6738	-0,1506	-0,7624	4,0326	-0,7648	-0,5257	4,7907	0,4144
0,61	-1,5013	7,4829	-0,3163	-0,0542	2,8365	-0,1570	-0,8592	4,6090	-0,8168	-0,5572	5,1116	0,3953
0,60	-1,6275	8,1259	-0,3313	-0,0589	3,0286	-0,1643	-0,9594	5,2114	-0,8704	-0,5908	5,4437	0,3767
0,59	-1,7600	8,8094	-0,3474	-0,0648	3,2338	-0,1713	-1,0720	5,8905	-0,9279	-0,6274	5,8070	0,3578
0,58	-1,9036	9,5670	-0,3621	-0,0693	3,4624	-0,1791	-1,1972	6,6543	-0,9859	-0,6646	6,2032	0,3383
0,57	-2,0541	10,368	-0,3762	-0,0736	3,7046	-0,1869	-1,3352	7,4941	-1,0476	-0,7049	6,6282	0,3185
0,56	-2,2199	11,258	-0,3943	-0,0800	3,9748	-0,1953	-1,4882	8,4291	-1,1146	-0,7492	7,0900	0,2983
0,55	-2,4013	12,252	-0,4122	-0,0865	4,2865	-0,2037	-1,6594	9,4861	-1,1834	-0,7958	7,6051	0,2780

Cela équivaut à la substitution

$$\frac{1}{3} m a^2 \chi = - \frac{\sigma + \omega C - A}{\omega} \frac{A}{k_0} \nu.$$

Il résulte de (50) que ν et χ sont des valeurs d'ordre un, c'est-à-dire que ν est de l'ordre de

$$\frac{C - A}{C} \epsilon. \text{ C'est pourquoi}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega + \sigma} \nu + \frac{\nu \chi}{2(\sigma + \omega)} \approx \frac{\omega}{\omega + \sigma} \nu.$$

Pour la composante du moment cinétique nous obtiendrons à présent :

$$M_x = \omega e^{-\lambda t} (m_1 \cos \sigma t + m_2 \sin \sigma t),$$

$$M_y = \omega e^{-\lambda t} (m_1 \sin \sigma t - m_2 \cos \sigma t),$$

$$M_z = \omega C,$$

où

$$m_1 = A - \frac{\sigma}{\omega + \sigma} A_1 + (C - A) \frac{k}{k_0} \frac{\omega + \sigma}{\omega} \cos \varphi,$$

$$m_2 = (C - A) \frac{k}{k_0} \frac{\omega + \sigma}{\omega} \sin \varphi, \quad (18)$$

k_0 est la valeur de k pour une Terre totalement liquide. Les équations des moments sont satisfaisantes, si

$$\lambda m_1 = (\omega + \sigma) m_2.$$

$$\lambda m_2 = \omega C - (\omega + \sigma) m_1. \quad (19)$$

De ces équations nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{\omega} = \frac{C - A}{A} \frac{k}{k_0} \sin \varphi,$$

$$\frac{C}{m_1} = \frac{(\omega + \sigma)^2 + \lambda^2}{\omega(\omega + \sigma)} \approx \frac{\omega + \sigma}{\omega}. \quad (20)$$

Par conséquent ,

$$\frac{\sigma}{\omega} = \frac{C - A}{A - A_1} \left(1 - \frac{k}{k_0} \cos \varphi \right). \quad (21)$$

7. La partie imaginaire m du module de cisaillement se détermine en fonction des propriétés rhéologiques de la Terre. On suppose habituellement que la Terre possède les propriétés du corps de Maxwell c'est-à-dire que la tension de cisaillement p et la déformation ϵ correspondant à ce cisaillement sont liées par l'équation différentielle

$$2\mu \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau}, \quad (22)$$

où τ est le temps de relaxation [2].

Pour l'oscillation harmonique de fréquence ν cette équation mène à la loi de Hooke avec une valeur complexe du module du déplacement $\bar{\mu}$, telle que

$$\bar{\mu} = \mu_{\infty} \frac{1 + \frac{i}{\tau\nu}}{1 + \left(\frac{1}{\tau\nu}\right)^2} = \mu + im, \quad (23)$$

ou bien

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi + i \sin 2\psi) \mu_{\infty}, \quad (24)$$

où $\operatorname{tg} \psi = 1/\tau\nu$.

Dans le cas d'une variation du temps de relaxation de $\infty (\psi = 0)$ à $0 (\psi = \pi/2)$ la partie réelle du module de cisaillement varie de μ_{∞} (valeur statique) à zéro. La partie imaginaire croît de 0 à $1/2 \mu_{\infty}$ (pour $\tau\nu = 1$) et ensuite décroît jusque zéro

D'après Jarkov [3] on peut exprimer la variation de m avec la profondeur par la formule :

$$m = \left(\frac{\mu}{\tau\nu}\right)_{r=1} \cdot 10^{\alpha(r-1)} \quad (25)$$

Ensuite, on calcule à l'aide de la table 3 les parties imaginaires en h , k et l et ensuite les tangentes des angles de déphasages. Les résultats sont donnés dans la table 4 (τ/τ est le rapport du temps de relaxation à la période d'oscillation). Dans la colonne " τ/τ d'après δ " ce rapport est calculé pour un déphasage en $1/57,3$ et dans la colonne " τ/τ d'après k " pour un déphasage $1/16,5$ [4].

Table 3

r	x_1	x_2	$\frac{D_H}{m}$	$\frac{D_T}{m}$	$\frac{D_R}{m}$	$\frac{D_L}{m}$	$\frac{D_M}{m}$	$\frac{D_N}{m}$	$\frac{\Delta D_H}{m}$	$\frac{\Delta D_T}{m}$	$\frac{\Delta D_R}{m}$
1,00	+0,9681	+0,0000	-1,5755	-0,0000	-0,0000	+0,0000	+1,0708	-1,5115	-0,58	0,00	0,00
0,98	0,7764	0,0558	-1,2298	-0,1617	-0,0634	0,0465	1,0100	-1,2017	-35,64	-4,69	-1,26
0,96	0,7048	0,0947	-1,0054	-0,2341	-0,0883	0,1321	0,9300	-0,9622	-10,78	2,51	0,73
0,94	0,6480	0,1219	-0,8522	-0,2597	-0,0816	0,2523	0,8700	-0,7125	-20,64	6,29	1,96
0,92	0,6029	0,1289	-0,6786	-0,1574	-0,0244	0,2786	0,8220	-0,5125	-16,44	3,81	2,00
0,90	0,5662	0,1307	-0,5505	-0,0825	-0,0735	0,2777	0,7829	-0,3253	-5,90	-0,67	0,85
0,88	0,5378	0,1292	-0,4411	+0,0206	-0,0740	0,2719	0,7491	-0,1391	-12,78	+0,60	2,14
0,86	0,4949	0,1247	-0,3485	+0,0865	-0,0678	0,2628	0,7236	+0,0374	-7,22	+2,00	1,40
0,84	0,3980	0,1354	-0,2591	-0,0132	-0,0317	0,5485	0,5054	0,4650	-19,09	-1,02	-2,45
0,76	0,3093	0,1296	-0,1626	-0,0869	+0,0265	0,7911	0,3028	0,8301	-1,57	0,84	+0,26
0,71	0,2971	0,1115	-0,0457	-0,1533	0,1080	0,8927	+0,1124	1,1522	-4,44	14,80	10,68
0,66	0,0614	0,0844	+0,1356	-0,1633	0,2127	1,0153	-0,0151	1,4866	+1,31	1,57	2,05
0,61	-0,1793	0,0500	0,4614	-0,0286	0,3237	0,6369	+0,0078	1,9556	+35,59	2,21	24,97
0,56	-0,6232	0,0087	1,1082	+0,4399	0,4170	-0,0409	0,3610	2,8500	+21,77	8,64	8,19
0,55	-0,7521	-0,0004	1,3064	+0,6078	0,4278	-1,0958	0,5061	3,1310	+6,53	3,04	2,14

Table 4

α	δ	γ	k	l	τ/T d'après δ	τ/T d'après k
0	$25 \cdot 10^{-3}$	$-20 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-3}$	$8,5 \cdot 10^{-4}$	1,4	0,43
2	38	16	29	92	2,2	0,48
4	43	17	30	106	2,5	0,50
8	47	18	30	121	2,7	0,50

8. Le temps de relaxation τ permet de comparer les processus d'oscillations de fréquences différentes : le paramètre α permet de comparer diverses observations.

Les données utiles qui permettent de juger des déphasages ou de la dispersion d'énergie, sont encore très pauvres. Le ralentissement séculaire de la rotation de la Terre permet d'estimer la limite supérieure de la dispersion d'énergie dans l'enveloppe (due principalement aux marées semi-diurnes). Les variations de la force de pesanteur s'observent à présent avec une telle précision que l'existence du déphasage dans l'enveloppe devient presque évidente. Dans les prochaines années, ces matériaux seront fondamentaux pour l'étude de la viscosité de la Terre. L'amortissement du mouvement chandlérien du pôle dont la période est à peu près 1000 fois plus grande que la période des marées semi-diurnes permet d'estimer le domaine de fréquences que l'on peut englober par la formule (23). Le déphasage dans les variations d'inclinaison n'est pas déterminé avec certitude. En signe il doit être opposé au déphasage dans les variations de la force de pesanteur (table 4).

Le retard de phase dans les variations de la force de pesanteur est environ de 4 min., c'est-à-dire environ $1/57,3$ pour les marées diurnes (ou moins s'il y a un retard d'origine instrumentale). Ceci donne un temps de relaxation (table 4) de 1,4 à 2,7 jours (ou plus).

Le ralentissement séculaire de la rotation de la Terre indique un retard de phase de la marée semi-diurne qui ne dépasse pas $1/16,5$ [4]. Les marées semi-diurnes jouent un rôle fondamental et cela donne pour τ une valeur aux environs de 1 jour (ou plus).

La valeur maximale du décrement d'amortissement du mouvement du pôle est obtenue en fonction de (20) pour $\sin \phi = 1$ ce qui donne

$$\lambda = \frac{c - 1}{1} \frac{k}{k_0} \omega,$$

c'est-à-dire un amortissement de $1/2$ fois la valeur précédente en 800 jours ou plus (2,2 ans). Dans ce cas pour τ de l'ordre du jour, on obtient :

$$m = \frac{\tau^2}{1 + (\tau\omega)^2} \mu \approx \tau\omega \mu = 0,0276 \frac{\tau}{T},$$

et si μ en (3) est pris d'après les fréquences séismiques, alors l'application de la méthode proposée est justifiée d'une façon formelle. Mais dans ce cas nous n'avons plus considéré l'enveloppe comme un corps de Maxwell de sorte qu'il conviendrait de déterminer la partie réelle (de l'intégrale ϕ_1) pour la fréquence ν .

Pour $\tau = 1$ l'amortissement est minime. Un autre résultat est obtenu soit en raison de l'existence de plusieurs temps de relaxation, soit dans la théorie exacte du corps de Maxwell avec un temps de relaxation unique (si on garde la valeur de la période de Chandler). Apparemment, les résultats des observations ne sont pas en contradiction avec le résultat donnant une valeur très faible de décrement d'amortissement.

Le temps de relaxation croît si le déphasage des variations de la force de pesanteur est lié fondamentalement au retard de l'appareil et le ralentissement de la rotation de la Terre avec le frottement de marée dû à son enveloppe d'eau.

Les petits temps de relaxation obtenus par les observations actuelles des variations de la force de pesanteur font rappeler la théorie de Milankovitch [5] qui explique le mouvement séculaire du pôle par le déplacement de l'écorce terrestre par rapport à l'enveloppe (exactement par rapport au vecteur du moment cinétique de la Terre).

J'exprime ma reconnaissance à N.N. Pariiskii et M.V. Kramer pour leurs remarques judicieuses et pour la vérification des formules et du calcul.

BIBLIOGRAPHIE

1. MOLODENSKII, M.S. KRAMER M.V.
Marées terrestres et nutation de la Terre
Yz. vo. Acc. des Sc. URSS 1961.
 2. JEFFREYS
La Terre, son origine, histoire et structure.
Yl. M. 1960.
 3. JARKOV, V.N.
Viscosité des couches de la Terre
Tr. Inst. de Physique de la Terre N° 11 (178), 1960.
 4. PARIISKII N.N.
Marées terrestres et structure interne de la Terre.
Yzv. Acc. des Sc. série géophysique, N° 2, 1963.
 5. MILANKOVITCH, M.
Der Mechanismus der Polverlagerungen.
Gerlands Beitr. Geophys., 42, 1934.
-

OBSERVATIONS DES VARIATIONS DE MAREES DE LA FORCE DE PESANTEUR A KIEV

par

You S.D. Dobrochotov, V.Y. Lissenko

Recherches sur les Marées Terrestres Art. N° 3, Publ. Acad. Sc. URSS Moscou 1963

НАБЛЮДЕНИЯ ПРИЛИВНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В КИЕВЕ

У С. Дѣрохотѡв В. И. Лысенко

Изучение Земных Приливов Сборник Статей № 3, Изд. Акад. Наук СССР Москва 1963

Les observations de marée ont été effectuées dans le sous-sol du bâtiment auxiliaire à deux étages de l'Observatoire Astronomique principal de l'Académie des Sciences d'Ukraine dont le territoire occupe la partie centrale du Galossev, contigu du Nord-Ouest à Kiev. Les coordonnées du site d'observation sont : latitude 50°21'9, longitude 30°30'0 ; l'altitude au dessus du niveau de la mer est d'environ 185 m.

A un kilomètre du bâtiment passe une chaussée avec beaucoup de trafic. Il n'y a pas d'industries à proximité de l'Observatoire. Une petite maison d'habitation est éloignée de 50 m du bâtiment. La pente sur laquelle se trouve le bâtiment est douce ; non loin dans le sous bois il y a un ravin profond.

Jusqu'à une profondeur de 8 m, le sol est constitué d'argile sablonneux fin avec des couches intermédiaires de sable ; plus bas, il y a de l'argile avec des couches de terre argileuse. Le niveau des eaux souterraines stables n'atteint pas plus d'une profondeur de 8 m. Auparavant, la chaufferie de l'Observatoire était installée dans la cave du bâtiment. L'entrée de la cave à l'intérieur du bâtiment est enfoncée à 2,6 m dans la terre. Dans la cave il n'y a pas de radiateurs de chauffage central ; cependant les tuyaux de chauffage y passent, reliant le bâtiment à la chaufferie.

Pour l'installation des appareils on a choisi une salle dans l'angle Nord-Ouest de la cave, salle d'une dimension de 1,9 x 3.2 m et d'une hauteur de plafond de 3,2 m ; elle est séparée des autres parties de la cave par des murs en briques. On a construit dans la salle une base en briques à gradins, destinée à l'installation des gravimètres et des enregistreurs. Sa surface est de 1,10 x 1,20 m². Sur la partie supérieure de la base qui s'élève au dessus du sol de 0,6 m, sont placés les enregistreurs et plus bas à 0,3 m, les gravimètres. La fondation est enfoncée d'un mètre dans la terre et est séparée du sol en bois par un joint étroit. Sous les fondations, à 1m de profondeur, une feuille de plomb a été posée pour la mise à la terre des circuits électriques lors des observations.

On a utilisé le local adjacent pour l'installation des sources d'alimentation et des appareils de contrôle. Dans le mur de séparation on a fait une ouverture au travers de laquelle passent dans la salle, par des tuyaux en P.V.C de polyvinyl, des fils de liaison dont les enveloppes sont mises à la terre par écrans. L'alimentation des thermostats a été réalisée pour les deux gravimètres d'après un schéma en tampon commun, à partir de quatre accumulateurs d'une capacité générale de 400 a/h. et d'un redresseur avec une installation de relais débranchant automatiquement l'installation du réseau urbain au moment d'interruptions accidentelles dans l'alimentation électrique. Pour l'allumage des lampes alimentant les galvanomètres et les enregistreurs photographiques on s'est servi également d'un schéma en tampon avec deux accumulateurs.

La constance d'incandescence des lampes, nécessaire pour obtenir un contraste identique de l'enregistrement photographique, était atteinte par débranchement des magasins de résistances et était contrôlée par un voltmètre de haute sensibilité. La tension du réseau urbain a été stabilisée préalablement par un puissant stabilisateur électromagnétique. Ainsi, lors des observations à Poulkovo, Krasnaya Pakhra et Lantschou, pour l'allumage de la lampe du photoélément de chaque gravimètre on a employé deux groupes de chacun trois accumulateurs dont la capacité commune était suffisante pour deux mois d'enregistrement.

A l'expiration de ce délai les accumulateurs ont été remplacés à tour de rôle par des accumulateurs chargés. Avant le remplacement, la tension de ces accumulateurs est préalablement un peu abaissée afin d'atteindre le régime le plus stable. La constance de la tension dans ce réseau a été atteinte également par débranchement des magasins de résistances et a été contrôlée par un voltmètre. Pratiquement les débranchements étaient nécessaires après 2 ou 3 jours.

En juillet 1960, Moscou a fourni les deux gravimètres GS-11 N° 124 et 125 qui furent installés pour l'enregistrement. Les thermostats ont été réglés à une température de 40 ° et ont fonctionné au régime 1. Le papier photographique dans les enregistreurs se déroulait à la vitesse de 5,2 mm/h, et ce n'est qu'en février que la vitesse a été augmentée de deux fois pendant quelques jours afin d'obtenir un enregistrement plus détaillé pendant l'éclipse de Soleil du 15 février. Les observations ont été effectuées d'après le programme habituel. Avant le début et après l'achèvement des observations on a déterminé la valeur de division de l'échelle du gravimètre par des déplacements de la bille d'étalonnage, au moment même où on étudiait la non linéarité de l'échelle du galvanomètre enregistreur de chaque gravimètre. L'échelle d'enregistrement a été contrôlée périodiquement par des déplacements doubles en une série de 49 heures [1]. On s'est proposé qu'avant les observations, la cave et particulièrement la salle soient bien asséchées. Cependant, les premiers jours déjà ont montré que l'assèchement n'était pas suffisant : de l'humidité apparut rapidement sur les murs et le chlorure de calcium dans les bains ouverts destiné à l'assèchement de l'air devait être souvent échangé. Cette circonstance se manifestait de façon inhabituelle sur le caractère de l'enregistrement. Sur les bandes apparaissaient des ondes de période de 30-60 min. et une amplitude de 3-5 mm qui se maintient stable pendant quelques jours. Un enregistrement ondulé a été observé, pas toujours simultanément pour les deux gravimètres - pour l'appareil N° 135 plus souvent que pour l'appareil N° 124. Il est curieux que les perturbations disparaissaient parfois immédiatement après que le faisceau lumineux enregistreur soit déplacé par la rotation de la tige. Une représentation d'un tel enregistrement perturbé est donnée à la figure n° 1.

La période initiale des observations a été caractérisée également par un dédoublement de la ligne de l'enregistrement montré à la figure 2. Il est apparu que le dédoublement était provoqué par le déplacement constant du spot du galvanomètre sur 1-1,5 mm au moment de la mise en circuit du thermostat intérieur. Les déplacements ont diminué après que le réseau de ce thermostat ait été mis à la Terre : la ligne double a été fondue en une seule. L'enregistrement s'améliora un peu quand on recouvrit de parafine les endroits de dérivation des fils du gravimètre au galvanomètre enregistreur. Les essais de couvrir les appareils et la base d'une housse faite en une housse de polyéthylène afin de diminuer le volume d'air asséché par du chlorure de calcium, sont restés sans résultats. Les charges électrostatiques apparaissant sur la housse étaient tellement élevées qu'elles provoquèrent souvent des perturbations désordonnées de l'enregistrement.

A la fin de septembre les perturbations augmentèrent sensiblement; l'enregistrement devenait désordonné et inutilisable pour les mesures.

Les conditions défavorables des observations provoquèrent au gravimètre N° 124 une grande dérive irrégulière. Avec une sensibilité trop grande cela amena le spot enregistreur à sortir souvent des limites de l'enregistrement. On ne réussit pas à se servir des observations au gravimètre N° 124 pour cette période. C'est pourquoi on décida d'interrompre le travail et d'assécher le mieux possible la salle. L'assèchement de la chambre dura environ une quinzaine de jours à une température allant jusqu'à 50°. Le 15 décembre les observations recommencèrent. L'échelle d'enregistrement pour le gravimètre N° 124 avait diminué par suite de la baisse de l'incandescence de la lampe du photo-élément de 6 à 5,5 volts. La tension pour le N° 135 n'a pas changé

et est égale comme avant à 6 volts.

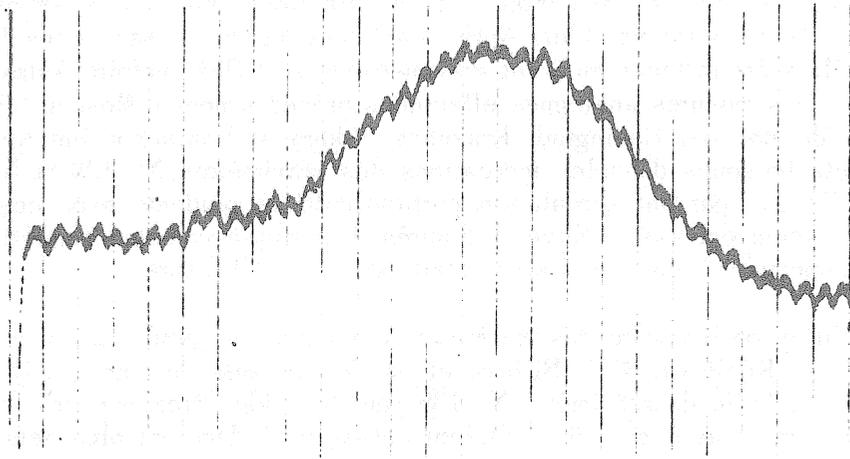


Fig. 1: Représentation de l'enregistrement ondulé

La nouvelle série d'observations a commencé, comme habituellement, par la détermination de la valeur de division des micromètres. La non linéarité a été déterminée également en avril pour qu'on puisse réduire les matériaux par parties. Les observations ont été terminées au début de juin 1961. Dans la première période des observations jusqu'à l'assèchement de la salle la température s'éleva graduellement de 21 à 25° jusqu'au début d'août et ensuite à la fin de septembre elle retomba à 18°. L'humidité à ce moment ne descendit pas en dessous de 70 %. Dans la seconde période la température dans la salle descendit de 18° à 14° en janvier et ensuite s'éleva à la fin mai jusque 16°. Au début d'avril, après l'arrêt du chauffage central, on chauffa le local contigu à cette salle. Après cela, la température s'éleva au début lentement et ensuite assez rapidement et au moment de l'achèvement des observations elle s'élevait à 20°. L'humidité à cette période restait dans les limites de 45 à 55 % et seulement à la fin elle atteignit 60 %.

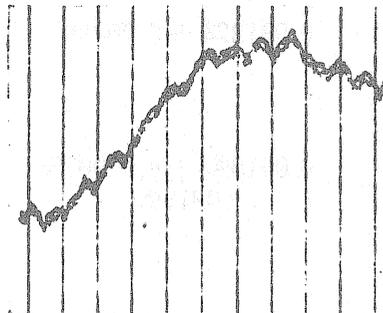


Fig. 2: Représentation de l'enregistrement dédoublé

Dans la seconde moitié d'avril, l'enregistrement du gravimètre N° 135 s'interrompt quelques fois à cause du mauvais état du châssis qui n'était pas apparu à temps et n'avait pu être éliminé par l'observateur. C'est pourquoi les observations du gravimètre N° 135 pour le dernier mois n'ont pas pu être employées. De cette façon la durée générale des observations utiles pour la réduction à Kiev était composée de 11,5 mois : 5,5 mois pour le gravimètre N° 124 et 6 mois pour le gravimètre N° 135. Les recherches ont été effectuées par V.Y. Lissenko et V.V. Jarkov (seulement dans la première période). Après l'achèvement des observations le site d'installation des appareils a été rattaché au point gravimétrique de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Kiev. Des mesures analogues effectuées précédemment à Moscou (dans les bâtiments de l'Université de Moscou), Leningrad, Krasnaya Pakhra et Lantschou ont toujours été accompagnées de sauts brusques dans les indications des gravimètres N° 124 et N° 135. Cette fois on a réussi à l'éviter par une circulation particulièrement prudente avec ces appareils. C'est pourquoi, la précision est assez élevée : d'après deux déplacements complets (dans les directions directe et opposée) l'erreur de liaison était égale à $\pm 0,023$ mgal.

La préparation préliminaire des matériaux d'observations pour l'analyse harmonique a été effectuée par V.V. Kapilova, A.V. Rilieva et par les auteurs de l'article. Les corrections de non-linéarité de l'échelle du gravimètre N° 135 pour les cinq déterminations (11 juillet, 20 septembre, 16 décembre, 6 avril et 2 juin) étaient comme précédemment plus petites que 0,7 mm et c'est pourquoi on n'en tint pas compte. Les quatre déterminations de la non-linéarité pour le gravimètre N° 124 (11 juillet, 16 décembre, 6 avril, 2 juin) coïncidaient dans les limites de 0,5 - 1 mm : la valeur moyenne de la plus grande correction est d'environ 9 mm. La forme de la courbe de correction est restée la même que précédemment [2]. Les résultats de la détermination de la valeur de division du micromètre sont donnés dans la table 1.

Table 1.

Résultats de la détermination de la valeur de division du micromètre en μ gals.

Date de la mesure	Gravimètre N° 124	Gravimètre N° 135
<u>1960</u>		
9 juillet	$0,081563 \pm 0,000150$	$0,073302 \pm 0,000044$
30 septembre	-	$0,073083 \pm 0,000031$
15 décembre	$0,081324 \pm 0,000091$	$0,073020 \pm 0,000022$
<u>1961</u>		
1 juin	$0,081891 \pm 0,000075$	$0,073192 \pm 0,000020$
<u>moyenne</u>	0,081592	-
moyenne 9 juillet - 30 sept.	-	0,073192
" 15 déc. - 1 juin	-	0,073106

La table 2 donne les résultats des étalonnages avec les erreurs quadratiques moyennes qui caractérisent la convergence interne des mesures dans les séries séparées. Comme on le voit, l'échelle a été déterminée assez souvent, il est peu probable que ce soit tout à fait nécessaire. En effet, chaque série exige deux déplacements du spot enregistreur et de l'incertitude qui découle de la mesure de ces déplacements, il résulte, au moment de la préparation des données

à analyser, des erreurs supplémentaires [3]. Un grand nombre de déterminations de l'échelle résulte des déplacements nécessaires du spot lorsqu'il s'approche trop du bord de la bande d'enregistrement. Dans les calculs d'étalonnage on tient compte de l'influence de la dérive connue après analyse harmonique [3].

Pour différentes raisons, le spot enregistreur est sorti parfois des limites de l'enregistrement, dans ces cas, les ordonnées manquantes ont été reconstituées d'après les enregistrements d'un autre appareil. Il y eut à divers moments 14 de ces données rétablies pour le gravimètre N° 124 et 5 pour le gravimètre N° 135 [4].

L'analyse harmonique a été effectuée par M.V. Ivanova et A.V. Rilieva, d'après le programme standard, sur ordinateur électronique "Oural - 2". En conformité avec la recommandation de la Commission Internationale des marées terrestres, des séries de 29 jours d'observations ont été calculées avec un déplacement de 10 jours. En tout, on a calculé 29 séries - 14 pour le gravimètre N° 135 dont 11 sont indépendantes, c'est-à-dire ne se recouvrent pas.

D'après la table 2 il est difficile d'estimer si l'échelle d'enregistrement a varié au cours des observations ou si elle est restée constante, mais ces variations constituent une conséquence des erreurs accidentelles des déterminations. Dans ce cas, il est plus avantageux d'utiliser, pour toutes les séries d'analyse harmonique, la moyenne pour toute la période des observations (donnée dans le bas de la table 2).

Si l'échelle a varié progressivement, la valeur moyenne de l'échelle est nécessaire pour chaque série. Pour étudier le caractère de variation de la sensibilité, on a calculé de deux manières : d'abord avec une sensibilité moyenne et constante et ensuite d'après les sensibilités moyennes dans les limites de chaque série. Les résultats de l'analyse harmonique, réduits d'une façon détaillée sont donnés dans les tables 3 et 4. On donne dans la table 3 les valeurs numériques de l'échelle en unités GGS calculées d'après les données des tables 1 et 2. On a pris la moyenne simple comme valeur définitive de δ pour chacune des cinq ondes. Les erreurs quadratiques moyennes n'ont été calculées que d'après les écarts dans les séries indépendantes. Pour le gravimètre N° 135 on s'est servi au moment du calcul de δ , dans la première période d'observations, de la sensibilité moyenne générale. Pour le calcul de la valeur moyenne de δ pour le gravimètre N° 135, les données des quatre séries de 1960 (table 3) entrent dans les deux groupes de valeurs désignées en caractère droit et en italique.

La table 4 donne les déphasages calculés $\Delta\phi$ pour ces mêmes cinq ondes. Bien que les valeurs moyennes de δ pour les deux systèmes d'étalonnages diffèrent peu, il faut donner la préférence aux résultats des calculs relatifs à la sensibilité variable. Il en résulte d'abord que, pour le gravimètre N° 124, les erreurs des valeurs de δ correspondant à la sensibilité variable sont plus petites que les erreurs correspondant à la sensibilité constante et en second lieu, que la concordance des résultats des mesures des deux appareils est meilleure avec la sensibilité variable. Pour le gravimètre N° 124, la représentation graphique des variations de δ en fonction du temps pour les quatre ondes principales montre que les courbes construites d'après la sensibilité variable ont une courbure par rapport aux courbes obtenues avec une sensibilité constante et que leur inclinaison diminue vers l'axe des abscisses, comme le montre la figure 3.

On a pris comme valeur définitive de δ pour les cinq ondes la moyenne simple de toutes les séries d'analyse harmonique en utilisant la sensibilité variable. Les erreurs quadratiques moyennes sont calculées comme auparavant d'après les observations indépendantes, c'est-à-dire, d'après onze séries. Des calculs analogues sont effectués aussi pour les phases (table 5). Il est peu probable que l'utilisation des erreurs quadratiques moyennes pour calculer une moyenne pondérée soit justifiée et en raison de leur petit nombre, l'estimation de la précision a un caractère formel. On ne peut compter les observations de Kiev au nombre des meilleures.

Dans différentes séries d'analyses harmoniques les valeurs séparées δ et $\Delta\phi$ présentent un grand désaccord. Pour la phase de l'onde O_1 le signe positif prédomine. Apparemment la valeur de δ pour l'onde S_2 est exagérée. Les valeurs de δ pour les ondes diurnes O_1 et K_1 obtenues pour le gravimètre N° 124 sont plus petites que pour le gravimètre N° 135. En outre, les valeurs moyennes de δ pour différentes périodes d'observations varient sensiblement. Ainsi, pour le gravimètre N° 124 on voit distinctement, sur la figure 3, l'augmentation de δ au cours de la dernière période des observations. La valeur moyenne de δ , par exemple pour l'onde M_2 , pour la période de décembre à avril était environ de 1,17 et d'avril à la fin des observations, elle augmenta jusqu'à 1,22. Pour le gravimètre N° 135 pour la même onde M_2 , la valeur moyenne de δ dans la première période des observations est égale à 1,15 et dans la seconde période à 1,21.

Table 2

Résultats de la détermination du coefficient d'étalonnage, mm/division du micromètre.

Jour initial de la série	Gravimètre N° 124		Gravimètre N° 135	
	Nombre de mesures	Coefficient d'étalonnage	Nombre de mesures	Coefficient d'étalonnage
1960				
21 juillet		---	24	20,84±0,07
8 août		---	21	24,40±0,08
16 "		---	24	22,90±0,08
22 "		---	23	22,67±0,08
29 "		---	23	21,86±0,05
5 septembre		---	23	21,72±0,03
13 "		---	24	23,03±0,07
Moyenne				22,45±0,40
1961				
17 décembre	21	30,13±0,11	21	21,20±0,10
26 "	19	31,39±0,04	23	19,54±0,14
27 "	19	31,51±0,07	---	---
31 "	22	27,71±0,28	22	21,27±0,07
1 janvier	24	29,56±0,09	24	20,90±0,09
7 "	23	28,90±0,07	22	21,67±0,08
8 "	24	30,16±0,05	24	21,44±0,08
15 "	24	30,26±0,10	23	20,88±0,08
19 "	24	27,76±0,13	---	---
22 "	24	30,54±0,08	23	21,93±0,05
29 "	24	28,23±0,20	23	19,42±0,14
5 février	24	31,76±0,08	24	20,65±0,13
12 "	24	28,86±0,08	24	21,39±0,10
19 "	24	30,57±0,07	24	20,60±0,08
22 "	---	---	24	20,19±0,07
25 "	23	32,11±0,10	---	---
26 "	23	29,95±0,09	---	---
27 "	---	---	24	21,40±0,11
5 mars	24	29,56±0,08	24	21,37±0,05
8 "	19	29,07±0,09	19	21,23±0,06
11 "	24	29,28±0,25	---	---
12 "	---	---	24	20,95±0,20
19 "	24	27,16±0,14	23	20,17±0,14
26 "	24	28,57±0,14	23	20,11±0,12
1 avril	24	31,42±0,15	23	20,29±0,08
9 "	24	31,56±0,08	24	20,18±0,09
10 "	24	31,21±0,04	23	20,26±0,04
16 "	---	---	24	19,61±0,26
17 "	22	32,04±0,07	---	---
23 "	24	29,31±0,07	---	---
30 "	23	30,67±0,19	---	---
4 mai	24	28,45±0,17	---	---
8 "	24	31,70±0,11	---	---
14 "	24	31,38±0,13	---	---
21 "	24	31,81±0,11	---	---
22 "	21	32,85±0,11	---	---
moyenne		30,170±0,26 ₄		20,720±0,141

Table 3

Résultats d'analyse harmonique des observations $\delta = 1 + h - \frac{1}{2} k$

Jour moyen	Coefficient d'étalon- nage $\mu\text{gal}/\text{mm}$	O n d				
		M_2	S_2	N_2	O_1	K_1
Gravimètre N° 124						
1961						
6 janvier	2,7044	1,160	1,134	1,215	1,147	1,132
	2,7462	1,178	1,151	1,234	1,165	1,150
16 »		1,144	1,173	1,293	1,151	1,111
	2,8000	1,184	1,215	1,338	1,192	1,150
26 »		1,162	1,182	1,206	1,124	1,097
	2,7516	1,182	1,203	1,227	1,143	1,116
5 février		1,157	1,210	1,135	1,092	1,088
	2,7646	1,178	1,233	1,156	1,112	1,088
15 »		1,149	1,191	1,131	1,101	1,095
	2,6975	1,146	1,188	1,128	1,098	1,093
25 »		1,157	1,180	1,044	1,116	1,095
	2,7179	1,163	1,185	1,049	1,122	1,100
7 mars		1,158	1,198	1,075	1,168	1,090
	2,7499	1,177	1,218	1,093	1,187	1,109
17 »		1,153	1,224	1,197	1,148	1,091
	2,7964	1,193	1,266	1,238	1,187	1,128
27 »		1,163	1,224	1,311	1,140	1,092
	2,7518	1,174	1,236	1,324	1,152	1,103
6 avril		1,210	1,288	1,184	1,115	1,132
	2,6904	1,204	1,259	1,178	1,109	1,126
16 »		1,234	1,333	1,062	1,109	1,164
	2,6290	1,200	1,296	1,032	1,078	1,137
26 »		1,221	1,297	1,008	1,206	1,244
	2,6572	1,200	1,274	0,991	1,185	1,223
6 mai		1,280	1,338	1,288	1,231	1,257
	2,6520	1,255	1,312	1,263	1,207	1,233
16 »		1,276	1,311	1,215	1,274	1,238
	2,6199	1,236	1,270	1,177	1,234	1,200
Moyenne		1,188	1,232	1,169	1,152	1,136
		$\pm 0,024$	$\pm 0,033$	$\pm 0,036$	$\pm 0,024$	$\pm 0,033$
Moyenne		1,190	1,236	1,173	1,155	1,139
		$\pm 0,015$	$\pm 0,028$	$\pm 0,030$	$\pm 0,020$	$\pm 0,025$

Table 3 (suite)

Jour moyen	Coefficient d'étalon- nage μgal/mm.	O n d e s				
		<i>M</i> ₁	<i>S</i> ₁	<i>N</i> ₁	<i>O</i> ₁	<i>K</i> ₁
Gravimètre N° 135						
1960						
4 août	3,2631	1,160	1,056	1,050	1,131	1,158
14 "		1,189	1,058	0,904	1,144	1,190
24 "		1,176	1,086	1,100	1,142	1,186
3 septembre		1,150	1,144	1,296	1,134	1,150
1961 r.						
3 janvier	3,5282	1,224	1,298	1,097	1,121	1,172
	<i>3,4860</i>	<i>1,210</i>	<i>1,283</i>	<i>1,084</i>	<i>1,108</i>	<i>1,158</i>
13 "		1,174	1,265	1,035	1,188	1,198
	<i>3,4686</i>	<i>1,155</i>	<i>1,243</i>	<i>1,017</i>	<i>1,168</i>	<i>1,178</i>
23 "		1,232	1,285	1,092	1,224	1,193
	<i>3,4723</i>	<i>1,212</i>	<i>1,264</i>	<i>1,075</i>	<i>1,205</i>	<i>1,174</i>
2 février		1,200	1,248	1,054	1,106	1,136
	<i>3,5126</i>	<i>1,195</i>	<i>1,242</i>	<i>1,049</i>	<i>1,102</i>	<i>1,131</i>
12 "		1,267	1,347	1,111	1,101	1,140
	<i>3,5474</i>	<i>1,274</i>	<i>1,354</i>	<i>1,117</i>	<i>1,107</i>	<i>1,146</i>
15 "		1,202	1,323	1,357	1,128	1,143
	<i>3,5474</i>	<i>1,209</i>	<i>1,351</i>	<i>1,364</i>	<i>1,134</i>	<i>1,149</i>
22 "		1,215	1,266	1,064	1,161	1,133
	<i>3,4923</i>	<i>1,202</i>	<i>1,253</i>	<i>1,054</i>	<i>1,149</i>	<i>1,122</i>
4 mars		1,243	1,265	1,489	1,218	1,149
	<i>3,5072</i>	<i>1,236</i>	<i>1,258</i>	<i>1,480</i>	<i>1,211</i>	<i>1,143</i>
14 "		1,194	1,307	1,531	1,269	1,163
	<i>3,5167</i>	<i>1,191</i>	<i>1,303</i>	<i>1,526</i>	<i>1,265</i>	<i>1,160</i>
24 "		1,184	1,365	1,358	1,292	1,172
	<i>3,5682</i>	<i>1,198</i>	<i>1,381</i>	<i>1,373</i>	<i>1,307</i>	<i>1,185</i>
3 avril		1,202	1,333	1,076	1,265	1,119
	<i>3,6187</i>	<i>1,233</i>	<i>1,367</i>	<i>1,104</i>	<i>1,298</i>	<i>1,148</i>
Moyenne		1,202	1,243	1,174	1,175	1,161
		±0,015	±0,043	±0,072	±0,026	±0,008
Moyenne		1,199	1,242	1,173	1,174	1,159
		±0,015	±0,045	±0,070	±0,031	±0,005

REMARQUE : Les valeurs constantes de l'échelle sont données en caractère droit ainsi que les valeurs de δ calculées d'après elles ; les valeurs de l'échelle pour chaque série d'analyse harmonique et les valeurs correspondantes de δ sont données en italique.

Table 4

Résultats des analyses gravimétriques $\Delta\phi$

Jour moyen	Ondes				
	M_2	S_2	N_2	O_1	K_1
GRAVIMETRE N° 124					
1961					
6 janvier	-5,0	-2,3	-2,9	-0,6	-2,6
16 »	-3,8	-4,0	-2,0	+0,7	-2,5
26 »	-4,9	-2,9	-3,1	+1,5	-2,0
5 février	-3,7	-4,8	+2,5	+1,5	-2,1
15 »	-4,8	-4,3	+1,2	-0,7	-3,1
25 »	-4,5	-4,8	+1,2	-0,7	-2,5
7 mars	-3,7	-2,7	-9,4	-1,1	-2,7
17 »	-4,5	-2,3	-15,4	+0,9	-2,3
27 »	-3,2	-1,5	-10,9	+1,2	-1,1
6 avril	-4,6	-2,6	+0,2	+0,1	-1,4
16 »	-3,1	-3,6	-1,6	+0,7	-1,8
26 »	-4,7	-4,8	+0,6	-0,1	-3,3
6 mai	-6,0	-5,6	+1,3	-0,4	-2,8
16 »	-3,9	-4,6	-5,0	-0,5	-3,0
Moyenne	-4,3	-3,6	-3,1	+0,2	-2,4
	$\pm 0,4$	$\pm 0,6$	$\pm 2,1$	$\pm 0,4$	$\pm 0,3$
GRAVIMETRE N° 135					
1960					
4 août	-2,2	-2,9	+6,6	-0,4	+2,6
14 »	-0,2	-3,8	-4,9	+3,9	+3,9
24 »	-1,7	-2,9	-9,7	+2,2	+1,5
3 septembre	-2,0	-6,1	+2,0	-0,4	-1,2
1961					
3 janvier	-2,8	+0,2	-2,3	+2,4	-3,1
13 »	-2,1	+3,1	+7,3	+0,3	-1,7
23 »	-2,4	-1,4	+5,3	+4,4	-0,1
2 février	-2,1	-0,5	+2,5	+5,0	-0,7
12 »	-0,5	-5,1	-4,3	+2,7	-0,9
15 »	-1,1	-5,1	+10,2	+0,6	-2,5
22 »	-1,2	-3,5	-5,9	+0,6	-2,1
4 mars	-4,1	-3,8	-7,3	-0,8	-2,6
14 »	+0,2	-1,7	0,0	+3,7	-1,8
24 »	-0,7	-1,2	+13,7	+2,3	-0,3
3 avril	+1,1	+0,5	+0,4	+1,2	0,0
Moyenne	-1,4	-2,3	+0,9	+1,8	-0,6
	$\pm 0,7$	$\pm 1,0$	$\pm 1,9$	$\pm 0,9$	$\pm 0,8$

REMARQUE : Le signe moins correspond à un retard de la marée réelle.

Table N° 5.

Résultats des mesures δ et $\Delta\phi$ à Kiev.

Gravimètre	O n d e s .				
	M_2	S_2	N_2	O_1	K_1
A m p l i t u d e t h é o r i q u e , μgal					
	30,44	14,17	5,83	30,51	42,93
$\delta = 1 \cdot h - \frac{3}{2} k$					
124	$1,191 \pm 0,015$	$1,236 \pm 0,026$	$1,173 \pm 0,030$	$1,155 \pm 0,019$	$1,139 \pm 0,025$
135	$1,199 \pm 0,013$	$1,242 \pm 0,045$	$1,173 \pm 0,071$	$1,174 \pm 0,031$	$1,159 \pm 0,005$
Moyenne	$1,195 \pm 0,010$	$1,239 \pm 0,026$	$1,173 \pm 0,039$	$1,164 \pm 0,018$	$1,149 \pm 0,014$
$\Delta\phi$, degré					
124	$-4,3 \pm 0,4$	$-3,6 \pm 0,6$	$-3,1 \pm 2,0$	$+0,2 \pm 0,5$	$-2,4 \pm 0,3$
135	$-1,4 \pm 0,7$	$-2,3 \pm 1,1$	$+0,9 \pm 1,9$	$+1,8 \pm 0,9$	$-0,6 \pm 0,8$
Moyenne	$-2,8 \pm 0,4$	$-2,9 \pm 0,6$	$-1,1 \pm 1,4$	$+1,0 \pm 0,5$	$-1,5 \pm 0,4$
Moyenne pour les ondes semidiurnes et diurnes avec des poids proportionnels aux amplitudes.		$-2,6 \pm 0,3$ ($5,2 \pm 0,6$ min)			$-0,5 \pm 0,3$ ($2 \pm 0,6$ min.)

Tout cela peut s'expliquer par l'action des perturbations extérieures. Outre l'ondulation de l'enregistrement dont nous avons parlé plus haut (voir fig. 1) et qui, en fait, s'est produit à nouveau à la fin des observations, les déformations de la courbe de marée sont visibles sur les rouleaux. On voit sur les enregistrements des rejets dont l'amplitude atteint quelques millimètres. L'influence des perturbations est bien illustrée par cette même table 3. Au moment de l'analyse harmonique des résultats d'observation du gravimètre N° 135, on a réduit une série complémentaire avec un jour moyen, le 15 février. Les résultats de l'analyse de cette série et de la série du 12 février, décalées au total de trois jours, diffèrent fortement. La variation progressive de δ peut apparemment s'expliquer par l'influence des erreurs systématiques de l'échelle qui sont à leur tour provoquées par la dérive du gravimètre.

La dérive, comme on l'a observé précédemment, dépend de l'allure générale de la température [5]. Ce rapport se remarque bien sur la figure 4 où sont dessinées les courbes adoucies de δ pour l'onde M_2 , pour l'échelle d'enregistrement du gravimètre N° 124, la dérive de cet appareil, la température et l'humidité de janvier à juin 1961.

La comparaison des figures 3 et 4 permet d'établir un lien analogue aussi pour les ondes S_2 , O_1 et K_1 . La différence dans la valeur numérique de δ pour les ondes diurnes des deux appareils peut s'expliquer par la sensibilité différente des appareils vis-à-vis des effets thermiques extérieurs. On sait, par exemple, que le galvanomètre enregistreur du gravimètre N° 135 est très sensible aux variations de température. Si l'on examine attentivement les enregistrements du thermographe qui a été installé à côté des appareils, on peut découvrir une onde de température dont la période est d'environ un jour et dont l'amplitude est de quelques dixièmes de degré. La sensibilité du thermographe et sa qualité d'enregistrement sont insuffisantes pour déterminer cette onde avec plus de certitude. Il est facile d'expliquer l'origine de cette onde.

En été, elle provient du réchauffement par le Soleil du mur sud du bâtiment où donnent les fenêtres d'un des locaux de sous-sol et en hiver, elle provient du chauffage inégal des tuyaux du chauffage central : de nuit, le chauffage est généralement plus faible que de jour.

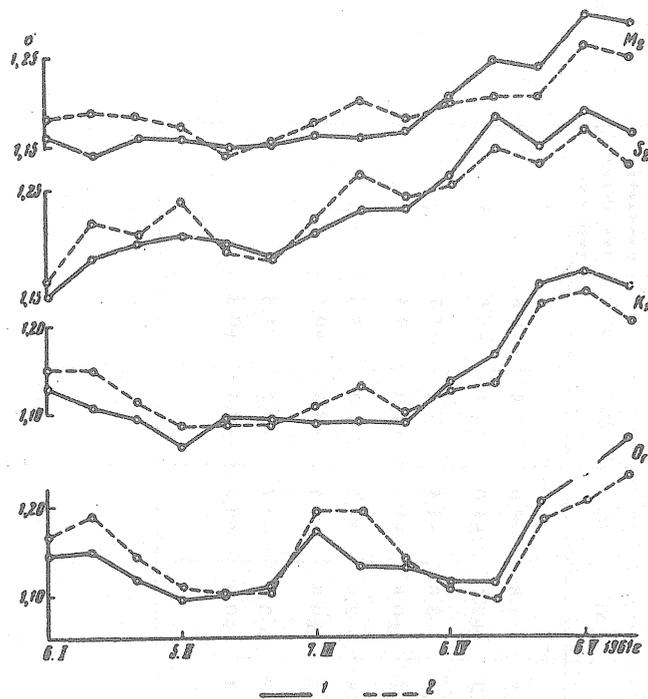


Fig. 3 : Valeurs de δ calculées avec une sensibilité constante (1) et variable (2). Gravimètre N° 124.

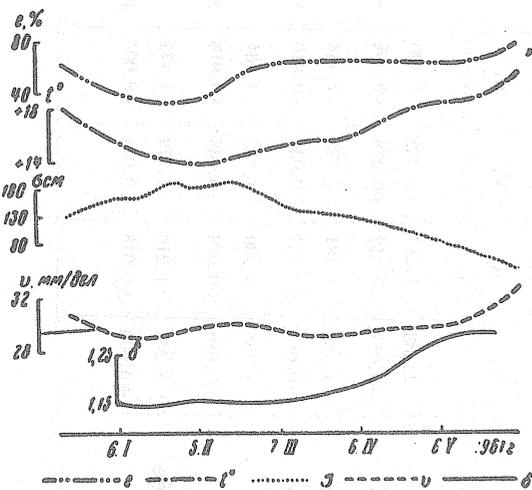


Fig. 4 : Graphique des variations de $\delta = 1 + h - 3/2k$, de l'échelle d'enregistrement (v) de la dérive du gravimètre N° 124 (δ) de la température (t°) et de l'humidité (c) dans le local où s'effectuent les mesures. Onde M_2

Table 6

Résultats des mesures dans les stations de la partie européenne de l'URSS.

Stations	$\delta = l + h - \frac{1}{2}k$				$\Delta\varphi$, degré				Nombre de mois indépendants des observations		
	M_2	S_2	N_2	O_1	K_1	M_2	S_2	N_2		O_1	K_1
Poukovo ($\varphi = 59;8; \lambda = 30;3$)	1,238 $\pm 0,017$	1,217 $\pm 0,042$	1,222 $\pm 0,076$	1,180 $\pm 0,008$	1,194 $\pm 0,012$	-2,1 $\pm 0,9$	-1,6 $\pm 2,1$	-6,0 $\pm 4,0$	-1,8 $\pm 1,1$	-2,6 $\pm 0,6$	8
Krasnaïa Pakhra ($\varphi = 55;3; \lambda = 37;3$)	1,188 $\pm 0,017$	1,184 $\pm 0,024$	1,175 $\pm 0,031$	1,144 $\pm 0,016$	1,134 $\pm 0,022$	-5,2 $\pm 0,7$	-3,6 $\pm 0,8$	-4,4 $\pm 1,5$	-1,4 $\pm 1,0$	-1,7 $\pm 0,4$	9
Kiev ($\varphi = 50;4; \lambda = 31;5$)	1,195 $\pm 0,010$	1,239 $\pm 0,026$	1,173 $\pm 0,039$	1,164 $\pm 0,018$	1,149 $\pm 0,011$	-2,8 $\pm 0,4$	-2,9 $\pm 0,6$	-1,1 $\pm 1,4$	-1,0 $\pm 0,5$	-1,5 $\pm 0,4$	11
Moyenne pondérée $P = \frac{1}{n^2}$	1,202 $\pm 0,008$	1,210 $\pm 0,016$	1,179 $\pm 0,024$	1,172 $\pm 0,007$	1,165 $\pm 0,008$	-3,2 $\pm 0,3$	-3,1 $\pm 0,5$	-2,7 $\pm 0,5$	-0,7 $\pm 0,5$	-1,8 $\pm 0,3$	

On peut aussi en réalité expliquer la prédominance du signe positif pour $\Delta\Phi$ de l'onde O_1 par l'influence de l'onde thermique. Ici il est important de remarquer que la différence des valeurs de δ pour les ondes diurnes est la même pour chacun des deux gravimètres. Elle vaut $\delta_{O_1} - \delta_{K_1} = + 0,015$ et n'est pas éloignée de $+ 0,023$, nombre trouvé par M.S. Molodenskii pour le modèle dynamique de la Terre avec un noyau liquide [6].

Dans les bulletins des observations de ce type on remarque habituellement que les stations européennes et les stations situées dans la profondeur des continents, par exemple, en Asie Centrale, donnent des valeurs différentes de δ . A ce point de vue il était intéressant de comparer les résultats des mesures de Kiev, Krasnaïa Pakhra (sous Moscou) et Poulkovo. Le résumé des mesures donné dans la table 6 montre que la valeur des mesures dans les trois stations est à peu près la même, ceci provient de ce que les conditions des observations sont presque les mêmes. Les valeurs moyennes de δ et $\Delta\Phi$ calculées avec des poids inversement proportionnels aux carrés des erreurs correspondantes sont données dans la ligne inférieure de la table. La valeur moyenne de la phase pour l'onde O_1 est une exception. Elle est calculée comme une moyenne simple parce que l'onde O_1 , comme nous l'avons déjà dit, est déformée dans les observations de Kiev par des perturbations et sa précision est probablement plus petite qu'on ne peut l'estimer d'après l'erreur quadratique moyenne.

Ainsi, les valeurs moyennes des nombres δ et $\Delta\Phi$ dans la table 6 caractérisent les mesures effectuées dans la partie européenne de l'URSS. Ici δ est plus grand qu'en Asie Centrale [7]. Il est possible que la différence soit une conséquence de l'effet indirect dont les données de la table 6 doivent renfermer l'influence moyenne. L'amélioration de ces données par de nouvelles observations ne sera sensible à notre avis que quand les mesures seront effectuées dans des locaux tout à fait isolés, asséchés, affranchis de perturbations mécaniques et électriques.

En conclusion, les auteurs expriment leur reconnaissance au Directeur de l'Observatoire Astronomique Principal de l'Académie des Sciences de l'URSS, membre correspondant de l'Acad. des Sc. de l'URSS, E.P. Fedorov pour son assistance constante.

BIBLIOGRAPHIE

1. B.P. PERTSEV
Essai de détermination des coefficients de l'échelle d'enregistrement dans les observations des variations de marées de la force de pesanteur.
" Recherches gravimétriques " N° 1 série
" Résultats de l'A.G.I. " Yz vo. Ac. des Sc. URSS, 1960.
 2. YOU. S. DOBROCHOTOV, B.D. BELIKOV, YAN CHOUC DSE, SIOU BIN-LIN.
Variations de marées de la force de pesanteur à Lantschou en 1959.
Sh. "Etude des marées terrestres " N° 2 série
" Résultats de l'A.G.I. " Yz vo. Ac. des Sc. URSS, 1961
 3. YOU. S. DOBROCHOTOV.
Erreurs de déterminations de l'échelle d'enregistrement des marées provoquées par la dérive du gravimètre.
BIM N° 36 p. 1198
 4. M.V. IVANOVA
Comparaison des différentes méthodes d'interpolation des lacunes dans les observations de marées.
BIM N° 36 p. 1205
 5. M.S. MOLODENSKII, M.V. KRAMER
Marées terrestres et nutation de la Terre
Yz. vo. Ac. des Sc. URSS, 1961
 6. YOU. S. DOBROCHOTOV
Observations réitératives des variations de marées de la force de pesanteur à Krasnaïa Pakhra.
BIM N° 38 p. 1331
 7. N.N. PARIISKII
Etude des variations de marées de la force de pesanteur en Asie Centrale.
BIM N° 37 p. 1242
-

EINE BEMERKUNG ZUR DIREKTEN EICHUNG VON HORIZONTALPENDELN

von

G. Mittelstrass

(Geodätischen Institut der Technischen Hochschule, Hannover)

Zusammenfassung. Bei der direkten Eichung werden Horizontalpendel oftmals zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Die Amplituden erzwungener Schwingungen können systematisch vergrößert sein. Bei Schwingungen wird die Vergrößerung allgemein durch die Resonanzfunktion beschrieben, die abhängig ist von der Erregerfrequenz und der Eigenfrequenz des Pendels sowie seiner Dämpfung. Daher lassen sich aus der Resonanzfunktion die Frequenzen ableiten, bei denen keine Amplitudenvergrößerung erfolgt.

Summary. For the calibration of horizontal pendulums by periodical inclinations the pendulums are incited with enforced oscillations. As it is described by the resonance-function the amplitude of enforced oscillations is increased. This increasing depends on the frequencies of the inclinations and of the pendulum itself as well as of the damping of the pendulum. In order to avoid systematical effects, it is necessary to deduct the conditions of calibration frequencies from the resonance function.

Bei direkten Eichverfahren werden die Horizontalpendel um genau messbare kleine Winkel d'' geneigt. Aus dem Pendelausschlag ΔL und der Neigung d'' berechnet sich die Empfindlichkeit s'' zu

$$s'' = \frac{d''}{\Delta L} \quad (1)$$

Bei dem von Verbaandert in [1] beschriebenen Verfahren erfolgt die Neigung d'' mittels "crapaudine dilatable", einer Druckmembran. Ändert man in ihr den Druck periodisch, z. B. sinusförmig durch eine Rotation des Gefäßes mit Quecksilber, so führt dies zu erzwungenen Schwingungen des Pendels.

Wie die Schwingungslehre zeigt, ist bei erzwungenen Schwingungen die Amplitude ΔL abhängig nicht nur von der Neigung d'' , sondern auch von der Eigenfrequenz des Pendels und der Erregerfrequenz. Diese bewirken eine Vergrößerung der Amplitude ΔL . Wird diese Vergrößerung nicht beachtet, so kann sie die Eichung systematisch verfälschen.

Im folgenden wird die Theorie der Schwingungen auf die Eichung angewandt. In Anlehnung an [2] lässt die Bewegungsgleichung einer erzwungenen Schwingung sich schreiben zu

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\phi}{dt} + \omega_1^2 \phi = \frac{g}{l_0} d'' = \frac{g}{l_0} d'' \cos \omega_v t \quad (2)$$

wobei $2\beta = k/\Theta$
 k = Dämpfungsfaktor
 Θ = Trägheitsmoment des schwingenden Systems
 $l_0 = \Theta/ms$ die reduzierte Pendellänge des gesamten Systems
 ω_1 = die Frequenz der freien ungedämpften Schwingung
 ω_v = die Erregerfrequenz ist.

Die Lösung dieser Differentialgleichung (2) beschreibt die Pendelbewegung als Superposition einzelner Teilschwingungen. Da der Einschwingvorgang für $t \rightarrow \infty$ abklingt, soll nur die Dauerschwingung betrachtet werden. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega_v}{\omega_1})^2)^2 + 4(\frac{\beta}{\omega_1})^2 (\frac{\omega_v}{\omega_1})^2}} \cdot \frac{1}{\omega_1^2} \frac{g}{l_0} d_0^n \cos(\omega_v t - a) \quad (3)$$

Unter Vernachlässigung der Phasenverschiebung a wird

$$\Delta L = \phi = R_v \cdot E_{stat} \cdot d^n \quad (4)$$

wobei $R_v = \frac{1}{\sqrt{\dots}}$ die Resonanzfunktion

$$E_{stat} = \frac{1}{\omega_1^2} \frac{g}{l_0} \quad \text{die statische Empfindlichkeit des Pendels ist.}$$

(E_{stat} erhält man aus (2) für $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\phi}{dt} = 0$)

Nach (4) beschreibt die Resonanzfunktion die Vergrößerung der Amplitude. Da die Dämpfung der Horizontalpendel Verbaandert-Melchior sehr klein ist, kann sie vernachlässigt werden ($\beta=0$). Zugleich erhält man so maximale Werte der Resonanzfunktion. Mit $\omega = 2\pi/T$ wird

$$R_v = \frac{1}{1 - (\frac{T_1}{T_v})^2} = 1 + (\frac{T_1}{T_v})^2 \quad (5)$$

Um Fehler durch zusätzliche Neigungen infolge der Erdgezeiten zu vermeiden, soll die Umlaufzeit T_v möglichst kurz sein. Sie beträgt nach [1] 3600 sek. Bei der Eichung der Pendel ORB 63 und 64 wurde eine Umlaufzeit $T_v = 1800$ sek. benutzt [3]. Für diese Umlaufzeit ergibt sich mit den Werten des Eichprotokolls für R_v bei

$$T_1 = 69 \text{ sek.}, \quad \Delta L = 81,9 \text{ mm} \quad R_v = 1,0015$$

eine Vergrößerung von ΔL um 0,1 mm. Diese Grösse liegt noch gerade in der Messgenauigkeit von ΔL . Erhöht man die Empfindlichkeit des Pendels auf

$$T_1 = 90 \text{ sek.}, \quad \Delta L = 139,3 \text{ mm} \quad R_v = 1,0025$$

so ergibt sich eine Vergrößerung um 0,35 mm. Dieser Wert darf aber nicht vernachlässigt werden.

Durch die Wahl der Frequenzen in der Resonanzfunktion (5) kann erreicht werden, dass die Amplitude nicht vergrößert wird. Nur so lassen sich systematische Fehler der Eichung vermeiden sowie zusätzliche Neigungsfehler durch die Erdgezeiten selbst ausschalten bzw. verkleinern.

LITERATURHINWEIS

[1] VERBAANDERT

L'Etalonnage des pendules horizontaux

Communications de l'Observatoire Royal de Belgique N° 214, Série Géoph. N° 62

[2] FRITZSCH

Die Empfindlichkeit des Zöllner-Pendels unter dem Einfluss der Fadentorsion

Communications ... N° 142. Série Géophysique N° 47.

[3] Eichprotokolle

(nicht veröffentlicht)

Zur Bestimmung der Shida'schen Zahl aus
Extensometeraufzeichnungen

durch

Richard MAAZ

(Institut für Geodynamik Jena der Forschungsgemeinschaft
der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin)

1. Einleitung
2. Verzerrungen im Erdmantel infolge der M_2 -Tide
3. Zusätzliche Verzerrungen (indirekter Effekt)
4. Bestimmung der Shida'schen Zahl l und der Love'schen
Zahl h mittels eines horizontalen Extensometers
5. l - und h -Bestimmung mit einem Paar orthogonaler
horizontaler Extensometer
6. Verfahren mit einem Paar nichtorthogonaler horizontaler
Extensometer
7. Drei horizontale Extensometer
8. Radial angeordnetes Extensometer und horizontale
Instrumente
9. Übersicht

Summary

A systematic study on the determination of Shida's number l and Love's number h from records of horizontal and vertical extensometers with regard to the "indirect" effect represents known methods under general aspects, demonstrates their limitation and yields new points of view and methods for determining h and l . A larger abstract is given at the end of the paper.

Symbole

a	mittlerer Erdradius
c	Mittelpunktsabstand Erde - Mond
d	Funktion, abhängig vom indirekten Effekt
$\bar{e}, \bar{e}', \bar{e}^0$	lineare Verzerrung im direkten, indirekten und gemessenen Effekt
e, e', e^0	dasselbe speziell bei der M_2 -Tide
$e_{\vartheta\vartheta}, e_{\lambda\lambda}, \dots$	Tensorkoordinaten, bestimmen e
e'_{xx}, \dots	Tensorkoordinaten, bestimmen e'
$2f, 2f'$	horizontale Flächendivergenz
g, g'	Amplitude des azimutabhängigen Anteils der Verzerrung
h, l	Love'sche und Shida'sche Zahl
m	Quotient zweier Amplituden im indirekten Effekt
r	Entfernung des Beobachtungspunkts vom Erdmittelpunkt
t	Stundenwinkel des Mondes
u, v, w	Koeffizienten einer quadratischen Gleichung für l
x, y, z	kartesische Koordinaten
A, B, C	Koeffizienten in einer Darstellung von e
D	Determinante
E, M	Masse der Erde und des Mondes
F	Volumendivergenz
M_2	(besonders starke) Tide

N	Amplitude des M_2 -Anteils von $\bar{e}^0 - \bar{e}'$
O	Amplitude von e^0
P	Normallast am Halbraum
R^2	Diskriminante einer Gleichung für l
X	Amplitude von e'
α, β	Richtungskosinus
γ	Azimut
δ	Deklination des Mondes
ε	± 1
ϑ	Poldistanz der Station
λ	geographische Länge der Station
λ_s, μ_s	Lamé'sche Parameter
ν	Phasenwinkel zu N
τ	örtliche „Mondzeit“
χ	Phasenwinkel zu X
ψ, ψ'	Hauptverzerrungsrichtungen (horizontal)
ω	Phasenwinkel zu O

1. Einleitung

Die Deformation der festen Erde infolge der Massenanziehung durch die Himmelskörper hängt von den elastischen Eigenschaften der Erde ab, die sich als zwei Koeffizienten l und h in den Deformationsformeln ausdrücken. Man benennt die Zahl h nach Love und l nach Shida. An diesen für die Erddeformation maßgebenden Größen sind verschiedene Zweige der Geophysik und Astronomie interessiert.

Unter dem Einfluß der Gestirne vollführen die Wassermassen der Ozeane die bekannten Gezeitenbewegungen. Die veränderliche Verteilung der Wassermassen bedingt eine weitere Deformation der festen Erde, den „indirekten“ Effekt. Er hat i.a. dieselbe Größenordnung wie der „direkte“ Effekt und muß daher beachtet werden. Die Deformation infolge des zusätzlichen Drucks des Wassers überwiegt diejenige infolge veränderter Gravitationswirkung des Meeres. Zur formalen Erfassung des Hauptanteils des indirekten Effekts geht man am einfachsten vom Boussinesq'schen Problem aus, d.h. man ersetzt die Erdkugel durch einen homogenen isotrop elastischen Halbraum, der an der Oberfläche senkrecht belastet ist. Einer hinreichend genauen numerischen Erfassung steht bei diesem wie auch bei besser angepassten Modellen entgegen, daß die Verteilung der Wasserlast ungenau oder gar nicht bekannt ist. Das erschwert die Bestimmung von l und h aus Extensometeraufzeichnungen und macht es wünschenswert, den indirekten Effekt zu eliminieren. Ozawa [6] hat darauf hingewiesen, daß beim Boussinesq'schen Problem die Flächendivergenz und Volumdivergenz an der Oberfläche verschwinden, so daß die lineare Bildung $h-3l$ aus geeigneten

Dehnungsmessungen unverfälscht ermittelt werden kann. Unter besonderen Meeresverhältnissen bei New Jersey (USA) ist es Major et al. [4] gelungen, h und l einzeln ohne explizite Berechnung des indirekten Effekts zu bestimmen. Darauf wird an späterer Stelle eingegangen.

Die vorliegende Arbeit entwickelt systematisch die Methoden zur Bestimmung von h und l , wenn ein bis drei horizontale und eventuell ein vertikales Extensometer zur Verfügung stehen. Dabei werden die bekannten Verfahren kritisch erfaßt und neue Gesichtspunkte erarbeitet. Für die folgenden Entwicklungen wurde die M_2 -Tide als die stärkste Tide zugrundegelegt. Es dürfte nicht schwer fallen, die folgenden Methoden auf andere Tiden zu übertragen.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von l bietet die Beziehung $l = 1+k-L$, worin L die astronomisch beobachtete Breitenvariation ist und die Love'sche Zahl k (0,24 bis 3,0) aus der Chandler'schen Periode der Polbewegung gewonnen werden kann [9]. Die Zahl L ist aber keinesfalls als endgültig bestimmt anzusehen. Nach Sugawa [7,8] wurden von ihm und anderen Bearbeitern Werte von $L = 1+k-l$ ermittelt, die zwischen 0,42 und 1,74 liegen. Daher leitet man l besser aus Extensometermessungen ab. So gewonnene Werte findet man bei Hiersemann [2] zitiert, der sich auch selbst um eine l -Bestimmung bemüht hat ($l=0,07$). Sugawa [8] betrachtet $l = 0,06$ als brauchbaren, aus Extensometermessungen gewonnenen Wert. In [4] wurde ebenfalls aus Extensometerregistrierungen $l = 0,037$ und $h = 0,53$ angegeben. Die Lovesche Zahl h läßt sich auch aus k und dem Verminderungsfaktor $D = 1+k-h$, der aus Neigungsmessungen resultiert, bestimmen [9].

2. Verzerrungen im Erdmantel infolge der M_2 -Tide

2.1--Zum Zwecke der Bestimmung der Shida'schen Zahl l empfiehlt es sich, die stärksten Tiden heranzuziehen, denn bei ihnen ist der geringste relative Fehler bei ihrer Messung zu erwarten. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die M_2 -Tide, sie sind jedoch leicht auf andere Tiden übertragbar. Die Ausgangsformeln für die ebenfalls starke Tide O_1 kann man etwa aus [1] oder [6] entnehmen.

Die Feststellung des Verzerrungszustands an einem Punkt der festen Erde erfordert Dehnungsmessungen in sechs Richtungen. Zur Bestimmung von l und der zugleich auftretenden Love'schen Zahl h beschränkt man sich aber auf horizontale Meßrichtungen. Daneben wird gelegentlich von Messungen in vertikaler Richtung Gebrauch gemacht, die darum in die folgenden Betrachtungen einbezogen worden sind.

2.2--Die von M_2 herrührenden Verzerrungen haben gemäß der Formeln (13) bei Major et al. [4] insbesondere die Tensorkoordinaten

$$e_{\vartheta\vartheta} = \bar{X} \left[h + 2l \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - 2 \right) \right] \cos 2(t + \lambda) ,$$

$$e_{\lambda\lambda} = \bar{X} \left[h - 2l \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} + 1 \right) \right] \cos 2(t + \lambda) ,$$

$$e_{\lambda\vartheta} = \bar{X} \left[-4l \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right] \sin 2(t + \lambda) ,$$

$$e_{rr} = \bar{X} \frac{-\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} (2h - 6l) \cos 2(t + \lambda) .$$

Hierin bedeutet ϑ die Poldistanz, λ die geographische Länge, r den Erdmittelpunktsabstand des Beobachtungsortes. t ist der Stundenwinkel des Mondes auf dem Längengrad von Greenwich, also

$$\tau = t + \lambda$$

die wahre (d.h. die lokale) „Mondzeit“. Der Faktor

$$\bar{X} = \frac{3}{4} \frac{M}{E} \left(\frac{a^2}{c^3} \right) r \cos^2 \delta \sin^2 \vartheta$$

enthält das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse, nach Jeffreys (1954)

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{81.278 \pm 0.025} ,$$

den mittleren Erdradius $a = 6.370 \cdot 10^8$ cm, und den Abstand c der Mittelpunkte von Mond und Erde. Die Deklination δ des Mondes schwankt während eines Mondmonats. Doch soll wie in [4] $\cos^2 \delta$ durch einen mittleren Wert ersetzt werden. Ebenso möge näherungsweise $c = 3.844 \cdot 10^{10}$ cm gelten.

Unter λ_s und μ_s hat man die Lamé'schen Parameter am Beobachtungsort zu verstehen. Dem Ausdruck für e_{rr} liegt die Annahme zugrunde, daß sich der Beobachtungsort an oder zumindest nahe der Erdoberfläche befindet. Anderenfalls enthält e_{rr} noch den Parameter $\frac{\partial H}{\partial r}$. Man vergleiche hierzu [4] oder [6], worin der Fehler von l und h zu 1 % geschätzt wird, wenn die Beobachtung 550 m unter der Erdoberfläche geschieht.

2.3--In der Horizontalebene im Beobachtungspunkt wird

eine Winkelmessung eingeführt, für die $\gamma = 0$ die Südrichtung und $\gamma = \pi/2$ die Ostrichtung angibt.

$$\alpha = \cos\gamma \quad \text{und} \quad \beta = \sin\gamma$$

bezeichnen die zu γ gehörigen Richtungskosinus. Mit ihnen errechnet sich die relative Längenänderung in horizontaler Richtung zu

$$e = \alpha^2 e_{\vartheta\vartheta} + \alpha\beta e_{\lambda\vartheta} + \beta^2 e_{\lambda\lambda} .$$

Für die M_2 -Tide ergibt sich wegen 2.2

$$e = A\cos 2\tau + B\sin 2\tau + C\sin 2\tau ,$$

wobei

$$A = \bar{X} ,$$

$$B = 2\bar{X} \left[\alpha^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - 2 \right) - \beta^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} + 1 \right) \right] ,$$

$$C = -4\bar{X}\alpha\beta \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} .$$

2.4--Der Ansatz

$$e = f + g \cos 2(\psi - \gamma)$$

vermittelt einen raschen Überblick über die Richtungsabhängigkeit der linearen Dehnung. Der Vergleich mit der obigen Darstellung liefert

$$f = A(h-3l)\cos 2\tau ,$$

$$g = \frac{Al}{\sin^2 \vartheta} \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \cos^2 2\tau} ,$$

$$\tan 2\psi = \frac{-2\cos\vartheta}{1+\cos^2\vartheta} \tan 2\tau, \quad \operatorname{sgn}\psi = -\operatorname{sgn}\tau.$$

Für $\gamma = \psi$ ist die Verzerrung am größten, für $\gamma = \psi + \pi/2$ am kleinsten, für $\gamma = \psi \pm \pi/4$ nimmt sie den Mittelwert f an. In der hier zugrundeliegenden linearisierten Theorie stellt die Summe zweier Dehnungen in orthogonalen Richtungen γ_1 und $\gamma_2 = \gamma_1 + \pi/2$ die Flächendehnung oder Flächendivergenz dar, die sich zu $2f$ ergibt.

2.5--Die relative Längenänderung in Richtung wachsender r gestattet nun die Schreibweise

$$e_{rr} = -2f \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}.$$

e_{rr} ist also proportional zur Flächendivergenz. Die Summe der Dehnungen in drei paarweise orthogonalen Richtungen stellt die Volumendivergenz F dar. Unter Verwendung von e_{rr} errechnet sie sich zu

$$F = \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}\right) 2f.$$

3. Zusätzliche Verzerrungen (indirekter Effekt)

3.1--Zwischen der Registrierung eines Extensometers und der tatsächlichen Verzerrung in der Aufstellungsrichtung des Extensometers bestehen meist beachtenswerte Differenzen, selbst wenn das Gerät „hinreichend klein“ ist. Ihre Ausschaltung erfordert eine genaue Kenntnis des gesamten Aufzeichnungssystems und der jeweiligen Meßbedingungen. Hierzu empfiehlt sich das Studium der Arbeiten [2,4,5,9]. Nach dementsprechender Korrektur der Aufzeichnungen möge ein Extensometer die „beobachtete“ Verzerrung $\bar{e}^0(\tau)$ aufweisen. Darin sind nicht nur die Verzerrungen infolge der unmittelbaren Massenanziehung durch Himmelskörper sondern auch temperaturbedingte und sog. indirekte Effekte enthalten. Die letztgenannten entstehen durch die rhythmische Verlagerung des Meerwassers, die eine zusätzliche Massenanziehung und eine besonders in Küstennähe beachtliche Deformation der Erdkruste verursacht. Die indirekten Effekte sind experimentell nicht zu umgehen. Daher muß man versuchen, sie rein mathematisch oder numerisch zu berücksichtigen.

3.2--Im folgenden wird eine primitive aber weittragende Annahme betreffs des indirekten Effekts zugrundegelegt, derzufolge er allein durch den Druck der „zusätzlichen“ Wassermassen auf die Begrenzung eines homogenen isotrop elastischen Halbraumes bedingt ist. Die Gezeitenkarten geben lediglich in einer gewissen Umgebung der Küste sichere Auskunft über die zeitlich variable Verteilung des Wassers in den Meeren. Schon aus diesem Grunde hat die hier vorgenommene Erfassung des indirekten Effekts geringe numeri-

sche Bedeutung. Ihr formaler Ausdruck ist aber äußerst übersichtlich und empfiehlt sich daher zur Beschreibung des in den Einzelheiten schwer zu übersehenden Sachverhalts. Eine eingehendere Behandlung des Problems gibt [31].

3.3--Die geschilderte Berücksichtigung des indirekten Effekts geht auf Ozawa [6] zurück und beruht auf dem Problem von Boussinesq. Demnach bewirkt eine zur z-Achse parallele im Punkte $(x,y,0)$ angreifende Kraft der Größe P im Beobachtungspunkt $(0,0,0)$ Verzerrungen gemäß

$$\bar{e}'_{zz} = 0 ,$$

$$\bar{e}'_{xy} = \frac{P}{4\pi(\lambda_s + \mu_s)} \frac{2\sin 2\bar{\psi}'}{x^2 + y^2} ,$$

$$\bar{e}'_{xx} = -\bar{e}'_{yy} = \frac{P}{4\pi(\lambda_s + \mu_s)} \frac{\cos 2\bar{\psi}'}{x^2 + y^2} ,$$

wobei x,y,z kartesische Koordinaten sind und $z = 0$ den Halbraum begrenzt. $\bar{\psi}'$ gibt die Richtung vom Ort der Kraft zum Beobachtungsort an,

$$x = -\sqrt{x^2 + y^2} \cos \bar{\psi}' , \quad y = -\sqrt{x^2 + y^2} \sin \bar{\psi}' .$$

3.4--Im Abschnitt 2 ist ein kartesisches Koordinatensystem verwendet worden, dessen Achsen in Richtung wachsender ϑ, λ, r zeigen. Dieses lokale orthonormierte Dreibein möge nun zugleich die Koordinaten x,y,z tragen. Die Verzerrungskordinaten in 2.2 und 3.3 sind dann unmittelbar vergleichbar. Die Richtungsabhängigkeit von horizontalen Dehnungen ist aus

$$\bar{e}' = \bar{g}' \cos 2(\bar{\psi}' - \gamma)$$

zu ersehen, wobei

$$\bar{g}' = P/4\pi(\lambda_s + \mu_s)(x^2 + y^2),$$

während die Flächendivergenz verschwindet ($2f'=0$). Wegen der linearen Superponierbarkeit sind diese Beziehungen nicht auf eine Punktladung beschränkt sondern allgemeingültig. Man kann dann P als fiktive Ersatzkraft in einem geeigneten Punkte $(x, y, 0)$ deuten.

4. Bestimmung der Shida'schen Zahl l und der Love'schen Zahl h mittels eines horizontalen Extensometers

4.1--Es wird weiterhin angenommen, daß die in der Richtung γ beobachtete Verzerrung $\bar{e}^0(\tau)$ allein aus dem direkten Effekt $\bar{e}(\tau)$ und dem indirekten Effekt $\bar{e}'(\tau)$ zusammengesetzt ist,

$$\bar{e}^0(\tau) = \bar{e}(\tau) + \bar{e}'(\tau) .$$

Lokale Besonderheiten bleiben also unberücksichtigt. Der Übergang zu einer speziellen Tide, hier der M_2 -Tide, geschieht durch harmonische Analyse,

$$M_2: \quad \bar{e}^0 \rightarrow e^0 = O \cos(2\tau + \omega) , \quad \bar{e}' \rightarrow e' = X \cos(2\tau + \chi) .$$

Den Ausdruck für e entnimmt man dem Abschnitt 2.3. Damit wird

$$O \cos(2\tau + \omega) = (Ah + Bl) \cos 2\tau + C \sin 2\tau + X \cos(2\tau + \chi) .$$

An den Stellen $\tau = 0$ und $\tau = \pi/4$ ergibt sich daraus

$$O \cos \omega = Ah + Bl + X \cos \chi ,$$

$$-O \sin \omega = Cl - X \sin \chi .$$

Dieses Gleichungssystem für h und l hat im Falle $AC \neq 0$ die Lösung

$$h = \frac{1}{A} [O \cos \omega - X \cos \chi + \frac{B}{C} (O \sin \omega - X \sin \chi)] ,$$

$$l = \frac{1}{C} (X \sin \chi - O \sin \omega) .$$

Das Resultat ist nicht daran gebunden, daß X und χ auf der theoretischen Grundlage des Boussinesq'schen Problems nume-

risch berechnet worden sind. Allein wesentlich ist die Anwendung der harmonischen Analyse. Sie kann statt auf die Anteile \bar{e}^0 und \bar{e}' auf die Differenz $\bar{e}^0(\tau) - \bar{e}'(\tau)$ angewendet werden,

$$M_2: \quad \bar{e}^0 - \bar{e}' \longrightarrow e^0 - e' = N \cos(2\tau + \nu) .$$

Dann lauten die Formeln für h und l einfach

$$h = \frac{N}{A}(\cos\nu + \frac{B}{C}\sin\nu) , \quad l = -\frac{N}{C}\sin\nu .$$

4.2--Der Ausnahmefall $A = 0$ bedeutet nach 2.2, daß $e^0(\tau)$ verschwindet. Das trifft an den Polen ($\vartheta=0$) und bei der Deklination $\delta = \pi/2$ zu. C verschwindet am Äquator und in der Meßrichtung γ , für die $\sin 2\gamma$ verschwindet, also in den Haupthimmelsrichtungen $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi/2$. Wegen 4.1 gilt somit

$$O \sin \omega - X \sin \chi = 0 \quad \text{für} \quad \gamma = 0, \pi/2$$

und im Hinblick auf 2.3

$$O \cos \omega - X \cos \chi = \begin{cases} A[h + 2l(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - 2)] & \text{für } \gamma = 0 \\ A[h - 2l(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} + 1)] & \text{für } \gamma = \pi/2 . \end{cases}$$

Ein einzelnes N-S oder E-W orientiertes Extensometer gestattet daher nicht, zugleich h und l zu bestimmen. Wohl aber läßt sich l berechnen, wenn der indirekte Effekt numerisch erfaßt und h (etwa zu 0.600 ± 0.008 aus der Chandler'schen Periode der Polschwankungen) vorgegeben ist. Man kann auf die numerische Berechnung von X und χ verzichten, wenn X oder χ oder eine Relation zwischen diesen Größen bekannt ist. Sie sind dann

durch die erste Gleichung unter 4.2 festgelegt.

4.3--Das Ergebnis unter 4.1 wird besonders einfach, wenn der indirekte Effekt in der gewählten Meßrichtung γ verschwindet. Abgesehen vom trivialen Fall $g' \equiv 0$ tritt das ein, wenn $\psi' = \psi'(\tau)$ nicht von der Zeit abhängig ist und $\gamma = \psi' \pm \pi/4$ gewählt wird, wie 3.4 erkennen läßt. Der Zustand $\psi'(\tau) = \text{const}$ scheint näherungsweise für den in Ogdensburg auftretenden Effekt zuzutreffen, der von den Gezeiten des Atlantik herrührt [4]. Die Ogdensburger Extensometer sind jedoch nicht nach dem hier entwickelten Gesichtspunkt sondern entsprechend den geologischen, bergbaulichen und technischen Gegebenheiten aufgebaut worden. Das in [4] angewendete Verfahren, aus den Aufzeichnungen von zwei horizontalen und einem vertikalen Extensometer die Zahlen h und l zu bestimmen, wird an späterer Stelle besprochen. Es verwendet implizite die Voraussetzung $\psi'(\tau) = \text{const}$ sowie die Annahme $\lambda_s = \mu_s$, explizite wird die Unabhängigkeit des Phasenwinkels χ von der Aufzeichnungsrichtung γ benutzt.

4.4--Um die Gleichwertigkeit von $\frac{\partial \psi'}{\partial \tau} = 0$ und $\frac{\partial \chi}{\partial \gamma} = 0$ zu zeigen, hat man die e' -Darstellungen unter 4.1 und 3.4 zu vergleichen,

$$g'(\tau) \cos 2[\psi'(\tau) - \gamma] = X(\gamma) \cos [2\tau + \chi(\gamma)] .$$

Daraus ersieht man unmittelbar

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \tau} = 0 \quad \longrightarrow \quad g'(\tau) = \xi(\gamma) \cos [2\tau + \chi(\gamma)] .$$

Nach 3.4 ist $g'(\tau)$ von γ unabhängig, also

$$\frac{\partial g'(\tau)}{\partial \gamma} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \xi(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \chi(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 .$$

Ebenso beweist man die zweite Behauptung, daß die Richtungsunabhängigkeit der Phase χ die (zeitliche) Konstanz von ψ' bedingt. Insgesamt folgt

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \tau} = 0 \sim \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} = 0 \sim e' = \xi \cos(2\tau + \chi) \cos 2(\psi' - \gamma) .$$

Die Annahme $\xi > 0$ bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit. Die „Amplitude“

$$X(\gamma) = \xi \cos 2(\psi' - \gamma) \quad , \quad \xi > 0 \quad ,$$

ist positiv im Winkelraum $|\psi' - \gamma| < \frac{\pi}{2}$, verschwindet im Falle $|\psi' - \gamma| = \frac{\pi}{2}$ und ist negativ in $\frac{\pi}{2} < |\psi' - \gamma| \leq \pi$. (Die Richtungen γ und $\gamma + \pi$ sind gleichberechtigt.) Das Vorzeichen von e' wechselt im Ablauf der „Zeit“ τ nach Maßgabe des Faktors $\cos(2\tau + \chi)$. In den Zeitpunkten, in denen $\cos(2\tau + \chi) = 0$, verschwindet wegen $\chi = \text{const}$ der indirekte Effekt e' in allen Richtungen γ .

5. l- und h-Bestimmung mit einem Paar
orthogonaler horizontaler Extensometer

5.1--Die Abschnitte 5 und 6 befassen sich mit zusätzlichen Möglichkeiten zur Bestimmung von h und l, wenn die Station zwei horizontale Extensometer aufweist. Zur Unterscheidung der mit den einzelnen Instrumenten verbundenen Größen dienen die unteren Indizes $i = 1$ und $i = 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \pi .$$

5.2--Es empfiehlt sich, zunächst den wichtigen Sonderfall

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$$

zweier orthogonaler Instrumente zu behandeln. Aus 3.4 ersieht man

$$e_1^i + e_2^i = g^i [\cos 2(\psi^i - \gamma_1) + \cos 2(\psi^i - \gamma_2)] = 0 .$$

Dies ist der Ausdruck für das Verschwinden der Flächendivergenz beim indirekten Effekt e^i . Ferner errechnet man aus dem Ansatz 2.4

$$e_1 + e_2 = 2f ,$$

so daß

$$e_1^0 + e_2^0 = e_1 + e_2 + e_1^i + e_2^i = 2f$$

Dieses schreibt sich im Hinblick auf 4.1 und 2.4 ausführlich

$$O_1 \cos(2\tau + \omega_1) + O_2 \cos(2\tau + \omega_2) = 2A(h - 3l) \cos 2\tau$$

und besagt dasselbe wie

$$O_1 \cos \omega_1 + O_2 \cos \omega_2 = 2A(h-3l) ,$$

$$O_1 \sin \omega_1 + O_2 \sin \omega_2 = 0 .$$

Die erste Gleichung dient zur Bestimmung der Kombination $h-3l$ ohne Kenntnis des indirekten Effekts, soweit für ihn die Darstellung 3.4 zutrifft. Die zweite Gleichung kann man als Verträglichkeitsbedingung der Meßwerte ansprechen, falls 3.4 gilt. Umgekehrt gedeutet ist sie ein Kriterium für die Gültigkeit des Ansatzes 3.4. Dabei muß man aber bedenken, daß lokale Effekte nicht berücksichtigt sind (Anisotropie des umgebenden Mediums!).

5.3--Es sei hervorgehoben, daß die Berechnung von $h-3l$ aufgrund des Verschwindens der Flächendivergenz beim indirekten Effekt nicht auf den immer erwähnten Fall zweier Extensometer in den Richtungen N-S und E-W beschränkt ist. Derartig aufgestellte Extensometer nehmen nur dadurch eine Sonderstellung ein, daß laut 4.2 keines davon zur Bestimmung von h und l genügt, wenn auch e' bekannt ist. Erst ihre Kombination führt zum Ziele. Im Hinblick auf 3.4 oder unmittelbar auf $e'_{xx} = -e'_{yy}$ liefert 4.2 die Bestimmungsgleichung

$$[O_1 \cos \omega_1 - 2X_1 \cos \chi_1 - O_2 \cos \omega_2] \sin^2 \vartheta = 2Al(1 + \cos^2 \vartheta)$$

für l und die Gleichung

$$[O_1 \cos \omega_1 - 3X_1 \cos \chi_1 - 2O_2 \cos \omega_2] \sin^2 \vartheta + O_1 \cos \omega_1 + O_2 \cos \omega_2 = Ah(1 + \cos^2 \vartheta)$$

für h , das nun nicht mehr vorgegeben sein muß. Wie im Falle 4.2 kann man auf die numerische Berechnung von X_1 und χ_1 verzichten, wenn X_1 oder χ_1 oder eine Beziehung zwischen diesen Größen bekannt ist, denn sie sind dann durch die erste Gleichung unter 4.2 festgelegt.

6. Verfahren mit einem Paar nichtorthogonaler horizontaler Extensometer

6.1--Der Abschnitt befaßt sich mit den Möglichkeiten der l- und h-Bestimmung an Hand eines Paares horizontaler nicht-orthogonaler Extensometer. Man macht sich leicht klar, daß im Gegensatz zu orthogonalen Geräten die Kombination h-3l nicht ohne Kenntnis des indirekten Effekts gebildet werden kann. Fortschritte in der Bestimmung von h und l sind in diesem Stadium nur zu erhoffen, wenn irgendwelche Eigenschaften des indirekten Effekts bekannt sind.

6.2--Die folgende Methode setzt voraus, daß die Hauptverzerrungsrichtung $\psi'(\tau)$ des indirekten Effekts wie in 4.3 konstant ist. Das ist nach 4.4 gleichbedeutend mit der Richtungsunabhängigkeit des Phasenwinkels $\chi(\gamma)$,

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi .$$

4.1 liefert damit

$$O_i \cos \omega_i = Ah + B_i l + X_i \cos \chi ,$$

$$-O_i \sin \omega_i = C_i l - X_i \sin \chi , \quad i=1,2 .$$

Multipliziert man die mit $i=2$ versehenen Gleichungen mit dem Faktor

$$m = X_1 : X_2 = \cos 2(\psi' - \gamma_1) : \cos 2(\psi' - \gamma_2) ,$$

wobei 4.3 beachtet wurde, und subtrahiert sie dann von den ersten ($i=1$), so ergibt sich

$$l = \frac{mO_2 \sin \omega_2 - O_1 \sin \omega_1}{C_1 - mC_2}$$

und mit Hilfe dessen

$$h = \frac{(C_1 - mC_2)(O_1 \cos \omega_1 - mO_2 \cos \omega_2) + (B_1 - mB_2)(O_1 \sin \omega_1 - mO_2 \sin \omega_2)}{A(1-m)(C_1 - mC_2)}$$

Kennt man ψ' , so läßt sich m berechnen, so daß auch h und l bestimmt sind. Anderenfalls benötigt man ein weiteres Extensometer (Abschnitt 7).

Die beim hier entwickelten Verfahren verbotene Annahme, daß $\cos 2(\psi' - \gamma_1)$ verschwindet, führt bei bekanntem ψ' zu dem äußerst einfachen unter 4.3 besprochenen Verfahren. Das Verbot erweist sich als unwesentlich, indem die Indizes $i=1$ und $i=2$ vertauschbar sind. $\cos 2(\psi' - \gamma_2)$ verschwindet gewiß nicht, da die verwendeten Extensometer nicht orthogonal sein sollen.

6.3--Mit 2.3 errechnet man

$$C_1 - mC_2 = 2A \frac{\cos \vartheta \cos 2\psi' \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\sin^2 \vartheta \cos 2(\psi' - \gamma_2)}$$

Zur Bestimmung von l ist also notwendig

$$\cos 2\psi' \neq 0 \sim \psi' \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$$

Die Berechnung von h erfordert zusätzlich

$$1-m = \frac{2\sin(2\psi' - \gamma_1 - \gamma_2) \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{\cos 2(\psi' - \gamma_2)} \neq 0$$

und daher

$$\gamma_1 + \gamma_2 \neq 2\psi', 2\psi' + \pi .$$

Die Hauptrichtung ψ' des indirekten Effekts darf also nicht in eine Symmetrieachse der Extensometeranordnung fallen.

Wählt man aber eine bezüglich der Hauptrichtung ψ' symmetrische Anordnung, so errechnet sich

$$B_1 - mB_2 = -(C_1 - mC_2) \neq 0 \quad \text{für } m=1 .$$

Daher resultiert aus $h \neq 0$ die Bedingung

$$O_1(\cos\omega_1 - \sin\omega_1) = O_2(\cos\omega_2 - \sin\omega_2) \quad \text{für } m=1 ,$$

die als Kriterium für die Gültigkeit des Ansatzes 3.4 gedeutet werden kann. Im Gegensatz zu h läßt sich l im Falle $m=1$, $\psi' = \text{const}$ durchaus ermitteln.

7. Drei horizontale Extensometer

7.1--Aus 2.3 entnimmt man

$$\alpha_i^2 e_{\vartheta\vartheta} + \alpha_i \beta_i e_{\lambda\vartheta} + \beta_i^2 e_{\lambda\lambda} = e_i ; i=1,2,3 .$$

Die Verzerrungen in drei verschiedenen horizontalen Richtungen bestimmen $e_{\vartheta\vartheta}$, $e_{\lambda\vartheta}$, $e_{\lambda\lambda}$ und damit den horizontalen Verzerrungszustand überhaupt, denn die Koeffizientendeterminante verschwindet nicht. Um die Verzerrung in beliebiger Richtung γ_j direkt zu ermitteln, ergänze man die obigen drei Gleichungen durch

$$- e_j + \alpha_j^2 e_{\vartheta\vartheta} + \alpha_j \beta_j e_{\lambda\vartheta} + \beta_j^2 e_{\lambda\lambda} = 0 .$$

e_1, e_2, e_3 gelten als bekannt, $e_j, e_{\vartheta\vartheta}, e_{\lambda\vartheta}, e_{\lambda\lambda}$ als unbekannt. Es ist

$$e_{j.D} = \begin{vmatrix} e_i & \alpha_i^2 & \alpha_i \beta_i & \beta_i^2 \\ 0 & \alpha_j^2 & \alpha_j \beta_j & \beta_j^2 \end{vmatrix}$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_i^2 & \alpha_i \beta_i & \beta_i^2 \\ -1 & \alpha_j^2 & \alpha_j \beta_j & \beta_j^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i^2 & \alpha_i \beta_i & \beta_i^2 \end{vmatrix} ,$$

worin $i=1,2,3$ und $j > 3$.

7.2--Die Winkel γ_4 und γ_5 mögen sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden, also

$$\alpha_5 = \pm \beta_4 , \quad \beta_5 = \mp \alpha_4 .$$

Die Flächendivergenz $e_4 + e_5$ berechnet sich damit zu

$$(e_4+e_5)D = \begin{vmatrix} e_i & \alpha_i^2 & \alpha_i\beta_i & \beta_i^2 \\ 0 & \alpha_4^2 & \alpha_4\beta_4 & \beta_4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_i & \alpha_i^2 & \alpha_i\beta_i & \beta_i^2 \\ 0 & \beta_4^2 & -\alpha_4\beta_4 & \alpha_4^2 \end{vmatrix} .$$

Zur Bildung der Summendeterminante beachte man $\alpha^2+\beta^2 = 1$.
Ihr Wert bleibt erhalten, wenn die letzte Reihe von der zweiten subtrahiert wird,

$$\begin{vmatrix} e_i & \alpha_i^2 & \alpha_i\beta_i & \beta_i^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_i & \alpha_i^2-\beta_i^2 & \alpha_i\beta_i & \end{vmatrix} .$$

Drückt man $\alpha^2-\beta^2$ und $\alpha\beta$ durch γ aus und entwickelt die rechte Determinante nach der ersten Zeile, so erhält man

$$(e_4+e_5)D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_i \sin 2(\gamma_{i''}-\gamma_{i'}) ,$$

wobei den Indizes $i=1,2,3$ die Indizes $i'=2,3,1$ und $i''=3,1,2$ entsprechen.

7.3--Aus den Darstellungen

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_i\beta_i & \beta_i^2 \end{vmatrix} \text{ und } D = \begin{vmatrix} \alpha_i^2 & \alpha_i\beta_i & 1 \end{vmatrix}$$

ergibt sich durch Reihenvertauschung und Addition

$$2D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_i^2-\beta_i^2 & \alpha_i\beta_i \end{vmatrix} .$$

Daher ist

$$D = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sin 2(\gamma_{i'}-\gamma_i) .$$

Eine trigonometrische Umformung liefert schließlich

$$D = -\sin(\gamma_2 - \gamma_1) \sin(\gamma_3 - \gamma_2) \sin(\gamma_1 - \gamma_3) > 0$$

wegen

$$\gamma_2 - \gamma_1 > 0, \quad \gamma_3 - \gamma_2 > 0, \quad \gamma_1 - \gamma_3 = (\gamma_1 - \gamma_2) + (\gamma_2 - \gamma_3) < 0.$$

7.4--Die bisherigen Betrachtungen unter 7 gelten allgemein, d.h. sie sind nicht daran gebunden, daß e_i , $e_{\vartheta\vartheta}$, $e_{\lambda\vartheta}$, $e_{\lambda\lambda}$ den direkten Effekt bei der M_2 -Tide beschreiben. Somit drückt sich das Verschwinden der Flächendivergenz beim indirekten Effekt durch

$$\sum_{i=1}^3 e_i^1 \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = 0$$

aus. Infolgedessen gilt mit 7.2 und 5.2

$$\sum_{i=1}^3 e_i^0 \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = 4Df,$$

also im Hinblick auf 4.1 und 2.4

$$\sum_{i=1}^3 O_i \cos(2\tau + \omega_i) \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = 4DA(h-3l) \cos 2\tau.$$

Das liefert die Bestimmungsgleichung

$$\sum_{i=1}^3 O_i \cos \omega_i \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = 4DA(h-3l)$$

für die Kombination $h-3l$, indem $\tau = 0$ gesetzt wurde, ferner bei $\tau = \frac{\pi}{4}$

$$\sum_{i=1}^3 O_i \sin \omega_i \sin 2(\gamma_i - \gamma_{i'}) = 0$$

als Bindung zwischen den Meßwerten oder als Kriterium dafür, daß der Ansatz 3.4 für e' zutrifft.

7.5--Im Abschnitt 6 wurde gezeigt, wie zwei nichtorthogonale horizontale Extensometer l und h vermitteln, wenn ψ' konstant und bekannt ist. ψ' braucht aber nicht genau bekannt zu sein, wenn ein drittes horizontales Extensometer vorhanden ist.

Nach 6.2 besteht zwischen l und h mittels m ein nicht-linearer Zusammenhang. Aus der Formel für h folgt

$$h[l(C_i - C_{i'}) + (O_i \sin \omega_i - O_{i'} \sin \omega_{i'})] \equiv Y_i = Z_i ,$$

$$Z_i \equiv (lC_i + O_i \sin \omega_i)(O_{i'} \cos \omega_{i'} - lB_{i'}) - (lC_{i'} + O_{i'} \sin \omega_{i'})(O_i \cos \omega_i - lB_i)$$

Mit $i=1,2,3$ durchläuft i' die Zahlen 2,3,1. Offensichtlich ist

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 ,$$

also auch

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 .$$

Daher besteht die Gleichung

$$ul^2 + vl + w = 0$$

mit den Koeffizienten

$$u = \sum_{i=1}^3 (B_i C_{i'} - B_{i'} C_i) \neq 0 ,$$

$$v = \sum_{i=1}^3 (B_i O_i \sin \omega_i - B_i O_i \sin \omega_i + C_i O_i \cos \omega_i - C_i O_i \cos \omega_i) ,$$

$$w = \sum_{i=1}^3 O_i O_i (\sin \omega_i \sin \omega_i - \cos \omega_i \cos \omega_i) ,$$

die sich aus der Lage und den Aufzeichnungen dreier Extensometer errechnen.

7.6--Die quadratische Gleichung für l hat die Lösungen

$$l \varepsilon = \frac{-v + \varepsilon R}{2u} , \quad \varepsilon = \pm 1 ,$$

wobei

$$R = -\sqrt{v^2 - 4uw} \geq 0 .$$

Die Diskriminante ist zunächst eine Funktion von O_i und ω_i , $i=1,2,3$, und daher von X_i, χ und den tatsächlichen (und gesuchten) Zahlen $l = \bar{l}$, $h = \bar{h}$ abhängig zu denken. 6.2 vermittelt

$$v = d - 2\bar{l}u , \quad w = -\bar{l}(d - \bar{l}u) ,$$

wobei

$$d = \sum_{i=1}^3 [(B_i X_i - B_i X_i) \sin \chi + (C_i X_i - C_i X_i) \cos \chi] .$$

Damit wird

$$R^2 = d^2 \sim R = d \operatorname{sgn}(d) \geq 0$$

und

$$l_{\varepsilon} = \frac{-d + 2\sqrt{1u + \varepsilon d \cdot \operatorname{sgn}(d)}}{2u} .$$

Man schließt daraus

$$l_{\varepsilon} = \bar{l} \sim \varepsilon = \operatorname{sgn}(d) .$$

Die Wahl des richtigen Vorzeichens ε entscheidet sich also anhand des Vorzeichens von d , einer Funktion, die vom indirekten Effekt abhängt. Nur für $d = 0$, also im Falle einer Doppelwurzel, ist l eindeutig bestimmbar. Dieser Fall tritt gewiß ein, wenn der indirekte Effekt verschwindet. Die Möglichkeit einer positiven Doppelwurzel läßt erkennen, daß keineswegs $l_{+1} \cdot l_{-1} < 0$ allgemein zutreffen kann, wodurch eine der beiden Lösungen a priori entfallen würde.

7.7--Um das Vorzeichen von d genauer zu untersuchen, werden die in 2.3 erklärten Zahlen B_i und C_i eingeführt,

$$\sum_{i=1}^3 (B_i X_{i'} - B_{i'} X_i) = \frac{A(1 + \cos^2 \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \sum_{i=1}^3 (X_i \cos 2\gamma_i - X_{i'} \cos 2\gamma_{i'}) ,$$

$$\sum_{i=1}^3 (C_i X_{i'} - C_{i'} X_i) = \frac{-2A \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \sum_{i=1}^3 (X_i \sin 2\gamma_i - X_{i'} \sin 2\gamma_{i'}) .$$

Das Resultat von 3.4 führt weiter zu

$$d = \frac{A\xi}{\sin^2 \vartheta} \left[(1 + \cos^2 \vartheta) \sin 2\psi' \sin \chi + 2 \cos \vartheta \cos 2\psi' \cos \chi \right] \sum_{i=1}^3 \sin 2(\gamma_i - \gamma_{i'}) .$$

Eine trigonometrische Umformung gibt der eckigen Klammer die Form

$$(1 + \cos \vartheta)(\sin 2\psi' \sin \chi + \cos \vartheta \cos 2\psi' \cos \chi) .$$

Der Faktor $1 + \cos \vartheta$ und alle Faktoren der eckigen Klammer sind positiv, so daß

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(d) = \operatorname{sgn}(\sin 2\psi' \sin \chi + \cos \vartheta \cos 2\psi' \cos \chi) .$$

Um ε zu fixieren, bedarf es also einer groben Schätzung von ψ' und χ . $\operatorname{sgn}(d)$ ändert sich, wenn entweder ψ' um $\frac{\pi}{2}$ oder χ um π erhöht wird. $\operatorname{sgn}(d)$ bleibt erhalten, wenn ψ' und zugleich χ um $\frac{\pi}{2}$ bzw. π erhöht werden. Ferner gilt

$$\tan 2\psi' = -\cos \vartheta \tan\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \longrightarrow d = 0 .$$

8. Radial angeordnetes Extensometer und horizontale Instrumente

8.1-- $\bar{e}_{rr}^0(\tau)$ sei die Aufzeichnung eines radial aufgestellten Extensometers. Unter Voraussetzung eines indirekten Effekts gemäß 3.3 ist

$$\bar{e}_{rr}^0(\tau) = \bar{e}_{rr}(\tau)$$

und speziell für die M_2 -Tide gemäß 2.5 und 2.4

$$e_{rr}^0(\tau) = e_{rr}(\tau) = -2f \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} = -2A(h-3l) \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} \cos 2\tau .$$

Im Ergebnis

$$e_{rr}^0(\tau) = O_r \cos(2\tau + \omega_r)$$

der M_2 entsprechenden harmonischen Analyse muß daher

$$\omega_r = \pi \quad \text{für} \quad O_r > 0 \ \& \ h-3l > 0$$

sein, ferner

$$O_r = 2A(h-3l) \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} .$$

Die Kombination $h-3l$ läßt sich also ohne Kenntnis des indirekten Effekts mit Hilfe eines vertikalen Extensometers bestimmen.

8.2--Neben dem radialen Extensometer sei ein horizontales vorhanden. Ein zweites horizontales Extensometer orthogonal zum ersten würde eine Amplitude O_2 und eine Phase ω_2 liefern, die sich aufgrund des Resultates von 5.2 aus

$$O_1 \cos \omega_1 + O_2 \cos \omega_2 = O_r \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\lambda_s},$$

$$O_1 \sin \omega_1 + O_2 \sin \omega_2 = 0$$

errechnen. Umgekehrt kann man O_r aus O_1 , O_2 , ω_1 und ω_2 ermitteln. Das zweite zum ersten orthogonale horizontale Extensometer erweist sich also als Äquivalent eines radialen Instrumentes, das gemeinsam mit einem horizontalen registriert. Diese Äquivalenz ist praktisch interessant, wenn X_1 oder χ_1 bekannt sind oder eine Beziehung zwischen diesen Größen besteht, wodurch sich die Zahlen h und l gemäß 5.3 bestimmen lassen.

$(\lambda_s + 2\mu_s)/\lambda_s$ hat man dabei als gegeben anzusehen.

8.3--Aufgrund der soeben aufgezeigten Äquivalenz kann die Ergänzung zweier horizontaler orthogonaler Extensometer durch ein radiales keine zusätzlichen Informationen zur Bestimmung von h und l zur Folge haben. Mit einem solchen Instrumentendreibein ist es jedoch mittels 8.2 möglich, die Größe $(\lambda_s + 2\mu_s)/\lambda_s$ aus O_r , O_1 , O_2 , ω_1 und ω_2 zu berechnen. Man muß aber bedenken, daß die zugrundeliegenden Formeln auf einfachen Annahmen über den indirekten Effekt beruhen.

8.4--Da zwei orthogonale horizontale Extensometer hinsichtlich der Bestimmung von h -31 dasselbe leisten wie drei horizontale allgemein orientierte Instrumente, läßt sich $(\lambda_s + 2\mu_s)/\lambda_s$ auch durch deren Verbindung mit einem radialen Gerät ermitteln. Die Formeln hierfür entnimmt man 7.4 und 8.1. Umgekehrt kann man die Amplitude O_3 und die Phase ω_3 des direkten M_2 -Effekts aus

$$\sum_{i=1}^3 O_i \cos \omega_i \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = O_r \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\lambda_s},$$

$$\sum_{i=1}^3 O_i \sin \omega_i \sin 2(\gamma_{i''} - \gamma_{i'}) = 0$$

berechnen, falls nicht $2(\gamma_2 - \gamma_1) = \pi$. (Der Ausnahmefall orthogonaler Instrumente wurde unter 8.2 behandelt). Die Ergänzung dreier horizontaler Extensometer durch ein radiales kann also keine zusätzlichen Informationen zugunsten von h und l bringen.

8.5--Die Arbeit [4] verwendet zur Bestimmung von h und l zwei horizontale und ein radiales Extensometer. Die Methode beruht auf der hier ausführlich diskutierten Annahme $\frac{\partial \chi}{\partial \gamma} = 0$ und benötigt ein Diagramm mit mehreren Kurvenscharen. Die Kurven berechnen sich aus den Ergebnissen der harmonischen Analyse und vorgegebenen Parameterwerten χ_1, χ_2, h, l . Bezüglich der Einzelheiten sei auf die Originalarbeit verwiesen. In ihr werden die Zahlen h und l als eindeutig bestimmt angegeben. Das ist jedoch im Hinblick auf 7.6 nicht garantiert. Offenbar ist die Eindeutigkeit von h und l durch die stillschweigende Voraussetzung $m > 0$ bedingt. Aus 6.2 geht jedoch hervor, daß durchaus $m < 0$ zutreffen kann.

Weitere Voraussetzungen der Methode sind die Gleichheit der Lamé'schen Konstanten λ_s und μ_s und das Verschwinden von e'_{zz} . Die Methode versagt, wenn die beiden horizontalen Instrumente zueinander orthogonal angeordnet sind, denn dann treffen die Bemerkungen 8.3 zu. Der Winkel zwischen den horizontalen Extensometern in [4] übertrifft den rechten Winkel um $12^{\circ}30'$.

8.6--An der freien Erdoberfläche verschwinden die Tensorkoordinaten $e_{r\lambda}, e_{r\vartheta}$ und die analogen Koordinaten beim indirekten Effekt. Ferner ist nach [4]

$$e_{rr} = \frac{-\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} (e_{\vartheta\vartheta} + e_{\lambda\lambda}) ;$$

für den indirekten Effekt gilt bei freier Oberfläche dasselbe. Die Dehnung in einer beliebigen (räumlichen) Richtung ist daher als Linearkombination von im allgemeinen drei Dehnungen in horizontalen Richtungen darstellbar, sobald die Lamé'schen Parameter vorliegen. Zur Ermittlung des Verzerrungszustands genügen demnach drei horizontale Dehnungsmessungen und man darf sich hinsichtlich der Bestimmung von h und l auf solche Messungen beschränken.

9. Übersicht

Die Verzerrungen der festen Erde infolge der M_2 -Tide sowie des zugehörigen „indirekten“ Effekts sind als harmonische Funktionen der Zeit anzusetzen. Die Verzerrung in horizontaler Richtung stellt sich zugleich als harmonische Funktion des Richtungswinkels dar. Die Formel für die „direkte“ Verzerrung enthält die Shida'sche Zahl l und die Love'sche Zahl h . Ohne indirekten Effekt, der durch die starke Verlagerung der Wassermassen bedingt ist, lassen sich l und h aus den beobachteten Verzerrungen leicht berechnen (Abschnitt 4.1). Da aber der indirekte Effekt i.a. in der Größenordnung des direkten liegt, steht man vor der Aufgabe, den störenden indirekten Effekt zu eliminieren. Zu dessen mathematischer Beschreibung wird hier vom Boussinesq'schen Problem ausgegangen. Aus den Aufzeichnungen horizontaler oder vertikaler Extensometer lassen sich folgende Rückschlüsse auf h und l ziehen:

- a) ein horizontales Extensometer, das nicht N-S oder E-W orientiert ist: Wenn der indirekte Effekt numerisch erfaßt ist, sind h und l bestimmbar (4.1).
- b) ein horizontales Extensometer in Richtung N-S oder E-W: Der indirekte Effekt sei numerisch erfaßt. Es ist (nur) eine Linearkombination von h und l bestimmbar (4.2). (Auf die numerische Berechnung des indirekten Effekts kann verzichtet werden, falls dessen Amplitude oder Phase oder eine Relation zwischen diesen bekannt ist.)
- c) ein horizontales Extensometer, das nicht N-S oder E-W orientiert ist: Es liege der Sonderfall vor, daß die Phase des indirekten Effekts vom Beobachtungszimut unabhängig ist. Das ist

gleichbedeutend mit der zeitlichen Konstanz der Hauptverzerrungsrichtung (4.4). Die zur Hauptverzerrungsrichtung symmetrischen und zueinander orthogonalen Richtungen sind vom indirekten Effekt frei (4.3)!

d) zwei horizontale orthogonale Extensometer, die nicht notwendig N-S und E-W orientiert sind: Die Linearkombination $h-3l$ ist vom indirekten Effekt unabhängig bestimmbar (5.2), da dessen Flächendivergenz verschwindet. Es besteht eine Relation zwischen den Meßergebnissen. Sie ist als Verträglichkeitsbedingung der Messungen oder als Kriterium für die Richtigkeit der Annahme betreffs des indirekten Effekts interpretierbar.

e) N-S und E-W orientierte Extensometer: h und l sind bei Kenntnis des indirekten Effekts bestimmbar (5.3). Es reicht hin, die Amplitude oder die Phase des indirekten Effekts oder eine Relation zwischen ihnen zu kennen.

f) zwei nichtorthogonale horizontale Extensometer: Die Hauptverzerrungsrichtung des indirekten Effekts sei konstant (vgl. 4.4) und bekannt. Dann sind h und l bestimmbar (6.2). Falls aber diese Richtung eine Symmetrieachse der Extensometeranordnung ist, kann nur l bestimmt werden (6.3) und es ergibt sich eine Bedingungsgleichung zwischen den Meßwerten wie unter d).

g) drei horizontale Extensometer: Ohne numerische Kenntnis des indirekten Effekts ergeben sich aus dem Verschwinden seiner Flächendivergenz die Linearkombination $h-3l$ und eine Bedingung zwischen den Meßwerten (7.4).

h) drei horizontale Extensometer: Die Hauptverzerrungsrichtung beim indirekten Effekt sei konstant aber nicht genau bekannt. l und h sind dann aus einer quadratischen Gleichung im allgemeinen zweideutig bestimmt (7.6). Die ungefähre Kenntnis der Hauptverzerrungsrichtung gestattet, die richtigen Werte h und l auszuwählen (7.7).

i) ein vertikales Extensometer: Der Beitrag des indirekten Effekts verschwindet; die Linearkombination $h-3l$ ist unmittelbar zu bestimmen (8.1).

j) ein vertikales und ein horizontales Extensometer sind zwei orthogonalen horizontalen Instrumenten gleichwertig, wenn das Verhältnis der Lamé'schen Parameter bekannt ist (8.2).

k) ein vertikales und zwei orthogonale horizontale Extensometer gestatten, das Verhältnis der Lamé'schen Parameter zu bestimmen (8.3).

l) ein vertikales und drei beliebig orientierte horizontale Extensometer leisten dasselbe wie die Anordnung unter k). Zusätzliche Informationen zur Bestimmung von h und l werden nicht geliefert (8.4).

m) ein vertikales und zwei nichtorthogonale horizontale Extensometer sind drei horizontalen Instrumenten gleichwertig, wenn das Verhältnis der Lamé'schen Parameter bekannt ist (8.5).

n) mehr als drei horizontale Extensometer liefern linear abhängige Aufzeichnungen (7.1) und daher keine zusätzlichen Informationen zur Bestimmung von h und l . Auch nichthorizontale Extensometer verhelfen nicht zu neuen Informationen (8.6).

Herrn Prof. Meißer danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

L i t e r a t u r

- [1] Bartels, J., Gezeitenkräfte. Flügges Handbuch der Physik XLVIII S. 734-774 (Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957).
- [2] Hiersemann, L., Fortlaufende Registrierungen von Bodenbewegungen durch ein Strainseismometer. Freiburger Forschungshefte C 135 (Akademie-Verlag Berlin 1962) 81 S.
- [3] Longman, I.M., A Green's function for determining the deformation of the earth under surface mass loads. J. Geophys. Research 68 (1963), p. 485-496.
- [4] Major, M.W., Sutton, G.H., Oliver, J. and R. Metsger, On elastic strain of the earth in the period range 5 seconds to 100 hours. Bull. Seism. Soc. Am., 54 (1964) 1, p. 295-346.
- [5] Melchior, P.J., Earth tides. Advances in Geophysics 4, S. 392-443 (Academic Press Inc. Publishers, New York 1958).
- [6] Ozawa, I., Study on elastic strain of the ground in the earth tides. Dis. Prev. Res. Bull., 15 (1957), S. 1-36.
- [7] Sugawa, C., Determination of $1+k-1$ from latitude observations at Mizusawa. Comm. de l'Observ. Royal de Belgique Nr. 188, Série Géophysique Nr. 58, Bruxelles 1961, p. 76-77.
- [8] Sugawa, C., Determination of $1+k-1$ from latitude observations at Mizusawa (II). Comm. de l'Observ. Royal de Belgique Nr. 236, Série Géophysique Nr. 69, Bruxelles 1964, p. 450-451.
- [9] Tomaschek, R., Tides of the solid earth. Flügges Handbuch der Physik XLVIII, S. 775-845 (Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957).

Traduction.

SUR LA NATURE DES VARIATIONS BIMENSUELLES DE LATITUDE

par

E.P. Fedorov

(Circulaire astronomique N° 110, 1951)

О ПРИРОДЕ ПОЛУМЕСЯЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ШИРОТЫ.

Е. П. Федоров.

Астрономический Циркуляр. № 110, 1951. Стр. 6.

Nous avons découvert dans les observations à la station internationale de Carloforte de 1912 à 1922 une onde bimensuelle de forme suivante :

$$\Delta\phi = 0^{\circ}011 \sin(2\zeta - 2\alpha + 46^{\circ}) + 0^{\circ}016 \sin(2\zeta - \alpha - 8^{\circ})$$

Ici le premier terme exprime l'influence des oscillations semi-diurnes de la verticale (marée M_2). En ce qui concerne le second terme, on ne peut l'expliquer par des oscillations diurnes de la verticale (marée O_1), puisque l'amplitude de ces oscillations à la latitude de Carloforte n'est au total que de $0^{\circ}001$ environ. Nous attribuons l'origine de ce terme au fait que la valeur effective de l'amplitude du membre bimensuel de la nutation est un peu plus grande que sa valeur théorique.

Précédemment déjà nous avons parlé [1] des conclusions relatives à la structure interne de la Terre qui résultent de cette discordance de la théorie classique de la nutation avec les données des observations.

Observatoire de Poltava
30 janvier 1951.

L'ONDE BIMENSUELLE DANS LES VARIATIONS DE LATITUDE DE LA STATION DE UKIAH

par *E.I. Evtouchenko*

(Circulaire astronomique N° 113-114, 8 mai 1951)

ПОЛУМЕСЯЧНАЯ ВОЛНА В ИЗМЕНЕНИЯХ ШИРОТЫ СТАНЦИИ УКАЯ.

Е.И. Евтушенко.

Астрономический Циркуляр. № 113-114, 1951, Стр. 14.

E.P. Fedorov a montré que l'onde lunaire bimensuelle dans les variations de la latitude de la station de Carloforte peut être représentée par la somme de deux composantes dont les arguments sont $2(\zeta - \alpha)$ et $2(\zeta - 2\alpha^1)$. L'analyse des observations à la station de Ukiah de 1912 à 1922 conduit au même résultat, à savoir :

$$\Delta\phi = 0^{\circ}009 \sin(2\zeta - 2\alpha + 103^{\circ}) + 0^{\circ}014 \sin(2\zeta - \alpha + 19^{\circ}).$$

La présence du second terme confirme à nouveau la conclusion tirée précédemment que la valeur effective de l'amplitude du membre bimensuel de la nutation est un peu plus grande que sa valeur théorique ²⁾.

Observatoire de Poltava
7 avril 1951.

-
- 1) E.P. Fedorov A. Tr. N° 110
 - 2) N.A. Popov A. Ts. N° 103-104.

Traduction.

SUR LES FORMULES DE LA NUTATION EN DECLINAISON

par A. Ia. Orlov

(Circulaire astronomique N° 116, 2 juillet 1951)

О ФОРМУЛАХ НУТАЦИИ ПО СКЛОНЕНИЮ.

А. Я. Орлов.

Астрономический Циркуляр. № 116, 1951. Стр. 16.

L'expression

$$a \sin x \cos a - b \cos x \sin a,$$

si l'on pose

$$a = A + B, \quad b = A - B,$$

prend la forme

$$A \sin (x - a) + B \sin (x + a).$$

En appliquant cette transformation simple aux formules de réduction de la nutation en déclinaison nous obtenons pour le terme principal :

$$- 8''034 \sin (\delta - a) + 1''176 \sin (\delta + a),$$

pour le terme semi-annuel :

$$+ 0''529 \sin (2L + a) - 0''022 \sin (2L - a),$$

pour le terme semi-mensuel :

$$- 0''085 \sin (2\ell - a) + 0''003 \sin (2\ell + a),$$

etc. Ces expressions sont très commodes pour déterminer les corrections des coefficients d'après les observations de latitude qui, dans ce but, doivent être disposées en fonction des arguments : $\delta - a$, $\delta + a$, $2L + a$, $2\ell - a$ etc.

Observatoire de Poltava
15 juin 1951.

Traduction

L'ONDE LUNAIRE SEMI-MENSUELLE DANS LES VARIATIONS DE LATITUDE DE LA STATION DE CARLOFORTE DE 1922 A 1934.

par *E.I. Evtouchenko*

(Circulaire astronomique N° 116, 2 juillet 1951)

ЛУННАЯ ПОЛУМЕСЯЧНАЯ ВОЛНА В КОЛЕБАНИЯХ ШИРОТЫ СТАНЦИИ
КАРЛОФОРТЕ С 1922 ПО 1934 г.

Е. И. Евтушенко.

Астрономический Циркуляр. № II6, 1951. Стр. 16.

Dans les variations de latitude de la station de Carloforte de 1922 à 1934 nous avons découvert une onde lunaire semi-mensuelle qui peut être représentée par l'expression suivante :

$$\Delta\phi = 0^{\circ}011 \sin(2\zeta - 2\alpha + 102^{\circ}) + 0^{\circ}010 \sin(2\zeta - \alpha + 12^{\circ})$$

Ce résultat est en concordance avec celui qui a été obtenu précédemment par E.P. Fedorov d'après les résultats du cycle précédent d'observations à Carloforte

Observatoire de Poltava
9 mai 1951

DETERMINATION DE L'AMPLITUDE DU TERME SEMI-MENSUEL DE LA NUTATION D'APRES LES DONNEES DES OBSERVATIONS DE LATITUDE

par *E.P. Fedorov*

(Circulaire astronomique N° 116, 2 juillet 1951)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПОЛУМЕСЯЧНОГО ЧЛЕНА НУТАЦИИ
ПО ДАННЫМ ШИРОТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ.

Е. П. Федоров.

Астрономический Циркуляр. № II6, 1951. Стр. 17.

La réduction des observations du service International des Latitudes, effectuée par l'auteur et E.I. Evtouchenko dans le but de mettre en évidence l'onde de la forme

$$A \sin(2\zeta - \alpha + \gamma) \quad (1)$$

leur a permis d'obtenir pour les trois cycles les valeurs suivantes de l'amplitude et de la phase initiale :

Table 1

Cycle des observations	A	γ
Ukiah 1912-1922	0°014	+ 12°
Carloforte 1912-1922	0°016	- 2
Carloforte 1922-1934	0°010	- 21

Les valeurs γ de la table 1 diffèrent un peu de celles publiées précédemment [1,2] en raison du changement du procédé de calcul. Nous donnons ci-après, exprimés en millièmes de seconde, les écarts des latitudes instantanées des courbes adoucies trouvés par la réduction collective des trois cycles indiqués.

Table 2

$2\zeta - \alpha$	$\Delta\phi$	$2\zeta - \alpha$	$\Delta\phi$
0 ^h	+ 3	12 ^h	- 2
1	+ 7	13	- 2
2	+ 4	14	- 7
3	+ 15	15	- 5
4	+ 6	16	- 11
5	+ 8	17	- 8
6	+ 19	18	- 20
7	+ 3	19	- 17
8	+ 10	20	- 15
9	+ 17	21	- 9
10	+ 12	22	- 3
11	+ 2	23	- 2

On peut représenter les données de la table 2 par l'expression (2) obtenue par la réduction de plus de 50.000 observations des stations de latitude d'Ukiah et de Carloforte :

$$\Delta\phi = 0''013 \sin (2\zeta - \alpha - 1^\circ). \quad (2)$$

La comparaison des valeurs de l'amplitude et de la phase initiale données dans la table 1 ainsi que la présentation directe de la table 2 ne laissent plus de doutes sur le fait que l'onde lunaire semi-mensuelle de la forme (1) existe effectivement dans les variations de latitude. Ainsi, la correction hypothétique de N.A. Popov est devenue évidente, à savoir que la valeur admise pour l'amplitude du terme semi-mensuel de la nutation est plus petite que sa valeur effective [3].

En représentant le terme semi-mensuel dans la formule de réduction en déclinaison par l'expression suivante :

$$\Delta\delta = - 0''085 \sin (2\zeta - \alpha) + 0''003 \sin (2\zeta + \alpha), \quad (3)$$

nous conclurons que l'amplitude de l'onde (2) est cette correction qu'on peut donner au coefficient pour $\sin (2\zeta - \alpha)$ dans l'expression (3). Ainsi la valeur effective de ce coefficient est :

$$0''098,$$

et son rapport à la valeur que donne la théorie classique est égal à 1.15.

Sur la base des considérations théoriques nous étions arrivés précédemment à la conclusion que "l'amplitude du terme de nutation, contenant dans l'argument le double de la longitude de la Lune, doit être augmentée d'un peu plus de 1/10 de sa valeur de la table [4]"

Observatoire de Poltava
16 mai 1951

VARIATIONS LUNAIRES SEMI-MENSUELLES DE LATITUDE D'APRES LES OBSERVATIONS
DE CARLOFORTE ET UKIAH DE 1899 à 1934

par E.P. Fedorov et E.I. Evtouchenko

(Circulaire astronomique N° 126, 30 avril 1952)

ЛУННЫЕ ПОЛУМЕСЯЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШИРОТЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ
НА СТАНЦИЯХ КАРЛОФОРТЕ И УКЯЯ С 1899 ПО 1934 г.

Е. П. Федоров и Е. И. Евтушенко.

Астрономический Циркуляр. № 126, 1952. Стр. 19.

Dans la communication précédente nous avons donné les résultats de la réduction des cycles séparés des observations de latitude aux stations internationales de Carloforte et Ukiah¹; nous donnerons donc ici les résultats de la réduction de toutes les observations publiées dans ces stations (66.220 observations à la station de Carloforte et 65.746 observations à la station de Ukiah). Nous avons obtenu les expressions suivantes pour les ondes semi-mensuelles :

	Carloforte	Ukiah
Nutation	$0^{\circ}011 \sin (2\zeta - \alpha - 10^{\circ}),$ $\pm 1 \qquad \qquad \qquad \pm 4$	$0^{\circ}011 \sin (2\zeta - \alpha - 4^{\circ})$ $\pm 1 \qquad \qquad \qquad \pm 6$
Marée	$0^{\circ}009 \cos (2\zeta - 2\alpha - 104^{\circ}),$ $\pm 1 \qquad \qquad \qquad 3$	$0^{\circ}007 \cos (2\zeta - 2\alpha - 91^{\circ})$ $\pm 1 \qquad \qquad \qquad \pm 15$

Pour déterminer la valeur définitive de l'amplitude de l'onde de nutation nous avons effectué la réduction commune des observations dans les deux stations et avons obtenu :

$$\Delta\phi = 0^{\circ}0106 \sin (2\zeta - \alpha - 7^{\circ}3)$$

$$\pm 7 \qquad \qquad \qquad \pm 3.8$$

La valeur théorique du coefficient pour $\sin (2\zeta - \alpha)$ est égale à $0^{\circ}085$. Ainsi la valeur de ce coefficient que nous avons trouvée par les observations est égale à $0^{\circ}096 \pm 0^{\circ}001$.

Observatoire de Poltava
29 mars 1952.

CORRECTION DU TERME SEMI-MENSUEL DE LA NUTATION D'APRES LES OBSERVATIONS DE
LA LATITUDE A POULKOVO 1915-1928.

par A Ia. Orlov

(Circulaire astronomique N° 126, 2 juillet 1951)

ПОПРАВКА ПОЛУМЕСЯЧНОГО ЧЛЕНА НУТАЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ
ШИРОТЫ В ПУЛКОВЕ 1915-1928 гг.

А. Я. Орлов.

Астрономический Циркуляр. № 126, 1952. Стр. 19.

On a obtenu à Poulkovo pour l'époque indiquée et d'après le programme élargi, 27.500 observations. Leur analyse nous a donné pour la latitude, les variations suivantes dues à la nutation

¹ E.P. Fedorov, A. Ts 116

$$\begin{array}{cccc} 0^{\circ}013 \sin (2\zeta - \alpha) + 0^{\circ}003 \sin (2\zeta + \alpha) & & & (1) \\ \pm 2 & \pm 10^{\circ} & \pm 2 & \pm 40^{\circ} \end{array}$$

Cette expression, prise avec le signe opposé, est la correction du terme de nutation semi-mensuel qui est admis égal à ¹ :

$$-0^{\circ}085 \sin (2\zeta - \alpha) + 0^{\circ}003 \sin (2\zeta + \alpha) \quad (2)$$

En soustrayant (1) de (2) nous arrivons à la conclusion que dans les formules de réduction en déclinaison, l'expression à deux termes (2) doit être remplacée par un seul terme : $-0^{\circ}098 \sin (2\zeta - \alpha)$. D'après les observations de Poulkovo, l'onde de marée semi-mensuelle a été obtenue égale à : $-0^{\circ}008 \cos (2\zeta - 2\alpha + 115^{\circ})$

$$\begin{array}{cc} \pm 2 & \pm 14 \end{array}$$

8 avril 1952

¹ Circulaire astronomique N° 116 page 16.

Traduction

L'ONDE LUNAIRE SEMI-MENSUELLE DANS LES OBSERVATIONS DE LATITUDE A LA STATION DE MIZUSAWA

par *E.I. Evtouchenko*

(Circulaire astronomique N° 132, 8 décembre 1952)

ЛУННАЯ ПОЛУМЕСЯЧНАЯ ВОЛНА В НАБЛЮДЕНИЯХ ШИРОТЫ НА

СТАНЦИИ МИЦУЗАВА.

Е. И. Евтушенко.

Астрономический Циркуляр. № 132, 1952. Стр. 10.

L'analyse des observations à la station de Mizusawa de 1900 à 1934 (43.872 observations) nous a donné l'expression suivante pour l'onde lunaire semi-mensuelle

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta\phi = 0^{\circ}005 \cos (2\zeta - 2\alpha - 55^{\circ}) + 0^{\circ}006 \sin (2\zeta - \alpha - 16^{\circ}) & & & & & & \\ \pm 1 & \pm 16 & \pm 2 & & & & \pm 17 \end{array}$$

Observatoire de Poltava
21 novembre 1952.

