MAREES TERRESTRES

BULLETIN d'INFORMATIONS

N° 26

20 novembre 1961

Association Internationale de Géodésie

Commission Permanente des Marées Terrestres.

Editeur : Dr. Paul MELCHIOR
Centre International des Marées Terrestres
c/o Observatoire Royal de Belgique
3, Avenue Circulaire
Bruxelles, 18
Belgique.

Le thermographe a l'aspect d'un cylindre ayant un diamètre de 25 mm et une hauteur de 65 mm. Le poids du thermographe est d'environ 100 g . Il est fixé par des vis sur le même support que celui sur lequel est posé le pendule. En cas de besoin, il est facile d'enlever le thermographe avec l'appareil et de le suspendre dans divers endroits de la salle.

Sensibilité du thermographe.

Nous déterminerons la sensibilité du thermographe avec des galvanomètres différents.

1. Le galvanomètre ⊓ K-V a une constante statique pour le courant $C_i = 1{,}25.10^{-8}$ et une résistance intérieure de 60 ohms. Le thermographe avec une résistance choisie de R = 1.000 ohms et avec ce galvanomètre donne la sensibilité

$$U_t = 120 \text{ mm/° C.}$$

Une telle sensibilité satisfait tout à fait nos exigences pour les mesures approximatives. Cependant, il ne convient pas, pour la commodité du travail, de convertir les millimètres en degrés quand la sensibilité n'est pas un chiffre rond, c'est pourquoi il est nécessaire que le galvanomètre ⊓ K-V soit shunté par une résistance convenable et d'ajuster la sensibilité du thermographe à 100 mm/°C.

2. Le galvanomètre M-21/2 a une constante statique pour le courant $C_i = 0.75.10^{-9}$ et $R_g = 85$ ohms. Le thermographe avec ce galvanomètre aura une sensibilité de $U_t = 2.000$ mm/°s. La diminuation de sensibilité des shunts amène le galvanomètre à un puissant régime d'amortissement c'est pourquoi en l'occurrence pour l'amortissement il est utile d'incorporer dans le même galvanomètre un shunt de 1.000 ohms et d'ajuster la sensibilité à 1.000 mm/° C par une résistance supplémentaire.

Le courant dans le galvanomètre sera :

$$I = \frac{1{,}5}{1000\ (1085 + R_D)},$$

où R_D est la résistance supplémentaire.

La sensibilité du thermographe sera

$$U_t = \frac{2000}{1085 + \frac{R_D}{1000}}$$

Il n'est pas difficile de remarquer que pour $R_D \cong 2.000$ ohms la sensibilité du thermographe sera voisine de 1.000 mm/°C. Par conséquent on peut obtenir la sensibilité soit de 1.000 soit de 100 mm/°C avec ce galvanomètre.

3. Au cas où la sensibilité du thermographe avec ce galvanomètre serait insuffisante on pourrait prendre le galvanomètre M-21/2 avec une constante pour le courant de $C_i = 0,15.10^{-9}$ et une résistance $R_g = 600$ ohms. Avec ce galvanomètre, la sensibilité du thermographe sera très grande : $U_t = 60.000$ mm/°C. Une telle sensibilité ne peut être utilisable que dans des conditions de températures très stables.

Réglage du thermographe sur zéro et échelle de mesure de la température.

Sur la figure 22, on a tracé le schéma des corrections de zéro du thermographe. Dans le bras de mesure on a mis une résistance variable R_t, par laquelle le galvanomètre peut être amené sur zéro. Supposons que le bras de mesure ait la résistance $R_o = 900$ ohms pour zéro degré. Ainsi, par l'introduction entière de la résistance $R_t = 100$ ohms le thermographe travaillera sur une échelle de 0 à 1° C (avec le galvanomètre ⌜K-V). Par la suppression intégrale des résistances $R_t = 0$ (avec le même galvanomètre) le thermographe travaillera sur une échelle de 24° à 25° sur toute la largeur du papier photographique (120 mm).

Si on emploie le galvanomètre M-21/2, le domaine des températures de 0 à 25° reste le même. Pour une largeur de papier de 120 mm, la marche en 24 heures de la température ne doit pas dépasser 0,1°. Avec le galvanomètre M 21/2 la marche en 24 heures ne doit pas être de plus de 0,01° pour un domaine de mesures de 25°. En ce qui concerne le schéma de la mise en circuit, qui est exposée sur la figure 22, l'élément alimentant le thermographe, joue dans l'appareil le même rôle que le thermographe. Le changement de la résistance des fils pour des variations de température de l'atmosphère extérieure, dans ce même schéma, ne doit pas se faire sentir essentiellement avec la précision de la mesure de la température, comme le premier et le second appareil (fig. 22) mis en circuit dans divers bras du pont, et la différence de température de ces fils amènera seulement une erreur dans la mesure. Pour que la différence de température de ces fils soit minimum, il faut en prendre une paire et amener un troisième à part allant directement au galvanomètre. Le calcul de la sensibilité de l'appareil exposé plus haut montre que pour le calcul du trait sur le

photo-élément, avec une précision de 0,2 mm, la précision de la mesure de la température avec ce thermographe peut être portée à 0,00001° C. Cependant, la précision réelle des mesures peut être sensiblement moindre à cause du bruit de fond calculé des changements de température.

C'est pourquoi, avant d'entreprendre un enregistrement de température dans la salle, il faut au cours de plusieurs jours faire des enregistrements expérimentaux avec le thermographe et déterminer les perturbations dues aux changements de température. Pour cela il faut remplacer le bras de mesure de 900 ohms par une résistance en manganine, en utilisant dans ce but une résistance spéciale bobinée de 1.000 ohms, et d'après les enregistrements obtenus déterminer l'influence de la variation de température de l'atmosphère extérieure sur le galvanomètre sur les fils conducteurs et les rheostats pour la correction du zéro.

Pour cela, il faut un fil allant de la résistance variable R_t (sur la figure 22 il est désigné en 1) incorporer non dans le bras de mesure mais dans la résistance supplémentaire d'indice 0.

Détermination et contrôle de la sensibilité du thermographe à résistance.

Comme on l'a montré plus haut, la sensibilité du thermographe est facile à calculer ; quand on connaît la sensibilité du galvanomètre et le paramètre du thermographe. Cependant il est beaucoup plus simple et plus sûr de déterminer et de contrôler les sensibilités à l'aide d'impulsions, inscrites sur la pellicule, comme cela se fait pour le clinomètre.

La résistance variable R_t, insérée dans le bras de mesure (figure 22) varie par pas de 0,1 , 1 et 10 ohms. Ensuite le thermographe étant corrigé, c'est-à-dire le galvanomètre amené au zéro, la résistance connue r_t est branchée pendant quelques minutes et ensuite coupée. Calculons maintenant en millimètres la déviation du galvanomètre. Il est facile de démontrer que connaissant r_t et n on peut déterminer la sensibilité du thermographe, sans avoir recours à la détermination de la sensibilité du galvanomètre.

En réalité, l'augmentation de la résistance dans le bras de mesure du thermographe r_t correspond à un échauffement du thermographe Δt. Nous écrirons la sensibilité du thermographe comme suit :

$$U_t = \frac{n}{\Delta t} \text{ mm/°C} \qquad (7)$$

On peut exprimer la résistance r_t comme une variation de résistances avant et après échauffement du thermographe Δt :

$$r_t = R_{42} - R_{41},$$

ou bien

$$r_t = R_o \left[1 + \alpha (t + \Delta t)\right] - R_o (1 + \alpha t)$$

et

$$r_t = R_o \alpha \Delta t.$$

D'où nous considérons

$$t = \frac{r_t}{R_o \alpha} \qquad (8)$$

En substituant l'expression (8) dans (7) nous obtenons

$$U_t = \frac{n}{r_t} R_o \alpha , \qquad (8')$$

En prenant $\alpha = 0{,}004$ et $R_o = 900$ ohms, nous aurons l'expression définitive pour la sensibilité du thermographe:

$$U_t = 3{,}6 \frac{n}{r_t} \qquad (9)$$

Il est facile de donner la détermination de la température t d'après la résistance supplémentaire R_t.

Quand le pont est maintenu en équilibre le bras de mesure R_o avec la résistance R_t est égal à la résistance R. Dans notre cas R = 1000 ohms, de telle sorte qu'on peut écrire :

$$R_o (1 + \alpha t) + R_t = R, \qquad (9')$$

d'où : pour $\alpha = 0{,}004$, $R_o = 900$ ohms et R = 1.000 ohms

$$t = \frac{R - R_o - R_t}{\alpha R_o} = \frac{100 - R_t}{3{,}6} \qquad (10)$$

Par conséquent, connaissant la résistance R_t, il est facile de calculer la température dans la salle en degrés centigrades, et, n et r_t étant mesurés, il est facile de calculer U_t - la sensibilité du thermographe.

Ce procédé donne la possibilité non seulement de déterminer, mais encore de contrôler la sensibilité U_t du thermographe par branchement et débranchement d'une résistance de marche.

Le bloc de résistance à six décades s'emploie à titre de résistance variable R_t. Sa mise en circuit est montré sur la figure 23. Une vis de serrage est ajoutée dans le bloc et le montage s'effectue d'après le schéma, représenté sur la figure 23. Les trois premières décades servent pour la mise au zéro du galvanomètre et les trois décades suivantes (avec une haute résistance) sont utilisées pour bloquer le thermographe.

On suppose que le galvanomètre est shunté et travaille dans un régime apériodique.

Supposons qu'il faille établir la sensibilité du thermographe avec le galvanomètre M-21/2 à 100 M/°C, alors logiquement on joint au galvanomètre, comme on l'a calculé plus haut, 1.900 ohms.

Ainsi, nous pouvons mesurer la sensibilité avec une précision :

$$\delta = \frac{100}{19000} 100 = 0{,}5\ \%$$

qui satisfait complètement nos exigences.

Réglons le thermographe sur une sensibilité à chiffre rond, par exemple 100mm/°C. Pour cela nous posons dans la formule (8) $\Delta t = 1°C$, alors $r_t = 3{,}6$ ohms. Ajoutons à R_t la résistance $r_t = 3{,}6$ ohms et en utilisant les trois décades des grandes résistances, nous ajusterons la déviation du galvanomètre à 100 mm, alors la sensibilité du thermographe sera égale à 100 mm/° C. Il n'est pas difficile de le vérifier, en plaçant la valeur obtenue $r_t = 3{,}6$ dans l'égalité (9).

La précision de la détermination de la sensibilité du thermographe U_t dépend de la précision de la mesure de l'impulsion n et des résistances r_t et R_o. Pour une largeur de papier de 120 mm et pour une précision du trait calculé sur le papier de 0,2 mm, l'impulsion peut être mesurée avec une erreur relative de 0,2 %. Une erreur

semblable provient de la résistance r_t qui constitue une partie du bloc de résistanc à six décades.

Il est beaucoup plus difficile de déterminer R_o c'est-à-dire la résistance du bras de mesure pour 0°. Pour cela, le bras en fil de cuivre se mesure par une température déterminée t et R_o se retrouve dans l'équation :

$$R_t = R_o (1 + \alpha t)$$

ou bien

$$R_o = \frac{R_t}{1 + \alpha t},$$

Ainsi, la précision de la détermination de R_o dépend de la précision de la mesure de la température t, de la précision de la détermination du coefficient de température et de la précision de la mesure R_t de résistance pour une température mesurée. Un thermomètre à mercure assure une précision de mesure de la température de 0,2 %. Il est facile aussi de mesurer la résistance R_t avec une précision de 0,2 %. Il reste à évaluer la précision de la détermination du coefficient de température du cuivre electrolytique, dont est fait le bobinage du thermographe.

Les tables données pour le coefficient selon divers ouvrages diffèrent de 0,00385 à 0,00415 c'est-à-dire de 5 %. Le coefficient de température du cuivre varie peu avec l'épaisseur des fils. L'étude de la dépendance du coefficient de température du cuivre en relation avec le diamètre du fil a été faite par A.A.Savtchenki. Il a montré que par la réduction du fil, le coefficient α augmente peu. D'après cette mesure, pour le fil de diamètre de 0,2 mm avec lequel notre thermographe est bobiné, le coefficient $\alpha = 0{,}00385$. L'erreur dans les mesures du coefficient s'évalue à $\pm$ 0,3 %. Par conséquent, pour l'erreur systématique maximum dans les déterminations de R_o on peut compter sur 0,7 %. De là, on peut tirer la conclusion que l'erreur systématique dans les déterminations de la sensibilité du thermographe sera d'un peu plus de 1 %, puisque mesurer l'impulsion avec une précision de 0,2 % ne présente pas une grande difficulté et que la résistance r_t se mesure avec une erreur relative de 0,2 %.

Exemple de détermination de la sensibilité du thermographe à résistance.

Pour les enregistrements des inclinaisons dans la salle de l'heure de l'Université de Moscou dont la profondeur est de 22 m, la température a été mesurée cinq fois par des thermomètres à mercure. Les indications des thermomètres étaient les suivantes : 8°9, 9°1, 9°1, 9°1, 9°0. La valeur moyenne est 9°04 $\pm$ 0,02 (c'est-à-dire 0,2 %). La résistance supplémentaire R_t (cf. figure 22) pour la mise du galvanomètre sur zéro était égale à 66,6 ohms. Les résistances des bras du pont de ce thermographe ont été prises de 200 ohms. De telle sorte que la résistance du bras de mesure pour t = 9°04 était :

$$R_t = 200 - 66,6 = 133,4 \pm 0,1 \text{ ohms.}$$

Les impulsions de courant de 1 ohm ont donné sur la pellicule le résultat suivant :

15.11 - 15,5 mm
16.11 - 15,4 "
17.11 - 15,5
18.11 - 15,5
20,11 - 15,4

Moyenne : 15,46 mm $\pm$ 0,025 (ou 0,17 %)

T a b l e 11.

Variation de la valeur de l'impulsion contrôlée n du thermographe à résistance dans le temps.

Station Alma-Ata *

Novembre 1959					
1ère Décade		2ème Décade		3ème Décade	
Nombre	n mm	Nombre	n mm	Nombre	n mm
1	27,3	11	27,3	21	27,1
2	27,4	12	27,3	22	27,4
3	27,2	13	27,2	23	27,3
4	27,1	14	27,4	24	27,3
5	27,2	15	27,4	25	27,2
6	27,3	16	27,1	26	27,2
7	27,3	17	27,2	27	-
8	27,3	18	27,3	28	27,2
9	27,3	19	27,1	29	27,2
10	27,3	20	27,1	30	27,2
Moyenne	27,27±2,025		27,24±0,034		27,21±0,028
Ecart de moyenne	0,09 %		0,12 %		0,10 %

Moyenne par mois 27,24±0,018 mm

Ecart de moyenne 0,06 %

En substituant les valeurs R_t, et t dans l'équation (10), nous obtiendrons R_o = 128,8 ohms. L'erreur relative R_o/R_o = 0,17 + 0,2 + 0,3 = 0,67 %. De telle sorte que même pour l'impulsion donnant une valeur de 15 mm l'erreur de mesure U_t obtenue a été 1,1 %. Les observations des inclinaisons de la surface de la Terre s'effectuent, comme il se doit, pendant plusieurs mois ; les mesures quotidiennes de contrôle de l'impulsion du courant du thermographe peuvent augmenter la précision de la détermination de la sensibilité du thermographe par des observations fréquentes.

* : les observations ont été faites quotidiennement à 9 heures du matin.

Dans la table 11 on donne les mesures de l'impulsion du courant en novembre 1959 à la Station d'Alma-Ata. Les impulsions ont éte mesurées chaque jour, et seulement le 27 novembre l'impulsion manquait sur la pellicule. Dans la table, la série de mesures est divisée en trois groupes de 10 jours. L'erreur quadratique moyenne de la mesure de l'impulsion dans chaque groupe était de 0,09 à 0,12 %, et l'erreur quadratique moyenne par mois était seulement de 0,06 %.

En comparant la moyenne de dix n, il est aisé de remarquer que l'impulsion diminue de 0,03 mm avec chaque décade. Cette diminution systématique de l'impulsion s'explique par la baisse de tension de l'élément à partir duquel on prend le courant pour l'alimentation du pont du thermographe. Cependant cette baisse systématique de tension, bien qu'elle constitue par décade 0,01 %, par mois 0,03 % est calculée chaque jour pour les déterminations de l'impulsion et n'amêne pas d'erreur pour les mesures de sensibilité du clinomètre.

Les impulsions, exposées dans la table, ont été prises avec les pellicules, dont l'une est montrée sur la figure 8. Ici l'impulsion est réglée de manière que la sensibilité du thermographe était égale à 100 mm/° C. Ce chiffre rond, relevé pour la sensibilité du thermographe, facilite fort le travail de l'enregistrement de température.

La dérive du zéro joue un rôle important pour les mesures des inclinaisons. L'importance de la dérive dépend de la qualité du clinomètre et des conditions d'installation de l'appareil. La suspension parfaite du pendule, la stabilité de la tension sur les photoéléments éclairés et sur le photoélément même, peuvent rendre très petite la dérive dépendant de l'appareil.Il est plus difficile de trouver un endroit où il n'y ait pas de dérive clinomètre. Dans les galeries et les puits il y a toujours des inclinaisons uniformes, à cause de la pression déterminée de la mine et des déformations tectoniques des types de mines. Les inclinaisons de ce genre se distinguent d'après leur importance. Dans certains endroits elles ne dépassent pas 0",01 à 0",03 par 24 heures, en d'autres endroits de la même galerie elles peuvent aller jusqu'à 0",1 par 24 heures et même plus.

La dérive rend les observations difficiles,parce que les appareils d'une sensibilité de 100 mm/sec. d'arc, dérivent pendant 2-3 jours sur toute l'échelle c'est-à-dire que l'enregistrement sort de la limite de la pellicule.

Pour ramener le pendule à zéro sans aller dans la salle, nous nous sommes servis de trois procédés.

1. Le règlage en profondeur a été réalisé au moyen d'un moteur réversible avec un réducteur de 1 : 125.000. Le moteur à réducteur tourne la vis de réglage dans l'une ou l'autre direction.

Cependant ce procédé n'est utile que pour ramener le pendule au zéro, opération qui ne se répète pas plus d'une fois par mois car après chaque réduction, sur la courbe de l'inclinaison, des perturbations apparaissent et c'est seulement après 1 à 2 heures que le pendule commence à enregistrer une inclinaison normale.

2. Un réglage délicat s'effectue facilement à l'aide du poids qui se déplace dans le châssis du clinomètre. Il suffit de déplacer le poids pesant 1 kg, d'une vis de réglage à l'autre, pour provoquer des déformations du châssis de l'appareil de 1 seconde d'arc. Le poids se déplace à l'aide d'une vis micrométrique qui tourne par un servomoteur. Ce procédé de réglage est facile et le mécanisme avec une vis et un moteur est construit au cours de la fabrication.

3. Il a été plus simple d'amener le pendule à zéro par le courant. Dans ce but, sur ce même solénoïde qui entre dans le jeu circulaire de l'aimant, une seconde section est enroulée. Cette section est étalonnée aussi sur la plate-forme c'est-à-dire que pour elle on détermine les constantes électrodynamiques de I_o. Connaissant I_o et le courant par lequel le pendule est amené à zéro, il est facile de déterminer l'angle d'inclinaison de l'appareil; dans ce cas le photoélément s'emploie comme indicateur du zéro.

Sur la figure 24 est représenté le diviseur de la tension avec le commutateur K, à l'aide duquel le courant change dans le solénoïde du clinomètre. Les 100 ohms que donne le solénoïde du clinomètre apportent au pendule, pour T = 5 secondes, le coefficient d'amortissement $\varepsilon = n$, alors que pour 0 ohm le pendule devient un peu amorti. Pour l'amortissement du galvanomètre, nous assurons un mouvement apériodique, le temps pour installer le clinomètre dans une nouvelle position ne dépasse pas 25 - 30 secondes.

La figure 25 présente le schéma de montage du tableau de commande pour deux appareils. Dans la moitié droite sont réparties les résistances du diviseur de la tension R_{10}, R_{11} ... R_{15}, R_{18} ..., R_{21} résistances pour le réglage de luminosité

des photoéléments R_{16}, R_{17}, R_{22} et R_{25}, les voltmètres pour le contrôle de luminosité V_1 et V_2, les leviers de commande du courant dans les solénoïdes π_2 et π_3, les boutons KH_1 et KH_2 pour le branchement des moteurs, en tournant les vis de réglage et les leviers π_1 et π_4 pour le changement de commande de rotation des moteurs.

Dans la moitié gauche on montre les schémas d'installation en détail du tableau du thermographe et du tableau pour l'amenée de contrôle de l'impulsion du courant.

Enregistreur pour les enregistrements des inclinaisons.

L'aménagement de la salle d'enregistrement rend la réalisation d'observations au clinomètre fort difficile dans les galeries. Ces derniers temps même, nous avons mis au point un enregistreur pour les enregistrements des inclinaisons à même la galerie. Une vue générale de l'installation est donnée sur la figure 26. L'enregistreur 1, les batteries d'alimentations 2, les galvanomètres et le tableau de commande 3 fermés par un couvercle avec des joints en caoutchouc. A l'intérieur de l'enregistreur, de même que dans le clinomètre, se trouvent des cuvettes de chlorure de calcium ou de silicate pour l'asséchement, pour qu'on puisse faire des observations dans la galerie quelle que soit l'humidité. L'enregistreur se relie par des fils aux clinomètres. L'enregistrement se voit sur papier photographique 4 d'une largeur de 20 cm. Ainsi, l'équipement de la station clinométrique est ramenée maintenant seulement à l'installation d'une ou deux portes et au déblaiement d'une place pour les clinomètres. Cependant cet appareil n'a pas été utilisé pour les observations des inclinaisons pendant l'A.G.I. et sera décrit d'une manière détaillée plus tard.

Au cours des années 1957-1959 les observations des inclinaisons de la Terre avec un clinomètre photo-électrique ont été effectuées à Kounrad, Ashkabad, Kondara (près de Stalinabad), Alma-Ata et Poltava. Les résultats préliminaires du travail de ces observations sont publiés dans la publication des séries A G I "Recherches gravimétriques" (N° 1). Les résultats définitifs et l'analyse harmonique des inclinaisons dues aux marées seront présentés dans la suite, dans la troisième publication.

B.P. PERTSEV.

Analyse harmonique de séries de 50 jours d'observations de variations des marées de la force de pesanteur.

On obtient actuellement avec sécurité de longues séries d'observations de marées gravimétriques et ceci permet de ne pas limiter les schémas de l'analyse harmonique à un délai obligatoire de 30 jours comme nous l'avons fait dans les schémas précédents [1], [2], [3]. Cette prolongation de l'intervalle couvert par le schéma de calcul permet d'éliminer une quantité de petites ondes, sans recourir à quelqu'hypothèse que ce soit et c'est pourquoi nous avons prolongé l'intervalle des observations, couvert par le schéma de l'analyse harmonique jusqu'à 50 jours. Cela a permis de mieux soustraire les ondes principales recherchées de l'influence des petites ondes secondaires et d'éliminer entièrement l'influence de l'onde diurne S_1 sur l'onde O_1 déterminée. L'onde S_1 due aux marées est petite mais la présence de cette même période est possible dans les enregistrements par suite de l'onde de température. Dans le schéma décrit, l'onde S_1 (quelle qu'en soit l'origine) est éliminée entièrement de toutes les ondes déterminées, excepté pour K_1, pour laquelle on ne peut opérer la séparation de cette onde diurne S_1 que pour de longues séries d'observations.

L'élimination de la dérive du zéro de l'appareil, ainsi qu'on l'appelle, s'effectue dans le présent schéma avec plus de précision que dans le schéma précédent [4] et ne nécessite pas de calculs supplémentaires car elle est inclue dans le schéma fondamental de l'analyse harmonique.

Comme on le sait [5] la marée luni-solaire peut se diviser en quelques types d'ondes : à longues périodes, diurnes, semi-diurnes, ter-diurnes, etc. Chaque type d'ondes se compose d'une série de groupes, qui à leur tour se décomposent en une série d'ondes sinusoïdales simples. Peu parmi ces ondes ont d'assez grandes amplitudes pour qu'on puisse les déterminer avec certitude à partir des observations. Ce sont les ondes diurnes K_1 et O_1 et les ondes semi diurnes M_2, S_2 et N_2. Nous déterminerons leurs amplitudes H et leurs phases φ. Le travail préliminaire sur le

régistrogramme consiste dans les opérations suivantes :

1) la mesure des ordonnées de l'enregistrement par rapport à une droite fixe arbitraire, pour chaque heure de temps solaire moyen ;

2) l'introduction de la correction due à la non linéarité de l'échelle du galvanomètre ;

3) le calcul des décalages de l'enregistrement, produits au cours du processus d'enregistrement de la marée;

4) la transformation des ordonnées des millimètres aux milligals.

On peut ne pas procéder à cette dernière opération si la sensibilité de l'appareil s'est maintenue constante pendant tout l'intervalle de temps. Dans le résultat de ces opérations l'enregistrement de la marée luni-solaire se présentera sous forme d'une courbe continue et on peut écrire les ordonnées Y_{tk} pour chaque heure t et chaque 24 heures k de la façon suivante :

$$Y_{tk} = \sum_n H_n \cos(\sigma_n t + \rho_n k - \varphi_n) + \Phi(t,k) = \sum_n H_n \left[\cos \sigma_n t \cdot \cos(\rho_n k - \varphi_n) - \right.$$

$$\left. - \sin \sigma_n t \cdot \sin(\rho_n k - \varphi_n)\right] + \Phi(t,k), \qquad (1)$$

où H_n est amplitude de l'onde n, φ_n la phase de l'onde n à l'instant t = 0, k = 0 σ la variation de la phase de l'onde pour 1 heure ρ_n la variation de la phase de l'onde pour 24 heures, Φ (t,k) la dérive du zéro de l'appareil. La sommation porte sur toutes les ondes de la marée luni-solaire. Pour l'analyse il est nécessaire d'avoir 1200 ordonnées d'enregistrement (c'est-à-dire 50 fois 24 heures) relevées à chaque heure de temps solaire moyen, en commençant à 12^h TU de n'importe quel jour d'observation. Par conséquent, une série d'observations dépouillée se compose de 49 fois 24 heures (jours complets), et de deux intervalles de 12 heures au début et à la fin de la série. Dans ce cas, l'instant central de la série d'observations dépouillées pour laquelle on cherche à déterminer les phases des ondes, sera $11^h 5$ TU du jour moyen (de 49) des observations. On calcule pour cet instant les éléments astronomiques d'après la formule de la table 7. Ils sont nécessaires pour l'introduction de corrections indispensables dans les calculs théoriques des phases des ondes cherchées. Pour la facilité du calcul du schéma en (1) le temps est introduit

en heures t et en ensembles de 24 heures k. Le calcul des 24 heures k se fait à partir du jour central (pour lequel k = 0) et dans les deux directions, de sorte que k prend les valeurs k = 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, ..., $\pm$ 24.

Le calcul des heures t se fait pour chaque groupe k de 24 heures à partir de $11^h 5$ dans les deux directions. En effet on peut prendre en tant que commencement de la série une ordonnée relative à n'importe quelle heure du jour. Mais il faut en tenir compte pour la recherche des éléments astronomiques que, pour n'importe quel calcul, on doit calculer pour l'instant central de la série

L'analyse harmonique se décompose en quatre étapes. Puisque nous cherchons deux inconnues - H et φ - pour chacune des cinq ondes déterminées, dans les trois premières étapes des calculs parallèles nous donneront successivement les expressions H sin φ et H cos φ pour chaque onde cherchée.

1. Séparation des ondes diurnes et semi-diurnes et élimination de la dérive de l'appareil.

Pour la séparation des types d'ondes, par exemple de l'onde diurne, il faut choisir une combinaison des ordonnées d'enregistrement telle qu'elle filtrerait tous les types d'ondes, excepté les ondes diurnes. Il est facile, par exemple, de vérifier que les deux ordonnées (1), prises 6 heures l'une après l'autre, donnent dans la sommation :

$$2 \sum_n H_n \cos 3\sigma_n . \cos (\sigma_n t + 3\sigma_n + k\rho_n - \varphi_n) + \phi(t,k) + \phi(t,k + 6^h).$$

Dans les amplitudes intervient le facteur 2 cos $3\sigma_n$, proche de zéro pour les ondes semi-diurnes, pour lesquelles $\sigma \approx 30°$. Mais chaque type d'ondes renferme des ondes différentes, quoique ne différant pas fort en fréquence.

C'est pourquoi, il ne suffit pas d'un facteur pour l'amplitude, pour que l'on filtre dans la mesure nécessaire toutes les ondes d'un type donné. En choisissant ainsi les facteurs nécessaires, nous pouvons éliminer n'importe quelle onde, si sa fréquence est connue. Les fréquences de toutes les ondes d'amplitude quelque peu sensibles de marée luni-solaire sont données par le développement en série du potentiel des marées.

Ainsi quatre combinaisons X_i^h d'ordonnées ont été choisies pour l'élimination des types d'ondes diurne et semi-diurne décrits dans la table 1. La sommation des ordonnées dans ces combinaisons se fait sur la variable t, qui prend les valeurs $t = \pm\ 0^h 5,\ \pm\ 1^h 5,\ \ldots\ ,\ \pm\ 23^h 5$, c'est-à-dire qui englobe deux fois 24 heures. Pour cela k reste constant. Les sommations des ordonnées (1) sont prises conformément aux indices et aux facteurs appropriés de ces combinaisons et donnent pour chaque jour k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 24$) les expressions suivantes :

$$X_i^k = \sum_i Y_{tk} C_{it} = \sum_n \psi_i(\sigma_n)\, H_n \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (k\rho_n - \varphi_n)^*,$$

---

* : Cos $(k\rho - \varphi)$ correspond à i pair et sin $(k\rho - \varphi)$ à i impair.

T a b l e l.

ts C_{it} pour les combinaisons X_i^k

t													
$+10^h5$	$+11^h5$	$+12^h5$	$+13^h5$	$+14^h5$	$+15^h5$	$+16^h5$	$+17^h5$	$+18^h5$	$+19^h5$	$+20^h5$	$+21^h5$	$+22^h5$	$+23^h5$
Combinaisons diurnes.													
0	-1	0	+1	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0
), ou $\psi_1(\sigma_n) = +64 \sin 2\sigma_n \cdot \sin 6\sigma_n \cdot \sin 6{,}5\sigma_n \cdot \cos 3\sigma_n \cdot \cos^2 2\sigma_n$													
-1	-1	0	0	0	-2	0	+1	0	0	0	0	0	+1
$_1 \cos(\varphi_n - k\rho_n)$, ou $\psi_2(\sigma_n) = \psi_1(\sigma_n) 2 \sin 2\sigma_n$													
mbinaisons semi-diurnes.													
0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	0	-1	0	0
$_n$), ou $\psi_3(\sigma_n) = +64 \sin^2 2\sigma_n \cdot \cos 2\sigma_n \cdot \sin 3\sigma_n \cdot \cos 6\sigma_n \cdot \cos 6{,}5\sigma_n$													
+1	0	+2	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	+1	0
$H_n \cos(\varphi_n - k\rho_n)$, ou $\psi_4(\sigma_n) = \psi_3(\sigma_n) 2 \sin \sigma_n$													

s valeurs positives de t. pour les valeurs négatives de t, on a :

ur i = 2,4.

Les fonctions $\psi_i(\sigma_n)$ sont données également dans cette table en des combinaisons appropriées. La substitution dans $\psi_i(\sigma_n)$ des valeurs σ_n des différentes ondes donne des coefficients numériques qui entrent dans X_i^k comme facteurs pour les amplitudes de ces ondes. Quatre combinaisons X_i^k sont choisies pour cela, afin d'amplifier $\sum_n H_n \sin \varphi_n$ et $\sum_n H_n \cos \varphi_n$ pour les ondes diurnes (i = 1,2) et pour les ondes semi-diurnes (i = 3,4). L'indice supérieur k dans X_i^k représente les jours pour lesquels on applique une combinaison donnée. Ainsi X_i^{-24} englobe les deux premières 24 heures et se rapporte au moment central de cet intervalle de temps c'est-à-dire 11^h5 des premières 24 heures pleines, X_i^{-23} a comme moment central 11^h5, des secondes 24 heures pleines etc... Ayant englobé l'intervalle de temps par cette combinaison on la fait glisser successivement de 24 heures à la fois.

Ces mêmes ordonnées peuvent intervenir dans les deux fonctions consécutives X_i^k. Chaque combinaison d'ordonnées renferme une certaine quantité de zéros, cela signifie que les ordonnées correspondantes n'interviennent pas dans la fonction résultante X_i^k. Il est facile de remarquer que ces ordonnées entrent nécessairement soit dans la fonction précédente soit dans la suivante X_i^k, de sorte que, de toute manière elles participeront toutes aux opérations. Pratiquement ces combinaisons d'ordonnées épousent tout à fait les ondes diurnes et semi-diurnes et filtrent les ondes à longue période et les ondes ter-diurnes. C'est pourquoi tous les calculs pour la détermination des ondes cherchées se font indépendamment pour les ondes diurnes et les ondes semi-diurnes. Pour illustrer la puissance de la séparation des différents groupes d'ondes on a sommé dans la table 2 les valeurs $\psi_i(\sigma_n)$ pour les ondes fondamentales de la marée.

Table 2

Coefficients $\psi_i(\sigma_n)$

cient	Ondes semi-diurnes						Ondes diurnes						Ondes ter diurne	Ondes à longue période
	μ_2	N_2	M_2	L_2	S_2	R_2	$2Q_1$	Q_1	O_1	M_1	K_1	J_1	M_3	Mf
σ_n)	0,01	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	17,07	17,29	17,32	17,15	16,79	16,26	0,11	0,04
σ_n)	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	14,81	15,59	16,19	16,62	16,83	16,83	0,23	0,00
σ_n)	23,90	24,04	23,96	23,65	23,18	23,13	0,17	0,06	0,01	0,04	0,01	0,13	0,09	0,01
σ_n)	22,42	22,89	23,22	23,31	23,18	23,16	0,08	0,03	0,00	0,02	0,00	0,07	0,12	0,00

L'élimination de la dérive de l'appareil s'obtient de la façon suivante. Dans chaque expression $\psi_i(\sigma_n)$ (cf. table 1) entre le facteur $4 \sin 0{,}5\,\sigma_n \sin 1{,}5\,\sigma_n$ (pour la simplification des notations, ce facteur est introduit dans les sinus doubles et dans les arcs quadruples). Ce facteur s'obtient en substituant à une ordonnée (1) relative à n'importe quel moment t la combinaison suivante d'ordon - nées :

$$- y_{t-2}h, + y_{t-1}h, + y_{t+1}h, - y_{t+2}h,$$

Si on représente la dérive sur cet intervalle de 4 heures par la série de Taylor $\Phi(t+h) = \Phi(t) + h\Phi'(t) + \frac{h^2}{2}\Phi''(t) + \ldots$ (où h est représenté par des fractions de jour) la combinaison d'ordonnées indiquée élimine presque entièrement la dérive, en ne maintenant qu'une petite grandeur $-0{,}005\,\Phi''(t)\ -0{,}000004\,\Phi^{IV}(t)\ldots$. Pour cela tous les coefficients des dérivées impaires sont des zéros, et ceux des dérivées paires décroissent rapidement. Puisque la dérive dans les appareils employés pour les observations de marées est petite et régulière, on peut négliger les grandeurs restantes. Ainsi, la substitution d'une ordonnée par les quatre mentionnées, prises dans l'ordre indiqué, élimine la dérive et introduit le facteur $4 \sin 0{,}5\,\sigma_n \cdot \sin 1{,}5\,\sigma_n$ dans l'amplitude de chaque onde. La présence de ce facteur dans tous les X_i^k montre que ces combinaisons éliminent la dérive de ces quatre ordonnées. En général, dans toutes ces combinaisons d'ordonnées on peut considérer n'importe quel produit $4 \sin n\sigma \sin m\sigma$ dans les expressions $\psi(\sigma)$ comme la substitution d'une ordonnée par quatre autres dans le but d'éliminer la dérive. Il faut seulement, pour que m + n et m - n soient des nombres entiers, que les ordonnées soient prises seulement pour des heures entières. On peut également traiter l'élimination de la dérive d'une autre manière. Les combinaisons d'ordonnées donnant les grandeurs X_i^k sont formées de telle sorte qu'elles éliminent entièrement la dérive dans les intervalles étudiés, si elle peut être développée dans ces intervalles en polynome du deuxième degré.

Ainsi, la première étape des calculs consiste dans la détermination à l'aide des indications de la table 1 des combinaisons d'ordonnées de quatre séries de nombres X_i^k comprenant 49 nombres dans chaque série. Deux séries de nombres (X_1^k et X_2^k) servent pour la détermination de $\Sigma H \sin\varphi$ et $\Sigma H \cos\varphi$ des ondes diurnes et les deux autres séries (X_3^k et X_4^k) pour les ondes semi-diurnes.

2. Séparation des ondes cherchées et des ondes proches en fréquence.

Chaque type d'ondes (diurnes, semi-diurnes etc.) renferme une série de groupes, très proches en ce qui concerne la fréquence des ondes. Ainsi, le type d'ondes diurnes se compose de 13 groupes. Le groupe K_1 comprend une série d'ondes de fréquences très voisines et parmi lesquelles π_1, P_1, K_1, ψ_1 et ϕ_1, paraissent très importantes. De même que les divers types d'ondes ont des valeurs de σ_n essentiellement différentes, ainsi les groupes particuliers sont différents en ce qui concerne ρ_n. C'est pourquoi, ici, comme dans la première étape, les combinaisons des grandeurs X_i^k seront choisies en fonction seulement du type d'ondes et pour les groupes recherchés d'ondes de fréquences voisines.

Pour une meilleure séparation des groupes on a pris des combinaisons différentes pour les ondes diurnes et pour les semi-diurnes.

Les coefficients, $D_{k\ell}$ de toutes ces combinaisons adoptées sont donnés dans la table 3 et les calculs aboutissent à la détermination des grandeurs

$$Y_{il} = \sum_k X_i^k Dk\ell = \sum_n \psi_i(\sigma_n)\theta\ell(\rho_n)H_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \varphi_n^{*} \qquad (2)$$

Les fonctions $\theta\ell(\rho_n)$ sont également présentées dans la table 3 dans des combinaisons appropriées. En substituant les valeurs numériques ρ des ondes isolées, nous obtenons encore un facteur pour les amplitudes de ces ondes. Dans le résultat de cette opération, nous obtenons huit grandeurs différentes de $Y_{i\ell}$ pour les ondes diurnes et huit pour les semi-diurnes. Pour les déterminations des amplitudes et des phases des cinq ondes recherchées, il suffirait de déterminer en tout dix grandeurs de Y_{ℓ_i} (deux pour chaque onde : pour la détermination de H sin φ et H cos φ). On calcule 16 nombres pour réaliser une meilleure élimination de quelques ondes perturbatrices notamment OO_1, Q_1 etc... Pour les éliminer on calcule Y_{ℓ_i} en choisissant les groupes dans lesquels entrent ces ondes. Ensuite, en combinant

---

* Si dans $Y_{i\ell}$, $i + \ell$ est pair, nous aurons H cos φ , si $i + \ell$ est impair, nous aurons H sin φ .

Table 3.

Coefficients $D_{k\ell}$.

k																						
-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0
Combinaisons pour les ondes diurnes.																						
0	0	+2	+1	0	+1	+1	+2	0	+2	+1	+2	0	+2	+2	+2	+1	+2	+3	+1	+3	+1	+4
$\Theta_o = +64 \cdot \cos 3{,}5\,\rho_n \cdot \cos 7{,}5\,\rho_n \cdot \cos 6{,}5\,\rho_n \cdot \cos 2{,}5\,\rho_n \cdot \cos^2 2\,\rho_n$																						
-1	+1	0	-1	0	-1	-1	+1	0	-1	+1	+2	0	+1	+1	-2	+1	0	-3	-1	0	-1	0
$\Theta_1 = +64 \cdot \cos 7{,}5\,\rho_n \cdot \cos 6{,}5\,\rho_n \cdot \cos 1{,}5\,\rho_n \cdot \sin 4\,\rho_n \cdot \sin 3{,}5\,\rho_n \cdot \sin \rho_n$																						
-2	+1	+1	-2	-1	0	+2	+1	-2	+1	+2	+1	-1	-3	+2	0	-3	0	-1	+1	+1	0	+2
$\Theta_2 = +128 \cdot \cos 7{,}5\,\rho_n \cdot \cos 6{,}5\,\rho_n \cdot \cos 1{,}5\,\rho_n \cdot \sin 3{,}5\,\rho_n \cdot \sin 3\,\rho_n \cdot \sin^2 \rho_n$																						
0	0	0	+1	-1	+1	-1	0	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+2	-1	-1	+1	0	0	+1	0
$\Theta_3 = +16 \cdot \cos 8\,\rho_n \cdot \sin 7\,\rho_n (1 - 2\cos 5\,\rho_n) \sin 3{,}5\,\rho_n, \sin 0{,}5\,\rho_n$																						
Combinaisons pour les ondes semi-diurnes.																						
0	0	+1	+1	+1	0	+2	+1	+1	+1	+2	+2	0	+2	+2	+3	0	+2	+3	+2	+2	+1	+4
$\Theta_4 = +64 \cdot \cos 8\,\rho_n \cdot \cos 5{,}5\,\rho_n \cdot \cos 3{,}5\,\rho_n \cdot \cos 2{,}5\,\rho_n \cdot \cos 2\,\rho_n \cdot \cos 1{,}5\,\rho_n$																						
-1	0	+1	0	+1	0	+1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	0
$\Theta_5 = +64 \cdot \cos 8\,\rho_n \cdot \cos 2\,\rho_n \cdot \cos \rho_n \cdot \sin 4\,\rho_n \cdot \sin^2 3{,}5\,\rho_n$																						
0	0	+1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	+2	+2	+2	+1	+2	+2	+2	0	-2	-2	-2	-2
$\Theta_6 = +64 \cdot \cos 8\,\rho_n \cdot \cos 2\,\rho_n \cdot \sin 4\,\rho_n \cdot \sin^2 3{,}5\,\rho_n \cdot \sin 3\,\rho_n$																						
-1	+1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	+1	+2	+2	+1	0	-1	-1	-2	-2	-1	+1	+2	+2
$\Theta_8 = +32 \cdot \sin 7{,}5\,\rho_n \cdot \cos 5{,}5\,\rho_n \cdot (1 - 2\cos 5\,\rho_n) \sin 3{,}5\,\rho_n \cdot \sin 1{,}5\,\rho_n \cdot \sin \rho_n$																						

Remarque : $D_{k\ell}$ sont données seulement pour les valeurs négatives de k. Pour les valeurs positives de k $D_{k\ell} = D_{-k\ell}$, si ℓ est pair et $D_{k\ell} = -D_{-k\ell}$ si ℓ est impair.

avec les facteurs propres toutes les grandeurs $Y_{\ell i}$ obtenues pour un type donné d'ondes de marée, on réalise l'élimination des ondes inutiles et la séparation des groupes cherchés. Cette opération se ramène à obtenir les grandeurs

$$Z_n = \sum Y_{i\ell}\, E_n, \qquad (3)$$

$$Z'_n = \sum Y_{i\ell}\, E'_n \qquad (3')$$

Les coefficients E_n et E'_n sont donnés dans la table 4 vis à vis de ceux de $Y_{i\ell}$, par lesquels il convient de les multiplier. On calcule en tout 10 grandeurs de Z_n et Z'_n, deux pour chaque onde cherchée.

Table 4

Coefficients E_n et E'_n

n	Ondes semi-diurnes			n	Ondes diurnes	
	M_2	S_2	N_2		K_1	O_1
	Pour R cos φ					
Y_{44}		+1,0000		Y_{20}	+1,0000	
Y_{46}	-1,0000		+0,0146	Y_{22}		+1,0000
$-Y_{35}$	+0,7484	-0,0239		$-Y_{11}$	+0,0108	-1,0568
Y_{48}	+0,1136	+0,0039	+1,0000	$-Y_{13}$		-0,3600
Z				Z		
G	1548,64	1483,66	735,878	G	1057,59	646,003
	Pour R cos φ					
Y_{34}		+1,0000		Y_{10}	+1,0000	
Y_{36}	-1,0000		+0,0146	Y_{12}		+1,0000
Y_{45}	+0,7209	-0,0255		Y_{21}	+0,0123	-0,9330
Y_{38}	+0,1078	+0,0039	+1,0000	Y_{23}		-0,4033
Z'				Z'		
G	1533,44	1483,66	772,602	G	1054,97	601,111

Remarque : Par exemple, $Z_{M2} = [GR \cos\varphi]_{M2} = -Y_{46} + 0{,}7484 Y_{35} + 0{,}1136\, Y_{48}$ G = 1548,64; a $Z'_{M2} = [GR \sin\varphi]_{M2} = -Y_{36} - 0{,}7209\, Y_{45} + 0{,}1078\, Y_{38}$; G = 1533,44.

On peut représenter les grandeurs de Z_n de la façon suivante :

$$Z_n = GH_n \cos \varphi_n + \sum_j g H_j \cos \varphi_j \qquad (4)$$

ou

$$Z_n = GR_n \cos \varphi_n \qquad (4')$$

Il y a des expressions analogues pour les sommes des sinus. Ici le premier terme dans le second membre (4) désigne l'onde cherchée. Les coefficients G et g_j, sont apparus dans le résultat de l'application de toutes les combinaisons linéaires indiquées pour l'ordonnée (1), et constituent des facteurs pour les amplitudes des ondes séparées. Le coefficient G est grand. Les valeurs de G pour les ondes cherchées sont données dans la table 4. La sommation dans le second membre de la formule (4) porte sur toutes les autres ondes. Les coefficients g_j n'ont de valeurs élevées que pour les ondes très voisines en fréquence de celle cherchée et ont des valeurs faibles pour toutes les ondes des autres groupes. Puisque les amplitudes des ondes secondaires sont petites on peut négliger l'influence de toutes ces ondes pour lesquelles g_j est petit. Dans la table 5 sont données les valeurs des grandeurs

$$\alpha_j = \frac{g_j}{G}$$

pour les différentes ondes. Là aussi on donne les amplitudes relatives de ces ondes. Pour calculer l'influence de n'importe quelle onde sur l'inconnue, il faut comparer le produit de l'amplitude relative de cette onde par la grandeur α_j avec le produit correspondant pour l'onde cherchée.

Ainsi, α pour λ_2 est égal à 0,12, et pour M_2 $\alpha = 1{,}00$, tandis que l'amplitude λ_2 constitue en tout 0,7 % de l'amplitude de M_2. Ainsi, l'influence de λ_2 sur l'amplitude de M_2 sera 0,12 x 0,7 = 0,08 %. L'influence des autres ondes sur M_2 est encore moindre, comme on le voit dans la table 5. En divisant chaque Z par les valeurs correspondantes G, nous obtenons pour chacune des cinq ondes cherchées les grandeurs R cos φ et R sin φ, d'où nous tirons R et φ. Mais ce ne sont pas encore les amplitudes et les phases des ondes cherchées. Les grandeurs R et φ renferment dans une mesure sensible des ondes perturbatrices de fréquences voisines.

Ainsi la seconde étape des éliminations consiste dans les opérations (2) et (3) suivie de la division des grandeurs Z par G et de la détermination de R et φ pour chaque onde cherchée.

3. Elimination des ondes à fréquences voisines de la fréquence de l'onde cherchée.

Les ondes d'un groupe, ayant des fréquences très voisines, il est impossible d'opérer l'analyse d'une série de 50 jours d'observations si on ne fait pas quelques hypothèses concernant leurs rapports d'amplitudes et de phases. Dans tous les schémas d'analyse existants et également dans le schéma décrit ici on suppose que le rapport δ des amplitudes d'un groupe d'ondes de la marée observée à l'amplitude théorique calculée d'une manière absolue pour la terre ferme est identique, de même que les déphasages sont égaux entre eux. Ces hypothèses, au moins pour quelques groupes d'ondes, ne sont pas rigoureusement exactes [6] . En tenant compte que l'amplitude des ondes perturbatrices est sensiblement moindre que l'amplitude des ondes cherchées, mais que les différences dans les valeurs de δ sont petites, les résultats ne peuvent pas être sensiblement faussés. En faisant donc ces hypothèses, nous pouvons facilement obtenir les ondes cherchées. En effet, les hypothèses faites aboutissent à ce qu'on puisse proposer l'amplitude et la phase de n'importe quelle onde j d'un groupe donné, sous la forme :

$$H_j = H \left(\frac{H_j}{H}\right)_{\text{Théor}} \equiv H \beta_j ;$$

$$\varphi_j = \varphi + (\varphi_j - \varphi)_{\text{théor}} \equiv \varphi + \Delta\varphi_j$$

Ici H et φ sont les amplitudes et les phases de l'onde principale cherchée. C'est pourquoi on peut proposer la sommation des ondes voisines en fréquences selon l'expression (4) comme suit, en divisant Z par la valeur correspondante G :

$$H \cos\varphi + \sum_j \alpha_j H_j \cos(\varphi + \Delta\varphi_j) = R \cos\varphi \equiv z H \cos(\varphi + \varepsilon), \qquad (5)$$

ou en divisant (5) par H et en transformant les cosinus des sommations, nous obtenons

$$\cos\varphi + \sum_j \alpha_j \beta_j (\cos\varphi \cos\Delta\varphi_j - \sin\varphi \sin\Delta\varphi_j) = z(\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon).$$

A partir de là z et ε se déterminent facilement par les formules :

$$z \cos \varepsilon = 1 + \sum_j \alpha_j \beta_j \cos \Delta\varphi_j,$$

$$z \sin \varepsilon = \sum_j \alpha_j \beta_j \sin \Delta\varphi_j,$$

et connaissant z et ε on peut déterminer H et φ de l'onde cherchée, parce que

$$H = \frac{R}{z}, \quad a \quad \varphi = \bar{\varphi} - \varepsilon \qquad (6)$$

Dans la table 6 on donne les formules pour la détermination de z et ε pour toutes les ondes cherchées. Les formules pour le calcul des éléments astronomiques h, s, p, N et p_1 sont données dans la table 7. Tous les éléments astronomiques entrant dans $\Delta\varphi_j$ se calculent pour $11^h 5$ du jour moyen d'observations. Les grandeurs β_j et $\Delta\varphi_j$ sont calculées en se basant sur le développement du potentiel générateur des marées [5]. L'onde N_2 a deux ondes voisines en fréquence, ce sont 245545 et 245555 [5], apparentées à la fonction harmonique du troisième ordre V_3 dans les développements du potentiel générateur des marées. Comme le montrent les calculs de M.S. Molodenski le rapport δ des amplitudes des ondes observées aux amplitudes théoriques est moindre pour les ondes provenant de la fonction harmonique du troisième ordre V_3 que pour les ondes apparentées à la fonction harmonique V_2. Conformément à cela, les grandeurs β_j entrant dans la table 6 ont été multipliées par 0,913. Outre cela, comme on le voit dans la table 5, deux ondes (227655 et 253755) appartenant à d'autres groupes exercent encore une influence sensible sur N_2. Ces ondes sont également prises en considération dans la table 6. Ainsi, la troisième étape des calculs consiste dans les déterminations des valeurs z et ε pour les ondes cherchées d'après les formules de la table 6 et les calculs des amplitudes H et des phases φ d'après les formules (6).

Table 6

Formules pour les calculs de z et ε des ondes cherchées.

373 cos N-0,0025 cos(2h-2p)+0,0034 sin ψ.sin p+0,0013 cos 2h

373 sin N-0,0064 sin(h-p_1)-0,0025 sin (2h-2p)+0,0034 sin ψ.cos p-0,0013 sin 2h

522 cos 2h+0,0750 cos(2h-N)+0,0082 cos (2h-2N)-0,0032 cos (2h+N)+0,0494 cos(h-p_1)+0,0023 cos(2h-2p_1)

522 sin 2h-0,0750 sin(2h-N)-0,0082 sin(2h-2N)+0,0032 sin(2h+N)+0,0658 sin(h-p_1)+0,0023 sin(2h-2p_1)

097 cos(2h-2p)-0,0078 cos(2h-2p+N)+0,0097 cos(3h-2p-p_1)+0,0026 cos(h-p_1)-0,0373cos N+0,1164 sin ψ.sinp+
ı(p-N)+0,0046 cos (2s-2h)-0,0020 cos (s-2h+p)

097 sin(2h-2p)+0,0078 sin(2h-2p+N)-0,0097 sin(3h-2p-p_1)-0,0176 sin(h-p_1)+0,0373 sinN-0,1164 sin ψ.cos p-
(p-N)+0,0046 sin (2s-2h)+0,0020 sin (s-2h+p)

92 cos 2h-0,0184 cos(3h-p_1)+0,0038 cos(2h-N)+0,0028 cos(h+p_1)+0,0156 cos(h-p_1)+0,1156 cos N-0,0029 cos 2N

36 sin 2h-0,0184 sin(3h-p_1)+0,0038 sin(2h-N)+0,0028 sin(h+p_1)+0,0006 sin(h-p_1)+0,1552 sin N-0,0029 sin 2N

35 cos N-0,0030 cos(2h-2p)-0,0006 cos(h-p_1)-0,0058 cos 2N-0,0064 cos 2p-0,0113 cos 2h+0,0025 cos (2h-N)+
$\frac{\text{in}^2\psi}{\psi}$ sin p

35 sin N-0,0030 sin(2h-2p)-0,0064 sin(h-p_1)+0,0058 sin 2N+0,0064 sin 2p+0,0113 sin 2h-0,0025 sin(2h-N)+
$\frac{n^2\psi}{\psi}$ cos p

latitude géocentrique du lieu d'observation.

4. Détermination des amplitudes théoriques et des phases des ondes cherchées.

En déterminant les amplitudes et les phases des ondes cherchées, il reste à les comparer avec les valeurs théoriques de ces grandeurs. Le rapport de l'amplitude de l'onde observée à l'amplitude théorique nous donne la relation liant les nombres de Love $\delta = 1, -\frac{3}{2} k + h$. La comparaison des phases observée et théorique des ondes montre le retard ou l'avance de phase $\Delta \varphi$. Il faut seulement se rappeler que la grandeur déterminée de φ est une phase prise avec un signe inverse. Les valeurs théoriques des amplitudes et des phases des ondes cherchées se calculent sur la base du développement en série du potentiel générateur des marées [5] . Pour les calculs on a admis les valeurs suivantes des grandeurs y figurant :

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{81,38},$$

$$fE = 3,9863 \cdot 10^{20} cm^3/sec^2,$$

où M est la masse de la Lune, E, la masse de la Terre, f, la constante d'attraction. La parallaxe horizontale équatoriale de la Lune est égale à 3422",45.

Table 7.

Eléments astronomiques (à 11^h5 TU pour D)

$$S = 310°,8965 + 129°,38481 \quad (Y - 1960) + 13°,17640 \quad (D + \ell)$$
$$h = 280,1375 - 0,23872 \quad (Y - 1960) + 0,98565 \quad (D + \ell)$$
$$p = 255,7440 + 40,66249 \quad (Y - 1960) + 0,11140 \quad (D + \ell)$$
$$N = 178,6999 - 19,32818 \quad (Y - 1960) - 0,05295 \quad (D + \ell)$$
$$p_1 = 282,2526 + 0,01718 \quad (Y - 1960) + 0,00005 \quad (D + \ell)$$

Ici Y est l'année, D le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier de l'année Y (pour le 2 janvier D = 1), ℓ est le nombre d'années bissextiles entre l'année des observations Y et 1960 (pour 1960, $\ell = 0$, pour 1961, $\ell = 1$ etc...) s est la longitude moyenne de la Lune, h est la longitude moyenne du Soleil, p est la longitude du périgée lunaire, N est la longitude du noeud ascendant de l'orbite de la Lune, p_1 est la longitude du périgée solaire.

Amplitudes théoriques (en μgal) et phases).

$$H_{M2} = 74{,}91 \left(\frac{\rho}{a}\right) \cos^2 \psi \qquad V_{M2} = 2\lambda + 2h - 2s + 165°{,}00$$

$$H_{S2} = 34{,}94 \left(\frac{\rho}{a}\right) \cos^2 \psi \qquad V_{S2} = 2\lambda + 165°{,}00$$

$$H_{N2} = 14{,}34 \left(\frac{\rho}{a}\right) \cos^2 \psi \qquad V_{N2} = 2\lambda + 2h - 3s + p + 165°{,}00$$

$$H_{K1} = 43{,}76 \left(\frac{\rho}{a}\right) \sin 2\psi \qquad V_{K1} = \lambda + h + 82°{,}50$$

$$H_{O1} = 31{,}09 \left(\frac{\rho}{a}\right) \sin 2\psi \qquad V_{O1} = \lambda + h - 2s + 262°{,}50$$

Ici ψ est la latitude géocentrique du lieu d'observation, λ en est la longitude, ρ en est le rayon vecteur, a est le demi grand axe de l'ellipsoïde terrestre.

Il est encore à noter que dans le résultat des déplacements verticaux de la surface terrestre dus aux marées, les forces périodiques d'inertie [7] agissent sur le gravimètre avec les mêmes fréquences que les ondes de marées. Il convient de tenir compte de l'influence de ces forces puisqu'elles peuvent donner des corrections atteignant jusqu'à 0,4 % pour les ondes semi-diurnes.

En conclusion nous profitons de l'occasion pour exprimer notre profonde gratitude à Monsieur N.N. Pariiskii pour ses précieux conseils.

T a b l e 5

Coefficients α_j et amplitudes relatives des ondes de la marée diurne.

Onde		117655 *	2Q1	σ_1	Q_1	ρ_1	143755	144556	O_1	146554	147555	153655	M_1
Amplitude relative		0,005	0,018	0,022	0,136	0,026	0,002	0,002	0,710	0,002	0,009	0,005	0,056
K_1	R cos $\bar{\varphi}$	-0,0488	0,0230	0,0108	-0,0003	0,0000	-0,0133	-0,0089	0,0000	0,0122	0,0268	0,0026	-0,0025
	R sin $\bar{\varphi}$	-0,0584	0,0266	0,0125	-0,0003	0,0000	-0,0142	-0,0095	0,0000	0,0130	0,0285	0,0027	-0,0025
O_1	R cos $\bar{\varphi}$	0,0355	-0,0001	0,0111	0,0000	0,0098	0,9852	1,0077	1,0000	0,9524	0,8700	0,0039	-0,0011
	R sin $\bar{\varphi}$	0,0333	-0,0003	0,0171	0,0000	0,0116	0,9906	1,0106	1,0000	0,9499	0,8656	0,0041	-0,0010

Onde		X_1	π_1	P_1	S_1	K_1	ψ_1	Φ_1	Θ_1	J_1	183555	OO_1	195455
Amplitude relative		0,011	0,019	0,331	0,008	1,000	0,008	0,014	0,011	0,056	0,009	0,031	0,006
K_1	R cos $\bar{\varphi}$	0,0539	0,9438	0,9989	1,0182	1,0000	0,9459	0,8605	-0,0036	0,0026	0,0069	-0,0081	-0,0003
	R sin $\bar{\varphi}$	0,0555	0,9509	1,0039	1,0207	1,0000	0,9436	0,8562	-0,0036	0,0025	0,0073	-0,0068	-0,0003
O_1	R cos $\bar{\varphi}$	0,0130	0,0011	0,0001	0,0000	-0,0001	-0,0010	-0,0029	0,0008	-0,0026	-0,0780	0,0000	-0,0810
	R sin $\bar{\varphi}$	0,0126	0,0010	0,0001	0,0000	-0,0001	-0,0009	-0,0028	0,0007	-0,0029	-0,0784	0,0000	0,1006

* : La plupart des petites ondes n'a pas de désignation littérale déterminée. Ici elles sont désignées par des chiffres qui correspondent à l'indice caractéristique de l'argument de Doodson [5].

Table 5 (suite)

Marée semi-diurne.

Onde		227655	$2N_2$	μ_2	244656	N_2	246654	ν_2	248454	253755
Amplitude relative		0,007	0,025	0,031	0,002	0,191	0,002	0,036	0,002	0,003
M_2	R cos $\bar{\varphi}$	0,0390	0,0000	-0,0008	0,0035	0,0000	0,0009	0,0070	0,0252	0,8386
	R sin $\bar{\varphi}$	0,0337	0,0000	-0,0008	0,0035	0,0000	0,0008	0,0069	0,0252	0,8397
S_2	R cos $\bar{\varphi}$	-0,0131	-0,0026	0,0005	-0,0023	0,0000	0,0021	0,0032	0,0034	-0,0148
	R sin $\bar{\varphi}$	-0,0141	-0,0028	0,0006	-0,0024	0,0000	0,0022	0,0033	0,0036	-0,0152
N_2	R cos $\bar{\varphi}$	0,1183	0,0029	-0,0007	0,8927	1,0000	1,0745	1,1053	1,1075	0,1284
	R sin $\bar{\varphi}$	0,1223	0,0029	-0,0007	0,8939	1,0000	1,0730	1,1027	1,1034	0,1265

Onde		254556	M_2	256554	λ_2	L_2	T_2	S_2	R2	K_2	285455
Amplitude relative		0,003	1,000	0,003	0,007	0,028	0,027	0,466	0,004	0,127	0,007
M_2	R cos $\bar{\varphi}$	0,9185	1.0000	1,0509	0,1209	0,0030	-0,0002	0,0000	0,0002	0,0012	0,0000
	R sin $\bar{\varphi}$	0,9192	1,0000	1,0501	0,1196	0,0030	-0,0002	0,0000	0,0002	0,0011	0,0000
S_2	R cos $\bar{\varphi}$	-0,0093	0,0000	0,0106	-0,0412	-0,0027	0,9834	1,0000	0,9816	0,9297	-0,0188
	R sin $\bar{\varphi}$	-0,0096	0,0000	0,0108	-0,0420	-0,0027	0,9845	1,0000	0,9804	0,9274	-0,0179
N_2	R cos $\bar{\varphi}$	0,0630	0,0000	-0,0400	0,0011	-0,0018	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004
	R sin $\bar{\varphi}$	0,0620	0,0000	-0,0392	0,0011	-0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004

Isvestia Akademii Naouk SSSR 1940
Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS
Série géographique et géophysique pp.563-567

Z.N. Aksentieva.

Résultats des observations de la marée terrestre M_2 au moyen de pendules horizontaux à Poltava.

(Présenté par l'académicien P.P.Lazarev).

Résumé : On présente dans cet article les résultats de l'analyse harmonique des obse vations réalisées à Poltava de 1930 à 1938 au moyen de pendules horizontaux. L'onde lunaire semi diurne principale M_2 est donnée. Ces nouvelles observations confirment résultats des trois années d'observations antérieures de A. Ia. Orlov qui a constaté qu'à Poltava $\gamma_n > \gamma_e$. La valeur de ces coefficients est précise, ils sont voisins entre eux et en moyenne donnent $\gamma = 0{,}71$.

Les observations faites à Poltava avec les pendules horizontaux, de 1930 à 193 ont eu pour but l'étude fondamentale des oscillations de la verticale qui pourraient exercer une influence sur les résultats de la détermination de la latitude à l'aide du zénith-télescope; c'est pourquoi à Poltava les appareils sont installés peu profo dément sous le sol.

Mais, comme l'a montré A. Ia. Orlov dans ses travaux, les observations de Polt va avec les pendules horizontaux peuvent également être mises à profit pour l'étude des marées de l'écorce terrestre dues à l'attraction de la Lune, ce qui donne la pos bilité d'énoncer quelques conclusions sur les caractéristiques élastiques de la Terr Pour cela il faut calculer les valeurs théoriques de la phase et de l'amplitude de l'oscillation de marée lunaire du pendule dans l'hypothèse où la Terre est un corps absolument rigide et d'autre part déterminer ces grandeurs à partir des observations Le rapport de l'amplitude observée a_o à l'amplitude théorique calculée a_{th}, c'est à dire $\gamma = a_o/a_{th}$, caractérise l'élasticité moyenne de la Terre. Le mouvement total de la verticale est très compliqué et la méthode d'analyse harmonique donne la possibil

de décomposer ce mouvement compliqué en une série d'ondes simples. L'onde lunaire semi-diurne principale M_2 constitue l'onde de marée la plus sensible, mais même pour elle l'amplitude est très faible : elle est moindre de 0",01. La détermination d'une amplitude observée si petite paraît une chose très difficile d'autant plus que le pendule est perturbé non seulement par l'influence des forces de marée qui donnent naissance à des ondes de petite amplitude, mais encore par l'influence d'autres causes qui le forcent à osciller de quantités surpassant bien des fois en grandeur les petites oscillations de marée. Nous faisons allusion ici au mouvement du zéro des pendules, qui résulte en partie des déformations du pilier, et en partie de déformations de température de la couche de l'écorce terrestre, (dans laquelle est installée la cave); on traite aussi des déplacements des pendules, dépendant de la variation de la pression atmosphérique, du vent et des précipitations etc... Quelques facteurs météorologiques peuvent exercer sur le pendule une influence systématique de période semi-diurne voisine de l'onde de marée M_2. Ainsi, pour déceler dans l'ensemble de tous ces mouvements, les petites oscillations à caractère de marée et être certain de l'exactitude du résultat obtenu, il faut posséder de longues séries d'observations ; pour estimer la précision des résultats des observations il faut noter que les erreurs de caractère accidentel n'auront pas ici autant d'influence sur les conclusions que les causes systématiques dépendant des facteurs météorologiques indiqués plus haut. Si les amplitudes et les phases des ondes solaires étaient constantes dans le temps, alors le problème de l'évaluation de la précision et de la longueur de la série d'observations se résoudrait simplement : on pourrait désigner le nombre d'années qu'il est nécessaire de prendre pour obtenir des résultats dignes de confiance.

Cependant celà n'est pas constant et c'est pourquoi, pour la précision des déductions, il convient de tirer la conclusion de l'allure des résultats obtenus sur la base de séries très longues d'observations.

Le problème de la détermination des marées de l'atmosphère terrestre par le calcul de chaque heure de la pression atmosphérique présente en lui-même un problème analogue et non moins compliqué que le problème des marées de l'écorce terrestre.

Pour l'analyse de ce phénomène le géophysicien anglais bien connu S. Chapman a pris des séries d'observations sur des dizaines d'années.

Afin d'avoir un critère de validité des résultats et d'estimer la précision avec laquelle on détermine les phases et les amplitudes des ondes de marées, il faut partager la longue série d'observations en parties égales, analyser chacune séparément et comparer les résultats obtenus entre eux. Mais si les observations sont de si courte durée qu'on ne peut encore les prendre par groupes alors les conclusions de l'analyse harmonique seront vérifiées par la comparaison des résultats obtenus sur différents intervalles. Plus longue aura été prise la série d'observations, plus sûres seront les conclusions, dans des conditions égales. Les résultats obtenus à partir d'un petit nombre d'observations s'accordent plus mal entre eux, cependant tirer des conclusions d'inutilité ou de déficience des observations serait une erreur et l'on peut dire seulement qu'il faut prolonger la série d'observations.

Revenant à la question des marées de l'écorce terrestre, nous devons dire que pour obtenir des conclusions certaines pour les ondes de marée par des observations aux pendules horizontaux il faudrait soumettre à l'analyse de longues séries d'observations, disons au delà de dix années, vingt et plus. Cependant nulle part on n'a effectué de telles observations de longue durée avec des pendules horizontaux. A Poltava cette longue série d'observations englobe déjà une période de 9 années, de 1930 à 1939.

On pourrait rassembler ces observations en une série et en exécuter l'analyse. Cependant nous n'aurions alors absolument aucun critère pour l'appréciation de la validité de ces résultats. C'est pourquoi nous prenons les observations pour huit années et nous les partageons en deux séries de 4 années chacune; cela donne au moins un contrôle des résultats obtenus, mais pour le calcul des erreurs moyennes, il est certain qu'il ne suffit pas de deux séries d'observations.

Deux pendules horizontaux sont installés dans la cave de l'Observatoire gravimétrique de Poltava. L'un M, est orienté dans le voisinage du méridien, il a un azimut de 167° et caractérise les déformations dans la direction Est-Ouest (γ_e). Le second I est placé dans le voisinage du premier vertical, il a un azimut de 77° et caractérise les déformations dans la direction Nord-Sud (γ_n).

T a b l e 1.

Années	Pendule M	Pendule I
1930 - 1931	0",00755 cos (μ_m t + 243°)	0",00596 cos (μ_m t + 341°)
1931 - 1932	552 + 244	647 + 345
1932 - 1933	681 + 248	544 + 343
1933 - 1934	688 + 245	554 + 344
1934 - 1935	670 + 248	651 + 338
1935 - 1936	641 + 248	538 + 350
1936 - 1937	676 + 246	508 + 348
1937 - 1938	744 + 247	597 + 344

Les observations obtenues grâce à ces pendules pour les trois premières années (1930 - 1933) ont été effectuées par A. Ia. Orlov. Les observations des cinq années restantes, de 1933 à 1938 ont été effectuées par nous. Les réductions de cette série de cinq ans d'observations ont été exécutées par le même procédé dont s'est servi aussi A. Ia. Orlov. Pour chaque année séparément, après réduction des phases initiales à une même époque (30 août 1931 0^h de temps moyen local), on a obtenu pour l'onde semi-diurne principale M_2 à Poltava les expressions suivantes (table I)

A partir de là, en faisant la moyenne pour 4 années nous obtiendrons :

T a b l e 2.

Années	Pendule M	Pendule I
I 1930 - 1934	0",00669 cos (μ_m t + 245°)	0",00585 cos (μ_m t + 343°)
II 1934 - 1938	683 + 247	573 + 345

Ces expressions nous donnent les oscillations de la verticale pour le pendule M dans l'azimut $\alpha = 77°$ et pour le pendule I dans l'azimut $\alpha = -13°$. Les oscillations de la verticale dans le plan méridien , $\alpha = 0°$, et dans le premier vertical, $\alpha = 90°$, sont calculées conformément aux formules ([1] , § 8, 16) :

$$x = I \cos 13° + M \sin 13° \qquad (\alpha = 0°),$$

$$y = -I \sin 13° + M \cos 13° \qquad (\alpha = 90°),$$

qui donnent (table 3) :

T a b l e 3.

Observations.

Années	$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$
1930 - 1934	$0''{,}00568 \cos (\mu_m t + 328°)$	$0''{,}00683 \cos (\mu_m t + 234°)$
1934 - 1938	559 + 329	695 + 236

Nous calculerons les valeurs théoriques des amplitudes et des phases dans l'hypothèse d'une rigidité absolue de la Terre, pour chaque année séparément, en prenant la moyenne pour 4 années (table 4).

T a b l e 4.

Théorie

Années	$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$
1930 - 1934	$0''{,}00754 \cos (\mu_m t + 325°)$	$0''{,}00990 \cos (\mu_m t + 235°)$
1934 - 1938	781 + 325	1026 + 235

Nous retiendrons tout d'abord que les phases observées concorderont de façon très proche avec les phases théoriques. Pour le premier vertical elles coïncident, quant au méridien elles en diffèrent, mais pas de plus de 4°; cette divergence peut être partiellement interprêtée comme une erreur d'installation des pendules car l'azimut de ceux-ci se détermine difficilement dans un endroit souterrain fermé. Dans un avenir très proche nous vérifierons les valeurs des azimuts.

Il est intéressant de faire les remarques suivantes.

Les grandeurs obtenues à partir des observations sont données en tant que composantes harmoniques, et on sait combien il est difficile de déterminer les phases et combien elles se comportent capricieusement. Dans notre cas l'amplitude est moindre que $0''{,}01$ et la phase comme on le voit dans la table 1, se détermine à partir de la série annuelle avec une erreur probable d'à peine $\pm$ 2°. Cependant les conclusions,

basées sur des séries annuelles d'observations peuvent encore ne pas être exemptes d'erreurs systématiques, c'est pourquoi les séries de quatre années doivent donner les valeurs des phases avec une erreur probable moindre que $\pm$ 1°. Ceci montre que pour la comparaison avec la théorie les azimuts des pendules doivent être déterminés avec une grande précision et c'est ce que l'on fait habituellement.

Si maintenant nous prenons les rapports des amplitudes observées des oscillations de la verticale par rapport aux amplitudes calculées, nous obtenons les valeurs des grandeurs γ_n et γ_E, caractérisant les propriétés élastiques de la Terre (Table 5).

Table 5.

Années	$\gamma_n (\alpha = 0°)$	$\gamma_e (\alpha = 90°)$
1930 - 1934	0,75	0,69
1934 - 1938	72	68
Moyenne	0,74	0,68

Cette table montre que les grandeurs sont déterminées avec une grande précision à partir des observations faites à Poltava. Pour obtenir quand même, une estimation numérique approximative de cette précision, nous comparerons les valeurs observées et les valeurs calculées des amplitudes de l'oscillation de marée de la verticale pour chaque année séparément et nous prendrons leurs rapports γ_M et γ_I (table 6).

Puisque le pendule I est installé à peu près dans le premier vertical et le pendule M à peu près dans le méridien, on a approximativement $\gamma_e = \gamma_M$ et $\gamma_n = \gamma_I$ et par suite

$$\gamma_e - \gamma_n = 0,06 \pm 0,02$$

Table 6.

Amplitudes en 0"00001

Années	Pendule M			Pendule I		
	Observation	Théorie	γ_M	Observation	Théorie	γ_I
1930-1931	755	977	0,77	596	766	0,78
1931-1932	552	977	57	647	766	84
1932-1933	681	980	69	544	767	71
1933-1934	688	986	70	554	773	72
1934-1935	670	995	67	651	780	83
1935-1936	641	1007	64	538	789	68
1936-1937	676	1019	66	508	798	64
1937-1938	744	1033	72	597	809	74
	Moyenne		0,68			0,74
	Erreur probable		±0,013			±0,017

Les résultats annuels sont sujets non seulement aux erreurs accidentelles ma encore à l'erreur systématique, et c'est pourquoi ici l'erreur probable indiquée peu être un peu exagérée. On voit par là que les observations de Poltava donnent des rés tats tout à fait sûrs. De ce qu'il a été dit il s'ensuit que pour Poltava $\gamma_n > \gamma_e$. Cette inégalité a été trouvée par A. Ia. Orlov sur la base d'une seule sériede trois ans d'observations. Les nouvelles observations, comme nous le voyons, conduisent au même résultat tout en précisant les valeurs des coefficients γ_n et γ_e qui sont voi sins entre eux et donnent en moyenne $\gamma = 0{,}71$ c'est-à-dire la grandeur indiquée par A. Ia Orlov [2] encore en 1915. (Les expériences de Michelson et Gale [3], comm on le sait, ont donné $\gamma = 0{,}69$).

Observatoire de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.
Poltava

Reçu le 19.III.1940.

Akademia Naouk Oukraïnskoï S.S.R.
Troudi Poltavskoï Gravimetritcheskoï Observatorii
Tome IV - Kiev. 1951 - pp. 3 - 18

Résultats définitifs de la détermination de l'onde M_2 dans les oscillations de la verticale à Tomsk de 1912 à 1920

Z.N. Aksentieva.

§ 1. Remarques générales.

Un des problèmes fondamentaux de la gravimétrie moderne consiste dans l'étude des variations de la force de pesanteur en grandeur et direction sous l'influence des forces génératrices de marée luni-solaires à partir des résultats coordonnés provenant des données géophysiques et des observations astronomiques.

Les observations combinées des variations suivant les composantes horizontale et verticale dues à l'attraction luni-solaire donnent deux grandeurs γ et δ, qui lient entre elles les nombres h et k intervenant dans les équations de géophysique pour l'étude de la structure de l'intérieur de la Terre, et aussi dans les équations du mouvement des pôles :

$$\gamma = 1 + k - h \qquad (1)$$

$$\delta = 1 - \frac{3}{2} k + h \qquad (2)$$

La grandeur γ peut être obtenue à partir des observations aux pendules horizontaux et représente le rapport de l'amplitude observée de l'oscillation de la verticale à l'amplitude théorique calculée dans l'hypothèse que la Terre est un corps absolument rigide. La grandeur δ se détermine à partir des observations à l'aide d'un gravimètre suffisamment sensible et donne le rapport de la variation observée de la force de pesanteur $D_H g$ à une variation théorique $D_T g$, également calculée dans l'hypothèse que la Terre est un corps absolument rigide. Les observations sur les variations de la force de pesanteur en direction et en grandeur

ont été commencées chez nous en Russie déjà au 18ème siècle par le grand savant russe M.V. Lomonossov [1] . Dans ses travaux, datant de 1759-1764, M.V.Lomonossov décrivait les appareils, construits par lui pour les observations des variations de la force de pesanteur d'après la direction et la grandeur et il conseillait aussi un large programme pour des observations de ce genre en plusieurs points du globe terrestre.

Le travail commencé par M.V. Lomonossov et ses appareils ont été longtemps oubliés, mais son programme d'observations proposé a été réalisé un siècle et demi après, en 1911, au congrès international de séismologie à Manchester [2] .

En 1893, l'étude expérimentale des oscillations de la verticale (c'est-à-dire des variations de la force de la pesanteur d'après la direction) a été reprise en Russie par un astronome de l'observatoire de Nikolaev, I. Kortazzi [3] qui employa dans ce but le pendule horizontal suspendu sur pointes, inventé en ce temps et mis à sa disposition par von Rebeur Paschwitz. Le travail de I. Kortazzi a une grande valeur historique. C'était un des premiers travaux, les résultats ont indiqué non seulement la possibilité de déterminer les très petites grandeurs, l'amplitude de l'oscillation de la verticale, provoquée par la force de marée, mais aussi l'intérêt de l'appareil, à l'aide duquel cette grandeur a pu être déterminée [4] .

Les travaux sur l'étude des oscillations de la verticale ont connu ultérieurement leur développement grâce à l'activité énergique de A. Ia Orlov.

En 1909-1910, A. Ia Orlov [5] a employé pour la première fois pour les observations des oscillations de la verticale à Youriev un nouveau type de pendule avec une suspension à fils du système de G.V. Levitzkov.

La grande précision des observations à Youriev et des principales séries du nouveau type de pendules ont assuré un brillant succès à la science russe dans ce domaine.

Depuis ce temps les observations d'oscillations de la verticale s'effectuèren à l'aide des pendules avec une suspension à fils.

En 1911 s'est tenu le congrès international de séismologie à Manchester. A ce congrès les résultats des observations des oscillations de la verticale ont été étudiés. On a démontré que dans toutes les stations de l'Europe Occidentale, où

des observations ont été faites en ce temps, on obtenait :

$$\gamma_n < \gamma_e' \qquad (3)$$

c'est-à-dire que le rapport de la déviation observée de la verticale à la déviation théorique dans le méridien est plus faible que le même rapport observé dans le premier vertical. On a essayé d'expliquer la raison de ce phénomène par l'action secondaire des marées de la mer sur l'onde lunaire principale semi-diurne M_2 dans les oscillations de la verticale, dont le résultat s'atténue en grande partie dans la direction du méridien et varie peu dans les directions du parallèle.

Eu égard à cela, la nécessité s'est présentée de faire des observations des oscillations de la verticale à un point situé loin des océans, dans les profondeurs du grand continent où la possibilité d'une faible influence des marées des océans et des mers sur les oscillations de la verticale s'élimine.

Sur la proposition de A. Ia Orlov, le congrès a décidé d'installer une station d'observation à Tomsk qui se trouve au centre du continent Europe-Asie. L'organisation de la station de Tomsk a été confiée à A. Ia Orlov.

§ 2. Les observations à Tomsk.

La station pour l'observation des oscillations de la verticale à Tomsk a été construite et équipée pour l'automne 1912.

La série I des observations, faite du 26 septembre 1912 au 31 mai 1913, a été réalisée et publiée par A. Ia Orlov [2] .

Les résultats de la série I des observations de Tomsk ont montré qu'à Tomsk

$$\gamma_n > \gamma_e'$$

tandis que γ moyen n'atteint pas les grandes valeurs qu'on a obtenues en Occident : γ_n vaut environ 0,60 et γ_e environ 0,50. Cette découverte était la première indication de ce que les valeurs de γ dans les divers endroits de la Terre sont différentes et dépendent des conditions locales. Pour la confirmation de la découverte faite, il fallait cependant des observations ultérieures des oscillations de la verticale à Tomsk et l'intercomparaison des appareils décrits.

Les observations se sont poursuivies avec quelques interruptions jusqu'au début de 1920. Actuellement, outre les matériaux des observations de série I, les matériaux des observations suivantes sont à notre disposition :

Série II - du 11 février au 31 décembre 1914
Série III - du 1er janvier au 10 octobre 1915
Série IV - du 15 octobre 1915 au 15 juillet 1916.

Ces séries d'observations ont été entreprises pour comparer les appareils entre eux. Dans ce but les deux pendules ont été placés à peu près parallèlement. Pour des motifs d'organisation, on n'a réussi dans la série II à tirer parti que des observations du pendule I. Dans les séries III et IV les observations des deux pendules sont mises à profit. Les résultats du travail sont exposés brièvement dan l'article A. Ia Orlov [6] en 1939. Les matériaux des observations n'ont pas été publiés.

La série suivante d'observations V qui s'est effectuée du 24 juillet 1916 au 4 mai 1917 a été élaborée par V.K. Abold [7] .

Les résultats et les matériaux des observations sont publiés. Les pendules ont été installés perpendiculairement l'un à l'autre. La série VI d'observations, effectuée du 26 décembre 1918 au 28 janvier 1920 avec une interruption au milieu, a été traîtée par nous pour la première fois. Les matériaux des observations ne sont pas publiés. Une partie des observations de cette série (du 2 août 1919 au 28 janvier 1920) a été effectuée par N.N. Goriatchev [8] . Les résultats sont publiés sous forme d'un bref résumé. Ainsi, tous les matériaux des observations de Tomsk des oscillations de la verticale ne sont pas encore publiés; la série d'observations de 1918-1919 n'est pas traitée, le résumé de tous les résultats d'obser vations n'est pas achevé.

En outre, les séries isolées d'observations sont traitées selon diverses méthodes qui n'ont pas donné la possibilité d'utiliser tout le matériel d'observatio parce que les tables en temps spécial n'étaient pas faites à chaque heure, mais pour chaque trois heures.

Pour ces raisons nous avons examiné à nouveau toutes les observations de Toms de 1912 à 1920 et les avons remaniées selon une méthode, appliquée par nous pour la détermination des faibles marées [9] , qui permet d'utiliser intégralement

toutes les observations. Ensuite le résumé définitif des résultats a été rédigé, et de même les matériaux non publiés des observations des oscillations de la verticale ont été préparés pour l'impression.

Tout cela compose le sujet du présent article, dans lequel nous nous permettrons encore une fois de souligner que la grandeur γ dans divers endroits du globe terrestre est différente. Ce phénomène a des causes profondes de caractère géophysique, qu'on ne peut jusqu'à présent considérer comme claires.

L'étude ultérieure des oscillations de la verticale à Tomsk en commun avec les observations des variations de la force de pesanteur et les inclinaisons de l'écorce terrestre doit aboutir à de nouvelles découvertes qui auront sans aucun doute une grande importance pratique.

Nous estimons de notre devoir de présenter nos remerciements à A. Ia Orlov pour avoir mis à notre disposition les matériaux utilisés pour le présent travail.

§ 3. Les appareils et leur sensibilité.

Les observations des oscillations de la verticale à Tomsk, comme nous l'avons montré plus haut, ont été effectuées à l'aide de deux pendules horizontaux à suspension à fils selon le système du savant russe G.V. Levitzkov. C'était les mêmes pendules dont s'est servi A. Ia Orlov à Youriev en 1909 - 1911. Les pendules sont appelés de la façon suivante : "Pendule M" et "Pendule I". La lettre M indique que le pendule se trouve habituellement près du méridien; le chiffre romain I signifie que le pendule se trouve près du premier vertical. La sensibilité des pendules h a été déterminée d'après la formule :

$$h = \frac{\pi^2}{L_o g . 2 d T^2 \sin 1''} , \qquad (4)$$

où $l_o g$ est la constante de l'appareil déterminée par l'expérience;

d est la distance de l'objectif du pendule au tambour de l'appareil enregistreur;

T est la demi-période des oscillations du pendule, déterminée à partir des observations.

Les azimuts A des pendules, les distances 2 d et les constantes $l_o g$ étaient les suivantes :

Pendule I : A = 82°; 2 d = 7990 mm; $l_o g$ = 76,7

Pendule M : A = 350°; 2 d = 8190 mm; $l_o g$ = 75,6

Les données de sensibilité des pendules sont présentées dans la table 1.

T a b l e 1.

Données sur la sensibilité des pendules à Tomsk.

Série d'observations	Pendule I				Pendule M			
	laps de temps		h	m	laps de temps		h	m
	de	à			de	à		
I	26.IX 1912	31. V 1913	0".022	-	26.IX 1912	31.V 1913	0".022	-
II	II 1914	IX 1914	0.017	0.567	-	-	-	-
	IX 1914	XII 1914	0.030	1.000	-	-	-	-
V	24 VII 1916	30 VII 1916	0.0347	0.987	24 VII 1916	4 VIII 1916	0.0269	0.876
	31 VII 1916	8 IX 1916	0.0207	0.588	5 VIII 1916	8 IX 1916	0.0149	0.485
	9 IX 1916	4 V 1917	0.0352	1.000	9 IX 1916	4 V 1917	0.0307	1.000
VI	26 XII 1918	20 I 1920	0.036	-	26 XII 1918	20 I 1920	0.032	-

Dans la première colonne de cette table on donne le numéro de la série; dans la seconde : le laps de temps au cours duquel, dans la série donnée la sensibilité propre du pendule a été conservée; dans la troisième : la sensibilité moyenne du pendule dans ce laps de temps h et dans la quatrième : le facteur m pour la réduction des ordonnées de la courbe du pendule pendant le laps de temps indiqué pour une moyenne de sensibilité, admise pour toute la série. Dans les autres colonnes de la table sont portées les mêmes données pour le pendule M. Dans la série II pour le pendule M il n'y a pas d'observations.

4. Détermination de l'onde M_2

Nous avons effectué la détermination de l'onde principale lunaire semi-diurne M_2 dans les oscillations de la verticale à Tomsk selon le procédé pour la détermination des marées faibles, que nous avons précédemment décrit [9].

Les sommations horaires des ordonnées pour chaque série de chaque pendule, sont rapportées à un point nul arbitraire et sont exprimées en dixièmes de millimètres, elles sont données dans la table 2; on y a indiqué le nombre n de fois 24 heures spéciales de l'onde M_2, introduit dans le travail.

Nous faisons remarquer que pour les sommations des ordonnées pour toute la série on a pris en considération les facteurs m de la table 1. Les résultats de l'analyse de ces sommes sont donnés (table 3) sous la forme habituelle :

$$M_2 = R'' \cos (\mu t - \zeta). \qquad (5)$$

Nous avons exprimé l'amplitude R en secondes d'arc, en prenant en considération les données sur la sensibilité des pendules, qui sont présentées dans la table 1. Dans la deuxième et la cinquième colonnes de la table 3, l'amplitude R est donnée en millimètres.

Table 2

Sommations des ordonnées des séries en 0,1 mm.

Pendule	Heures	Séries d'observations I	II	V	VI
I	0	4044	1383	- 441	- 1022
	1	3596	1338	- 416	- 881
	2	3033	1131	- 201	- 642
	3	2420	826	52	- 410
	4	1829	466	356	- 74
	5	1290	141	665	204
	6	863	- 90	921	420
	7	610	- 208	1066	542
	8	523	- 185	1080	582
	9	464	- 62	1021	511
	10	416	116	838	413
	11	291	293	673	343
	12	28	375	466	350
	n	306	379	435	372
M	0	1708	-	- 407	- 660
	1	1760	-	- 89	- 316
	2	1713	-	221	- 11
	3	1499	-	417	203
	4	1230	-	523	362
	5	799	-	446	364
	6	312	-	260	324
	7	- 148	-	21	265
	8	- 488	-	- 249	202
	9	- 684	-	- 448	193
	10	- 730	-	- 473	386
	11	- 629	-	- 356	594
	12	- 493	-	- 28	913
	n	318	-	456	365

Table 3

Résultats de la détermination de l'onde M_2 pour Tomsk.

Série d'observations	Pendule I ($\Delta\alpha$ = -8°)			Pendule M ($\Delta\alpha$ = 80°)		
	R^{mm}	R"	ζ	R^{mm}	R"	ζ
I	0.19	0".00418	351°.7	0.19	0".00418	70°.1
II	.14	420	15.9	-	-	-
V	.12	422	204.5	.13	399	288°.4
VI	11	396	190.9	.12	384	277°.6

§5. Expression théorique de l'onde M_2

Par l'expression théorique de l'onde M_2 nous entendons cette expression qui s'obtient à partir de la décomposition du potentiel de la force des marées dans l'hypothèse où la Terre est un corps absolument rigide. Nous représenterons cette expression, en tant que provenant de l'observation, de la façon suivante :

$$M_2 = R_T \cos (\mu t - \zeta_o), \qquad (6)$$

où

$$R_T = 0"0174\ p\ (1 - \frac{5}{2} e^2) \cos^4 (\frac{I}{2}) \qquad (7)$$

$$p \sin P = \cos \varphi \sin \alpha ; \quad p \cos P = \cos \varphi \sin \varphi \cos \alpha \qquad (8)$$

Ici φ est la latitude de l'endroit des observations,

α , l'azimut de cette composante de l'oscillation de la verticale, enregistrée par le pendule, installé dans l'azimut A = 90° + α ,

$\zeta_o = P - V_o$,

V_o , la partie astronomique de la phase pour l'instant initial,

I , l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur à l'époque moyenne des séries d'observations,

e , l'excentricité de l'orbite lunaire, égale à 0,0549.

Les valeurs des grandeurs V_o et I, et aussi des facteurs $\frac{1}{f}$ pour la réduction variable d'une année à l'autre de l'amplitude à la valeur moyenne ont été obtenues d'après les tables de Nikitine [10] .

Pour Tomsk, $\varphi = 56°28'$; en prenant en considération les directions dans lesquelles ont été calculées à Tomsk les ordonnées des courbes des pendules, nous obtenons :

Pendule I $\quad \alpha = -8°, \quad P = 350°.4, \quad p = 0.462$

Pendule M $\quad \alpha = 80°, \quad P = 81°.6, \quad p = 0.550$

Les résultats des calculs suivants sont donnés dans la table 4.

T a b l e 4.

Données pour l'expression théorique de l'onde M_2

Série d'observations	Epoque initiale	Epoque moyenne	V_o	$\frac{1}{f}$
I	0^h,26 sept.1912	5 févr. 1913	1°.3	1.038
II	0^h,11 févr.1914	20 juill. 1914	338,5	1.035
V	0 24 juill. 16	1 janvier1917	142,6	1.013
VI	0 26 déc. 1918	28 juin 1919	164,8	0.983

Les valeurs de l'amplitude R_T et de la phase initiales ζ_o ont été calculées d'après ces données et sont données dans la table 5.

T a b l e 5.

Valeurs théoriques des amplitudes et des phases de l'onde M_2

Série d'observations	Pendule I		Pendule M	
	R_T	ζ_o	R_T	ζ_o
I	0".00704	349°.1	0".00837	80°.3
II	706	11.9	-	-
V	722	207.8	858	299.0
VI	744	185.6	885	276.8

§6. Comparaison des résultats théoriques avec les résultats des observations.

Multiplions maintenant les amplitudes observées et théoriques R et R_T de l'onde M_2 par le facteur $\frac{1}{f}$ de la table 4 pour la réduction de ces amplitudes à leurs valeurs moyennes H_H et H_T; nous désignerons par γ_I et γ_M les rapports des amplitudes observées et calculées d'après les pendules I ($\alpha = -8°$) et M ($\alpha = 80°$) et nous désignerons encore par k_I et k_M les différences des phases observées et calculées $\zeta - \zeta_o$. En comparant les nombres des tables 3 et 5, nous obtenons :

Table 6

Comparaison des résultats théoriques avec les résultats des observations
unité pour H : 0"00001

Série d'observations	Pendule I				Pendule M			
	H_H	H_T	γ_I	k_I	H_H	H_T	γ_M	k_M
I	434	731	0,59	+ 2:6	434	869	0.50	-10:2
II	435	731	0,60	+ 4.0	-	-	-	-
V	427	731	0,58	- 3.3	404	869	0.46	-10.6
VI	389	731	0.53	+ 5.3	377	870	0.43	+ 0.8
Moyenne	421	-	0.58	+ 2.2	405	-	0.46	- 6.7
E	±11	-	±0.015	± 1.9	±16	-	±0.02	± 3.7

Dans la table 6, E est l'erreur moyenne sur la valeur moyenne, calculée à partir des écarts des résultats individuels. Nous voyons qu'il est hors de doute que $\gamma_I > \gamma_M$. Ainsi, le résultat trouvé avant par A. Ia Orlov, V.K. Abold et N.N. Goriatchev, se confirme totalement.

§7. Comparaison des pendules I et M entre eux.

Quand il a été reconnu que pour Tomsk $\gamma_n > \gamma_a$, A. Ia Orlov a posé deux questions : en premier lieu, ce résultat ne dépend-il pas des appareils eux mêmes et en second lieu, si l'inégalité trouvée $\gamma_I > \gamma_M$ est un phénomène réel, non provoqué par les particularités instrumentales, alors quelle est la valeur de γ dans les divers azimuts. Pour la solution du second problème A. Ia Orlov s'est proposé d'effectuer à Tomsk des observations non avec deux mais avec quatre

pendules, installés l'un vers l'autre sous l'angle de 45°. Cependant ces observations commencées en 1914 n'ont pas été exécutées à cause de la guerre. Mais en revanche on est parvenu à réaliser la première tâche c'est-à-dire la comparaison des pendules entre eux. Les deux pendules étaient installés parallèlement avec toute la précision possible ce qui permet la construction des supports des pendules et cela, dans l'azimut du pendule I, à savoir A = 82°, de sorte que $\alpha = -8°$.

Avec les pendules installés de cette façon, on a effectué des observations pendant un an et demi : du 1er janvier 1915 au 17 juillet 1916. Pour la discussion initiale de ces observations A. Ia Orlov a partagé toute la matière en deux séries : III - du 1er janvier au 10 octobre 1915 et IV - du 15 octobre 1915 au 15 juillet 1916.

Pour obtenir des résultats plus précis et plus sûrs, qui correspondraient pleinement au soin avec lequel les observations ont été exécutées, nous avons englobé en une seule ces deux séries (III et IV) avec un nombre commun de 560 jours moyens solaires et nous avons discuté cette série comme toute les précédentes d'après le procédé de la détermination des faibles marées. Dans la suite, nous désignerons cette série par le symbole (III + IV). A l'époque de cette série d'observations on constatait pour les deux pendules une période d'oscillations à peu près identique d'environ 20 sec. soigneusement contrôlée par des déterminations mensuelles. Les résultats de ces déterminations sont donnés dans la table 7.

T a b l e 7.

Périodes d'oscillations des pendules horizontaux à Tomsk.

Dates	Pendules		Dates	Pendules	
	I	M		I	M
	s	s		s	s
1915 2 févr.	21.1	20.2	1915 13 novembre	20.4	19.9
5 mars	21.1	20.2	18 décembre	20.1	19.9
6 avril	20.9	20.1	1916 22 janvier	20.0	19.8
4 mai	20.8	20.0	26 février	19.8	19.6
1 juin	20.7	19.9	1 avril	19.7	19.6
2 juillet	20.8	19.9	6 mai	19.7	19.6
1 août	20.8	20.2	10 juin	19.6	19.6
4 septembre	21.5	20.0	15 juillet	19.6	19.5
9 octobre	20.6	20.0			

D'après ces données on a calculé les périodes moyennes pour chacun des pendules pour toute la série ; d'une période moyenne - on a déduit une sensibilité moyenne pour toute la série d'observations pour les deux pendules et cette sensibilité a été obtenue égale à

$$h_{cp} = 0''0326$$

Pendant l'intervalle de temps envisagé il est intervenu dans le travail 816 jours (de 24 heures) spéciaux de l'onde M_2 pour le pendule I et 833 pour le pendule M.

Les sommations horaires des ordonnées des courbes des deux pendules comparés I et M pour le nombre indiqué de jours spéciaux, sont disposées selon l'onde M_2, exprimées en dixièmes de millimètres et rapportées au point nul arbitraire. Elles sont données dans la table 8.

Table 8.

Sommations horaires des ordonnées série (III + IV). Onde M_2

Heures	Pendule I ($\alpha = -8°$)	Pendule M ($\alpha = -8°$)
0	2626	2645
1	2274	2368
2	1732	1904
3	1124	1280
4	522	780
5	133	515
6	-51	425
7	5	598
8	330	1025
9	710	1526
10	1155	1981
11	1435	2341
12	1469	2434

Les résultats de la détermination de l'onde M_2 d'après cette sommation sont donnés dans la table 9.

T a b l e 9

Résultats de la détermination de l'onde M_2

Pendule	Amplitude observée		Phase observée
	R^{mm}	R"	ζ
I $\alpha = -8°$	0.130	0".00424	348.5
M $\alpha = -8°$	0.129	0 .00421	344.7

Les données pour l'expression théorique de l'onde M_2 d'après les deux pendules $\alpha = -8°$ dans la série (III + IV) étaient les suivantes :

époque initiale : 0^h, 1^{er} janvier 1915

époque moyenne : 8 octobre 1915

partie astronomique de la phase $V_o = 359°6$,

phase théorique $\zeta_o = P - V_o = 350°8$,

angle $P = 350°4$,

amplitude théorique $R_T = 0"00712$;

facteur de réduction $\frac{1}{f} = 1.027$

Les résultats des calculs suivants sont donnés dans la table 10 (on donne les mêmes désignations que dans la table analogue 6).

T a b l e 10.

Comparaison des résultats d'observations avec les valeurs théoriques.

Séries d'observations	Pendule I ($\alpha = -8°$)				Pendule M ($\alpha = -8°$)			
	H_H	H_T	γ_I	k_I	H_H	H_T	γ_M	k_I
(III + IV)	0".00435	0".00731	0.595	-2°3	0"00432	0"00731	0.591	-6°1

Des données de la table 10 il s'ensuit que les valeurs γ_I et γ_M s'accordent excessivement bien. Ainsi, les deux pendules, étant placés à peu près dans le même azimut donnent la même valeur :

$$\gamma = 0.59$$

Ce résultat est dans les limites des erreurs d'observation en accord avec le résultat, obtenu en moyenne des quatre séries d'observations avec le seul pendule I, placé dans ce même azimut $\alpha = -8°$, pour lequel nous avons eu (table 6) :

$$\gamma_I = 0.58 \pm 0.015.$$

Ainsi, la différence entre les valeurs de γ, dans le sens $\gamma_I > \gamma_M$, observée auparavant à Tomsk a été confirmée par nos recherches, elle ne dépend pas des appareils et représente certaines particularités locales réelles.

Pour ce qui est des différences des phases observées et théoriques, obtenues d'après deux pendules c'est-à-dire des nombres k_I et k_M, ceux-ci s'accordent entre eux dans les limites de l'erreur moyenne d'une détermination de cette grandeur.

En réalité, $k_I - k_M = +3°8$.

Si nous prenons les cinq différences de phases, qui ont été obtenues par cinq séries d'observations au pendule I (table 11), et d'après les écarts de chaque différence séparée k_I à partir de la moyenne nous trouverons l'erreur moyenne d'une détermination de ε ; nous obtenons alors $\varepsilon = \pm 3°8$. La différence définitive moyenne des phases de k_I est $+1°3 \pm 1°7$, c'est-à-dire qu'elle est dans les limites des erreurs d'observations.

T a b l e 11

Différences des phases observées et théoriques

Série I	$k_I = +2°6$
II	$+4.0$
V	-3.3
VI	$+5.3$
(III + IV)	-2.3

Ainsi, au moins, pour le pendule I on aurait pu admettre dans les limites des erreurs d'observation la différence observée et calculée des phases, égale à zéro, s'il n'y avait pas de doute que l'azimut A, dans lequel est placé le pendule, soit déterminé avec une précision suffisante. En réalité, il est difficile de trouver l'azimut du pendule dans une cave fermée et l'erreur de l'azimut peut atteindre quelques degrés. Pour cette raison le fait s'explique apparemment que, pour la différence des phases observées et calculées du pendule M (table 6), on a :

$$k_M = -6°7 \pm 3°7$$

Ainsi, pour le pendule M la différence k_M dépasse considérablement l'erreu d'observation. Une telle discordance entre les deux pendules peut s'expliquer soit par le fait que les différences de k_I et k_M ne sont pas égales, soit par le fait que les azimuts des pendules sont déterminés avec une précision insuffisante.

Pour l'estimation de l'influence de l'erreur d'azimut de l'installation du pendule sur la phase calculée et l'amplitude d'oscillation de la verticale on peut se servir des formules (8) du présent article, qui établissent la liaison entre l'angle α et les constantes p et P.

Par différentiation de ces formules nous obtenons [11] :

$$dp = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos^3\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos\varphi}}\,d\alpha \qquad (9)$$

$$dP = \frac{\sin\varphi}{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}\,d\alpha \qquad (10)$$

En vertu de la formule (6) nous avons

$$dR_T = \tau C dp \qquad (11)$$

où dR_T - est l'erreur sur l'amplitude calculée dépendant de l'imprécision de l'angle α ,

τC - est le produit de tous les autres facteurs entrant dans la partie droite de la formule (7) et ne dépassant pas de p.

Sur la base de ces formules on a établi la table 12, donnant la grandeur de l'erreur commise sur l'amplitude et la phase calculées en fonction de l'erreur sur la valeur adoptée α. La table est établie pour la latitude de Tomsk ($\varphi = 56°28'$) et l'azimut d'installation du pendule ($\alpha = -8°$), la grandeur τC étant rapportée à l'époque moyenne des observations, le 8 octobre 1915.

T a b l e 12

Dépendance de l'erreur sur la phase et l'amplitude calculées en fonction de l'erreur d'azimut de l'appareil.

$d\alpha$	dP	τ Cdp
0°.5	0°.7	0".00000
1.0	1.2	1
1.5	1.8	1
2.0	2.4	2
2.5	3.0	2
3.0	3.6	2

De la table 12 il découle que, si entre les azimuts des pendules lors de leur installation il y avait une différence admise de 3°, alors entre les phases dans les oscillations de la verticale obtenues par ces pendules, la différence serait 3°6. Cette différence dans l'installation a peu d'influence sur les amplitudes. Ainsi, nous en viendrons à la conclusion que la différence remarquée entre les phases observées d'après les pendules I et M (table 10) peut être tout à fait expliquée par l'imprécision de l'installation des pendules.

Pour cela, afin d'augmenter la précision de la détermination de l'azimut du pendule horizontal, A. Ia. Orlov a proposé de faire dans le plafond de la cave, où sont installés les appareils, une ouverture dans la direction de l'étoile polaire et ensuite, à l'aide d'un théodolite, de tracer sur le pilier des pendules une ligne droite dans le plan du méridien, et par rapport à laquelle on déterminera l'azimut des pendules. Ce procédé, appliqué à Poltava, a donné de très bons résultats.

Conclusion quant à la valeur définitive de la différence $\gamma_I - \gamma_M$.

En comparant dès le début toutes ces valeurs de γ_I, qui ont été obtenues dans l'azimut $\alpha = -8°$ aussi bien avec le pendule I qu'avec les pendules I et M, quand ils se trouvaient à peu près dans un même azimut, nous obtenons la table 13.

Prenant en considération la valeur de γ_M de la table 6, nous obtenons les valeurs définitives de la différence de γ_I et γ_M et de leur moyenne

$$\gamma_I - \gamma_M = 0.12 \pm 0.02 ;$$

$$\gamma \text{ moyen} = 0.52 \pm 0.01.$$

Table 13

Valeurs de γ dans l'azimut $\alpha = -8°$ d'après deux pendules

Série d'observations	(azimut $\alpha = -8°$) γ
I	0,59
II	0,60
V	0,58
VI	0,53
(III + IV)	0,59 (pendule I)
(III + IV)	0,59 (pendule M)
Moyenne	0,58 ± 0.01

§ 9. Conclusion.

Pour comparer les données des observations de Tomsk avec des données de stations d'un autre continent, moins éloigné de l'Europe Occidentale que Tomsk on a organisé des observations à Poltava [9]. Poltava et Tomsk sont deux stations pourvues des plus longues et des plus précises séries d'observations, comparables entre elles du point de vue précision.

Comparant les résultats obtenus nous avons :

T a b l e 14.

Comparaison des résultats des observations de Poltava et de Tomsk.

Lieu d'observation	γ_n	γ_e	$\gamma_n - \gamma_e$	γ moyen
Poltava	0.72	0.67	+ 0.05	0.70
Tomsk	0.58	0.46	+ 0.12	0.52
Différence	+ 0.14	+ 0.21	-	-

Ainsi l'exemple de ces deux stations montre que bien que nous avons un rapport identique $\gamma_n > \gamma_e$; les grandeurs absolues des valeurs de γ_n, γ_e et γ moyen dans ces deux stations sont différentes.

La différence

$$\gamma_{\text{Poltava}} - \gamma_{\text{Tomsk}} = + 0.18$$

représente en soi une chose réelle, qui dépend des conditions locales de Poltava et de Tomsk; jusqu'à présent cette différence n'a pu être expliquée par des raisons théoriques.

En outre, un fait mérite une attention particulière : la valeur moyenne de $\gamma = 0.52$ trouvée à Tomsk apparaît comme la plus petite parmi les valeurs obtenues dans diverses stations du Globe terrestre pour cette grandeur.

Les résultats de la détermination de γ_n et γ_e en divers points du Globe terrestre forment un tableau encore plus disparate; en ces points, à de rares exceptions près, il n'y a aucun critère pour l'estimation de la précision des observations.

Nous donnons dans la table 15 les valeurs de γ_n, γ_e, γ moyen et les différences $\gamma_n - \gamma_e$ dans les stations de l'hémisphère oriental de la Terre, examinées par nous dans un travail antérieur [9].

Ici ces stations sont classées d'après les longitudes croissantes :

Table 15

Comparaison des résultats des observations dans les divers stations du globe terrestre.

Nom des stations	λ	γ_n	γ_e	$\gamma_n - \gamma_e$	γ_{moyen}
Paris	- 2°3	0.60	0.92	- 0.32	0.76
Freibourg	- 7.9	0.56	0.74	- 0.18	0.65
Durlach	- 8.5	0.34	0.74	- 0.40	0.54
Marburg	- 8.6	0.65	0.87	- 0.22	0.76
Heidelberg	- 8.7	0.63	0.82	- 0.21	0.72
Berchtesgaden	-13.0	0.53	0.74	- 0.21	0.64
Freiberg	-13.3	0.54	0.61	- 0.07	0.58
Potsdam	-13.1	0.43	0.68	- 0.25	0.56
Pillnitz	-13.9	0.62	0.81	- 0.19	0.72
Beuthen	-18.6	0.73	0.71	+ 0.02	0.72
Youriev	-26.8	0.61	0.64	- 0.03	0.62
Poltava	-34.5	0.72	0.67	+ 0.05	0.70
Alma-Ata	-77.0	0.49	0.83	- 0.34	0.66
Tomsk	-85.0	0.58	0.46	+ 0.12	0.52
				moyenne	0.65

De la table 15 il s'ensuit que dans la répartition des différences de $\gamma_n - \gamma_e$ d'après la longitude, une certaine régularité se dessine : les différences $\gamma_n - \gamma_e$ restent négatives approximativement jusqu'au méridien - 20° et en moyenne donnent là une grandeur de - 0.23 $\pm$ 0.03. Ensuite, en passant par zéro près de ce méridien, les différences deviennent positives.

Cependant il est impossible de tirer des conclusions définitives sur cette régularité pour tout l'hémisphère terrestre oriental à cause du manque total d'observations sur une vaste étendue entre Poltava à Alma-Ata et cela d'autant plus qu'à Alma-Ata nous trouvons de nouveau une différence négative tandis qu'à Tomsk elle est positive. En ce qui concerne les grandeurs de γ moyen, qui, comme on le sait, constitue la mesure des caractéristiques élastiques de la Terre par comparaison avec un corps absolument rigide, à partir de toutes ses valeurs insérées dans la table 15, nous obtenons la valeur moyenne suivante :

$$\gamma_{moyen} = 0.65$$

Cette valeur concorde bien avec la valeur moyenne résultant des données de quatre stations continentales seulement, à savoir : à Poltava γ moyen = 0.70, à Alma-Ata 0.66, à Tomsk 0.52, à Williamsbay 0.69. En moyenne γ moyen = 0.64.

Les données des observations dans les stations continentales constituent une nouvelle contribution à l'étude des caractéristiques élastiques de la Terre.

Il importe d'expliquer les causes de caractère théorique ou purement géophysique, créant une différence dans les valeurs de γ dans les divers points de la Terre.

On peut contribuer largement à une heureuse solution de ce problème en déployant dans divers endroits de l'Union Soviétique des observations collectives sur les marées luni-solaires, les déformations de la Terre et sur les variations de la force de pesanteur.

Bibliographie.

1. M.V. LOMONOSOV — Sotch. T.V. 1902 ; T. VI 1934
2. A. Ia. ORLOV — Résultats des observations des déformations luni-solaires de la Terre à Iouriev, Tomsk et Potsdam (Odessa 1915).
3. I. KORTAZZI — Isvestia Rouss. Astronom. Obs. v. IV, 1895 v.V 1896
4. G.H. DARWIN — Les marées et leurs phénomènes apparentés dans le système solaire. G.I.Z. M.L. 1923.
5. A. Ia. ORLOV — Première série d'observations des déformations de la Terre sous l'influence de l'attraction de la Lune, à l'aide de pendules horizontaux à Iouriev. Iouriev 1911.
6. A. Ia ORLOV — Isvestia A. N SSSR, série géogr. et Géoph. n° 1 1939
7. V.K. ABOLD — Isvestia phys. mat. inst. V.A. STAKLOV T. II, 1926
8. N.N. GORIATCHEV — Isvestia Tomskogo Univers. T. 74 1924
9. Z.N. AKSENTIEVA — Troudi Poltavskoï Grav. Observ. T. II 1948
10. M.V. NIKITIN — Analyse harmonique des marées 1925
11. W. SCHWEYDAR — Veröffentlichung des K. Preuss. Geod. Instit. N.F. N° 59, Potsdam, 1914.

Einige Bemerkungen über die Einarbeitung der astronomischen Daten bei der harmonischen Analyse der Erdgezeiten.

von

Werner Pallas, Freiberg.

Bei der Einarbeitung der astronomischen Daten in die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Erdgezeiten haben sich gewisse Schwierigkeiten, oder besser gesagt : Differenzen ergeben zwischen den Werten, die die gebräuchlichen Tabellen (Landolt - Börnstein [1] , Schureman [2]) liefern, und denen, die man nach den bekannten Formeln berechnen kann.

Vorweggenommen sei, dass die Tabellen von Schureman sich am brauchbarsten erwiesen haben, da dort auch die Incremente für die einzelnen Stunden angegeben sind. Der Ausgangspunkt ist dabei ausserdem noch der gleiche, den Lecolazet 3 annimmt : 1900, Jan. 1. 0^h. Bei Landolt-Börnstein ist der Ausgang auf den 1. Jan. 1900 12^h WZ gelegt, was ja leicht umgerechnet werden kann.

Ebenso ist der wechselnde Ausgang bei den von verschiedenen Autoren aufgeführten Formeln zur Berechnung von s, h usw. zu beachten, immerhin wirkt er sich dabei nur im konstanten Glied aus.

Am leichtesten verständlich sind die Formeln von Doodson [4] , die ausdrücklich die seit 1900 vergangenen Schalttage berücksichtigen. Diese Formeln führen exakt zu den Werten, die aus den Tabellen hervorgehen, z.B. auch zu den V-Werten, die Lennon [5] tabelliert hat. Die von Lecolazet nach Doodson bzw. Brown zitierten Formeln finder sich bei Landolt-Börnstein, hier nur mit anderem Ausgang : 1900, Jan. 0. 12^h.

Mit welcher Vorsicht man aber bei diesen Zitaten arbeiten muss, zeigt das Beispiel, das ein älterer Autor liefert.

In den Veröffentlichungen der Deutschen Seewarte vom Jahre 1924 bringt Rauschelbach [6] eine Abhandlung über die harmonische Analyse der Gezeiten des Meeres, in der auf S. 98 im IV. Abschnitt diese Formeln stehen, die er für h und p_1 nach Newcomb,

für s, p und N aber nach Brown zitiert. Freilich ist da alles noch nach Minuten und Sekunden angegeben. Rechnet man in Bruchteile des Grades um, so erhält man die Formeln von Landolt-Börnstein III, S. 272, wo als Bezugspunkt angegeben ist : 31. Dez. 1899, 12^h, also : 1900, Jan. 0. 12^h, wie oben schon erwähnt. Rauschelbach nennt als Ausgang : 1900, Jan. 0. 0^h. Es bleibt die Frage offen, wo der Fehler entstanden ist, ob schon bei den Autoren oder erst durch fehlerhaftes Zitat.

Hinzu kommt noch ein anderer Punkt.

Überall da, wo die Formeln angeführt sind, steht als Erklärung für T - ich zitiere hier z. B. nach Lecolazet - , T sei die Zeit, ausgedrückt in Jahrhunderten zu je 36525 mittleren Sonnentagen, gerechnet ab 1. Jan. 1900 0^h oder einem anderen Ausgang.

Bei Landolt-Börnstein ist in gleichem Zusammenhang von "julianischen Jahrhunderten" die Rede. Dieser Ausdruck sei vorerst noch zurückgestellt.

In dem so definierten Wert von T sind also die Schalttage schon berücksichtigt. Es ist irrig, anzunehmen, man müsse, so wie es die Formeln bei Doodson verlangen, die seit 1900 verflossenen Schalttage noch hinzufügen.

Nehmen wir an, der Bearbeiter sei nur Rechner, also nicht Fachmann, so kann es passieren, dass er unbefangen in den Wert von T die Jahreszahl des Kalenderjahres einsetzt, wodurch er zu starken Abweichungen von den tabellierten Werten kommt.

In den Wert von T gehen nämlich die Schalttage kontinuierlich ein in Form eines Vierteltages je Jahr. Unser Kalender, nach dem sich auch die Tabellen richten, zeigt den Schalttag aber sprunghaft. Am besten sieht man das an einem Beispiel, das man wirklich einmal nachrechnen sollte !

Und zwar sei der 15. Juni 1959 0^h WZ als Zentralstunde einer Analyse angenommen. Das ist der 165. Tag nach dem 1. Jan. 59.

Aus den Tabellen von Schureman folgt zunächst für s und h :

	s	h		
Wert für 1.1.59	175,20	279,90	h = 442,53	+
Increment für Monat	189,64	148,83	s = 189,31	-
Increment für Tag	184,47	13,80	= 253,22	. 2
	549,31	442,53	= 506,44	
	360,00	360,00	360,00	
	s = 189,31	h = 82,53	146,44	

nach Lennon V_{M_2} = 146,46

Bei Benutzung der Formeln könnte also ein unbefangener Nicht-Fachmann für T einsetzen :

$$T = 0{,}59 \text{ Jahrhdt.} + \frac{165}{36525} \text{ Jhdt.}$$

$$= 0{,}59\ 451\ 75 \text{ Jahrhdt.}$$

Damit ergibt sich unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes :

	s		h
	286 122,1834		21 403,0872
+	277,0248	+	280,1895
	286 399,2082		21 683,2767
-	252 0	-	21 600
	34 39		83,28
	32 40	nach Schureman	82,53
	1 999	Differenz	0,75 ≙ 18 h
	-1 800		
	199,21		
Schureman	189,31		
Differ.	9,90 ≙ 18 h		

Die sich errechnenden Werte liegen also um $^3/_4$ Tag zu hoch. Das Jahr 1959 ist ja auch das dritte Jahr nach dem letzten Schaltjahr. Zieht man von vorn herein von dem sich aus dem Datum ergebenden Wert für T die Incremente für $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ bzw. im Schaltjahr 1 Tag ab, so müsste man zu den Werten von Schureman kommen.

Zunächst ist 1 Tag gleich $\frac{1}{36525}$ Jahrhundert oder gleich $\frac{4}{146100}$ Jhdt. In Dezimalen gibt das für die vier Brüche :

0,00 000 69 ; 0,00 001 37 ; 0,00 002 05 und 0,00 002 74

In unserem Beispiel also :

$$T = 0{,}59\ 451\ 75$$
$$- \quad 0{,}00\ 002\ 05$$
$$T' = 0{,}59\ 449\ 70$$

Das ergibt für

s		h	
	286 112,3174		21 402,3492
+	277,0248	+	280,1895
	286 389,3422		21 682,5387
-	252 0	-	21 600
	34 38		82,54
	32 40		======
	1 989		
	- 1 800		
	189,34		
	======		

Die Lösung liegt in dem Stichwort "julianische Jahrhunderte " das Landolt - Börnstein nennt.

Das julianische Datum findet sich ebenfalls bei Landolt-Börnstein (III, S. 42), allerdings mit dem 1.III. als Jahresanfang und erst ab 1.III.1940. Günstiger wäre es, aus den Ephemeriden das julianische Datum für den 1.Jan. 1900 zu entnehmen und bereitzuhalten (1.I.1900 ≙ 241 5021).

Nach Landolt-Börnstein bestimmt sich das julianische Datum für den 15.VI. 1959 folgendermassen :

1.III.1959	24 36 629	+
15.VI.	106	+
	24 36 735	+
1.III.1940	24 29 690	-
	7 045	+
1900 - 1940	14 610	+
Jan. 1900	31	+
Febr. 1900	28	+
	21 714	Tage

dividiert durch 36 525 0,59 449 69 julianische Jahrhunderte. Das ist tatsächlich der durch die oben angeführte Korrektur errechnete Wert für T bzw. T'.

Die Abweichung erklärt sich sehr leicht daraus, dass der Ansatz 0,59 für den 1. Jan. 1959 nicht stimmt. Dieses Datum ist noch nicht 59 % des laufenden Jahrhunderts.

Zum Vergleich seien die seit 1900 1.I. 00 verflossenen julianischen Tage für die vier Jahre 1956, 1957, 1958 und 1959 errechnet :

	56	57	58	59
jul. Datum 1.I.	24 35 474	24 35 840	24 36 205	24 36 570
1. Jan.00	24 15 021	24 15 021	24 15 021	24 15 021
	20 453	20 819	21 184	21 549
		366	365	365
Division durch				
36525 ergibt	0,55 997 26	0,56 999 31	0,57 998 63	0,58 997 95
es fehlt also :	0,00 002 74	0,00 000 69	0,00 001 37	0,00 002 05
das entspricht :	1 Tag	1/4 Tag	1/2 Tag	3/4 Tag

Dass im Schaltjahr ein ganzer Tag fehlt, ist nur scheinbar so.

Der Schalttag müsste eigentlich als 32. Dezember des Vorjahres gezählt werden, dann wäre das julianische Datum um 1 Tag grösser. Es ist also von vorn herein zu empfehlen, überhaupt nicht nach den Formeln zu rechnen sondern die tabellierten Werte zu benutzen. Eine Fotokopie auf dem Tisch des Rechners behebt alle Schwierigkeiten. Vor allem aber wird die Arbeit erleichtert und beschleunigt. Nimmt man die Formeln, so braucht man auf alle Fälle ein Verzeichnis des julianischen Datums und dabei als Standardwert den 1.I.1900 (≙ 241 5021). Dann kommt man zu einheitlichen Ergebnissen, und nur diese sind vergleichbar.

L i t e r a t u r.

1. L a n d o l t - B ö r n s t e i n

Zahlenwerte aus Physik usw. Band III. Astronomie und Geophysik.
32 2 Gezeitenkräfte (Bartels-Horn) S. 272 und 278.
31 1 Orts - und Zeitbestimmung (Larink) S. 42
Julianisches Datum.

2. S c h u r e m a n

A Manuel of Harmonic Analysis and Prediction of Tides.
Spec. Publ. Nr. 98, U.S. Coast und Geodetic Survey.

3. R. L e c o l a z e t.

La méthode utilisée à Strasbourg pour l'analyse harmonique de la marée gravimétrique . Uccle . B.I.M. Nr 10, 1.II.58.
Deutsche Übersetzung von W. P a l l a s , Deutscher Übersetzungsdienst, Berlin. S. 161.

4. A.T. D o o d s o n.

The analysis of tidal observations for 29 days.
Int. Hydr. Review, may 1954.
S. 13 und 14 : Table VI : Astronomical Data
Table VII : Values for V usw.

5. G. W. L e n n o n.

The Liverpool Tidal Institute Methode of Harmonic Analysis for 29 Days Observations of Earth Tides.
Deutsche Übersetzung von K. R i n n e r. Deutsche Geodätische Komission München, Heft 17.

6. R a u s c h e l b a c h.

Die harmonische Analyse der Gezeiten des Meeres.
Veröffentlichungen der Deutschen Seewarte, 1924 Abschnitt IV.S.98