

MAREES TERRESTRES

BULLETIN d'INFORMATIONS

N° 23

3 janvier 1961

Association Internationale de Géodésie
Commission Permanente des Marées Terrestres.

Editeur Dr. Paul MELCHIOR
Centre International des Marées Terrestres
c/o Observatoire Royal de Belgique
3, Avenue Circulaire
Bruxelles 18
Belgique.

Conditions d'Observation de l'éclipse de Soleil du 15 février 1961
pour les instruments de mesure des marées terrestres
par
R. TOMASCHEK
(Prien)

Nous montrerons dans ce qui suit ce qui intéresse l'observateur dans les stations européennes de marées terrestres à l'occasion de l'éclipse de Soleil mentionnée dans le titre, éclipse qui, pour l'Europe, est la dernière éclipse totale avant 1999, à savoir la mise en évidence d'un effet possible sur la gravitation.

1. Dans un travail antérieur (1) on a déjà montré qu'avec les méthodes de mesure existant actuellement, il serait possible de déterminer une éventuelle variation de la force d'attraction du Soleil au moment d'une éclipse totale.

Entretiens on a entrepris deux déterminations de ce genre lors de l'éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954. TOMASCHEK (2) a observé visuellement avec trois gravimètres dans la zone de totalité à UNST (Shetlands). Il n'a pas trouvé de variation de la pesanteur qui puisse atteindre 3 microgals (et cela avec une probabilité de 1 à plusieurs centaines) - (Fig. 1).

Des observations de ce genre peuvent à présent se faire avec des gravimètres enregistreurs et en des endroits différents par des appareils indépendants, qui assureront une plus grande précision.

A Unst, au moment des observations, la précision a été réduite par suite de l'agitation microsismique due aux vagues océaniques et au vent violent et elle a été d'environ 3 μ gal alors qu'on espérait normalement 1 μ gal.

En même temps, R. BREIN a mis en évidence, pour cette même éclipse, un effet de 1,3 μ gal avec un gravimètre enregistreur installé dans le Sud de la Norvège (3).

Il est donc très souhaitable de reprendre ces observations car l'éclipse de Soleil de février 1961 offre une excellente occasion : elle est presque totale dans toute l'Europe et est totale dans le Sud de ce continent. Elle affecte aussi un grand nombre de très bonnes stations de marées terrestres.

Cependant cette éclipse commence en Europe au lever du Soleil ou immédiatement après si bien que, par suite de la grande distance zénithale du Soleil (cf. Table I), ce sont les observations aux pendules horizontales et non aux gravimètres qui peuvent mener à un résultat (4).

2. Le principe de ces mesures résulte du fait que la force des marées, qui dépend de $1/r^3$, provient d'un effet différentiel entre la force de gravitation au lieu d'observation et la force centrifuge au centre de masse de la Terre due au mouvement relatif Terre-Astre attractif.

Dans le cas d'une éclipse de Soleil, s'il existe une absorption de la force de gravitation, la force centrifuge elle, ne change pratiquement pas car le domaine affecté par l'éclipse est négligeable vis à vis de la surface terrestre entière. Il y aura par contre une variation de la force d'attraction qui dépend de $1/r^2$.

L'attraction du Soleil en un point de la surface terrestre est de 600.000 μgal . Il peut donc y avoir de petites variations de l'attraction solaire car cet effet, au point d'observation, s'introduit entièrement dans l'effet différentiel de la force de marée. Elle doit donc être observable expérimentalement.

La question d'une absorption de la force d'attraction par la matière lors d'une éclipse de Soleil pourrait être une cause possible pour une variation de la pesanteur.

On peut admettre, comme le montrent des irrégularités dans le mouvement de la Lune, qu'un rayonnement gravifique d'intensité g_0 peut être affaibli par une couche massive d'épaisseur h et de densité $D(h)$ suivant la formule

$$g = g_0 e^{-a \int_0^h D \, dh}$$

Comme a est certainement inférieur à 10^{-14} c g s, on peut écrire

$$g = g_0 - a \int_0^h D \, dh$$

Dans le cas de la totalité, Brein a calculé pour

$$a = 3 \cdot 10^{-15} \quad (\text{d'après Bottlinger})$$

que

$$g = g_0 - g = 2,1 \, \mu\text{gal}$$

Ce problème a été étudié spécialement par BOTTLINGER (5) mais des discussions ultérieures en ont été faites qui ont conduit à des résultats discordants (6)

Une autre possibilité de variation de la pesanteur réside dans la théorie de la relativité générale car, par suite de la courbure de l'espace dans le voisinage de la Lune, en raison de la masse de celle-ci, on peut imaginer une sorte d'effet de lentille ou d'interférence dans le domaine environnant. Le calcul d'un tel effet n'a pas encore été fait.

3. L'effet s'il existe, peut être décrit comme suit :

La figure 3 montre la variation dans le temps de l'effet d'absorption dans la direction du Soleil.

En ce qui concerne le calcul et les hypothèses faites nous renvoyons au travail de Brein (3).

Comme le montrent les recherches de Tomaschek et de Brein, un tel effet, s'il est effectivement présent, ne peut, si l'on admet un coefficient d'absorption $a = 10^{-14}$ cgs, dépasser un maximum de 2 à 3 μ gals dans la direction du Soleil.

Si l'on adopte la valeur de Bottlinger ($a = 3 \cdot 10^{-15}$ cgs), on obtient un maximum de 2,1 μ gals.

La distance zénithale du Soleil au moment de la totalité sera en Europe de 80° à 77° (voir Table 1). Si nous adoptons 78° , ce qui correspond à la situation de Pise et Florence, nous obtenons :

$$\text{pour la composante verticale} \quad \Delta g = 2,1 \cos 78^\circ = 0,44 \mu\text{gal}$$

$$\text{pour la composante horizontale} \quad \Delta g_h = 2,1 \sin 78^\circ = 2,05 \mu\text{gal}$$

dans l'azimut du Soleil

pour l'observateur, Δg a le signe qui correspond à une augmentation de la pesanteur.

Comme une variation de 1 μ gal provoque pour la composante horizontale une déviation de la verticale de 0,210 milliseconde. on observera donc une variation maximum de 0,43 milliseconde. Etant donné que les pendules horizontaux sont en général orientés E.W. et N.S. et que, pour les stations européennes le Soleil se trouvera à peu près au S.W., l'effet dans les deux directions d'enregistrement aura un ordre de grandeur de 0,3 milliseconde.

Comme la ligne de totalité s'incurve fortement vers le Nord en Russie où l'éclipse aura lieu vers midi, la distance zénithale du Soleil y sera encore de 62° et, dans le cas le plus favorable, l'effet gravimétrique ne sera encore que de 0,986 μ gal.

Brein a déjà montré que les points situés sur la face de la Terre opposée à la zone de totalité, pouvaient parfaitement convenir. Cependant les cas favorables sont rares.

4. Pratiquement la fonction des stations de marées terrestres lors de l'éclipse de Soleil sera donc en Europe de rechercher une variation des composantes horizontales de la pesanteur qui sera de l'ordre de 0,4 milliseconde ou moins. On observerait donc pendant la durée de l'éclipse (2 heures environ), un écart de 1 % par rapport à l'amplitude normale de la marée.

Comme on peut admettre une amplitude d'environ 30 millimètres pour les courbes enregistrées, on doit déceler un tel effet dans les conditions normales de précision des mesures, soit $\pm 0,05$ mm.

On pourra améliorer la précision des mesures en disposant plusieurs sources lumineuses qui fourniront plusieurs enregistrements de la couche de variation

L'intervalle de temps pour la lecture des ordonnées devrait être de 10 minutes au moins et une augmentation de la vitesse de l'enregistreur qui est usuellement de 5 à 10 mm par heure est très souhaitable. L'installation de plusieurs sources lumineuses est encore à conseiller pour éviter les pertes d'enregistrement qui pourraient être dues à la dérive.

Il faut noter que par suite de la concentration centrale de la masse solaire, l'effet reste presque égal dans le cas d'une éclipse qui ne serait pas absolument totale.

5. Bien que probablement un effet de la grandeur calculée devrait être observable avec l'équipement normal des stations, il serait fort souhaitable de rendre minimum la limite d'erreur des mesures car l'on s'approche aussi de la limite d'erreur astronomique.

On pourrait donc dans ces stations prendre les mesures suivantes :

Sur le trajet lumineux de l'enregistrement normal, on placera une lame de verre réfléchissante G_1 ou un petit miroir M^2 (fig. 4) qui peut tourner autour d'un axe vertical, ce qui permet de détourner un rayon lumineux, sans troubler l'enregistrement normal; on pourrait allonger le trajet optique par une lentille concave et éventuellement par des réflexions multiples.

Ce faisceau lumineux réfléchi par la lame de verre se projette alors sur la fente d'un enregistreur à grande vitesse (1 à 2 mm par minute). La lame de verre réfléchissante devrait être commandée à distance (mécaniquement ou électriquement) de manière à compenser une dérive éventuelle sans perturber l'instrument. La mise en service de l'enregistrement rapide devrait être faite 2 heures avant la totalité et s'arrêter 2 heures après, sans perturber l'enregistrement normal.

6. A condition de prendre les dispositions nécessaires on pourrait ainsi aborder le problème de l'absorption de la gravitation indépendamment du phénomène d'éclipse en prenant la Terre elle-même comme corps absorbant. Une absorption éventuelle de la pesanteur par la masse terrestre ne peut être mise en évidence par les observations de marées mêmes car les marées qui suivent les périodes luni-solaires de même que les influences thermiques périodiques parfois existantes, recouvrent entièrement les petits effets d'absorption ou de réfraction.

On pourrait cependant utiliser les levers et couchers de la Lune (malgré son champ de force plus petit que celui du Soleil) de la même manière que celle représentée sur la figure 4 en mettant automatiquement en service l'équipement d'enregistrement rapide 2 à 3 heures avant chaque lever ou coucher lunaire. A noter que le Soleil n'est pas utilisable en raison des effets thermiques associés.

Par un dispositif photoélectrique on peut déplacer la lame de verre (ou le miroir) durant les périodes de non travail, de manière à rendre l'enregistrement indépendant de la dérive de l'instrument.

En trois années de mesures on pourrait ainsi obtenir, sans perturber l'enregistrement normal, environ 2.000 courbes dont l'étude statistique pourra conduire à une conclusion quant à l'existence d'un effet d'absorption.

Du point de vue technique la programmation de la mise en service de l'équipement spécial ne présente pas de difficultés de principe.

Les observateurs qui ne pourraient calculer eux-mêmes leurs résultats peuvent envoyer les enregistrements originaux à l'auteur.

Bibliographie.

- | | | | |
|---------------------|--|-------------|-------|
| (1) TOMASCHEK R. | Naturwiss. <u>25</u> N° 12 | p. 185 | 1937 |
| (2) TOMASCHEK R. | Nature <u>175</u> | pp. 937-940 | 1955 |
| (3) BREIN R. etc. | Deutsche Geodät. Kommiss. Reihe B
Heft 34 | pp. 30-45 | 1957 |
| (4) | Auf die Möglichkeit eines Einflusses auf Horizontal-
pendel hat schon BOTTLINGER hingewiesen. | | |
| (5) BOTTLINGER K.F. | Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes
Inauguraldissertation Univ. München
Freiburg/Breisgau 1912 | | |
| (6) MAJORANA G. | Phil. Mag. (6) <u>39</u> | p. 488 | 1920 |
| RUSSEL H.N. | Astrophysical Journal <u>54</u> | p.334 | 1921. |

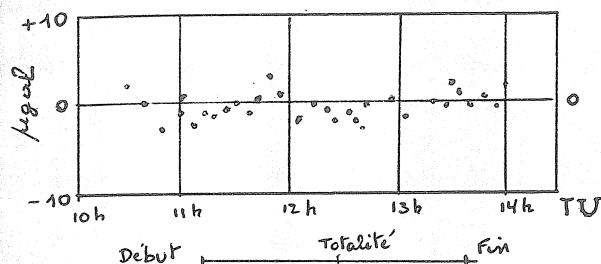


Fig. 1

Valeur moyenne des mesures avec 3 gravimètres lors de l'éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954 à Unst (Shetlands) par Tomaschek.

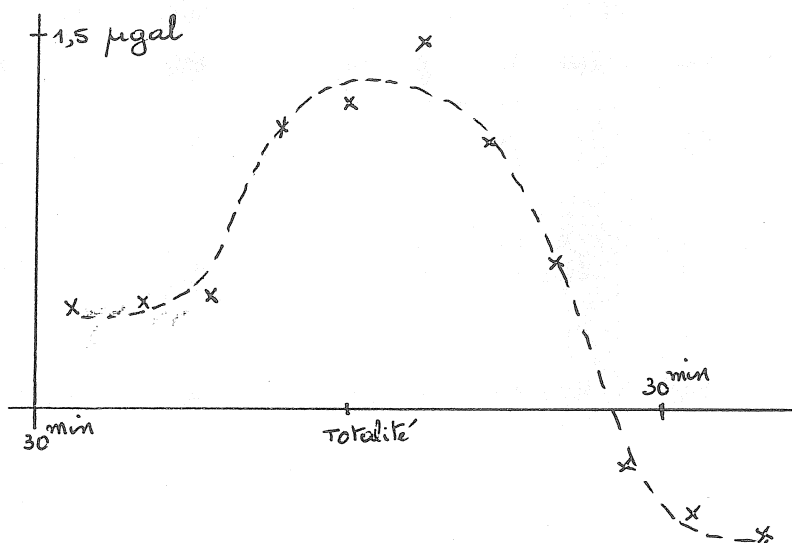


Fig. 2

Résultat de l'enregistrement d'un gravimètre North American par Brein lors de l'éclipse du 30 juin en Norvège du Sud.

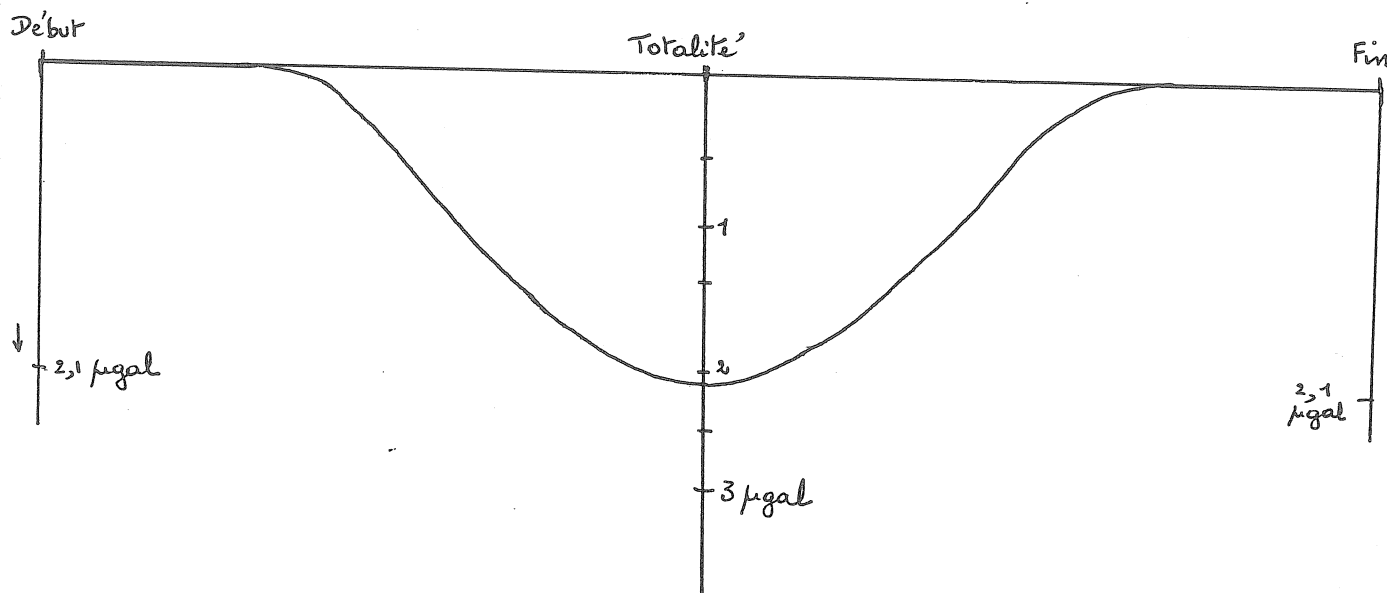


Fig. 3

Diminution de l'attraction solaire en un point de la surface terrestre durant une éclipse totale de Soleil (selon Brein) dans l'hypothèse d'une répartition radiale de la densité solaire selon Cowling et en adoptant le coefficient d'absorption de Bottlinger ($a = 3.10^{-15} c--$)

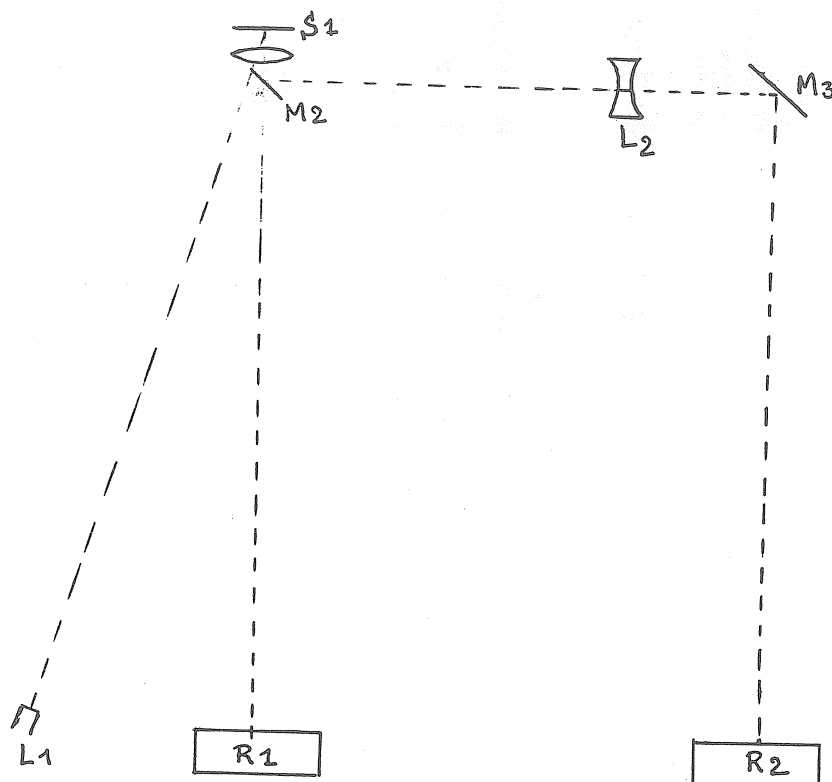


Fig. 4

Schéma d'installation d'enregistrement pour les mesures d'absorption gravifique

1 : équipement habituel (L_1 S_1 R_1)

2 : équipement d'enregistrement rapide.

Table

	1	2	3	4	5
San Remo	- 27 km	8 ^h 34	8 ^h 51	10.2°	118 sec
Alassio	0 km	"	53	10.4°	122 sec
Finale Ligure	+ 18 km	8 ^h 35	8 ^h 54	10.4°	122 sec
Pisa	- 6 km	8 ^h 36	9 ^h 03	12.2°	127 sec
Porto venere	+ 24 km	8 ^h 36	9 ^h 01	11.4°	124 sec
Firenze	+ 12 km	8 ^h 37	9 ^h 07	12.7°	127 sec
Bologna	- 6 km	8 ^h 41	9 ^h 34	16.5°	137 sec.

1. Distance à la ligne centrale de totalité

2-3. Heures de centralité

4. Hauteur ($90^\circ - h = z$)

5. Durée de la totalité.

SOME REMARKS CONCERNING THE CALCULATION OF THEORETICAL

AMPLITUDES OF TIDAL GRAVITY VARIATIONS

by

N.N. Pariisky (Moscou).

It is well known that the tide-generating potential of the Sun and the Moon can be expressed as a sum of simple harmonic waves [1], [2].

The second-order spherical harmonic gives rise to terms of the following type in the development of these potentials :

$$W_{abcdef} = K_{abcdef} g_{0,1,2}(\vartheta, \psi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \quad (1)$$

and the third-order terms produce

$$W_{abcdef}^* = K_{abcdef}^* g_{0,1,2,3}^*(\vartheta, \psi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \quad (1')$$

Geodetic factors (coefficients) g_0 , g_2 , g_1^* and g_3^* are multiplied by cosines of the arguments and g_1 , g_0^* and g_2^* by sines.

Here

τ - local mean lunar time

s - Moon's mean longitude

h - Sun's mean longitude

p - longitude of Moon's perigee

$N' = -N$, where N is the longitude of the Moon's ascending node

p_s - longitude of the Sun's perigee.

All longitudes are measured from the mean vernal equinox for the given moment.

The constant coefficients K and K^* are given in [1] and [2]. In terms arising from the solar potential these coefficients contain factors

$$\Gamma = \frac{S}{M} \frac{\sin^3 \pi \varrho}{\sin^3 \pi \varrho_1} = 0.46040 \quad (2)$$

so that the geodetic factors g and g^* for all waves correspond to the Moon.

Geodetic factors g are expressed as follows :

	spherical harmonics of the 2 nd order	spherical harmonics of the 3 rd order
longperiod waves	$g_0(\psi) = \frac{1}{2} g(\varrho_1) (1 - 3 \sin^2 \psi)$	$g_0^*(\psi) = \frac{1}{2} g(\varrho_1) \sin \psi (3 - 5 \sin^2 \psi)$
diurnal waves	$g_1(\psi) = g(\varrho_1) \sin^2 \psi$	$g_1^*(\psi) = 0.7262 g(\varrho_1) \cos \psi (1 - 5 \sin^2 \psi)$
semi-diurnal waves	$g_2(\psi) = g(\varrho_1) \cos^2 \psi$	$g_2^*(\psi) = 2.5981 g(\varrho_1) \sin \psi \cos^2 \psi$
ter-diurnal waves		$g_3^*(\psi) = g(\varrho_1) \cos^3 \psi$

(3)

where

$$g_{0,1,2}(\varrho, \psi) = \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2} g_{0,1,2}(\psi); \quad g_{0,1,2,3}^*(\varrho, \psi) = \frac{\varrho^3}{\varrho_1^3} g_{0,1,2,3}^*(\psi)$$

and ψ - geocentric latitude of point of observation

ϱ - radius of the Earth at point of observation

ϱ_1 - mean radius of the Earth

$g(\varrho_1)$ can be expressed in one of the following forms :

$$g(\varrho_1) = \frac{3}{4} fM \frac{\varrho_1^2}{c^3} = \frac{3}{4} fE \frac{M}{E} \frac{\varrho_1^3}{c^3} = \frac{3}{4} \frac{fE}{a} \frac{M}{E} \frac{\varrho_1^2}{a^2} \sin^3 \pi \varrho \quad (4)$$

or

$$g(\varrho_1) = \frac{3}{4} \frac{M}{E} g_1 \frac{\sin^3 \pi \varrho}{a^3} \varrho_1^4 \quad (5)$$

where

f - gravitational constant

M & E - masses of Moon and Earth

c - mean distance between centres of Earth and Moon

$\pi \varrho$ - equatorial horizontal parallax of the Moon

ϱ_1 - radius of a sphere, having the same volume as the Earth

a - major semi-axis of the Earth ellipsoid

g_1 - gravitational acceleration, corresponding to the mean radius of the Earth and calculated according to the following formula

$$g_1 = \frac{fE}{\rho_1^2} \quad (6)$$

The choice of the magnitude of ρ_1^2 , as can be seen from (4) and (6), is not important for the second-order harmonics, because the values ρ_1 , are absent in $g(\varphi, \psi)$. Though ρ_1 , is present in the 3rd order harmonics, it can be determined with less accuracy because of the smallness of 3rd order terms.

The major semiaxis of the Earth is known with great accuracy, with a relative error of less than 0,003 %. Therefore we can accept Hayford's value $a = 6.378388.10^8$ cm (7)

The corresponding value of ρ_1 , is

$$\rho_1 = 6.371221.10^8 \text{ cm} \quad (8)$$

This corresponds to the value given by Bartels [2] The accuracy with which we can calculate $g(\rho_1)$ depends mainly on the accuracy with which we can determine the term fM or the combination of fE and $\frac{M}{E}$ and also on the accuracy of determination of the mean distance to the Moon or its equatorial horizontal parallax.

Of the three magnitudes : fE , $\frac{M}{E}$ and π the first is the one which can be determined more accurately. The calculation of this quantity is based on the knowledge of gravity at the equator and the major semi-axis of the Earth. Both these quantities are known with great accuracy. The uncertainty in the value of the Earth's ellipticity affects fE but very little.

According to Jeffreys [3] we have

$$fE = \frac{g_0 a^2}{1 + e - \frac{3}{2} m} \quad (9)$$

where

g_0 - gravity at the equator

$$g_0 = 978.049 \pm 0.001 \%$$

if the error of the Potsdam system is accounted as ± 10 mg1.

e - Earth's ellipticity

$$e = 0.003367 \pm 0.00001 \quad [3]$$

$$m = 0.003450 \pm 0.00001 \quad [3]$$

Thus the accuracy of determining fE is higher than 0,01 %.

Using the above quantities we get

$$fE = 3.9863 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \quad (9')$$

which is exactly what Jung [4] gives.

The ratio of the masses $\frac{M}{E}$ and the Moon's parallax $\pi \mathcal{C}$ are determined with less accuracy, though the latter quantity is known with greater accuracy than the ratio of the masses.

In calculating the value of γ (2) Doodson [1] takes

$$\pi \mathcal{C} = 3422''70$$

J. Bartels [2] using the Landolt-Börnstein tables [5] took

$$\pi \mathcal{C} = 3422''54$$

G. Clemence [6] received

$$\pi \mathcal{C} = 3422''45 \pm 0''03$$

The last quantity is also given in Allen's tables [7]. The difference in these determinations in $\sin^3 \pi \mathcal{C}$ is about 0,02 %. Taking the last value instead of the one used by Bartels we get

$$\sin \pi \mathcal{C} = 0.0165917$$

$$\sin^3 \pi \mathcal{C} = 4.56745 \cdot 10^{-6} \quad (10)$$

The ratio of the masses of the Moon and the Earth in expression (4) and (5) for $g(\vartheta_1)$ is determined with less accuracy than other multipliers. This is due to the inaccuracy in the Sun's parallax. The difference between

$\pi \odot = 8''790$ and $\pi \odot = 8''800$ is 0,11 % and the uncertainty in calculating $\frac{M}{E}$ lies between the same limits.

At the Paris International Conference on the Fundamental Astronomical Constants in 1950 Brouwer [8] quotes the following quantities for the ratio of masses

	E/M
1. Hinks (1901)	81.53
2. Spencer Jones (1931)	81.29
3. De Sitter-Brouwer (1938)	81.53
4. Jeffreys [9] (1942)	81.28
5. Delano [10] (1950)	81.22
6. Rabe [11] (1950)	81.37 ± 0.026

Rabe's determination, based on vast observations of Eros during 1926-1945 is, it seems, one of the most reliable. Rabe received the following quantity for the Sun's parallax :

$$\pi_{\odot} = 8''.79835 \pm 0''.00039$$

Radar determinations of the distance to Venus undertaken in 1958 at the Lincoln laboratory [12] (USA) gave

$$\pi_{\odot} = 8''.8022 \pm 0''.0001$$

The difference between the two last determinations and the internationally adapted value of $8''.800$ is less than 0.03 %.

The results in 2,4 and 5 are based on the Sun's parallax

$$\pi_{\odot} = 8''.790$$

But as at present the Sun's parallax is taken to be

$$\pi_{\odot} = 8''.800$$

the results in 2,4 and 5 should be increased by 0.094 [8, p 112] which makes them practically identical with Rabe's result.

We shall take

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{81.38} \quad (11)$$

that is 0.18 % more, than the quantity taken by Bartels ($1/81.53$).

Using (7), (8), (9) and (10) we receive

$$g(\vartheta_1) = 26248$$

This is 0.16 % more than the quantity taken by Bartels

$$g(\vartheta_1) = 26206$$

The theoretical amplitudes of tidal gravity variations for a rigid Earth at a point with a geocentric latitude ψ and height h above the spheroid for the wave abcdef, arising from the second-order harmonic V_2 is

$$H_{abcdef} = \frac{2 g_{0,1,2}(\vartheta + h_1 \psi)}{(\vartheta + h)} K_{abcdef}$$

and for waves, arising from the third-order harmonic V_3

$$H_{abcdef}^* = \frac{3 g_{0,1,2,3}^*(\vartheta + h_1 \psi)}{(\vartheta + h)} K_{abcdef}^*$$

Here $\vartheta = a(1 - e \sin^2 \psi)$

where ψ - geocentric latitude

and e - ellipticity, which is taken to be $\frac{1}{297.0} = 0.00337$

(the result will be practically the same if we take $e = \frac{1}{298.2}$)

For semi-diurnal waves, arising from V_2

$$H_{abcdef} = \frac{2g(\vartheta_1)(\vartheta + h)}{\vartheta_1^2} \cos^2 \psi K_{abcdef}$$

or at spheroid level ($h = 0$)

$$H_{abcdef} = \frac{2g(\vartheta_1)a}{\vartheta_1^2} k_{abcdef} (1 - e \sin^2 \psi) \cos^2 \psi = \phi_{3d} K_{abcdef}$$

Thus : for example, for the wave M_2 (255.555)

$$a = 2; \quad b = c = d = e = f = 0$$

$$K_{255.555} = 0.90812$$

whence

$$H_{255.555} = 74.91 (1 - e \sin^2 \psi) \cos^2 \psi \text{ microgals}$$

The equatorial constant is

$$C = 2g(\vartheta_1) \frac{a}{\vartheta_1^2} = 82.49^* \text{ microgal} \quad (12)$$

For diurnal waves arising from V_2

$$H_{\text{abcdef}} = 2g(\vartheta_1) \frac{a}{\vartheta_1^2} K_{\text{abcdef}} (1 - e \sin^2 \psi) \sin^2 \psi$$

Waves arising from the third-order harmonic V_3 have much smaller amplitudes than waves arising from V_2 . Thus, the largest of the waves from V_3 - the ter-diurnal wave 355.555 and the semi-diurnal wave 245.555 (in the group V_2) have coefficients K comprising 0.6 % and 1.1 % of the K_{M_2} . So that for waves arising from V_3 we can take $\vartheta = \vartheta_1 = a$

It may be noted, that at the present time the calculation of the theoretical amplitudes with an accuracy higher than 0.1 % is hardly necessary. For even if the accuracy of observations (H_{obs}) was higher than 0.1 % (a level not yet reached) when computing H_{theor} in expression :

$$\delta = \frac{H_{\text{obs}}}{H_{\text{theor}}}$$
we still have to use the theory of elastic deformations of a spherical Earth, not taking into account the Earth's ellipticity.

Therefore the next step is to account for the Earth's ellipticity in theoretical models of tidal deformations of the Earth.

The theoretical amplitudes of tidal waves M_2 , s_2 , N_2 , O_1 , K_1 , P_1 and Q_1 are given in table 1, calculated for a rigid Earth at sea level for geodetic (geographic) latitudes from 35° to 60°

The new geodetic coefficients Φ_{sd} for semi-diurnal and Φ_d for diurnal waves are given in table 2. There

$$\Phi_{sd}(\vartheta) = 2g(\vartheta_1) \frac{a}{\vartheta_1^2} (1 - e \sin^2 \psi) \cos^2 \psi \quad (13)$$

* The difference from the value received by Bartels is determined by the difference in $g(\vartheta_1)$ and replacement of ϑ by $a(1 - e \sin^2 \psi)$

and

$$\Phi d(\psi) = 2g(\rho_1) \frac{a}{\rho_1^2} (1 - e \sin^2 \psi) \sin 2\psi \quad (13')$$

The geocentric latitude ψ is determined from a precise equation

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi - (2e - e^2) \operatorname{tg} \varphi \quad (14)$$

The amplitude of each wave arising from the second-order harmonic V_2 for any given geodetic latitude is calculated according to the following formula :

$$H_{abcdef} = \Phi(\psi) \cdot K_{abcdef} \quad (15)$$

where the values of $\Phi(\varphi)$ are taken from the 3rd and 4th columns of table 2.

The ratio of the solar and lunar tides, that is

$$\Gamma = \frac{S}{M} \frac{\sin^3 \pi_{\odot}}{\sin \pi_{\ominus}}$$

are now different due to the changes in the values S , M , $\pi_{\odot}$ and $\pi_{\ominus}$. And therefore Doodson's [1] amplitude coefficients K for solar tides should be slightly changed.

Doodson [1] takes

$$\pi_{\ominus} = 3422''70$$

$$\frac{E}{M} = 81.53 \pm 0.047$$

and

$$\frac{S}{E} \pi_{\odot}^3 = 2''.26428.10^8$$

and receives

$$\Gamma = \Gamma_D = 0.46040$$

Bartels [2], taking the constants used by Horn, gets

$$\Gamma = \Gamma_B = 0.46051 \pm 0.00150$$

Amplitude coefficients K of the solar waves should have been accordingly increased by 0.024 %, so that, for example, for the wave s_2 coefficient K should have been

$$K_{s_2} = 0.42296$$

instead of Doodson's

$$K s_2 = 0.42286$$

But in view of the big probable error in Γ Bartels did not change Doodson's coefficients.

The value of Γ could be calculated as follows

$$\Gamma = \frac{fs}{fE} \sin^3 \pi \theta \frac{E}{M} \frac{1}{\sin^3 \pi \epsilon} \quad (16)$$

From Kepler's third law

$$f(s + E + M) = \frac{4\pi^2 c^3 \odot}{T^2} \quad (17)$$

where $c \odot$ is the mean distance from the Earth to the Sun, and T - the number of mean solar seconds in a sidereal year.

(17) can be written thus

$$\frac{fs}{fE} \sin^3 \pi \theta = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 fE} - (1 + \frac{M}{E}) \sin^3 \pi \theta$$

whence

$$\Gamma = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 fE} - (1 + \frac{M}{E}) \sin^3 \pi \theta \right] \frac{E}{M} \cdot \frac{1}{\sin^3 \pi \epsilon} \quad (18)$$

The second term in the square brackets is very small and therefore the inaccuracy in $\pi \theta$ and $\frac{M}{E}$ is not important when this term is calculated.

The relative error $\eta(\Gamma)$ in the determination of Γ can be evaluated by the following formula :

$$\eta(\Gamma) = \left[\eta^2(a) + 4\eta^2(T) + \eta^2(fE) + \eta^2\left(\frac{E}{M}\right) + 9\eta^2(\pi \epsilon) \right] \frac{1}{2} \quad (19)$$

where $\eta(a), \eta(T), \eta(fE)$ etc. are the relative errors of the corresponding constants.

The error $\eta(\Gamma)$, thus evaluated, is slightly larger than in reality, because in (19) we considered all the arguments to be independent.

The relative errors of all the terms, considered in (19) can be approximately evaluated as follows

$\eta(a) = \pm 0.0019 \%$	$9\eta^2(a) = 3.2 \times 10^{-10}$
$\eta(fE) = \pm 0.0032 \%$	$\eta^2(fE) = 10.2 \times 10^{-10}$
$\eta(T) < \pm 0.0009 \%$	$4\eta^2(T) < 0.1 \times 10^{-10}$
$\eta\left(\frac{E}{M}\right) \approx \pm 0.037 \%$	$\eta^2\left(\frac{E}{M}\right) \approx 1370 \times 10^{-10}$
$\eta(\pi\alpha) \approx \pm 0.0026 \%$	$9\eta^2(\pi\alpha) \approx 60.9 \times 10^{-10}$
	$\Sigma \quad 1444 \times 10^{-10}$

whence the relative error of Γ is

$$\eta(\Gamma) = \pm 0.038 \% \quad (20)$$

It is taken here that $\xi_a = \pm 120$ m

The error $\eta(fE)$ was determined using formula (9), where it was taken that $\xi_g = \pm 10$ mgl., the relative error of the denominator was taken to be $\pm 1.0 \times 10^{-5}$. And an error $\eta(Oe^2) = \pm 1.0 \times 10^{-5}$ was added to account for terms of the order e^2 , which were left out.

The error in the duration of the sidereal year is determined only by the accuracy of calculation.

The error of the ratio $\frac{E}{M}$ was taken as $\xi\left(\frac{E}{M}\right) = \pm 0.03$, that is slightly more, than Rabe's estimate.

The error in determining the Moon's parallax was taken 3 times as much as that received by Clemens [6] and equal to the difference between the value taken by Bartels and the one received by Clemens.

$$\xi(\pi\alpha) = \pm 0''09$$

Taking

$$\begin{aligned} a &= 6.378388 \times 10^8 \text{ cm} \\ T &= 3.155815 \times 10^7 \text{ sec} \\ fE &= 3.986285 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \\ \frac{E}{M} &= 81.380 \\ \pi\alpha &= 3422''45 \\ \pi\omega &= 8''800 \end{aligned}$$

we receive

$$\Gamma = 0.45977 \pm 0.00017$$

that is 0.137 % less than the value taken by Doodson

$$\Gamma_D = 0.46040$$

Therefore the values of amplitudes of all solar waves should be decreased by 0.137 %.

The following values of coefficients K are taken in table 1

wave	$K \times 10^5$ (new)	$K_D \times 10^5$ (Doodson)	Comments
M_2	90812	90812	lunar
S_2	42300	42358	solar and a small lunar
N_2	17387	17387	lunar
O_1	37689	37689	lunar
K_1	53027	53050	solar and lunar
P_1	17560	17584	solar and a small lunar
Q_1	7216	7216	lunar

T a b l e 1.

Theoretical amplitudes of tidal waves

φ°	M_2	S_2	N_2	O_1	K_1	P_1	Q_1
35	50.43	23.49	9.656	29.11	40.96	13.56	5.574
36	49.20	22.92	9.420	29.47	41.46	13.73	5.642
37	47.95	22.34	9.181	29.79	41.91	13.88	5.704
38	46.69	21.75	8.940	30.08	42.32	14.01	5.759
39.	45.42	21.16	8.697	30.33	42.67	14.13	5.806
40	44.14	20.56	8.452	30.54	42.97	14.23	5.847
41.	42.85	19.96	8.205	30.71	43.21	14.31	5.881
42	41.56	19.35	7.957	30.85	43.40	14.37	5.907
43	40.26	18.75	7.707	30.95	43.54	14.42	5.926
44	38.95	18.15	7.457	31.01	43.63	14.45	5.938
45	37.64	17.54	7.207	31.03	43.67	14.46	5.943
46	36.34	16.93	6.957	31.02	43.65	14.45	5.940
47	35.03	16.32	6.707	30.97	43.58	14.43	5.930
48	33.73	15.71	6.458	30.88	43.45	14.39	5.913
49	32.43	15.10	6.209	30.75	43.27	14.33	5.889
50	31.13	14.50	5.961	30.59	43.04	14.25	5.858
51	29.85	13.90	5.715	30.39	42.76	14.16	5.819
52	28.57	13.31	5.470	30.15	42.42	14.05	5.773
53	27.31	12.72	5.228	29.88	42.03	13.92	5.720
54	26.05	12.13	4.988	29.57	41.59	13.77	5.660
55	24.81	11.55	4.751	29.22	41.10	13.61	5.593
56	23.59	10.98	4.516	28.83	40.56	13.43	5.520
57	22.38	10.42	4.285	28.41	39.97	13.23	5.440
58	21.19	9.87	4.057	27.96	39.33	13.02	5.353
59	20.02	9.33	3.833	27.47	38.64	12.80	5.259
60	18.87	8.79	3.613	26.94	37.91	12.56	5.159

T a b l e 2.

Geod. lat.	Geocentric lat.			Geodetic factors	Geod. lat.	Geocentric lat			Geodetic factors
ψ°	ψ°	'	"	ϕ_{sd}	ψ°	ψ°	'	"	ϕ_{sd} ϕ d
35	34	49	07	55 535 77 250	48	47	48	48	37 139 81 942
36	35	48	59	54 178 78 197	49	48	48	31	35 709 81 606
37	36	48	52	52 805 79 049	50	49	48	35	34 285 81 170
38	37	48	46	51 418 79 806	51	50	48	39	32 869 80 635
39	38	48	40	50 018 80 466	52	51	48	44	31 463 80 002
40	39	48	36	48 608 81 028	53	52	48	51	30 069 79 270
41	40	48	32	47 189 81 491	54	53	48	58	28 688 78 441
42	41	48	28	45 762 81 855	55	54	49	06	27 323 77 517
43	42	48	26	44 329 82 119	56	55	49	15	25 974 76 498
44	43	48	25	42 892 82 284	57	56	49	24	24 643 75 385
45	44	48	24	41 453 82 349	58	57	49	24	23 333 74 180
46	45	48	25	40 013 82 313	59	58	49	45	22 044 72 884
47	46	48	26	38 574 82 178	60	59	49	56	20 779 71 490

R e f e r e n c e s

1. A.T.DOODSON - The harmonic development of the tide-generating Potential(Proceedings RSA vol 100)
2. J.BARTELS - Handbuch der Physik, BD48, Gezeitenkrafte, 1948
3. H.JEFFREYS - The Earth, 4th edition p.137, 1959
4. K.JUNG - Fiat Review, Geophysics, p. 7, 1948
5. LANDOLT-BORNSTEIN - 6 auf. Bd3, Astronomy und Geophysik, J.Bartels & W.Horn, Gezeitenkrafte(Berlin, Springer, 1952)
6. G.M.CLEMENCE - Astronom. Journ. 53.169.1948.
7. C.W.ALLEN - Astrophysical Quantities.(Univ. London. The Altone Press, 1955)
8. M.BROUWER - Colloques internationaux du CNRS XXV, Constantes fondamentales de l'Astronomie; p. 111; Paris, 1950
9. H.JEFFREYS - The Earth, 3th edition, p.44, 1954
10. E.DELANO - Astron. Journ. 55, 132, 1950
11. E.RABE - Astron. Journ. 55, 112, 1950
12. P.E.GREEN,
G.H.PETTENGILL - Sky and Telescope, v 9.VII. 1960.